

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ МОДЕЛИ ЛОГИСТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ИЗУЧЕНИЯ ДИНАМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ В ПСИХОЛОГИИ И НАУКАХ О ЖИЗНИ

О.В. Митина

Рассматриваются принципы нелинейно-динамической теории для анализа временных рядов. Описывается модель логистического уравнения и возможности ее применения в конкретных исследованиях. Несмотря на то, что данная модель хорошо изучена в теоретическом плане при необходимости использования ее для анализа реальных данных исследователь сталкивается с различными проблемами. Предлагаются алгоритмы построения и использования модели. Верификация описываемого подхода проводилась на психологических данных, полученных в результате мониторинга изменений эмоциональной сферы человека, а также биологических данных динамики восстановления клеток растений после стрессового воздействия химическими веществами.

The concepts of nonlinear dynamic theory for analysis of time series are considered. A logistic map and possibility of its application for case studies are described. This model is thoroughly studied in theory, however, if researchers need to use it for analyzing the real data, they are faced with different problems. The algorithms of developing and using the model are offered. The approach in question was verified by using the psychological data resulted from monitoring the changed human emotional states as well as the biological data obtained from the study of plant cell dynamic recovering after stress produced by the chemicals.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА

Устойчивое равновесие, хаотический процесс, бифуркационная диаграмма, аттрактор, логистическое уравнение.

1. ВВЕДЕНИЕ

Говоря о различных методах, используемых в прикладных количественных отраслях, связанных с проведением и анализом измерений, (это касается и биологии, и психологии, и других гуманитарных и социальных наук) можно выделить два подхода. С одной стороны – это прикладная статистика, базирующаяся на строгих критериях, обеспокоенная в первую очередь доказательством достоверности и надежности результатов, а с другой стороны, системная динамика, главный акцент, делающая на использовании нелинейных моделей. Поскольку линейные зависимости в реальной жизни встречаются крайне редко, да и то на ограниченных пространственных или временных интервалах, возникает острая необходимость перенести достоинства «линейной» статистики (надежность, достоверность) на более реалистичную теорию нелинейных динамических систем.

Очень часто для того чтобы смоделировать (описать, а потом исследовать) сложный феномен или процесс будь то живая или неживая природа, отдельный человек, социум достаточно бывает использовать несложные с точки зрения математики уравнения. Еще Пуанкаре

установил, что три простых тела взаимодействуя между собой на основании строго определенных уравнений порождают чрезвычайно сложную систему, предсказать однозначно поведение которой невозможно. Дело тут не в отсутствии каких-то знаний или несовершенстве вычислительной техники, а в принципиальной математической неопределенности [5].

Желание возможно более точно прогнозировать поведение, результаты функционирования сложных систем, имеющих самую разную природу, способствует возникновению и развитию объясняющих теорий, проведению исследований. Биологи, социальные исследователи заимствуют идеи и методы из наук о неживой природе: физики, химии. Было доказано, что детерминированность и предсказуемость не одно и то же даже в простой системе, которую можно описать тремя дифференциальными уравнениями. Если в такой абсолютно детерминированной системе между переменными существует обратная связь и присутствуют нелинейные компоненты, то ее поведение может становиться непредсказуемым (хаотичным) [16, 19].

Однако в течение длительного периода в биологии и социальных науках непредсказуемые изменения характеристик интерпретировались как стохастический «шум» или случайная экспериментальная ошибка. Но интерес биологов, психологов, социальных исследователей (всех, кого можно назвать «не-физиками») к использованию дифференциальных и разностных уравнений для описания популяционной, личностной динамики, социальных процессов, математическим исследованиям возможных паттернов поведения в этих областях, описываемых этими уравнениями в 70-ых годах 20-го века также привел к изменениям в трактовке непредсказуемости [18,10].

1.2. Принципы нелинейно-динамической теории для анализа временных рядов

Согласно теории нелинейных динамических систем, сложная система обладает свойствами, не присущими составляющим ее компонентам, поэтому поведение такой системы не может быть сведено к поведению отдельных ее частей [37]. Так, например, системные психологические конструкты высокого порядка: воля, саморегуляция, доступ к себе и т.п., – не могут быть разложены на более простые составляющие [23, 26].

Для построения моделей используются дифференциальные и разностные уравнения: первые – в предположении непрерывности процесса, вторые – в случае, когда процесс полагается дискретным. Один из наиболее популярных примеров первого типа – модель хищник-жертва (или Лотка-Вольтерра, см Митина 2002). Изначально использовалась для описания изменения численности особей рыб различного вида, живущих в одном водоеме. Однако эта модель оказалась продуктивной для описания психологических и социальных процессов: взаимодействия пар мать-ребенок в случаях невротических расстройств у матери, динамики мотивационной сферы (сосуществования мотивов базисного и более высокого уровней) [4], взаимодействия экономических систем стран разного уровня развития [12] и пр.

В то же время было показано, что многие динамические процессы в психологии на самых разных уровнях регулирования (эмоциональном, мотивационном, поведенческом, деятельностном) имеют определенный дискретный шаг изменения. В зависимости от природы процесса – такой единицей может быть год, день, даже секунда. Ситуация (состояние системы или любой ее части) в момент времени n зависит от состояния этой системы в предыдущие моменты времени. Уравнения, используемые в этом случае, называются разностными. Семейство простейших разностных уравнений имеет вид

$$X_{n+1} = F(X_n), \quad (1)$$

где $\{X_n\}$, $n = 0, 1, 2, \dots$ – последовательные состояния системы, F – функция от одной переменной.

Проведенные в 70-х годах прошлого века исследования математических свойств этих отображений показали, что даже в случае самых простых функций F динамика, описываемая с использованием этой функции, может иметь очень сложную, даже непредсказуемую структуру [11, 28, 29, 30].

