

2

**МОДЕЛИРОВАНИЕ
И АНАЛИЗ ДАННЫХ**

НАУЧНЫЙ ЖУРНАЛ

**MODELLING
AND DATA ANALYSIS**

SCIENTIFIC JOURNAL

2023

ISSN: 2219-3758
ISSN: 2311-9454 (ONLINE)

МОДЕЛИРОВАНИЕ И АНАЛИЗ ДАННЫХ

НАУЧНЫЙ ЖУРНАЛ

2023 • Том. 13 • № 2

MODELLING AND DATA ANALYSIS

SCIENTIFIC JOURNAL

2023 • Vol. 13 • № 2



Московский государственный
психолого-педагогический университет
Moscow State University
of Psychology & Education

Моделирование и анализ данных

Главный редактор:

Л.С. Куравский ФГБОУ ВО МГППУ, Россия

Заместители главного редактора:

С.Д. Кулик МИФИ, Россия

А.В. Пантелеев МАИ, Россия

Редакционный совет

Председатель редакционного совета:

Г.Г. Амосов МИАН, Россия

Члены редакционного совета:

В.А. Барабанщиков ФГБОУ ВО МГППУ, Россия

Питер Бентлер Калифорнийский университет
Лос-Анджелеса, США

А.В. Горбатов МИСиС, Россия

Л.С. Куравский ФГБОУ ВО МГППУ, Россия

Леонид Либкин Эдинбургский университет,
Великобритания

А.А. Марголис ФГБОУ ВО МГППУ, Россия

В.В. Рубцов ФГБОУ ВО МГППУ, Россия

Д.В. Ушаков ИП РАН, Россия

Девид Фрэнсис Университет Хьюстона, США

Редакционная коллегия:

К.К. Абгарян ФИЦ ИУ РАН, Россия

Г.Г. Амосов МИАН, Россия

М.В. Воронов ФГБОУ ВО МГППУ, Россия

Е.Л. Григоренко МГУ им. М.В. Ломоносова,
Россия; Йельский университет,
США

В.К. Захаров МГУ им. М.В. Ломоносова,
Россия

А.И. Кибзун МАИ, Россия

Леонид Либкин Эдинбургский университет,
Великобритания

В.Р. Милов НГТУ им. Р.Е. Алексеева,
Россия

А.В. Наумов МАИ, Россия

Д.Л. Ревизников МАИ, Россия

Холлинг Хайнц Университет Мюнстера,
Германия

Девид Фрэнсис Университет Хьюстона,
США

К.В. Хорошенков Брэдфордский университет,
Великобритания.

Г.А. Юрьев ФГБОУ ВО МГППУ, Россия

Моделирование и анализ данных

Издательство ФГБОУ ВО МГППУ

Издается с 2011 года. Периодичность: 4 раза в год.

Свидетельство регистрации СМИ: ПИ № ФС77-66444

Дата регистрации: 14.07.2016

Формат: 70×100/16

Тираж 500 экз.

Все права защищены. Название журнала, логотип, рубрики, все тексты и иллюстрации являются собственностью ФГБОУ ВО МГППУ и защищены авторским правом. Перепечатка материалов и использование иллюстраций допускается только с письменного разрешения редакции.

© ФГБОУ ВО «Московский государственный психолого-педагогический университет», 2023, № 2

Modelling and Data Analysis

Editor-in-Chief:

L.S. Kuravsky MSUPE, Russia

Deputy Editors-in-Chief:

S.D. Kulik MPEPhI, Russia

A.V. Panteleev MAI, Russia

The Editorial Council

Chairman of the Editorial Council:

G.G. Amosov MI RAS, Russia

The Members of the Editorial Council:

V.A. Barabanschikov MSUPE, Russia

Peter Bentler University of California,
USA

A.V. Gorbатов MISIS, Russia

L.S. Kuravsky MSUPE, Russia

Leonid Libkin University of Edinburgh,
UK

A.A. Margolis MSUPE, Russia

V.V. Rubtsov MSUPE, Russia

D.V. Ushakov IP RAS, Russia

David Francis University Of Houston, USA

The Editorial Board:

K.K. Abgaryan IU RAS, Russia

G.G. Amosov MI RAS, Russia

M.V. Voronov MSUPE, Russia

E.L. Grigorenko Lomonosov Moscow State
University, Russia;
Yale University, USA

V.K. Zakharov Lomonosov Moscow State
University, Russia

A.I. Kibzun MAI, Russia

Leonid Libkin University of Edinburgh,
UK

V.R. Milov NNSTU n.a. R.E. Alekseev,
Russia

A.V. Naumov MAI, Russia

D.L. Reviznikov MAI, Russia

Holling Heinz University Of Münster,
Germany

David Francis University Of Houston,
USA

K.V. Horoshenkov University of Bradford,
UK

G.A. Yuryev MSUPE, Russia

Modelling and Data Analysis

Publisher MSUPE

Frequency: since 2011

Published: 4 times a year

The mass medium registration certificate:

PN № ФС77-66444.

From: 14.07.2016

Format: 70×100/16

500 copies

All rights reserved. Journal title, logo, rubrics, all texts and images are the property of MSUPE and copyrighted. Using reprints and illustrations is allowed only with the written permission of the publisher.

© MSUPE, 2023, no. 2



◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇ СОДЕРЖАНИЕ ◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇

АНАЛИЗ ДАННЫХ

Денискина Г.Ю.

Оптимизация выбора схемы 3D-печати функциональных объектов из композиционных материалов..... 7

Пантелеев А.В., Яковлева А.А.

Достаточные условия существования H_∞ -наблюдателя состояния линейных непрерывных динамических систем..... 36

Сологуб Г.Б. Пухов В.А.

Проблемы классификации текстов естественного языка методами классического машинного обучения 64

Сологуб Г.Б., Сазон Н.С.

Прогнозирование рейтинга нового фильма по его метаданным 77

МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ

Базилевский М.П.

Обобщение неэлементарных линейных регрессий 85

Каранэ М.М.С.

Псевдоспектральный метод поиска оптимального управления пучками траекторий на базе мультиагентных алгоритмов оптимизации 99

Пантелеев А.В., Ковтунов С.С., Ракитянский В.М.

Методика определения свойств компонентов композиционного материала на основе миграционных алгоритмов глобальной оптимизации..... 123

Рассказова В.А., Скуридин А.А.

Задача о назначении производственных ресурсов с системой ограничений 142

Ибрагимов Д.Н., Подгорная В.М.

Суперэллипсоидальные аппроксимации в задаче быстрогодействия для двумерной линейной дискретной системы с ограниченным управлением..... 151

КОМПЛЕКСЫ ПРОГРАММ

Старков В.В., Горбатова С.С., Водолага В.И.

Разработка ETL процесса на базе open source технологий для решения задачи доставки данных потребителям..... 180



МЕТОДИКА ПРЕПОДАВАНИЯ

Мартюшова Я.Г.

Анализ результатов педагогического эксперимента по внедрению
дистанционных образовательных технологий в преподавание
математических дисциплин для технических специальностей вузов..... 194

Волков А.И., Лукин В.Н., Чернышов Л.Н.

«Перевернутый» учебный план – это решение или проблема?..... 206



◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇ **CONTENTS** ◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇

DATA ANALYSIS

Deniskina G.Yu.
Optimization of the Choice of 3D Printing
Scheme of Functional Objects Made of Composite Materials 33

Panteleev A.V., Yakovleva A.A.
Sufficient Conditions for the Existence of a H_∞ -infinity
State Observer for Linear Continuous Dynamical Systems 61

Sologub G.B., Pukhov V.A.
Problems of Natural Language Classification
Using Methods of Classical Machine Learning 76

Sologub G.B., Sazon N.S.
Forecasting the Rating of a New Movie Based on its Metadata 84

OPTIMIZATION METHODS

Bazilevskiy M.P.
Generalization of Non-elementary Linear Regressions 96

Karane M.M.S.
Pseudospectral Method for Finding Optimal Control
of Trajectory Bundles Based on Multi-Agent Optimization Algorithms 120

Panteleev A.V., Kovtunov S.S., Rakitianskii V.M.
Methodology for Determining the Properties of Composite
Material Components Based on Migration Algorithms of Global Optimization 140

Rasskazova V.A., Skuridin A.A.
The Problem of Allocation of Production Resources with a System of Constraints 149

Ibragimov D.N., Podgornaya V.M.
Superellipsoidal Approximations in the Speed-in-action
Problem for a Two-dimensional Linear Discrete System with Bounded Control 178

SOFTWARE

Starkov V.V., Gorbatova S.S., Vodolaga V.I.
Development of an ETL Process Based on Open Source
Technologies to Solve the Problem of Data Delivery to Consumers 192



METHOD OF TEACHING

Martyushova Ya.G.

Analysis of the Pedagogical Experiment Results
on the Implementation of Distance Learning Technologies in the Teaching
of Mathematical Disciplines for Technical Specialties of Universities 204

Volkov A.I., Lukin V.N., Chernyshov L.N.

