УДК 004.942

ГАРАНТИРУЮЩЕЕ ОЦЕНИВАНИЕ ПАРАМЕТРОВ ОДНОМЕРНОЙ МОДЕЛИ ДВИЖЕНИЯ ПО ВЕРОЯТНОСТНОМУ КРИТЕРИЮ ПРИ НАЛИЧИИ УНИМОДАЛЬНЫХ ПОМЕХ

А.С. Архипов, К.В. Семенихин

Рассматривается задача линейного параметрического оценивания в одномерной модели движения материальной точки при наличии измерительных ошибок с неопределенным симметричным унимодальным распределением, но известными ковариациями и дисперсиями. Установлены гарантированные границы для вероятности превышения ошибкой оценивания заданного порога с учетом априорных ограничений на начальное положение и скорость. Проведено сравнение качества ридж-оценок для нескольких классов распределений помех.

We consider the problem of linear parametric estimation in a one-dimensional model of the motion of a material point in the presence of measurement errors with an indefinite symmetric unimodal distribution, but known covariances and variances. Guaranteed limits are established for the probability of an error exceeding the estimated threshold given the a priori restrictions on the initial position and speed. A comparison of the quality of ridge estimates for several classes of interference distributions has been made.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА
Вероятностный критерий, унимодальное распределение, оценивание параметров движения, ридж-оценка, гарантирующий подход.

ДЛЯ ЦИТАТЫ
А.С. Архипов, К.В. Семенихин. Гарантирующее оценивание параметров одномерной модели движения по вероятностному критерию при наличии унимодальных помех // Моделирование и анализ данных. 2019. №2. С.31-38.

A.S. Arkhipov, K.V. Semenikhin. Guaranteed parameter estimation by probabilistic criterion for one-dimensional motion model with unimodal observation noise. Modelirovaniye i analiz dannykh=Modelling and data analysis *(Russia)*. 2019, no.2, pp.31-38.

1. ВВЕДЕНИЕ

Различные постановки задач параметрического оценивания остаются предметом изучения многих теоретических исследований [1]. Практическое применение оценок требует более осторожных выводов об их точности и надежности особенно в ситуации небольшого числа наблюдений и неопределенности распределения ошибок [2]. Один из подходов к повышению робастности статистических решений состоит в определении наихудших границ их качества при допущении всевозможных распределений с ограниченными или фиксиро-

ванными моментными характеристиками второго порядка [3]. Однако такой класс распределений приводит к достаточно пессимистическим выводам о вероятностных характеристиках точности робастных оценок. Более реалистичным выглядит использование дополнительной непараметрической информации о распределении, которое формулируется в виде естественного требования унимодальности [4]. Если качество оценок описывается вероятностью выхода ошибки за определенные пределы [5], то гарантированные границы этого вероятностного
критерия качества можно получить на основе недавно разработанных обобщений неравенства Гаусса [6,7].

В настоящей работе рассматривается задача оценивания будущего положения объекта, который движется равномерно и прямолинейно, а его текущее положение наблюдается с учетом измерительных помех, имеющих неопределенное симметричное унимодальное распределение, но известную ковариационную матрицу. Описанная задача решается на основе гарантирующего подхода, который позволяет определить верхнюю границу вероятности превышения заданного порога ошибки с учетом априорных ограничений на начальное положение объекта и его скорость. Чтобы учесть априорную информацию о неизвестных параметров, вместо оценок метода наименьших квадратов (МНК) используются их регуляризованные версии — так называемые ридж-оценки [8]. Проводится сравнительный анализ нескольких вариантов ридж-оценок при наличии разного уровня информированности о распределении помех.

2. ОПИСАНИЕ МОДЕЛИ

Рассмотрим кинематическую модель движения материальной точки вдоль прямой. Движение из начального положения x^0 с постоянной скоростью v описывается линейной функцией

$$x(t) = x^0 + vt$$

Относительно параметров известно, что

(1) $$|x^0 - x^*| \le \delta \quad |v - v^*| \le \varepsilon ,$$

где x^*, v^* — заданные опорные значения.