Выявленные свойства одномерных разностных уравнений и разнообразие моделей, которые можно построить с помощью этих уравнений с одной стороны, и математическая простота, с другой, приводят к их чрезвычайной популярности среди исследователей в самых разных областях науки (биологов, психологов, социальных исследователей, экономистов) [1,2, 21, 31].

Изучить поведение динамической системы – значит уметь сказать, что случится через достаточно длительный промежуток времени при заданных значениях управляющих параметров и начальных условиях, т.е. описать множество финальных состояний системы. Финальные множества – набор тех и только тех состояний, в которых система пребывает, начиная с определенного момента времени. Более строго:

Для функции $F: J \rightarrow J$ и любой точки $x \in J$ будем обозначать

$F^0(x) \equiv x$ – тождественная функция, $F^{n+1}(x) = F^n(F(x))$, $n = 0, 1, \dots$

Введем следующее определение:

p является периодической точкой с периодом n если $p \in J$, $p = F^n(p)$, и $p \neq F^k(p)$, для $1 \leq k < n$. Множество всех точек $\{F^k(p)\}$, $k = 0, 1, \dots, n-1$ называется орбитой точки p .

Финальное множество состоит из всех таких периодических точек и их орбит [15, 30, 38]. Придя в одну из точек финального множества (точнее в состояние, которому соответствует эта точка) система продолжает оставаться на ее орбите бесконечно долго при отсутствии внешних воздействий. Однако в зависимости от того, какова должна быть сила внешнего воздействия, способного вывести систему из состояния равновесия, различают равновесие неустойчивое – достаточно минимального внешнего воздействия, чтобы система это равновесное состояние покинула, и устойчивое – система подавляет небольшие флуктуации и остается в том же равновесном состоянии [7, 18, 38].

Периодическая точка \hat{x} с периодом 1 является фиксированной точкой (устойчивым состоянием). В этой ситуации выполняется условие: $\dot{x} = F(\hat{x})$

Поскольку изначально теория нелинейных динамических систем развивалась и вырабатывала свой понятийный аппарат исходя из нужд физики, очень многие определения наглядно могут быть проиллюстрированы известными примерами из школьного курса. Так, например, на рис. 1 изображены два шарика, находящиеся в состоянии равновесия. Однако если в первом случае (а) малейшее воздействие приводит к тому, что шарик скатывается с горки, то во втором случае (б) при не очень сильных воздействиях и достаточно глубокой лунке, шарик все равно будет скатываться на дно. Заметим, однако, что какова бы ни была глубина лунки, всегда можно толкнуть шарик так сильно, что он выскочит за ее пределы. Т.е. устойчивое равновесие очень часто оказывается устойчивым к внешним воздействиям до определенного предела.



а) Состояние неустойчивого равновесия б) Состояние устойчивого равновесия

Рис. 1. Шарик на поверхности в состоянии равновесия

Стабильность системы или процесса определяется паттернами финального поведения или финальным множеством. Если состояние равновесия устойчиво, то финальное множество называют аттрактором. В соответствии с количеством точек, входящих в финальное множество говорят об одноточечном аттракторе (финальное множество состоит из единственной точки), периодическом аттракторе (финальное множество состоит из конечного или счетного набора точек, представляющих совокупность орбит). Если множество точек в аттракторе не-счетно, такой аттрактор называется хаотическим или странным [8, 18, 38]. Это означает, что начиная с определенного момента времени, система достигает финального множества (аттрактора), и каждый раз находится на одном из его элементов, однако принципиально невозможно сказать, где именно. Описать финальное множество – значит установить, является ли оно устойчивым (аттрактором) и сколько в нем элементов.

Пусть x_0 – периодическая точка с периодом n и множество $\{x_k = F^k(x_0)\}$ $k = 0, 1, \dots, n-1$ ее орбита. Если

$$\left| \prod_{k=0}^{n-1} \frac{dF^k(x_0)}{dx} \right| < 1 \quad (2)$$

орбита является аттрактором. Если

$$\left| \prod_{k=0}^{n-1} \frac{dF^k(x_0)}{dx} \right| > 1 \quad (3)$$

орбита не стабильна [27].

Если существует единственная неподвижная точка (равновесие) то условие устойчивости приобретает вид

$$\left| \frac{dF(\hat{x})}{dx} \right| < 1 \quad (2a)$$

Таким образом, чтобы установить стабильным или нестабильным является финальное множество системы, достаточно вычислить производные функции F во всех его точках и определить, какое из неравенств 2 или 3 выполняется.

Особый интерес при исследовании финального множества представляет характер его изменений в связи с изменениями параметров функции F . Если число точек в финальном множестве остается прежним, а изменяются лишь их значения, то говорят о количественных изменениях. Более глубокие (качественные) изменения затрагивают структуру финального множества: число точек может увеличиться или уменьшиться, из конечного превратиться в бесконечное или наоборот. Параметры функции F , изменения которых могут привести к таким глубоким изменениям финального множества, называются управляющими параметрами. Значения управляющих параметров, при достижении которых происходит структурное изменение финального множества, называется точками бифуркации. График, отражающий зависимость значений финального множества от значений управляющего параметра, называется бифуркационной диаграммой. Построить такой график для каждого управляющего параметра сложно и требуется глубокая аналитическая и вычислительная работы. Эти трудности и объясняют тот факт, что для большинства функций построены только качественные бифуркационные диаграммы (схемы зависимостей значений финального множества от значений управляющего параметра), а не точные количествен-

ные графики. А ведь только на основе последнего возможен полноценный анализ паттернов финального поведения системы.

Наиболее известным, хорошо изученным примером одномерного разностного уравнения является логистическое отображение, в стандартном виде имеющее вид:

$$X_{n+1} = F(X_n) = \lambda X_n(1 - X_n), \quad (4)$$

- X_n – сомножитель, отражающий возможную позитивную обратную связь;
- $(1 - X_n)$ – сомножитель, отражающий возможную негативную обратную связь;
- λ – управляющий параметр;
- X_0 – начальное значение.