Is the «Inverted» Curriculum Solution or Problem?..... 213

◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆ АНАЛИЗ ДАННЫХ ◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆

УДК 004.925.8:621.771.068

Оптимизация выбора схемы 3D-печати функциональных объектов из композиционных материалов

*Денискина Г.Ю.**

Московский авиационный институт
(национальный исследовательский университет) (МАИ)
г. Москва, Российская Федерация
ORCID: <https://orcid.org/0009-0000-4226-3288>
e-mail: dega17@yandex.ru

Реализация приоритетных направлений развития российской экономики, цифровая трансформация производства, совершенствование и разработка новых конструкций, применяемых на отечественных предприятиях авиационной и ракетно-космической отрасли, энергетики, машиностроения и других, в значительной мере связано с использованием полимерных композиционных материалов (КМ), которые обеспечивают оптимальные физико-механические характеристики конструкций (функциональных объектов). В качестве армирующих элементов КМ широкое применение находят углеродные волокна, т.к. они обладают большой удельной прочностью. При этом механические свойства изделий существенно зависят от направления волокон. Одним из перспективных направлений изготовления объектов из КМ, позволяющим создавать конструкции сложной формы, является технология 3D-печати. Применение 3D-печати в технологии композитов в принципе позволяет получать конструкции с пространственным армированием по заданным траекториям. Это связано с тем, что для печати используется полимерный композит, армированный непрерывным углеродным волокном (CFRT). При этом возможен полный контроль над расположением волокон во время процесса печати, что позволяет располагать 100 % волокон в соответствии с требуемыми условиями эксплуатации объекта. Однако практически неисследованными являются вопросы, связанные с оптимизацией процесса 3D-печати функциональных объектов из КМ методом 3D-печати CFRT в части контроля расположения волокон при печати, позволяющих учитывать критерии разрушения композита. Именно этой цели посвящена настоящая работа, в которой предлагаются общие подходы к постановке и решению задачи оптимизации выбора схемы 3D-печати.

Ключевые слова: оптимизация, композиционные материалы, теория упругости, критерии разрушения композита, 3D-печать, вейвлет-анализ.



Для цитаты:

Денискина Г.Ю. Оптимизация выбора схемы 3D-печати функциональных объектов из композиционных материалов // Моделирование и анализ данных. 2023. Том 13. № 2. С. 7–35. DOI: <https://doi.org/10.17759/mda.2023130201>

*Денискина Галина Юрьевна, ассистент кафедры теории вероятностей и компьютерного моделирования, Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет) (МАИ), г. Москва, Российская Федерация, ORCID: <https://orcid.org/0009-0000-4226-3288>, e-mail: dega17@yandex.ru

1. ВВЕДЕНИЕ

Известно, что схема укладки волокна заложена в самих уравнениях механики КМ в виде некоторой (неизвестной) локальной ортогональной системы координат. То есть найти оптимальную схему можно только из решения уравнений с разными локальными системами координат. Традиционно схемы укладки волокон рассчитываются численными методами, главным недостатком которых является большой объём и трудоёмкость вычислительного процесса. В настоящей работе предлагается схемы укладки волокон при печати моделировать с помощью аналитических функций, которые находятся из задачи Неймана для уравнения Лапласа. Работа базируется на научно-технологических решениях исследователей Yamanaka Y., Todoroki A., Ueda M., Hirano Y., Matsuzaki R., которые предложили укладывать волокна по линиям тока несжимаемой жидкости [18, 27].

Для выбора оптимальной схемы печати в качестве целевой функции можно взять любой из критериев разрушения композиционного материала [1, 12].

Краевые условия для задачи Неймана строятся на основе задания углов между волокнами и границей области печати. Сама задача Неймана решается посредством конформного преобразования области печати на круг, которое задаётся с помощью формулы Чизотти. Таким образом, критерий разрушения композита становится функцией от углов, образуемых волокнами с границей области печати. Минимизация целевой функции осуществляется с помощью генетического алгоритма поиска глобального минимума функции нескольких переменных. Для приближённого решения уравнений механики композиционных материалов предлагается использовать вейвлеты, построенные на основе схем подразделений и подъёма [3, 4, 10, 11, 13]. Применению вейвлетов в различных дисциплинах посвящены многочисленные исследования, в первую очередь таких авторов, как Amati G., Bujurke N., Daubechies I., Lepik, U., Mallat S., Micchelli C.A., Stollnitz E.J., Sweldens W. [9, 14, 15–17, 19–26] и др. Преимущество вейвлетов перед другими базисными функциями состоит в том, что вейвлет-коэффициенты убывают быстро, поэтому достаточно небольшого числа слагаемых в разложениях. Дополнительное преимущество вейвлетов, использующих схемы подразделений и подъёма состоит в возможности управлять формой и гладкостью базисных функций, например, можно обнулять их на выбранной области, что ещё уменьшает число слагаемых в разложении. Эти преимущества оказываются важ-



ны, т.к. при минимизации целевой функции требуется многократно решать систему уравнений в частных производных, описывающую напряжённо-деформируемое состояние конструкции [3].

В данной работе предлагается общая схема решения задачи выбора оптимальной схемы 3D-печати функциональных объектов из полимерных КМ, армированных непрерывным углеродным волокном, в части контроля расположения волокон (рис. 1).



Рис. 1. Общая схема решения задачи выбора оптимальной схемы печати

2. ЭЛЕМЕНТЫ МЕХАНИКИ КОНСТРУКЦИЙ ИЗ КОМПОЗИЦИОННЫХ МАТЕРИАЛОВ

Представим уравнения теории упругости ортотропной среды, которые позволяют описать напряжённо-деформированное состояние широкого класса композитных систем [2].

Введём декартову систему координат O, x_1, x_2, x_3 и связанную с рассматриваемой средой ортогональную систему криволинейных координат O', v_1, v_2, v_3 . Пусть соответствие между декартовой и криволинейной системами задаётся с помощью преобразования

$$\begin{cases} x_1 = x_1(v_1, v_2, v_3), \\ x_2 = x_2(v_1, v_2, v_3), \\ x_3 = x_3(v_1, v_2, v_3). \end{cases} \quad (1)$$



Обратное к (1) преобразование пусть задано в виде

$$\begin{cases} v_1 = v_1(x_1, x_2, x_3), \\ v_2 = v_2(x_1, x_2, x_3), \\ v_3 = v_3(x_1, x_2, x_3). \end{cases} \quad (2)$$

Обозначим

$$H_i^2 = (\partial_i x_1)^2 + (\partial_i x_2)^2 + (\partial_i x_3)^2, \quad i = 1, 2, 3. \quad (3)$$

параметры Ламе для принятой системы координат O', v_1, v_2, v_3 .

Напряжённое состояние в какой-либо точке M сплошного трёхмерного тела, как известно, характеризуется тензором напряжений, который определяется девятью компонентами. Из этих компонентов три являются нормальными напряжениями, которые действуют по трём взаимно перпендикулярным направлениям координатных линий $O'v_i$, $i = 1, 2, 3$ и шесть – касательными напряжениями (рис. 2), действующими в трёх взаимно перпендикулярных плоскостях, являющихся касательными плоскостями в точке M к трём взаимно перпендикулярным координатным поверхностям $v_1 = const$, $v_2 = const$, $v_3 = const$.

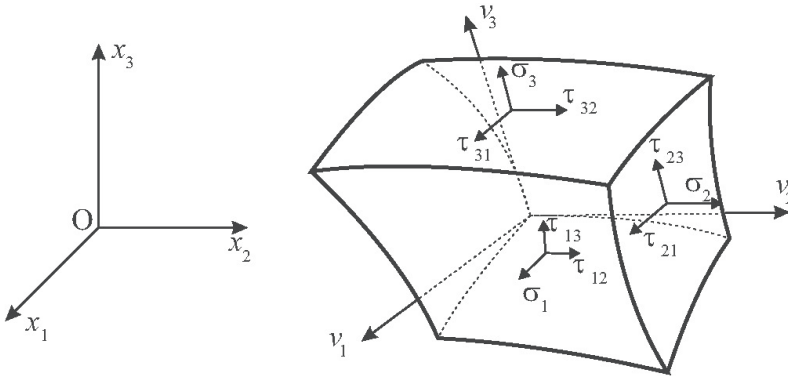


Рис. 2. Элемент сплошной среды, отнесённый к декартовой системе координат O, x_1, x_2, x_3 и криволинейной системе O', v_1, v_2, v_3