Допустим, что имеются n наблюдений

$$Y(t_k) = x(t_k) + \eta(t_k), \;\; k = 1, \dots, n,$$

где величины $\{\eta(t_k), k = 1, \dots, n\}$ составляют вектор $\eta \in \mathbb{R}^n$, имеющий линейно унимодальное распределение, симметричным относительно нулевой моды, и ковариационную матрицу $\sigma^2 K$, где σ^2 — известная дисперсия, а K—корреляционная матрица, задаваемая в виде

$$\sigma^2 K = \{\rho(t_k - t_l)\}_{k,l=1\dots,n}$$

С помощью автокорреляционной функции $\rho(t) = e^{-|t|/\tau}$ выхода апериодического звена с входом в виде стационарного белого шума и параметром запаздывания τ. Класс описанных распределений обозначим $\mathcal{U}$.

Предположим, что оцениванию подлежит будущее положение объекта $Z = x(t')$, $t' > t_n$. Качество оценок $\tilde{Z}$ будем описывать функционалом

(2) $$P\{|\tilde{Z} - Z| \geq h\}$$

т.е. вероятностью превышения заданного порога ошибки h.

Если ввести обозначения

$$c = \begin{bmatrix} 1 \\ t_n \end{bmatrix},\ u = \begin{bmatrix} x^0 \\ v \end{bmatrix},\ C = \begin{bmatrix} 1 & t_1 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & t_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times 2},\ Y = \begin{bmatrix} Y(t_1) \\ \vdots \\ Y(t_n) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n,$$

то модель наблюдения можно записать в виде уравнений линейной регрессии

$$Z = \langle c, u \rangle, \qquad Y = Cu + \eta$$

3. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Для приведенной модели наблюдения требуется решить задачу оценивания положения объекта $Z = x(t')$ с учетом ограничений на неизвестные параметры (1) при различных гипотезах о распределении помех.

Рассмотрим следующие три гипотезы:

1) $\eta \sim \mathcal{N}$ — гипотеза о нормальном распределении, точнее $\eta \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2 K)$;

2) $\eta \sim \mathcal{U}$ — описанное выше предположение об унимодальности и симметричности распределения вектора помех η;

3) $\eta \sim \mathcal{P}$ — предположение о том, что распределение вектора η может быть любым.

Для всех перечисленных выше гипотез остается в силе наличие фиксированных моментных характеристик

$$M\eta = 0, \quad cov\{\eta, \eta\} = \sigma^2 K.$$

Для заданной оценки $\tilde{Z}$ определим максимальное (т.е. наихудшее) значение вероятности того, что ошибка превысит заданный порог:

(3) $$\pi^{\mathcal{H}} = \sup_\eta \sup_u P\{|\tilde{Z} - Z| \geq h\}$$

где распределение вектора помех η описывается соответствующей гипотезой $\mathcal{H}$, а вектор параметров u подчиняется ограничениям (1).

Задача гарантирующего оценивания по вероятностному критерию состоит в нахождении вероятностной границы (3) для заданной оценки. При сравнении нескольких оценок более предпочтительной стоит считать ту, которая дает наименьшее значение вероятностному критерию (2). Таким образом, качество оценок определяется их надежностью из расчета на наихудший случай.

4. ОЦЕНКИ И ИХ ХАРАКТЕРИСТИКИ

Будем рассматривать так называемые ридж-оценки, которые представляют собой регуляризацию оценок обобщенного метода наименьших квадратов (ОМНК):

$$(4)\qquad \tilde{Z} = \langle c, \tilde{u} \rangle, \ \ \tilde{u} = u^* + F(Y - Cu^*), \ \ \tilde{u} = \mathrm{col}[\tilde{x}^0, \tilde{v}],$$
$$F = ((\sigma/\gamma)^2 \mathrm{diag}[\delta^{-2}, \varepsilon^{-2}] + C^T K^{-1} C)^{-1} C^T K^{-1},$$

Здесь γ - положительный коэффициент, отвечающий за степень регуляризации: чем больше γ, тем ближе матрица F к оценивателю ОМНК

$$G = (C^T K^{-1} C)^{-1} C^T K^{-1}$$

Определим среднеквадратическую (с.к.) погрешность указанных оценок

$$\mathrm{RMSE} = \sqrt{\mathrm{M}(\tilde{Z} - Z)^2}.$$

Введем вектор отклонения параметров от их опорных значений

$$\vartheta = u - u^* = \mathrm{col}[\Delta x^0, \Delta v], \qquad \Delta x^0 = x^0 - x^*, \qquad \Delta v = v - v^*.$$

Тогда ошибка оценки будет равна

$$\tilde{Z} - Z = \langle c, u^* + F(C(u - u^*) + \eta) \rangle - \langle c, u \rangle = \langle c, (FC - I_2)\vartheta \rangle + \langle c, F\eta \rangle$$

откуда получаем выражение для смещения оценки

$$\mathrm{m} = M\{\tilde{Z} - Z\} = \langle g, \vartheta \rangle,$$

где обозначено $g = (FC - I_2)^T c$.