1.3. Свойства логистического отображения

Логистическое отображение – простейшая модель в теории самоорганизационных динамических систем, учитывающая, что влияние предыдущего состояния (характеризуемого величиной какой-то характеристики, параметра) на последующее является амбивалентным (с одной стороны стимулирующим, с другой – подавляющим). В результате мы имеем возможность отказаться от однонаправленной логики классической методологии и исследовать нелинейное двунаправленное влияние.

Функция полностью изучена, ее бифуркационная диаграмма в точности построена. Величина измеряемой динамической характеристики X_n в момент n (номер измерения, шаг и т.п.) определяется относительно к максимально возможной величине этой характеристики и лежит в диапазоне от 0 до 1. Параметр λ также лежит в ограниченном диапазоне от 0 до 4. Это ограничение необходимо для того, чтобы уравнение всегда имело смысл. Зная λ , для любого начального условия X_0 пользуясь формулой (4), можно вычислить последовательность значений $X_1, X_2, X_3 \dots$. Например для $X_0 = 0.62$ и $\lambda = 3.1$, вычисляемая последовательность будет равна 0.620000, 0.730360, 0.610496, 0.737151, 0.600654, 0.743593...0.764568, 0.558015, 0.764568, 0.558014... Мы видим, что с определенного момента два числа начинают сменять одно другое и это происходит сколь угодно долго. Таким образом, можно говорить о наличии двухточечного аттрактора.

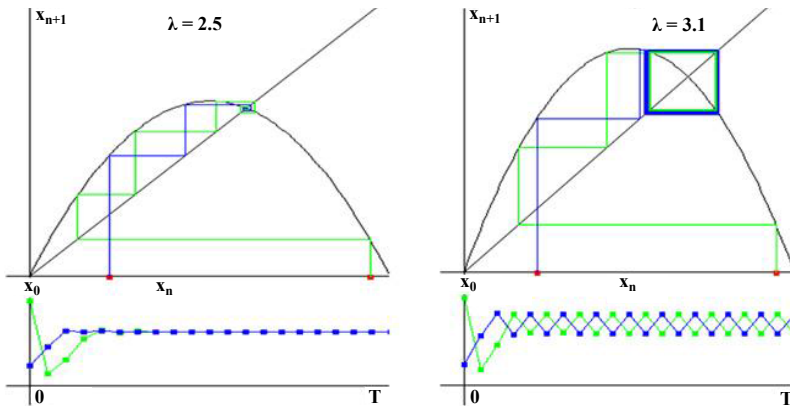
Другой способ определения финального множества – графический. Он представлен на рис. 2. Верхние графики на каждом из рисунков а–в представляют логистическое отображение в фазовом пространстве в координатах X_n и X_{n+1} , отражают зависимость последующего состояния от предыдущего. Для того чтобы найти финальное множество для фиксированной начальной точки помимо параболы на графике нужно провести биссектрису первого координатного угла, отметить начальную точку X_0 на оси абсцисс и последовательно выполнять следующие построения:

- из точки X_0 восстановить перпендикуляр до пересечения с параболой. Ордината точки пересечения равна $X_1 = \lambda X_0(1 - X_0)$;
- из точки пересечения провести прямую, параллельную оси абсцисс до пересечения с биссектрисой. Абсцисса точки пересечения равна X_1 ;
- из точки пересечения провести прямую, параллельную оси ординат до пересечения с параболой. Ордината точки пересечения равна $X_2 = \lambda X_1(1 - X_1)$;
- из точки пересечения провести прямую, параллельную оси абсцисс до пересечения с биссектрисой. Абсцисса точки пересечения равна X_2 и т.д.

В результате последовательность либо сходится к одной точке (рис. 2а), либо к конечной ломаной линии (на рис. 2б это квадрат), либо этот процесс никогда не заканчивается и

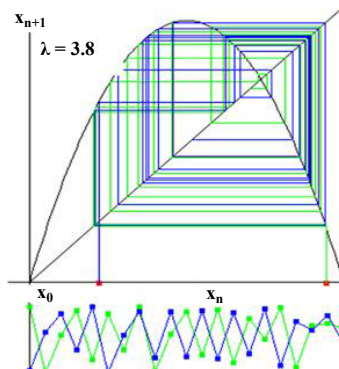
ломаная линия последовательно заполняет все пространство (рис. 2в). Нижние графики на рисунках – временная развертка. По оси абсцисс откладывается время, а по оси ординат – состояния системы в каждый момент времени. Если линия становится параллельной оси абсцисс – значит процесс достиг стационарной точки. На рис. 2а эта точка достигается, на рис. 2б процесс заканчивается на двухточечной орбите, на рис. 2в процесс не выходит на орбиту вообще. При этом не имеет значения, начиная с какой точки X_0 построения выполняются. На рисунке 2 в каждом случае представлено две последовательности, начинающиеся в разных точках, а финальные множества в каждом случае оказываются одинаковыми.

Таким образом логистическое отображение задает детерминированную последовательность, но при разных значениях λ структура финального множества меняется существенным образом (и зависит исключительно от величины l).



а) Одноточечный аттрактор

б) Аттрактор периода 2



в) Хаотический аттрактор

Рис. 2. Паттерны сходимости логистических последовательностей при различных управляющих параметрах.

Однако можно подобных вычислений или построений не проводить, а установить устойчивость аналитическим путем, исследовав производную в стационарных точках. Эти точки являются решениями уравнения

$$x = \lambda x(1-x) \quad (5)$$

Их два:

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 1 - \frac{1}{\lambda} \end{cases} \quad (6)$$

При $\lambda < 1$, второе решение лежит вне установленной ранее области определения $[0; 1]$, а потому не имеет смысла. Таким образом, при $0 < \lambda < 1$ существует только одна точка равновесия, а при $\lambda > 1$ равновесных точек две. Геометрически это означает, что в первом случае на указанном интервале парабола пересекает биссектрису угла только в точке 0.