Уравнения равновесия, связывающие напряжения, действующие по граням выделенного из среды элемента и объёмные силы

$$F = (F_1(v_1, v_2, v_3) \quad F_2(v_1, v_2, v_3) \quad F_3(v_1, v_2, v_3))$$

имеют вид [2]:

$$\frac{\partial}{\partial v_1}(H_2 H_3 \sigma_1) + \frac{\partial}{\partial v_2}(H_1 H_3 \tau_{12}) + \frac{\partial}{\partial v_3}(H_1 H_2 \tau_{13}) - \sigma_2 H_3 \frac{\partial H_2}{\partial v_1} - \quad (4)$$



$$-\sigma_3 H_2 \frac{\partial H_3}{\partial v_1} + \tau_{12} H_3 \frac{\partial H_1}{\partial v_2} + \tau_{13} H_2 \frac{\partial H_1}{\partial v_3} + F_1 H_1 H_2 H_3 = 0, \quad (4)$$

$$\frac{\partial}{\partial v_2} (H_1 H_3 \sigma_2) + \frac{\partial}{\partial v_3} (H_1 H_2 \tau_{23}) + \frac{\partial}{\partial v_1} (H_2 H_3 \tau_{12}) - \sigma_3 H_1 \frac{\partial H_3}{\partial v_2} - \quad (5)$$

$$-\sigma_1 H_3 \frac{\partial H_1}{\partial v_2} + \tau_{23} H_1 \frac{\partial H_2}{\partial v_3} + \tau_{12} H_3 \frac{\partial H_2}{\partial v_1} + F_2 H_1 H_2 H_3 = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial v_3} (H_1 H_2 \sigma_3) + \frac{\partial}{\partial v_1} (H_3 H_2 \tau_{13}) + \frac{\partial}{\partial v_2} (H_1 H_3 \tau_{23}) - \sigma_1 H_2 \frac{\partial H_1}{\partial v_3} - \quad (6)$$

$$-\sigma_2 H_1 \frac{\partial H_2}{\partial v_3} + \tau_{13} H_2 \frac{\partial H_3}{\partial v_1} + \tau_{23} H_1 \frac{\partial H_3}{\partial v_2} + F_3 H_1 H_2 H_3 = 0.$$

Касательные напряжения обладают свойством парности $\tau_{i,k} = \tau_{k,i}$. В криволинейно ортотропной среде, оси которой совпадают с координатными линиями v_1, v_2, v_3 нормальные напряжения вызывают удлинения [2]

$$\begin{cases} \varepsilon_1 = \frac{1}{E_1} \sigma_1 - \mu_{12} \frac{\sigma_2}{E_2} - \mu_{13} \frac{\sigma_3}{E_3}, \\ \varepsilon_2 = \frac{1}{E_2} \sigma_2 - \mu_{23} \frac{\sigma_3}{E_3} - \mu_{21} \frac{\sigma_1}{E_1}, \\ \varepsilon_3 = \frac{1}{E_3} \sigma_3 - \mu_{31} \frac{\sigma_1}{E_1} - \mu_{32} \frac{\sigma_2}{E_2}, \end{cases} \quad (7)$$

а касательные напряжения – деформации сдвига [2]

$$\begin{cases} \varepsilon_{12} = \frac{\tau_{12}}{G_{12}}, \\ \varepsilon_{23} = \frac{\tau_{23}}{G_{23}}, \\ \varepsilon_{31} = \frac{\tau_{31}}{G_{31}}. \end{cases} \quad (8)$$

Здесь имеют место условия симметрии упругих постоянных [2]

$$\begin{cases} \mu_{12} E_1 = \mu_{21} E_2; \\ \mu_{23} E_2 = \mu_{32} E_3; \\ \mu_{31} E_3 = \mu_{13} E_1. \end{cases} \quad (9)$$



Нормальные и сдвиговые деформации связаны с перемещениями ξ_1, ξ_2, ξ_3 вдоль соответствующих координатных линий геометрическими соотношениями [2]:

$$\begin{cases} \varepsilon_1 = \frac{1}{H_1} \partial_1 \xi_1 + \partial_2 H_1 \frac{\xi_2}{H_1 H_2} + \partial_3 H_1 \frac{\xi_3}{H_1 H_3}, \\ \varepsilon_2 = \frac{1}{H_2} \partial_2 \xi_2 + \partial_3 H_2 \frac{\xi_3}{H_2 H_3} + \partial_1 H_2 \frac{\xi_1}{H_2 H_1}, \\ \varepsilon_3 = \frac{1}{H_3} \partial_3 \xi_3 + \partial_1 H_3 \frac{\xi_1}{H_3 H_1} + \partial_2 H_3 \frac{\xi_2}{H_3 H_2}, \\ \varepsilon_{12} = \frac{H_1}{H_2} \partial_2 \left(\frac{\xi_1}{H_1} \right) + \frac{H_2}{H_1} \partial_1 \left(\frac{\xi_2}{H_2} \right), \\ \varepsilon_{23} = \frac{H_2}{H_3} \partial_3 \left(\frac{\xi_2}{H_2} \right) + \frac{H_3}{H_2} \partial_2 \left(\frac{\xi_3}{H_3} \right), \\ \varepsilon_{31} = \frac{H_3}{H_1} \partial_1 \left(\frac{\xi_3}{H_3} \right) + \frac{H_1}{H_3} \partial_3 \left(\frac{\xi_1}{H_1} \right). \end{cases} \quad (10)$$

Равенства (4) – (8) и (10) образуют полную систему уравнений теории упругости в ортогональных криволинейных координатах. Решение этих уравнений должно удовлетворять граничным условиям, заданным на поверхности тела. Геометрические граничные условия накладываются непосредственно на перемещения ξ_1, ξ_2, ξ_3 . Статические граничные условия, определяющие характер нагружения тела поверхностными силами, записываются следующим способом

$$\begin{cases} \sigma_1 n_1 + \tau_{12} n_2 + \tau_{13} n_3 = F_{n,1}, \\ \sigma_2 n_2 + \tau_{23} n_3 + \tau_{21} n_1 = F_{n,2}, \\ \sigma_3 n_3 + \tau_{31} n_1 + \tau_{32} n_2 = F_{n,3}, \end{cases} \quad (11)$$

где n – нормаль к границе тела, а n_i – косинус угла между нормалью и осью $O'v_i$.

Уравнения механики тонкостенных композитных систем.

Рассмотрим некоторый элемент слоистого материала отнесённый к ортогональной системе криволинейных координат v_1, v_2, v_3 (рис. 3).

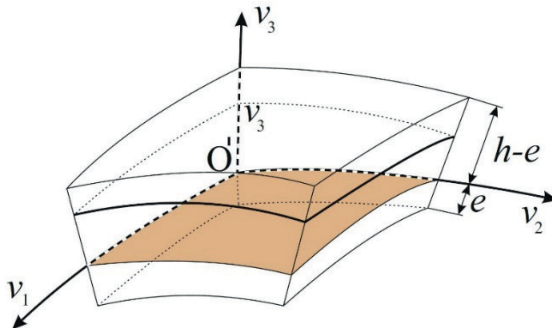


Рис. 3. Элемент слоистого материала



При этом ось $O'v_1$ совпадает с направлением волокна, ось $O'v_3$ ортогональна некоторой заданной начальной поверхности $v_3 = 0$. Обозначим $A_1(v_1, v_2) = H_1(v_1, v_2, 0)$, $A_2(v_1, v_2) = H_2(v_1, v_2, 0)$ – коэффициенты первой квадратичной формы начальной поверхности. Тогда, если R_1, R_2 – главные радиусы кривизны начальной поверхности, тогда коэффициенты Ламе вычисляются по формулам [2]

$$H_i = A_i \left(1 + \frac{v_3}{R_i} \right), \quad H_3 = 1. \quad (11)$$

Будем считать, что материал не деформируется в направлении оси $O'v_3$. Таким образом, изменение толщины h материала не учитывается. Поэтому $\varepsilon_3 = 0$ и $\mu_{31} = \mu_{32} = 0$, $E_3 = \infty$. Следовательно, на основании этой гипотезы, получаем

$$\begin{cases} \varepsilon_1 = \frac{1}{E_1} \sigma_1 - \mu_{12} \frac{\sigma_2}{E_2}, \\ \varepsilon_2 = \frac{1}{E_2} \sigma_2 - \mu_{21} \frac{\sigma_1}{E_1} \end{cases} \quad (12)$$

Выражая из (12) и (8) напряжения, получим

$$\begin{cases} \sigma_1 = a_{11} \varepsilon_1 + a_{12} \varepsilon_2; \\ \sigma_2 = a_{21} \varepsilon_1 + a_{22} \varepsilon_2; \\ \tau_{12} = a_{33} \varepsilon_{12}, \end{cases} \quad (13)$$

где

$$a_{11} = \frac{E_1}{1 - \mu_{12}\mu_{21}}; \quad a_{12} = \frac{E_1\mu_{12}}{1 - \mu_{12}\mu_{21}}; \quad a_{21} = \frac{E_2\mu_{21}}{1 - \mu_{12}\mu_{21}}; \\ a_{22} = \frac{E_2}{1 - \mu_{12}\mu_{21}}, \quad a_{33} = G_{12}.$$