Получаем выражение для дисперсии оценки

$$s^2 = \sigma^2 ||f||^2,$$

если обозначить $f = (FT)^T c$.

Максимальное смещение при ограничениях (1) равно

$$\bar{m} = \max_u M\{\tilde{Z} - Z\} = \nu(g),$$

с учетом того, что $\nu(g)$ — норма, определенная на векторах $a = \mathrm{col}[a_1, a_2]$ по правилу

$$\nu(a) = \max\{a_1 \Delta x^0 + a_2 \Delta v : |\Delta x^0| \le \delta, |\Delta v| \le \varepsilon\} = \delta |a_1| + \varepsilon |a_2|.$$

Таким образом, с.к. погрешность и ее наихудшее значения равны соответственно:

$$\mathrm{RMSE} = \sqrt{m^2 + s^2}, \ \ \overline{\mathrm{RMSE}} = \sqrt{\bar{m}^2 + \bar{s}^2}.$$

5. ВЕРОЯТНОСТНЫЙ КРИТЕРИЙ

Рассмотрим сначала гипотезу о гауссовском распределении помех:
если $\eta \sim \mathcal{N}$, то

(5) $$\pi^{\mathcal{N}} = \Psi\left(\frac{h-\bar{m}}{s}\right) + \Psi\left(\frac{h+\bar{m}}{s}\right), \text{где } \Psi(x) = \int_x^{\infty} \frac{e^{-t^2/2}}{\sqrt{2\pi}} dt.$$

Теперь рассмотрим гипотезу $\eta \sim \mathcal{U}$. В силу [7] справедлив следующий факт: если смещение и порог ошибки связаны неравенством

$$\bar{m} < \left(1 - 1/\sqrt{2}\right)h,$$

то вероятностная граница (3) на классе симметричных унимодальных распределений $\eta \sim \mathcal{U}$ определяется правой частью неравенства Гаусса

(6) $$\pi^{\mathcal{U}} = \begin{cases} \frac{4s^2}{9h^2}, & s \leq h\sqrt{3}/2 \\ 1 - \frac{h}{s\sqrt{3}}, & s \geq h\sqrt{3}/2 \end{cases}$$

Общее выражение для искомой границы дано в [7]. Соответствующее наихудшее распределение можно описать так. Пусть E — случайная величина, распределенная по закону $\mathcal{U}_h(s^2)$, который в случае а) представляет собой смесь равномерного распределения $\mathcal{R}(-3h/2, 3h/2)$ с весом $q = 4s^2/(3h^2)$ и вырожденного δ_0 с весом 1-q, а в случае б) $\mathcal{U}_h(s^2) = \mathcal{R}(-s\sqrt{3}, s\sqrt{3})$.

Определим вектор помех в виде

(7) $$\eta = T\{E|f|^{-2}f + \sigma(I_n - |f|^{-2}ff^T)\zeta\},$$

где ζ — стандартный n-мерный гауссовский вектор, независящий от случайной величины E.

Важно отметить, что вектор имеет линейно унимодальное распределение, так как при любом выборе детерминированного вектора g $\in \mathbb{R}^n$ величина $\langle g, \eta \rangle$ будет унимодальной, как сумма двух независимых симметричных унимодальных величин. При этом распределение вектора (7) симметрично относительно нуля. Вычислим ковариационную матрицу случайного вектора, заключенного в фигурных скобках выражения (7).