Согласно (2а) финальное множество является одноточечным аттрактором, когда производная функции, задающей отображение по модулю не превосходит 1. Поэтому

$$\left| \frac{dF}{dx} \right| = |\lambda(1-2x)| < 1 \quad (7)$$

Соответственно

$$\begin{aligned} \left. \frac{dF}{dx} \right|_{x=0} &= \lambda, \text{ при } 0 < \lambda < 1, \text{ эта точка устойчивая} \\ \left. \frac{dF}{dx} \right|_{x=1-1/\lambda} &= 2 - \lambda, \text{ при } 1 < \lambda < 3, \text{ эта точка устойчивая} \end{aligned}$$

Таким образом только при $\lambda > 1$ логистическое отображение имеет ненулевую устойчивую неподвижную точку.

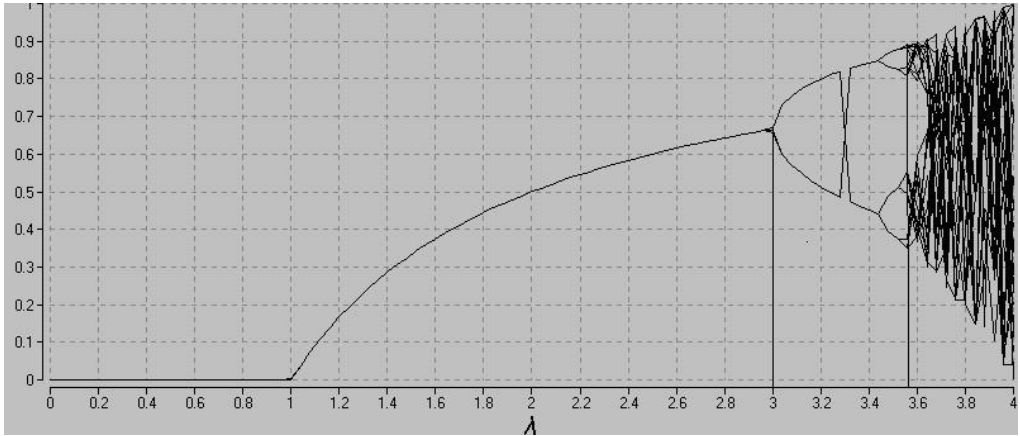
На рис. 3 представлена бифуркационная диаграмма логистического отображения. Ось абсцисс соответствует управляющему параметру λ , а по оси ординат откладываются значения точек финального множества во временной серии, порожденной логистическим уравнением при данном λ . На рис. 3а представлен весь график целиком.

После того как λ преодолет рубеж равный 3 число устойчивых финальных точек начинает последовательно удваиваться. При $\lambda=3$ у финального множества возникает вторая точка, затем их становится 4, 8 ... и т.д. На рис. 3б этот процесс представлен более наглядно. При этом выполняется следующее соотношение

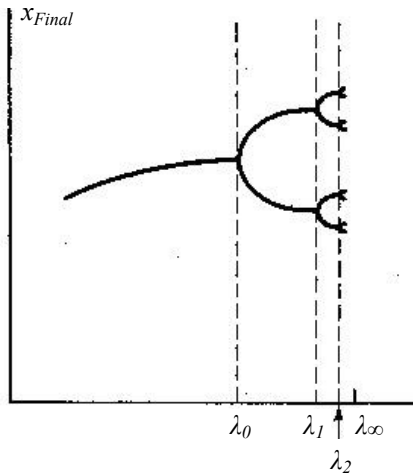
$$(\lambda_n - \lambda_{n-1}) / (\lambda_{n+1} - \lambda_n) \rightarrow 4.669201... \text{ при } n \rightarrow \infty$$

λ_n – n -ая бифуркационная точка. Это соотношение было установлено Л. Фейгенбаумом [15], (см. также [35]).

Процесс удвоения периода происходит до тех пор пока лямбда не достигает значения равного $\lambda_\infty = 3,569999$. Именно при этом значении управляющего параметра финальное множество становится бесконечным (странным хаотическим аттрактором). Т.е. при $\lambda > 3.57$ не возможно сказать, где находится система в каждый конкретный момент времени.



а) Общий вид



б) Схематический фрагмент диаграммы

Рис. 3. Бифуркационная диаграмма логистического отображения

В дополнении к бифуркационной диаграмме в таблице 1 более точно указываются наиболее важные с точки зрения изменения структуры финального множества, а значит качественного характера временного ряда значения λ .

Таблица 1. Описание наиболее важных значений управляющего параметра λ [14, 28]

λ	Описание
1 1,99 1,999	появление устойчивой точки
2 2,001 2,01	суперстабильная устойчивая точка
3 3,236067977... 3,449489743... 3,5699456720 3,56994571869 3,828427125... 3,9	начало цикла периода 2 суперстабильный цикл периода 2 ($1 + \sqrt{5}$) суперстабильный цикл периода 4 ($1 + \sqrt{6}$) начало хаоса [20] начало хаоса [13] начало цикла периода 3 ($1 + \sqrt{8}$) возвращение к хаотическому режиму
4	конец хаотического режима

Несмотря на простоту логистического отображения оно позволяет моделировать очень сложные процессы. Изначально эта модель использовалась для описания популяционной динамики, в дальнейшем нашла широкое применение в экономике, политологии и других социальных науках. Однако в течение многих лет модели, для описания процессов создавались на основе теоретических идей, исходя из которых устанавливался закон связи значений динамической переменной, полученных в различные моменты времени. Например, заключения, что численность популяции в момент времени $n+1$ есть функция от численности популяции в момент времени n было сделано исследователями на основе теоретических рассуждений о законах существования популяции [17, 9]. В настоящее время можно говорить о более общем использовании таких функций не только в случае, когда взаимосвязи между измерениями, сделанными в последовательные моменты времени, выводятся теоретически, но и когда модель строится на основании эмпирических данных, полученных в экспериментальном лонгитюдном исследовании, а затем экстраполируется на весь временной период и на всю популяцию в целом [2, 3, 36]. В психологии эта функция используется для исследования мотивации [25, 26], динамики эмоциональной сферы [24, 33], в экономике [22], в биологии для изучения динамики популяций, на клеточном уровне для анализа процессов восстановления клеток после стрессового воздействия.