Уравнения (10) примут вид

$$\begin{cases} \varepsilon_1 = \frac{1}{H_1} \partial_1 \xi_1 + \partial_2 H_1 \frac{\xi_2}{H_1 H_2}, \\ \varepsilon_2 = \frac{1}{H_2} \partial_2 \xi_2 + \partial_1 H_2 \frac{\xi_1}{H_2 H_1}, \\ \varepsilon_3 = \partial_3 \xi_3 = 0, \\ \varepsilon_{12} = \frac{H_1}{H_2} \partial_2 \left(\frac{\xi_1}{H_1} \right) + \frac{H_2}{H_1} \partial_1 \left(\frac{\xi_2}{H_2} \right), \\ \varepsilon_{23} = H_2 \partial_3 \left(\frac{\xi_2}{H_2} \right) + \frac{1}{H_2} \partial_2 (\xi_3), \\ \varepsilon_{31} = \frac{1}{H_1} \partial_1 (\xi_3) + H_1 \partial_3 \left(\frac{\xi_1}{H_1} \right). \end{cases} \quad (14)$$



Отсюда получаем $\xi_3 = \xi_3(v_1, v_2)$. В равенствах для ε_{23} и ε_{31} осредним деформацию сдвига по толщине материала

$$t_1 = \frac{1}{hA_1} \int_{-e}^{h-e} \varepsilon_{1,3} H_1 dv_3 = \frac{1}{hA_1} \int_{-e}^{h-e} \frac{\tau_{13}}{G_{13}} H_1 dv_3,$$

$$t_2 = \frac{1}{hA_2} \int_{-e}^{h-e} \varepsilon_{2,3} H_2 dv_3 = \frac{1}{hA_2} \int_{-e}^{h-e} \frac{\tau_{23}}{G_{23}} H_2 dv_3.$$

Тогда распределение перемещений по толщине материала выражается следующими формулами

$$\xi_i = \xi_{i,0}(v_1, v_2) + v_3 \theta_i(v_1, v_2), \quad i = 1, 2,$$

где $\theta_i = t_i + \frac{\xi_{i,0}}{R_i} - \frac{1}{A_i} \partial_i \xi_3$,

$\xi_{i,0}(v_1, v_2)$ – перемещения точек начальной поверхности в направлении v_i .

Обозначим

$$N_1 = \frac{1}{A_2} \int_{-e}^{h-e} \sigma_1 H_2 dv_3, \quad N_2 = \frac{1}{A_1} \int_{-e}^{h-e} \sigma_2 H_1 dv_3;$$

$$N_{12} = \frac{1}{A_2} \int_{-e}^{h-e} \tau_{12} H_2 dv_3, \quad N_{21} = \frac{1}{A_1} \int_{-e}^{h-e} \tau_{21} H_1 dv_3;$$

$$M_1 = \frac{1}{A_2} \int_{-e}^{h-e} \sigma_1 H_2 v_3 dv_3, \quad M_2 = \frac{1}{A_1} \int_{-e}^{h-e} \sigma_2 H_1 v_3 dv_3;$$

$$M_{12} = \frac{1}{A_2} \int_{-e}^{h-e} \tau_{12} H_2 v_3 dv_3, \quad M_{21} = \frac{1}{A_1} \int_{-e}^{h-e} \tau_{21} H_1 v_3 dv_3.$$

Кроме этого, пусть

$$K_{12} = \frac{A_1 H_2}{A_2 H_1}; \quad K_{21} = \frac{A_2 H_1}{A_1 H_2};$$

$$B_{11} = \int_{-e}^{h-e} K_{12} a_{11} dv_3; \quad C_{11} = \int_{-e}^{h-e} K_{12} a_{11} v_3 dv_3; \quad D_{11} = \int_{-e}^{h-e} K_{12} a_{11} v_3^2 dv_3;$$

$$B_{12} = B_{21} = \int_{-e}^{h-e} a_{12} dv_3; \quad C_{12} = C_{21} = \int_{-e}^{h-e} a_{12} v_3 dv_3; \quad D_{12} = D_{21} = \int_{-e}^{h-e} a_{12} v_3^2 dv_3;$$

$$B_{33}^{11} = \int_{-e}^{h-e} K_{12} a_{33} dv_3; \quad C_{33}^{11} = \int_{-e}^{h-e} K_{12} a_{33} v_3 dv_3; \quad D_{33}^{11} = \int_{-e}^{h-e} K_{12} a_{33} v_3^2 dv_3;$$

$$B_{33}^{12} = B_{33}^{21} = \int_{-e}^{h-e} a_{33} dv_3; \quad C_{33}^{12} = C_{33}^{21} = \int_{-e}^{h-e} a_{33} v_3 dv_3; \quad D_{33}^{12} = D_{33}^{21} = \int_{-e}^{h-e} a_{33} v_3^2 dv_3;$$



$$K_1 = \frac{h^2}{\int_{-e}^{h-e} \frac{K_{21}}{G_{13}} dv_3}; \quad K_2 = \frac{h^2}{\int_{-e}^{h-e} \frac{K_{12}}{G_{23}} dv_3}.$$

Эти выражения определяют мембранные B , изгибные D и смешанные C жесткости материала. Пусть

$$Q_1 = \frac{1}{A_2} \int_{-e}^{h-e} \tau_{13} H_2 dv_3; \quad Q_2 = \frac{1}{A_1} \int_{-e}^{h-e} \tau_{23} H_1 dv_3$$

и статические граничные условия на внутренней и внешней поверхностях композитной стенки имеют вид:

$$\begin{aligned} \tau_{13} &= -p_1; \quad \tau_{23} = -p_2; \quad \sigma_3 = -p, \quad \text{при } v_3 = -e; \\ \tau_{13} &= q_1; \quad \tau_{23} = q_2; \quad \sigma_3 = -q, \quad \text{при } v_3 = h - e. \end{aligned}$$

Обозначим

$$\begin{aligned} B_1 &= A_1 \left(1 - \frac{e}{R_1} \right); \quad B_2 = A_2 \left(1 - \frac{e}{R_2} \right); \\ C_1 &= A_1 \left(1 + \frac{h-e}{R_1} \right); \quad C_2 = A_2 \left(1 + \frac{h-e}{R_2} \right). \\ g_i &= \int_{-e}^{h-e} F_i H_1 H_2 dv_3 + B_1 B_2 p_i + C_1 C_2 q_i; \quad i = 1, 2; \\ g_3 &= \int_{-e}^{h-e} F_3 H_1 H_2 dv_3 + B_1 B_2 p - C_1 C_2 q; \\ m_i &= \int_{-e}^{h-e} F_i H_1 H_2 v_3 dv_3 - e B_1 B_2 p_i + (h-e) C_1 C_2 q_i, \quad i = 1, 2. \end{aligned}$$

Полная система уравнений относительно усилий, моментов, деформаций и перемещений имеет вид [2]

$$\begin{aligned} \partial_1 (A_2 N_1) - N_2 \partial_1 (A_2) + \partial_2 (A_1 N_{21}) + N_{12} \partial_2 (A_1) + \frac{A_1 A_2}{R_1} Q_1 + g_1 &= 0; \\ \partial_2 (A_1 N_2) - N_1 \partial_2 (A_1) + \partial_1 (A_2 N_{12}) + N_{21} \partial_1 (A_2) + \frac{A_1 A_2}{R_2} Q_2 + g_2 &= 0; \\ \partial_1 (A_2 M_1) - M_2 \partial_1 (A_2) + \partial_2 (A_1 M_{21}) + M_{12} \partial_2 (A_1) - A_1 A_2 Q_1 + m_1 &= 0; \\ \partial_2 (A_1 M_2) - M_1 \partial_2 (A_1) + \partial_1 (A_2 M_{12}) + M_{21} \partial_1 (A_2) - A_1 A_2 Q_2 + m_2 &= 0; \\ \partial_1 (A_2 Q_1) + \partial_2 (A_1 Q_2) - A_1 A_2 \left(\frac{N_1}{R_1} + \frac{N_2}{R_2} \right) + g_3 &= 0 \end{aligned}$$



$$N_1 = B_{11}\varepsilon_1 + B_{12}\varepsilon_2 + C_{11}\kappa_1 + C_{12}\kappa_2$$

$$N_2 = B_{22}\varepsilon_2 + B_{21}\varepsilon_1 + C_{22}\kappa_2 + C_{21}\kappa_1$$

$$M_1 = C_{11}\varepsilon_1 + C_{12}\varepsilon_2 + D_{11}\kappa_1 + D_{12}\kappa_2$$

$$M_2 = C_{22}\varepsilon_2 + C_{21}\varepsilon_1 + D_{22}\kappa_2 + D_{21}\kappa_1$$

$$N_{12} = B_{33}^{11}\varepsilon_{12} + B_{33}^{12}\varepsilon_{21} + C_{33}^{11}\kappa_{12} + C_{33}^{12}\kappa_{21}$$