В силу равенства $s^2 = \sigma^2|f|^2$, условия независимости и свойств матрицы ортогональной проекции, получаем требуемую ковариационную матрицу:

$$s^2|f|^{-4}ff^T + \sigma^2(I_n - |f|^{-2}ff^T) = \sigma^2 I_n,$$

Наконец, ошибка оценки совпадет с величиной E с точностью до смещения m, т.е $\tilde{Z} - Z = m + E$. Если же выбрать параметры так, чтобы

$$u = u^* + \mathrm{col}[\delta \cdot \mathrm{sign}\, g_1, \varepsilon \cdot \mathrm{sign}\, g_2],$$

то получим ошибку оценивания с максимальным смещением $\bar{m}$:

$$\tilde{Z} - Z = \bar{m} + E$$

Теперь рассмотрим гипотезу $\eta \sim \mathcal{P}$, которая означает, что распределение вектора помех η может быть любым. В этом случае вероятностная граница определяется из неравенства Селберга [9]:

(8) $$\pi^{\mathcal{P}} = \begin{cases} \dfrac{s^2}{s^2+(h-\overline{m})^2}, & \text{а) } s^2 \le \overline{m}(h-\overline{m}), \\ \dfrac{\overline{m}^2+s^2}{h^2}, & \text{б) } \overline{m}(h-\overline{m}) \le s^2 \le h^2-\overline{m}^2, \\ 1, & \text{в) } h^2-\overline{m}^2 \le s^2 \end{cases}$$

где предполагается $\overline{m} < h$.

Таким образом для трех рассматриваемых гипотез, их вероятностный критерий определяется выражениями (5), (6) и (8).

6. ЧИСЛЕННЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ

В описанной выше модели было проведено два эксперимента, обозначаемые далее №1,№2. Рассмотрим численный эксперимент № 1. Для него были взяты следующие параметры:

$$x^* = 2000, \quad x^0 = 2800, \quad \delta = 1000 \text{ (м)},$$

$$v^* = 180, \quad v = 205, \quad \varepsilon = 50 \text{ (м / с)},$$

$$Z = 17150, \quad h = 1000, \quad \sigma = 500 \text{(м)}, \quad \tau = 10 \text{ (1 / с)}$$

$$t_1 = 15, \quad t_n = 60, \quad t' = 70 \text{ (с)}, \quad n = 10$$

Вектор помех был смоделирован согласно распределению, наихудшему на классе $\mathcal{U}$ из расчета на ридж-оценку (4) с параметром регуляризации $\gamma = 1$. Вес вырожденного распределения δ_0 в распределении ошибки оценивания составил $1 - q = 0.6727.$

В таблице 1 приведены результаты расчетов. Каждая строка соответствует характеристикам ридж-оценки, построенной при данном параметре регуляризации γ. Случай $\gamma = \infty$ соответствует оценке ОМНК.

Как видно, среди указанного набора значений параметра γ случай $\gamma = 1$ дает наименьшее значение гарантированного значения вероятностного критерия, рассматриваемого на классе унимодальных распределений $\mathcal{U}$ с учетом априорных ограничений (1). Гипотеза $\mathcal{N}$ о гауссовском распределении помех приводит к наименьшим значениям вероятности превышения допустимого порога ошибки. Однако предположение $\mathcal{P}$ дает неоправданно завышенное значение вероятностного критерия (более чем в 4 раза по сравнению со случаем $\mathcal{N}$). В то же время гипотеза $\mathcal{U}$, используемая для нахождения робастного статистического решения, демонстрирует приемлемую надежность оценивания.

Таблица 1. Результаты численного эксперимента №1

γ	$\widetilde{x^0}$ (м)	$\tilde{v}$ (м / с)	$\tilde{Z}$ (м)	$\overline{m}$ (м)	s (м)	$\overline{\text{RMSE}}$ (м)	$\pi^{\mathcal{N}}$	$\pi^{\mathcal{U}}$	$\pi^{\mathcal{P}}$
∞	3577	192	17021	0	563	563	0.0759	0.1410	0.3174

3	3516	193	17050	37	552	553	0.0707	0.1355	0.3061
2	3446	195	17082	78	540	545	0.0667	0.1295	0.2974
1	3179	200	17195	243	495	552	0.0693	0.1091	0.3045
0.5	2755	208	17293	544	433	695	0.1463	0.1960	0.4741

Теперь рассмотрим результаты численного эксперимента № 2. Он был реализован при следующих значениях параметров:

$$x^* = 2000, \quad x^0 = 2160, \quad \delta = 200 \text{ (м)},$$

$$v^* = 180, \quad v = 205, \quad \varepsilon = 50 \text{ (м / с)},$$

$$Z = 16510, \quad h = 2000, \quad \sigma = 1000 \text{(м)}, \quad \tau = 10 \text{ (1 / с)}$$

$$t_1 = 15, \quad t_n = 60, \quad t' = 70 \text{ (с)}, \quad n = 1$$

Наихудшее распределение вектора помех на классе $\mathcal{U}$ было построено для ридж-оценки с параметром регуляризации $\gamma = 0.6$. Вес вырожденного распределения в распределении ошибки составил $1 - q = 0.7976$.