1.4. Приведение квадратичной параболы общего вида к стандартному виду логистического отображения

В ситуации когда модель логистического отображения используется для описания и анализа реального эмпирического временного ряда, задачей первого этапа является выбор функции в наибольшей степени согласованной с эмпирическими данными, с тем, чтобы потом

уже полученную функцию рассматривать в качестве графика изучаемого процесса, выводы о его свойствах делать на основе свойств аппроксимирующей функции.

Заметим, что использование квадратичной функции общего вида

$$x_{n+1} = ax_n^2 + bx_n + c, \quad (8)$$

содержащей три варьируемых параметра в сравнении со стандартным логистическим отображением с единственным параметром, позволяет подобрать согласующуюся с экспериментальными данными функцию из более широкого класса, что дает существенно лучший показатель согласованности. Но квадратичную функцию общего вида всегда можно привести к виду логистического отображения используя линейное преобразование

$$\tilde{x} = ux + v \quad (9)$$

не меняющее свойства финального множества, т.к. финальное множество объясняется свойствами производной функции, которая в свою очередь никак не зависит от линейных преобразований.

В этой новой системе координат парабола общего вида имеет вид

$$\tilde{x}_{n+1} = \lambda \tilde{x}_n (1 - \tilde{x}_n) \quad (10)$$

Т.к. линейное преобразование не меняет динамических свойств (стабильная система остается стабильной, нестабильная – нестабильной, число финальных точек также не изменяется) мы можем изучать квадратичную параболу в новой координатной системе, записанной в виде (10) и эти свойства будут теми же, что и у параболы написанной в (4). Это значит, что в случае $1 < \lambda < 3$ будет только одна стабильная точка, в интервале от 3 до 3.57 происходит удвоение периода и при λ от 3.57 до 4 финальное множество становится хаотическим аттрактором. Коэффициенты линейного преобразования u и v , а так же управляющий параметр λ для стандартного вида однозначно вычисляются на основе коэффициентов параболы общего вида a, b, c согласно уравнению (10).

Проведем замену в правой и левой части уравнения 10 на основании преобразования (9), имеем

$$ux_{n+1} + v = \lambda(ux_n + v)(1 - (ux_n + v)) \quad (10a)$$

Преобразование правой части уравнения (10a) дает

$$\lambda(ux_n + v)(1 - (ux_n + v)) = \lambda(-(ux_n)^2 + x_n(u - 2uv) + (v - v^2))$$

Подстановка этого выражения в (10a) и дальнейшее преобразование дают:

$$x_{n+1} = -\lambda ux_n^2 + \lambda x_n \frac{u - 2uv}{u} + \frac{\lambda(v - v^2)}{u} - \frac{v}{u} = -\lambda ux_n^2 + \lambda(1 - 2v)x_n + \frac{\lambda v - \lambda v^2 - v}{u} \quad (10б)$$

Уравнения 4 и 10б должны быть идентичны. Это значит, что коэффициенты в каждом члене должны быть одинаковы. Следуя этому правилу, имеем:

$$\begin{cases} a = -\lambda u \\ b = \lambda(1 - 2v) \\ c = \frac{\lambda v - \lambda v^2 - v}{u} \end{cases} \quad (10в)$$

Полагая a, b, c известными, мы можем выразить параметры линейного преобразования (9) u и v , а также управляющий параметр λ , задающий стандартную форму логистического отображения в новой системе координат (9)).

$$\left\{ \begin{array}{l} u = -\frac{a}{\lambda} \\ v = \frac{\lambda - b}{2\lambda} \\ c = \left(\lambda \left(\frac{\lambda - b}{2\lambda} \right) - \lambda \left(\frac{\lambda - b}{2\lambda} \right)^2 - \left(\frac{\lambda - b}{2\lambda} \right) \right) \left(-\frac{\lambda}{a} \right) \end{array} \right. \quad (10\Gamma)$$

Преобразование третьего уравнения из системы дает:

$$c = \left(\lambda \left(\frac{\lambda - b}{2} \right) - \left(\frac{\lambda - b}{2} \right)^2 - \left(\frac{\lambda - b}{2} \right) \right) \left(-\frac{1}{a} \right)$$

После вычислений имеем:

$$\lambda^2 - 2\lambda - (b^2 - 2b - 4ac) = 0$$

таким образом, можно выразить λ через a, b, c

$$\lambda_{1,2} = 1 \pm \sqrt{(b-1)^2 - 4ac} \quad (11)$$

Как уже было сказано, структурные свойства стабильности временного ряда не изменяются после линейных преобразований. Это утверждение следует из того что свойства стабильности определяются значениями первой производной. (См. 2, 3).