$$N_{21} = B_{33}^{11}\varepsilon_{21} + B_{33}^{21}\varepsilon_{12} + C_{33}^{11}\kappa_{21} + C_{33}^{21}\kappa_{12}$$

$$M_{12} = C_{33}^{11}\varepsilon_{12} + C_{33}^{12}\varepsilon_{21} + D_{33}^{11}\kappa_{12} + D_{33}^{12}\kappa_{21}$$

$$M_{21} = C_{33}^{11}\varepsilon_{21} + C_{33}^{21}\varepsilon_{12} + D_{33}^{11}\kappa_{21} + D_{33}^{21}\kappa_{12}$$

$$Q_1 = K_1 t_1; \quad Q_2 = K_2 t_2$$

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{A_1} \partial_1 \xi_{1,0} + \frac{\xi_{2,0}}{A_1 A_2} \partial_2 (A_1) + \frac{\xi_3}{R_1}; \quad \varepsilon_2 = \frac{1}{A_2} \partial_2 \xi_{2,0} + \frac{\xi_{1,0}}{A_1 A_2} \partial_1 (A_2) + \frac{\xi_3}{R_2};$$

$$\varepsilon_{12} = \frac{1}{A_1} \partial_1 \xi_{2,0} - \frac{\xi_{1,0}}{A_1 A_2} \partial_2 (A_1); \quad \varepsilon_{21} = \frac{1}{A_2} \partial_2 \xi_{1,0} - \frac{\xi_{2,0}}{A_1 A_2} \partial_1 (A_2);$$

$$\kappa_1 = \frac{1}{A_1} \partial_1 \theta_1 + \frac{\theta_2}{A_1 A_2} \partial_2 (A_1), \quad \kappa_2 = \frac{1}{A_2} \partial_2 \theta_2 + \frac{\theta_1}{A_1 A_2} \partial_1 (A_2);$$

$$\kappa_{12} = \frac{1}{A_1} \partial_1 \theta_2 - \frac{\theta_2}{A_1 A_2} \partial_2 (A_1), \quad \kappa_{21} = \frac{1}{A_2} \partial_2 \theta_1 - \frac{\theta_1}{A_1 A_2} \partial_1 (A_2);$$

$$t_1 = \theta_1 - \frac{\xi_{1,0}}{R_1} + \frac{1}{A_1} \partial_1 \xi_3, \quad t_2 = \theta_2 - \frac{\xi_{2,0}}{R_2} + \frac{1}{A_2} \partial_2 \xi_3.$$

Будем рассматривать случай $R_i = +\infty$. В этом случае $H_1 = A_1$, $H_2 = A_2$, $H_3 = 1$, а также $K_{12} = K_{21} = 1$ и $B_1 = C_1 = A_1$, $B_2 = C_2 = A_2$. Уравнения примут вид:

$$\partial_1 (A_2 N_1) - N_2 \partial_1 (A_2) + \partial_2 (A_1 N_{21}) + N_{12} \partial_2 (A_1) + g_1 = 0; \quad (15)$$

$$\partial_2 (A_1 N_2) - N_1 \partial_2 (A_1) + \partial_1 (A_2 N_{12}) + N_{21} \partial_1 (A_2) + g_2 = 0; \quad (16)$$

$$\partial_1 (A_2 M_1) - M_2 \partial_1 (A_2) + \partial_2 (A_1 M_{21}) + M_{12} \partial_2 (A_1) - A_1 A_2 Q_1 + m_1 = 0; \quad (17)$$

$$\partial_2 (A_1 M_2) - M_1 \partial_2 (A_1) + \partial_1 (A_2 M_{12}) + M_{21} \partial_1 (A_2) - A_1 A_2 Q_2 + m_2 = 0; \quad (18)$$

$$\partial_1 (A_2 Q_1) + \partial_2 (A_1 Q_2) + g_3 = 0 \quad (19)$$

$$N_1 = B_{11}\varepsilon_1 + B_{12}\varepsilon_2 + C_{11}\kappa_1 + C_{12}\kappa_2 \quad (20)$$

$$N_2 = B_{22}\varepsilon_2 + B_{21}\varepsilon_1 + C_{22}\kappa_2 + C_{21}\kappa_1 \quad (21)$$

$$M_1 = C_{11}\varepsilon_1 + C_{12}\varepsilon_2 + D_{11}\kappa_1 + D_{12}\kappa_2 \quad (22)$$

$$M_2 = C_{22}\varepsilon_2 + C_{21}\varepsilon_1 + D_{22}\kappa_2 + D_{21}\kappa_1 \quad (23)$$



$$N_{12} = B_{33}^{11} \varepsilon_{12} + B_{33}^{12} \varepsilon_{21} + C_{33}^{11} \kappa_{12} + C_{33}^{12} \kappa_{21} \quad (24)$$

$$N_{21} = B_{33}^{11} \varepsilon_{21} + B_{33}^{21} \varepsilon_{12} + C_{33}^{11} \kappa_{21} + C_{33}^{21} \kappa_{12} \quad (25)$$

$$M_{12} = C_{33}^{11} \varepsilon_{12} + C_{33}^{12} \varepsilon_{21} + D_{33}^{11} \kappa_{12} + D_{33}^{12} \kappa_{21} \quad (26)$$

$$M_{21} = C_{33}^{11} \varepsilon_{21} + C_{33}^{21} \varepsilon_{12} + D_{33}^{11} \kappa_{21} + D_{33}^{21} \kappa_{12} \quad (27)$$

$$Q_1 = K_1 t_1; \quad Q_2 = K_2 t_2 \quad (28)$$

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{A_1} \partial_1 \xi_{1,0} + \frac{\xi_{2,0}}{A_1 A_2} \partial_2 (A_1); \quad \varepsilon_2 = \frac{1}{A_2} \partial_2 \xi_{2,0} + \frac{\xi_{1,0}}{A_1 A_2} \partial_1 (A_2); \quad (29)$$

$$\varepsilon_{12} = \frac{1}{A_1} \partial_1 \xi_{2,0} - \frac{\xi_{1,0}}{A_1 A_2} \partial_2 (A_1); \quad \varepsilon_{21} = \frac{1}{A_2} \partial_2 \xi_{1,0} - \frac{\xi_{2,0}}{A_1 A_2} \partial_1 (A_2); \quad (30)$$

$$\kappa_1 = \frac{1}{A_1} \partial_1 \theta_1 + \frac{\theta_2}{A_1 A_2} \partial_2 (A_1), \quad \kappa_2 = \frac{1}{A_2} \partial_2 \theta_2 + \frac{\theta_1}{A_1 A_2} \partial_1 (A_2); \quad (31)$$

$$\kappa_{12} = \frac{1}{A_1} \partial_1 \theta_2 - \frac{\theta_2}{A_1 A_2} \partial_2 (A_1), \quad \kappa_{21} = \frac{1}{A_2} \partial_2 \theta_1 - \frac{\theta_1}{A_1 A_2} \partial_1 (A_2); \quad (32)$$

$$t_1 = \theta_1 + \frac{1}{A_1} \partial_1 \xi_3, \quad t_2 = \theta_2 + \frac{1}{A_2} \partial_2 \xi_3. \quad (33)$$

В результате имеем 25 уравнений относительно 25 неизвестных.

3. ПОСТРОЕНИЕ КРИВОЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ КООРДИНАТ В ДВУМЕРНОМ СЛУЧАЕ

В двумерном случае преобразования (1), (2) имеют вид $x_1 = x_1(v_1, v_2)$, $x_2 = x_2(v_1, v_2)$ и $v_1 = v_1(x_1, x_2)$, $v_2 = v_2(x_1, x_2)$. Условимся точки $x = (x_1 \ x_2)$ изображать на одной комплексной плоскости, а точки $v = (v_1 \ v_2)^T$ на другой. Тогда указанные преобразования представляют собой преобразование подмножества X плоскости x на подмножество Ω плоскости v . Поскольку

$$\begin{cases} x_1 = x_1(v_1(x_1, x_2), v_2(x_1, x_2)); \\ x_2 = x_2(v_1(x_1, x_2), v_2(x_1, x_2)), \end{cases}$$

то должны выполняться равенства

$$\begin{cases} \partial_1 x_1 \partial_1 v_1 + \partial_2 x_1 \partial_1 v_2 = 1; & \partial_1 x_1 \partial_2 v_1 + \partial_2 x_1 \partial_2 v_2 = 0; \\ \partial_1 x_2 \partial_1 v_1 + \partial_2 x_2 \partial_1 v_2 = 0, & \partial_1 x_2 \partial_2 v_1 + \partial_2 x_2 \partial_2 v_2 = 1. \end{cases}$$

Пусть $\Delta = \frac{\partial(x_1, x_2)}{\partial(v_1, v_2)}$. Тогда, из полученных систем, находим

$$\partial_1 v_1 = \frac{\partial_2 x_2}{\Delta}, \quad \partial_1 v_2 = -\frac{\partial_1 x_2}{\Delta}; \quad (34)$$



$$\partial_2 v_1 = -\frac{\partial_2 x_1}{\Delta}, \quad \partial_2 v_2 = \frac{\partial_1 x_1}{\Delta}. \quad (35)$$

Касательные векторы к кривым, по которым укладываются волокна при 3D-печати образуют векторное поле \mathbf{r} в X , которое будем характеризовать комплексным числом $\mathbf{r} = r_1 + ir_2$, где $r_1 = r_1(x_1, x_2)$, $r_2 = r_2(x_1, x_2)$. Будем считать это поле гармоническим, т.е. соленоидальным и потенциальным [7]. Такое поле не имеет источников и вихрей. Кроме того, обозначим \tilde{X} односвязную область, содержащей множество X , и поле будем рассматривать в этой односвязной области (рис. 4).