На рис. 1 изображена траектория движения объекта, его ридж-оценка (для $\gamma = 0.6$) и оценка ОМНК.

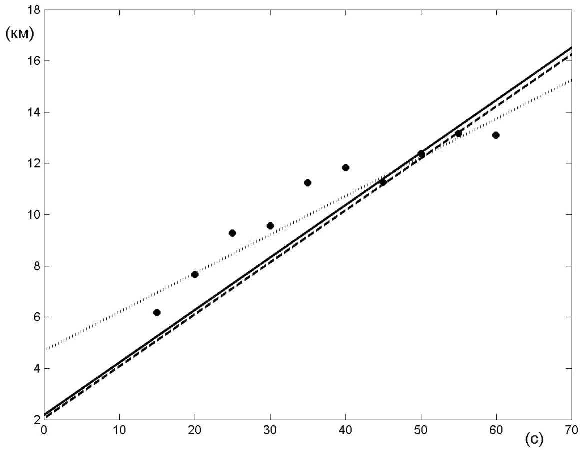

Рис. 1. Истинная траектория (сплошная) вместе с ридж-оценкой (штриховая) и ОМНК-оценкой (пунктир), построенными по наблюдениям (точки) в эксперименте № 2.

Как видно, ридж-оценка существенно превосходит ОМНК-оценку по точности предсказания терминального положения. То же заключение можно сделать о характеристиках надежности указанных оценок (см. таблицу 2). Как и в эксперименте № 1, соотношение между гарантированными значениями вероятностного критерия остается прежним: гипотеза $\mathcal{N}$ дает самый оптимистичный результат, класс $\mathcal{U}$ приводит к более осторожным выводам, а предположение $\mathcal{P}$ оказывается слишком консервативным.

Таблица 2. Результаты численного эксперимента №2

γ	$\widetilde{x^0}$ (м)	$\tilde{v}$ (м / с)	$\tilde{Z}$ (м)	$\overline{m}$ (м)	s (м)	$\overline{\text{RMSE}}$ (м)	$\pi^{\mathcal{N}}$	$\pi^{\mathcal{U}}$	$\pi^{\mathcal{P}}$
∞	4685	151	15256	0	1127	1127	0.0759	0.1410	0.3174
2	2253	203	16442	154	918	931	0.0316	0.0936	0.2166
1	2074	205	16434	317	871	927	0.0305	0.0843	0.2147
0.6	2032	203	16259	632	779	1003	0.0399	0.0721	0.2449
0.3	2011	196	15716	1578	522	1662	0.2095	0.2667	0.6048

В заключение необходимо отметить, что коэффициенты ридж-оценки можно подобрать из условия минимума соответствующей вероятностной границы. Однако изучение данной задачи оптимизации выходит за рамки настоящей работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Simon D.* Optimal State Estimation. Kalman, H-infinity, and Nonlinear Approaches. Wiley, 2006.
2. *Maryak J.L., Spall J.C., Heydon B.D.* Use of the Kalman filter for inference in state-space models with unknown noise distributions // IEEE Trans. Automat. Control. 2004. V. 49. P. 87-90.
3. *Delage E., Ye Y.* Distributionally robust optimization under moment uncertainty with application to data-driven problems // Operations Research. 2010. V. 58. P. 595-612.
4. *Dharmadhikari S., Joag-Dev K.* Unimodality, Convexity, and Applications. San Diego: Academic, 1988.
5. *Панков А.Р., Семенихин К.В.* О минимаксном оценивании по вероятностному критерию // Автоматика и телемеханика. 2007. № 3. С. 66-82.
6. *Van Parys B.P.G., Goulart P.J., Kuhn D.* Generalized Gauss inequalities via semidefinite programming // Math. Program. 2016. V. 156. P. 271-302.
7. *Семенихин К.В.* Двусторонняя вероятностная граница для симметричной унимодальной случайной величины // Автоматика и телемеханика. 2019. №3. В печати.
8. *Демиденко Е.З.* Линейная и нелинейная регрессии. М.: Финансы и статистика, 1981.
9. Карлин С., Стадден В. Чебышевские системы и их применение в анализе и статистике. — М.: Наука, 1976.

Работа поступила 20.02.2019г.