Действительно

$$\frac{d\tilde{x}_{n+1}}{d\tilde{x}_n} = \frac{d\tilde{x}_{n+1}}{dx_{n+1}} \frac{dx_{n+1}}{dx_n} \frac{dx_n}{d\tilde{x}_n} \quad (12)$$

И для любого линейного преобразования (9)

$$\frac{d\tilde{x}_{n+1}}{dx_{n+1}} \frac{dx_n}{d\tilde{x}_n} = 1, \quad (13)$$

Поэтому

$$\frac{d\tilde{x}_{n+1}}{d\tilde{x}_n} = \frac{dx_{n+1}}{dx_n} \quad (14)$$

Поэтому, чтобы описать свойства квадратичного отображения общего вида, достаточно с помощью формулы (11) вычислить соответствующую λ , и, если одна из них лежит в диапазоне от 0 до 4, то динамические свойства отображения определяются в соответствии с тем, ка-

кому подинтервалу на участке от 0 до 4λ принадлежит: меньше 1, от 1 до 3, от 3 до 3.57 и т.д). Заметим, что в сумме два корня, определяемые в соответствии с уравнением (11) равны 2:

$$\lambda_1 + \lambda_2 = 2,$$

поэтому

$$\max(\lambda_1, \lambda_2) = \lambda_1 = 1 + \sqrt{(b-1)^2 - 4ac} > 1, \min(\lambda_1, \lambda_2) = \lambda_2 = 1 - \sqrt{(b-1)^2 - 4ac} < 1.$$

При этом если один из корней (любой) является управляющим параметром (выражаемым через коэффициенты квадратичной параболы общего вида), то второй – это значение производной в ненулевой равновесной точке в первоначальной системе координат (также выраженной через коэффициенты параболы). Для устойчивости равновесной точки необходимо, чтобы производная в ней по абсолютной величине была меньше 1. Поскольку $|\lambda_1| > 1$, то условие устойчивости равновесия выполняется в случае $|\lambda_2| < 1$, что равносильно тому, что $1 < \lambda_1 < 3$ (условию устойчивости по управляющему параметру).

Т.о. для квадратичной параболы общего вида (8), при условии существования вещественных решений (11), характер финального множества определяется исходя из правил логистического отображения с управляющим параметром равным

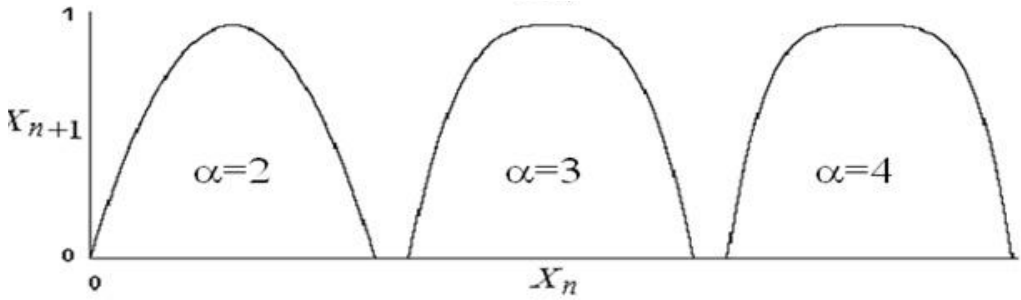
$$\lambda = 1 + \sqrt{(b-1)^2 - 4ac} \quad (15)$$

Отсутствие решений геометрически означает отсутствие пересечений параболы, определяемой уравнением (8), и биссектрисы первого координатного угла.

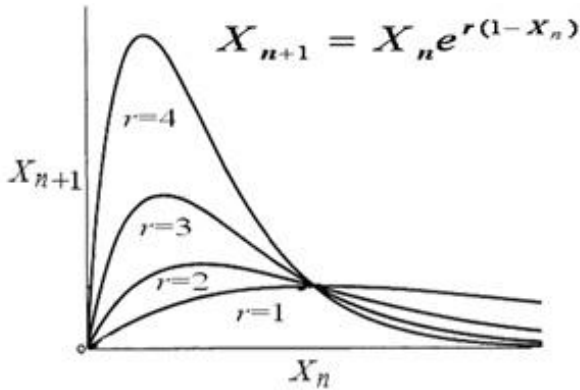
1.5. Выбор модельной функции

При наличии теоретического обоснования ограниченности анализируемых показателей (т.е. того, что показатели не могут быть сколь угодно велики, а обязательно лежат в каком-то пусть и большом диапазоне), функция, задающая отображение, после периода возрастания должна обязательно убывать. Простейшие функции такого типа – дифференцируемые ограниченные функции с одним максимумом (унимодальные). К ним относятся не только логистическое отображение, но и другие семейства функций, которые также могли бы быть использованы для описания подобных процессов. Среди таких семейств: синусоидальное отображение $X_{n+1} = A \sin(\pi X_n)$, общее симметричное отображение $X_{n+1} = A(1 - |2X_n - 1|^a)$ (рис. 4а), экспоненциальное отображение $X_{n+1} = X_n e^{r(1-X_n)}$ (рис. 4б). Последнее семейство реализует несимметричные отображения. Заметим, что все несимметричные функции, принципиально отличающиеся от симметричных, определены на бесконечном интервале (полуоси) (в противном случае можно выполнить определенную трансформацию, с одной стороны не меняющую свойства функции, а с другой – симметризирующую ее). Однако в рассматриваемом случае мы условились, что интервал определенности функции должен быть ограничен, поэтому не будем рассматривать функции, представленные на рис. 4б.

Все симметричные функции с высоким уровнем значимости аппроксимируются квадратичными параболоми. Для доказательства этого факта были специально сгенерированы большие массивы пар чисел на основе всевозможных унимодальных из различных семейств, а затем на этих парах была проведена аппроксимация квадратичными параболоми. Во всех случаях показатель согласованности данных R^2 был не ниже 0.9.



а) Общее симметричное отображение, $\alpha=2$ дает логистическое отображение



б) Экспоненциальное отображение

Рис. 4. Примеры унимодальных функций

Таким образом квадратичная парабола общего вида может с большой степенью точности заменить все остальные унимодальные отображения, определенные на ограниченном интервале. В силу данной эквивалентности, с одной стороны, а так же возможности представления в виде стандартного логистического вида (4), наиболее простого и лучше всего изученного, первоначальная аппроксимация экспериментальных данных с помощью квадратичной параболы (с последующим линейным преобразованием системы координат, так что квадратичная функция приобретает вид стандартного логистического отображения) является наиболее целесообразным.