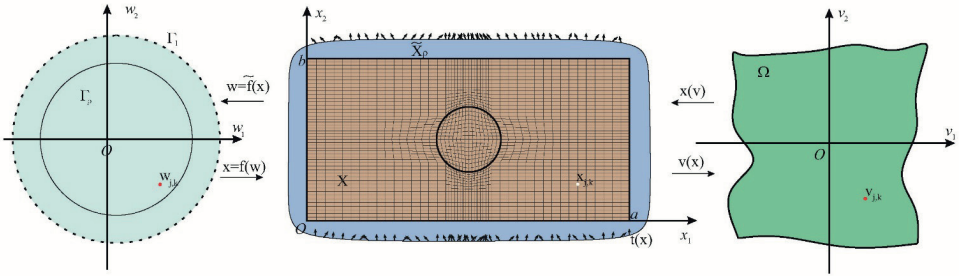


Рис. 4. Преобразование множества X

Следовательно,

$$\operatorname{div} \mathbf{r} = \partial_1 r_1 + \partial_2 r_2 = 0.$$

Значит, $-r_2 dx_1 + r_1 dx_2$ есть полный дифференциал некоторой функции v_2 , определенной на X . Эта функция называется функцией тока. Таким образом, $r_2 = -\partial_1 v_2$ и $r_1 = \partial_2 v_2$. Поскольку поле потенциально, имеем

$$\operatorname{rot} \mathbf{r} = 0.$$

Отсюда $\partial_1 r_2 - \partial_2 r_1 = 0$. Таким образом, выражение $r_1 dx_1 + r_2 dx_2$ есть полный дифференциал некоторой функции $v_1(x_1, x_2)$, которая называется потенциалом поля.

Итак, $r_1 = \partial_1 v_1$, $r_2 = \partial_2 v_1$. Кроме того, выполняются соотношения Коши-Римана

$$\partial_1 v_1 = \partial_2 v_2, \quad \partial_2 v_1 = -\partial_1 v_2.$$

Таким образом, функция тока $v_2(x_1, x_2)$ и потенциал поля $v_1(x_1, x_2)$ являются сопряженными гармоническими функциями. Следовательно, линии тока и линии равного потенциала образуют ортогональное семейство. Аналитическая функция

$$v_1(x_1, x_2) + iv_2(x_1, x_2), \quad x_1 + ix_2 \in X \quad (36)$$

называется комплексным потенциалом поля [8]. Таким образом, любая аналитическая функция в области \tilde{X} даёт нам и схему укладки волокон и локальную криволинейную систему координат в $X \subset \tilde{X}$. Сеть линий уровня $v_1(x_1, x_2) = \text{const}$,



$v_2(x_1, x_2) = \text{const}$ называется изотермической сетью. Кривые, по которым укладываются волокна, определяются параметрическими представлениями

$$\begin{aligned} \gamma_{\alpha,1} : r_{\alpha,1}(v_1) &= x_1(v_1, \alpha) + ix_2(v_1, \alpha), \quad v_1 \in T_{\alpha,1}, \\ \gamma_{\beta,2} : r_{\beta,2}(v_2) &= x_1(\beta, v_2) + ix_2(\beta, v_2), \quad v_2 \in T_{\beta,2}. \end{aligned}$$

где $T_{\alpha,1}, T_{\beta,2}$ – некоторые промежутки, $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ и $T_{\alpha,1} \times \{\alpha\}, \{\beta\} \times T_{\beta,2} \subset \Omega$.

Пусть $\Gamma_\rho = \{w = w_1 + iw_2 : w_1^2 + w_2^2 < \rho\}$ и $x = f(w) = f_1(w_1, w_2) + if_2(w_1, w_2)$ – конформное отображение круга Γ_1 на область \tilde{X} , а $w = \tilde{f}(x) = \tilde{f}_1(x_1, x_2) + i\tilde{f}_2(x_1, x_2)$ – преобразование обратное к $x = f(w)$. Для $\rho \in (0; 1)$ обозначим $\tilde{X}_\rho = f(\Gamma_\rho)$.

Зададим на границе области \tilde{X}_ρ ориентацию волокна. Пусть $n = n_1 + in_2$ – внешняя единичная нормаль к границе \tilde{X}_ρ и направление волокна в точке $x \in \partial\tilde{X}_\rho$ задается вектором

$$t(x) = \partial_1 x_1 \Big|_{v(x)} + i\partial_1 x_2 \Big|_{v(x)}. \quad (37)$$

С учётом равенств (34) и (35) и соотношений Коши-Римана, формулу (37) можно переписать в виде

$$t(x) = \Delta \cdot \partial_2 v_2(x) - i\Delta \cdot \partial_1 v_2(x) = \Delta \cdot \partial_1 v_1(x) + i\Delta \cdot \partial_2 v_1(x).$$

Итак функцию $v_1(x_1, x_2)$ на \tilde{X}_ρ можно искать из задачи Неймана

$$\begin{cases} \partial^{(2,0)} v_1 + \partial^{(0,2)} v_1 = 0; \\ \frac{\partial v_1}{\partial n}(x) = \partial_1 v_1(x) n_1(x) + \partial_2 v_1(x) n_2(x) = a(x) \cos \theta(x), \quad x \in \partial\tilde{X}_\rho, \end{cases} \quad (38)$$

где $\theta(x)$ – угол между $n(x)$ и $t(x)$.

Обозначим $\eta(x) = a(x) \cos \theta(x)$. Известно, что должно выполняться условие

$$\int_{\partial\tilde{X}_\rho} \frac{\partial v_1(x)}{\partial n} ds = \int_{\partial\tilde{X}_\rho} \frac{\partial v_2(x)}{\partial s} ds = \int_{\partial\tilde{X}_\rho} dv_2 = 0,$$

где $\frac{\partial v_2(x)}{\partial s}$ – производная по направлению касательной к границе области. Функция $a(x)$ в представленных примерах выбиралась следующим образом

$$a(x) = \begin{cases} \frac{1}{\int_{\cos \theta(x) > 0} \cos \theta(x) ds}, & \text{если } \cos \theta(x) > 0; \\ -\frac{1}{\int_{\cos \theta(x) < 0} \cos \theta(x) ds}, & \text{если } \cos \theta(x) < 0. \end{cases} \quad (39)$$



Из соотношений Коши-Римана и гармоничности функций $f_1(w_1, w_2)$, $f_2(w_1, w_2)$ следует, что функция $z(w) = v_1(f(w))$ удовлетворяет уравнению

$$\partial_{1,1}z + \partial_{2,2}z = 0.$$

Рассмотрим, какому краевому условию удовлетворяет функция $z(w)$.

Пусть $w \in \partial\Gamma_\rho$ и m – единичная нормаль к границе круга Γ_ρ . Тогда $m = \frac{w_1}{\rho} + i \frac{w_2}{\rho}$. Следовательно,

$$\frac{\partial z}{\partial m}(w) = \partial_1 z(w) \frac{w_1}{\rho} + \partial_2 z(w) \frac{w_2}{\rho} = \partial_1 v_1(f(w)) \frac{\partial f_1}{\partial m}(w) + \partial_2 v_1(f(w)) \frac{\partial f_2}{\partial m}(w).$$

Рассмотрим кривую $\partial\Gamma_\rho$ и кривую с параметрическими представлениями

$$\gamma_w : r_w(t) = w_1 \tau + i w_2 \tau, \quad \tau \in [0; 1].$$

Они перпендикулярны в точке $\tau = 1$, а их образы при конформном отображении $x = f(w)$ представляют собой кривую $\partial\tilde{X}_\rho$ и кривую

$$\gamma_{f(w)} : r_{f(w)}(\tau) = f_1(w_1 \tau, w_2 \tau) + i f_2(w_1 \tau, w_2 \tau), \quad \tau \in [0; 1].$$

Так как конформное отображение сохраняет углы между кривыми, то вектор нормали к границе $\partial\tilde{X}_\rho$ коллинеарен касательному вектору кривой $\gamma_{f(w)}$. С учётом того, что

$$\left| r'_{f(w)}(1) \right| = \rho \left| \nabla f_1(w) \right| = \rho \sqrt{(\partial_1 f_1(w))^2 + (\partial_2 f_1(w))^2},$$

получаем

$$n = \frac{r'_{f(w)}(1)}{\left| r'_{f(w)}(1) \right|} = \frac{\frac{\partial f_1}{\partial m}(w) + i \frac{\partial f_2}{\partial m}(w)}{\left| \nabla f_1(w) \right|}.$$

Следовательно, функция z является решением следующей задачи Неймана для круга Γ_ρ

$$\partial_{1,1}z + \partial_{2,2}z = 0.$$

$$\frac{\partial z}{\partial m}(w) = \eta(f(w)) \left| \nabla f_1(w) \right|, \quad w \in \partial\Gamma_\rho.$$

Как известно [8], решение такой задачи может быть найдено по формуле Дини

$$z(w_1, w_2) = -\frac{\rho}{2\pi} \int_0^{2\pi} \eta(f(\rho \cos \tau, \rho \sin \tau)) \left| \nabla f_1(\rho \cos \tau, \rho \sin \tau) \right| \cdot \ln \frac{(w_1 - \rho \cos \tau)^2 + (w_2 - \rho \sin \tau)^2}{\rho^2} d\tau + z_0, \quad (40)$$

где $z_0 \in \mathbb{C}$ – произвольная константа.