1.6. Процедура построения логистического уравнения

Процедура построения логистического уравнения для набора данных $\{X_n\}$, являющегося временным рядом из N наблюдений, выглядит следующим образом (см. также схему алгоритма, представленную на рис. 5):

1. Формируются две переменные, содержащие $N-1$ наблюдений.

$$x = (X_1 \dots X_{N-1}) \text{ и } y_{\text{эксп}} = (X_2 \dots X_N).$$

2. Выполняется регрессия $y_{\text{эксп}}$ на x с использованием квадратичной формулы общего вида. Т.е. зависимая переменная $y_{\text{эксп}}$ аппроксимируется модельной переменной

$$y_{\text{теоретич}} = ax^2 + bx + c$$

3. В случае хорошей согласованности модели с экспериментальными данными (уровень значимости нулевой гипотезы низкий, R^2 – высокий) – данная регрессионная модель принимается и на основе полученной квадратичной функции по формуле 12 вычисляется λ . Это необходимое условие для построения модели.

4. Если решение в п.3 существует, то существуют точки равновесия.

5. Еще одно условие, которое должно выполняться связано с пределами, в которых может лежать полученное λ . Если λ принадлежит интервалу от 0 до 4, будем говорить о том, что процесс можно представить логистическим отображением. В этом случае отображение и представляемый им процесс можно исследовать.

6. Если λ лежит в диапазоне от 1 до 3, будем говорить о стабильности процесса.

7. При λ , лежащем в диапазоне от 3 до 4, характер процесса, структура финального множества определяется в соответствии с бифуркационной диаграммой (рис. 3, таблица 1), имеет место неустойчивость.

Требуемый объем данных (т.е. количество измерений во временном ряду) определяется статистическими требованиями выполнения регрессии. Чем это число больше, тем выше надежность вычисляемых показателей.



Рис. 5. Схема алгоритма построение модели логистического отображения для эмпирического исследования

1.7. Практическая апробация предлагаемого алгоритма

Практическая апробация предлагаемого алгоритма была выполнена для анализа данных, полученных в (1) биогенетическом и (2) психологическом исследовании.

1. В первом случае проводился анализ динамики экспрессии генов (выражаемой в величине их концентрации в растворе) растительных клеток после «стрессового» воздействия [34]. Предполагалось, что после воздействия на клетки не оказывают влияние никакие возмущающие факторы и идет самовосстановление к первоначальному состоянию по закону (4). (Более подробное обоснование правомерности данной модели см. в указанной работе). Для сравнения анализировались гены изолированных клеток и клеток, составляющих целое растение. Было выполнено 9 замеров с момента стрессового воздействия (дополнительного воздействия серой). На ряду с двумя экспериментальными группами аналогичные замеры проводились на контрольных группах (изолированных клеток и целостных растений), в которых не было стрессового воздействия. В данной ситуации количество замеров мало, однако это компенсировалось объемом выборки – было проанализировано показатели по 22.810 генам в каждой из 4-х групп.

Результаты анализа показали, что поведение изолированных клеток в ситуации стресса становится хаотичным, идущим в «разнос», а клетки целостных растений в этом случае демонстрируют большую устойчивость и способность к конструктивной адаптивной модификации. Можно сделать вывод что более высокие системные свойства целостного растения позволяют его клеткам легче адаптироваться, либо сохраняя свою идентичность, либо, допуская самые малые, наиболее выгодные с точки зрения преодоления стресса, изменения.

Нам кажется обоснованным провести аналогию здесь с социальным коллективом. Действительно сплоченный коллектив гораздо легче (по сравнению с отдельными ничем несвязанными между собой индивидами) переносит ситуацию стресса, оптимально модифицирует свое функционирование. Пословицы «На миру и смерть красна», «Один в поле не воин» достаточно ярко иллюстрирует эту идею.

2. Второе исследование изучало динамику аффективных состояний. 46 человек (39 женщин, 9 мужчин) – студенты в течение 28 дней заполняли дневники о своих позитивных и негативных эмоциях, далее для каждой из этих последовательностей вычислялись регрессионная квадратичная кривая общего вида, а затем управляющий параметр стандартной формы логистического отображения. Кроме того респонденты один раз заполняли большую батарею личностных опросников, связанных со стилевыми, личностными особенностями, мотивационной структурой [24, 32, 33]. В дальнейшем проводился анализ детерминаций полученных значений λ для каждого типа аффекта индивидуальными характеристиками. Было установлено, что все $\lambda < 3$ (для всех испытуемых и всех видов аффектов). Динамика для всех состояний при отсутствии вынуждающих внешних воздействий у психически здоровых людей приходит к одной устойчивой точке. Т.е. у человека в норме невозможны постоянные колебания между какими-то двумя показателями на эмоциональной шкале. Кроме того дисперсионный анализ не выявил значимых различий в распределении λ , вычисленных для разных эмоциональных шкал. Можно говорить, что это внутренняя индивидуальная характеристика, связанная с достижением наиболее приемлемого для индивида эмоционального уровня. Это есть финальная устойчивая точка, к которой сходится динамический процесс (она равна $1-1/\lambda$) при отсутствии внешних вынуждающих воздействий. Конечно, следует иметь в виду, что данная величина в большинстве случаев реально недостижима, ибо полностью изолировать человека от внешних воздействий практически невозможно. Тем не менее, возможность ее учета при построении личностного портрета, практической психотерапевтической и консультационной работы нам представляется полезным и эффективным.