Для дальнейших приложений необходимы ещё формулы для частных производных $\partial_i z$, $\partial^{(i,s)} z$, $i, s = 0, 1, 2$, $i + s \leq 2$. Дифференцированием интеграла по параметру получаем

$$\partial_1 z(w_1, w_2) = -\frac{\rho}{\pi} \int_0^{2\pi} \eta(f(\rho \cos \tau, \rho \sin \tau)) |\nabla f_1(\rho \cos \tau, \rho \sin \tau)| \cdot \frac{(w_1 - \rho \cos \tau)}{(w_1 - \rho \cos \tau)^2 + (w_2 - \rho \sin \tau)^2} d\tau; \quad (41)$$

$$\partial_2 z(w_1, w_2) = -\frac{\rho}{\pi} \int_0^{2\pi} \eta(f(\rho \cos \tau, \rho \sin \tau)) |\nabla f_1(\rho \cos \tau, \rho \sin \tau)| \cdot \frac{(w_2 - \rho \sin \tau)}{(w_1 - \rho \cos \tau)^2 + (w_2 - \rho \sin \tau)^2} d\tau; \quad (42)$$

$$\partial^{(2,0)} z(w_1, w_2) = -\frac{\rho}{\pi} \int_0^{2\pi} \eta(f(\rho \cos \tau, \rho \sin \tau)) |\nabla f_1(\rho \cos \tau, \rho \sin \tau)| \cdot \frac{(w_2 - \rho \sin \tau)^2 - (w_1 - \rho \cos \tau)^2}{((w_1 - \rho \cos \tau)^2 + (w_2 - \rho \sin \tau)^2)^2} d\tau; \quad (43)$$

$$\partial^{(0,2)} z(w_1, w_2) = -\frac{\rho}{\pi} \int_0^{2\pi} \eta(f(\rho \cos \tau, \rho \sin \tau)) |\nabla f_1(\rho \cos \tau, \rho \sin \tau)| \cdot \frac{(w_1 - \rho \cos \tau)^2 - (w_2 - \rho \sin \tau)^2}{((w_1 - \rho \cos \tau)^2 + (w_2 - \rho \sin \tau)^2)^2} d\tau; \quad (44)$$

$$\partial^{(1,1)} z(w_1, w_2) = \frac{2\rho}{\pi} \int_0^{2\pi} \eta(f(\rho \cos \tau, \rho \sin \tau)) |\nabla f_1(\rho \cos \tau, \rho \sin \tau)| \cdot \frac{(w_1 - \rho \cos \tau)(w_2 - \rho \sin \tau)}{((w_1 - \rho \cos \tau)^2 + (w_2 - \rho \sin \tau)^2)^2} d\tau. \quad (45)$$

Отсюда решение исходной задачи Неймана имеет вид $v_1(x) = z(f^{-1}(x))$.

Обозначим $\nu(t)$ – угол наклона касательной к $\partial \tilde{X}$ в точке x , соответствующей точке $w = w_1 + iw_2 \in \partial \Gamma$ при конформном отображении $x = f(w)$. Тогда конформное преобразование единичного круга на область \tilde{X} может быть найдено по формуле Чизотти [8]



$$x = f_1(w_1, w_2) + if_2(w_1, w_2) = i \int_{w_{1,0} + iw_{2,0}}^{w_1 + iw_2} \frac{e^{i\zeta(y)}}{(1-y)^2} dy + x_0, \quad (46)$$

где

$$\zeta(y) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \nu(t) \frac{e^{it} + y}{e^{it} - y} dt + iA, \quad (47)$$

A – некоторая действительная постоянная, $x_0 \in \tilde{X}$, $w_{0,1} + iw_{0,2} \in \Gamma$ – заданные точки.

Имеем

$$\zeta(y_1, y_2) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \nu(t) \frac{\cos t + i \sin t + y_1 + iy_2}{\cos t - y_1 + i(\sin t - y_2)} dt + iA = \zeta_1(y_1, y_2) + i\zeta_2(y_1, y_2),$$

где

$$\zeta_1(y_1, y_2) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \nu(t) \frac{1 - y_1^2 - y_2^2}{1 + y_1^2 + y_2^2 - 2y_1 \cos t - 2y_2 \sin t} dt, \quad (48)$$

$$\zeta_2(y_1, y_2) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \nu(t) \frac{y_2 \cos t - y_1 \sin t}{1 + y_1^2 + y_2^2 - 2y_1 \cos t - 2y_2 \sin t} dt + A. \quad (49)$$

Пусть $w_{1,0} + iw_{2,0} = 0$, $x_0 = x_{1,0} + ix_{2,0}$ а кривая интегрирования – это отрезок прямой с параметрическим представлением $w = w_1 t + iw_2 t$, $t \in [0; 1]$. Тогда

$$f_1(w_1, w_2) = \text{Ref} = - \int_0^1 e^{-\zeta_2(w_1 t, w_2 t)} \left[\sin \zeta_1(tw_1, tw_2) (w_1 b_1(t) - w_2 b_2(t)) + \right. \\ \left. + \cos \zeta_1(tw_1, tw_2) (w_2 b_1(t) + w_1 b_2(t)) \right] dt + x_{1,0}; \quad (50)$$

$$f_2(w_1, w_2) = \text{Imf} = \int_0^1 e^{-\zeta_2(w_1 t, w_2 t)} \left[\cos \zeta_1(tw_1, tw_2) (w_1 b_1(t) - w_2 b_2(t)) - \right. \\ \left. - \sin \zeta_1(tw_1, tw_2) (w_2 b_1(t) + w_1 b_2(t)) \right] dt + x_{2,0}, \quad (51)$$

где

$$b_1(t) = \frac{1 - 2tu_1 + t^2 (u_1^2 - u_2^2)}{(1 - 2tu_1 + t^2 (u_1^2 + u_2^2))^2}, \quad (52)$$

$$b_2(t) = \frac{2tu_2 (1 - tu_1)}{(1 - 2tu_1 + t^2 (u_1^2 + u_2^2))^2}. \quad (53)$$

Нам потребуются формулы для частных производных $\partial_i \tilde{f}_k$, $\partial^{(\lambda, \mu)} \tilde{f}_k$, $i, k = 1, 2$, $\lambda, \mu = 0, 1, 2$, $\lambda + \mu \leq 2$. Для начала найдем частные производные $\partial_i \zeta_s$, $i, s = 1, 2$. Дифференцированием интеграла по параметру находим



$$\begin{aligned} \partial_1 \zeta_2(y_1, y_2) &= -\partial_2 \zeta_1(y_1, y_2) = \\ &= -\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \nu(t) \frac{(1 + y_2^2 - y_1^2) \sin t - 2y_2 + 2y_1 y_2 \cos t}{(1 + y_1^2 + y_2^2 - 2y_1 \cos t - 2y_2 \sin t)^2} dt, \end{aligned} \quad (54)$$

$$\begin{aligned} \partial_1 \zeta_1(y_1, y_2) &= \partial_2 \zeta_2(y_1, y_2) = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \nu(t) \frac{(1 + y_1^2 - y_2^2) \cos t - 2y_1 + 2y_1 y_2 \sin t}{(1 + y_1^2 + y_2^2 - 2y_1 \cos t - 2y_2 \sin t)^2} dt. \end{aligned} \quad (55)$$

Из формулы Чизотти находим

$$(\partial_1 f_1 + i \partial_1 f_2)(w) = i \frac{e^{i\zeta(w)}}{(1-w)^2}.$$

Отсюда, обозначая

$$\begin{aligned} I_1(w) &= \left((1-w_1)^2 - w_2^2 \right) \sin \zeta_1(w) + 2w_2(1-w_1) \cos \zeta_1(w); \\ I_2(w) &= (1-w_1)^2 + w_2^2; \\ I_3(w) &= \left((1-w_1)^2 - w_2^2 \right) \cos \zeta_1(w) - 2w_2(1-w_1) \sin \zeta_1(w), \end{aligned}$$