ЛИТЕРАТУРА

1. Лебедев В., Братченко Н. Моделирование динамики поведения макроэкономических Сборник научных трудов СевКавГТУ. Серия «Естественно-научная». №1. 2005.
2. Митина О., Петренко В. Динамика политического сознания как процесс самоорганизации. //Общественные науки и современность. N 5, 1995. с. 103-115.
3. Митина О., Петренко В. Динамическая модель изменения политического менталитета россиян. //Математическое и компьютерное моделирование в науках о человеке и обществе. Тезисы докладов Всероссийской конференции. М., 1999, с. 44-53.
4. Митина О.В. Использование модели Лотка-Вольтерра для изучения психологических процессов. //Современная психология: состояние и перспективы. Т. 1. М: ИПРАН, 2002, с. 225-228.
5. Пуанкаре А. Наука и метод. Пер. с франц. СПб 1910.
6. Хакен Г. Информация и самоорганизация. Макроскопический подход к сложным явлениям. Пер с англ. М.: Мир, 1991.
7. Хакен Г. Синергетика. Пер с англ. М.: Мир, 1980.
8. Шустер Г. Детерминированный хаос: введение. Пер с немец. М.: Мир, 1989.
9. Asmussen M. A., Feldman M. W. Density Dependent Selection I: A Stable Feasible Equilibrium May not be Attainable. J of theor. Biology. (1977) 64, 603-618
10. Bartlett M. S. Chance or Chaos? Journal of the Royal Statistical Society. Series A (Statistics in Society), Vol. 153, No. 3. (1990), pp. 321-347.
11. Cadzow J.A. Discrete time systems: an introduction with interdisciplinary applications. Englewood Cliffs, NJ Prentice Hall 1973
12. Choi C-H. Generalizations of the Lotka-Volterra Population Ecology Model: Theory, Simulation, and Applications. //Nonlinear Dynamics, Psychology, and Life Sciences Volume 1, Number 4 / October 1997 pp. 263-273.
13. Dewdney, A. K. «Mathematical Recreations: Leaping into Lyapunov Space» Scientific American. September 1991: 178-180.
14. Elert G. The Chaos Hypertextbook. <http://hypertextbook.com/chaos/>. 1995-2007
15. Feigenbaum M. Universal Behavior in Nonlinear Systems. Los Alamos Science. 1. Summer 1980 p.4-27.
16. Gleick, J. Chaos – Making a new science. New York: Penguin. 1990
17. Guckenheimer J, Oster G, Ipakhtehi A the Dynamics of Density Dependent Population Models J. Math. Biology4, 101-147. 1977.
18. Haken G. Synergetics: an overview Rep. Rog. Phys. 52 pp. 515-553. 1989.
19. Haken, H. Synergetics: An Introduction. Heidelberg: Springer-Verlag. 1981.
20. Hofstadter, D. Metamagical Themas: Questing for the Essence of Mind and Pattern. New York: Basic Books, 1985.
21. Huckfeldt R. The Social Context of Political Change: Durability, Volatility, and Social Influence. The American Political Science Review, Vol. 77, No. 4. (Dec.), pp. 929-944. 1983
22. Jakimowicz A. Logistic Map in Economics. //Доклад, представленный на 4-й международной конференции по нелинейным наукам. Палермо, 15-17 марта 2010.
23. Koole, S. L., & Kuhl, J. In search of the real self: A functional perspective on optimal self-esteem and authenticity. Psychological Inquiry. 2003
24. Kuhl J., Mitina O. The gentle thrust of latent trust: Single-attractor self-contagion in day-to-day changes of implicit joy promotes self-confrontational coping and mental health. В печати.
25. Kuhl, J. Motivational chaos: A simple model. In D.R. Brown & J. Veroff (Eds.), Frontiers of motivational psychology (pp. 54-71). Heidelberg/New York: Springer-Verlag. 1986

26. Kuhl, J. A functional-design approach to motivation and volition: The dynamics of personality systems interactions. In M. Boekaerts, P.R. Pintrich & M. Zeidner (Eds.), *Self-regulation: Directions and challenges for future research* (pp. 111-169). New York: Academic Press. 2000
27. Li T.; Yorke J. Period three implies chaos. *The American Mathematical Monthly*, Vol. 82, No. 10. (Dec.), pp. 985-992. 1975
28. May R. Simple mathematical models with very complicated dynamics. *Nature*, V. 261, p. 459. June 10, 1976
29. May R. *Stability and complexity in model ecosystems*, 2nd ed. Princeton, N.J.: Princeton University Press, 1974
30. May R., Oster G. Bifurcations and Dynamic Complexity in Simple Ecological Models. *The American Naturalist*. V. 110, N 974., p. 573-599, 1976
31. Mitina O., Abraham F., Petrenko V. Dynamical cognitive models of social issues in Russia. // *International Journal of Modern Physics C*, Vol. 13, № 2, p. 229–251. 2002
32. Mitina O., Baumann N., Kazen M. Hierarchical Multilevel Analysis: example of converging ideas. // Доклад, представленный на 6-й международной конференции по многоуровневому моделированию. Амстердам, 15-17 апрель 2007.
33. Mitina O., Kuhl J. Using Model of logistic equation for studying Emotional dynamics. // Доклад, представленный на 4-й международной конференции по нелинейным наукам. Палермо, 15-17 марта 2010.
34. Nikiforova V., Mitina O. On Estimating Chaos in Perturbed Biosystem. В печати.
35. Sprott J.C. *Chaos and Time-Series Analysis*. Oxford University Press, 2003
36. Tsonis A.A. Reconstructing dynamics from observables: The issue of the delay parameter revisited. *International Journal of Bifurcation and Chaos* 17 (12): 4229-4243. 2007
37. Vallacher, R. R., Read, S. J., & Nowak, A. The dynamical perspective in personality and social psychology. *Personality and Social Psychology Review*, 6, 264-273. 2002
38. Wolfram S.A. *A new kind of science*. Champaign, IL: Wolfram Media. 2002.

Работа поступила 29.11.2010