и, вычисляя частные производные этих функций

$$\begin{aligned} \partial_1 I_1(w) &= -2(1-w_1) \sin \zeta_1(w) + \left((1-w_1)^2 - w_2^2 \right) \partial_1 \zeta_1(w) \cos \zeta_1(w) - \\ &\quad - 2w_2 \cos \zeta_1(w) - 2w_2(1-w_1) \partial_1 \zeta_1(w) \sin \zeta_1(w), \\ \partial_2 I_1(w) &= -2w_2 \sin \zeta_1(w) + \left((1-w_1)^2 - w_2^2 \right) \partial_2 \zeta_1(w) \cos \zeta_1(w) + \\ &\quad + 2(1-w_1) \cos \zeta_1(w) - 2w_2(1-w_1) \partial_2 \zeta_1(w) \sin \zeta_1(w), \\ \partial_1 I_2(w) &= -2(1-w_1), \quad \partial_2 I_2(w) = 2w_2, \end{aligned}$$

получаем

$$\partial_1 f_1(w) = \partial_2 f_2(w) = -e^{-\zeta_2(w)} \frac{I_1(w)}{(I_2(w))^2}; \quad (56)$$

$$\partial_2 f_1(w) = -\partial_1 f_2(w) = -e^{-\zeta_2(w)} \frac{I_3(w)}{(I_2(w))^2}; \quad (57)$$

$$\begin{aligned} \partial^{(2,0)} f_1(w) &= e^{-\zeta_2(w)} \partial_1 \zeta_2(w) \frac{I_1(w)}{(I_2(w))^2} - e^{-\zeta_2(w)} \frac{\partial_1 I_1(w)}{(I_2(w))^2} + \\ &\quad + 2e^{-\zeta_2(w)} \frac{I_1(w) \partial_1 I_2(w)}{(I_2(w))^3}; \end{aligned} \quad (58)$$



$$\begin{aligned} \partial^{(1,1)} f_1(\mathbf{w}) &= e^{-\zeta_1(\mathbf{w})} \partial_2 \zeta_2(\mathbf{w}) \frac{I_1(\mathbf{w})}{(I_2(\mathbf{w}))^2} - e^{-\zeta_1(\mathbf{w})} \frac{\partial_2 I_1(\mathbf{w})}{(I_2(\mathbf{w}))^2} + \\ &+ 2e^{-\zeta_1(\mathbf{w})} \frac{I_1(\mathbf{w}) \partial_2 I_2(\mathbf{w})}{(I_2(\mathbf{w}))^3}; \end{aligned} \quad (59)$$

$$\partial^{(0,2)} f_1(\mathbf{w}) = -\partial^{(2,0)} f_1(\mathbf{w}); \quad (60)$$

$$\partial^{(2,0)} f_2(\mathbf{w}) = -\partial^{(1,1)} f_1(\mathbf{w}); \quad \partial^{(0,2)} f_2(\mathbf{w}) = \partial^{(1,1)} f_1(\mathbf{w}); \quad (61)$$

$$\partial^{(1,1)} f_2(\mathbf{w}) = \partial^{(2,0)} f_1(\mathbf{w}). \quad (62)$$

Теперь значения $\partial_i \tilde{f}_k$, $\partial^{(\lambda,\mu)} \tilde{f}_k$, $i, k = 1, 2$, $\lambda, \mu = 0, 1, 2$, $\lambda + \mu \leq 2$ можно найти по формулам (64) – (70).

Из равенств

$$\begin{cases} x_1 = x_1(u_1(x_1, x_2), u_2(x_1, x_2)), \\ x_2 = x_2(u_1(x_1, x_2), u_2(x_1, x_2)) \end{cases} \quad (63)$$

находим

$$\begin{cases} 1 = \partial^{(1,0)} x_1(u_{j,k}) \partial^{(1,0)} u_1(x_{j,k}) + \partial^{(0,1)} x_1(u_{j,k}) \partial^{(1,0)} u_2(x_{j,k}); \\ 0 = \partial^{(1,0)} x_2(u_{j,k}) \partial^{(1,0)} u_1(x_{j,k}) + \partial^{(0,1)} x_2(u_{j,k}) \partial^{(1,0)} u_2(x_{j,k}). \end{cases}$$

Отсюда

$$\begin{cases} \partial^{(1,0)} u_1(x_{j,k}) = \frac{\partial^{(0,1)} x_2(u_{j,k})}{\partial^{(1,0)} x_1(u_{j,k}) \partial^{(0,1)} x_2(u_{j,k}) - \partial^{(1,0)} x_2(u_{j,k}) \partial^{(0,1)} x_1(u_{j,k})}; \\ \partial^{(1,0)} u_2(x_{j,k}) = -\frac{\partial^{(1,0)} x_2(u_{j,k})}{\partial^{(1,0)} x_1(u_{j,k}) \partial^{(0,1)} x_2(u_{j,k}) - \partial^{(1,0)} x_2(u_{j,k}) \partial^{(0,1)} x_1(u_{j,k})}. \end{cases} \quad (64)$$

Аналогично, дифференцируя (63) по x_2 , получаем

$$\begin{cases} 0 = \partial^{(1,0)} x_1(u_{j,k}) \partial^{(0,1)} u_1(x_{j,k}) + \partial^{(0,1)} x_1(u_{j,k}) \partial^{(0,1)} u_2(x_{j,k}); \\ 1 = \partial^{(1,0)} x_2(u_{j,k}) \partial^{(0,1)} u_1(x_{j,k}) + \partial^{(0,1)} x_2(u_{j,k}) \partial^{(0,1)} u_2(x_{j,k}) \end{cases}$$

Отсюда

$$\begin{cases} \partial^{(0,1)} u_1(x_{j,k}) = -\frac{\partial^{(0,1)} x_1(u_{j,k})}{\partial^{(1,0)} x_1(u_{j,k}) \partial^{(0,1)} x_2(u_{j,k}) - \partial^{(1,0)} x_2(u_{j,k}) \partial^{(0,1)} x_1(u_{j,k})}; \\ \partial^{(0,1)} u_2(x_{j,k}) = \frac{\partial^{(1,0)} x_1(u_{j,k})}{\partial^{(1,0)} x_1(u_{j,k}) \partial^{(0,1)} x_2(u_{j,k}) - \partial^{(1,0)} x_2(u_{j,k}) \partial^{(0,1)} x_1(u_{j,k})}. \end{cases} \quad (65)$$

Для нахождения частных производных второго порядка продифференцируем уравнения (63) дважды по x_1 . Получим



$$\begin{aligned}
 & \partial^{(1,0)} x_1(u_{j,k}) \partial^{(2,0)} u_1(x_{j,k}) + \partial^{(0,1)} x_1(u_{j,k}) \partial^{(2,0)} u_2(x_{j,k}) = \\
 & = -\partial^{(2,0)} x_1(u_{j,k}) \left(\partial^{(1,0)} u_1(x_{j,k}) \right)^2 - \\
 & -2 \partial^{(1,1)} x_1(u_{j,k}) \partial^{(1,0)} u_1(x_{j,k}) \partial^{(1,0)} u_2(x_{j,k}) - \partial^{(0,2)} x_1(u_{j,k}) \left(\partial^{(1,0)} u_2(x_{j,k}) \right)^2. \\
 & \partial^{(1,0)} x_2(u_{j,k}) \partial^{(2,0)} u_1(x_{j,k}) + \partial^{(0,1)} x_2(u_{j,k}) \partial^{(2,0)} u_2(x_{j,k}) = \\
 & = -\partial^{(2,0)} x_2(u_{j,k}) \left(\partial^{(1,0)} u_1(x_{j,k}) \right)^2 - \\
 & -2 \partial^{(1,1)} x_2(u_{j,k}) \partial^{(1,0)} u_1(x_{j,k}) \partial^{(1,0)} u_2(x_{j,k}) - \partial^{(0,2)} x_2(u_{j,k}) \left(\partial^{(1,0)} u_2(x_{j,k}) \right)^2.
 \end{aligned}$$

Обозначим

$$\begin{aligned}
 B_1 &= -\partial^{(2,0)} x_1(u_{j,k}) \left(\partial^{(1,0)} u_1(x_{j,k}) \right)^2 - 2 \partial^{(1,1)} x_1(u_{j,k}) \partial^{(1,0)} u_1(x_{j,k}) \partial^{(1,0)} u_2(x_{j,k}) - \\
 & \quad - \partial^{(0,2)} x_1(u_{j,k}) \left(\partial^{(1,0)} u_2(x_{j,k}) \right)^2; \\
 B_2 &= -\partial^{(2,0)} x_2(u_{j,k}) \left(\partial^{(1,0)} u_1(x_{j,k}) \right)^2 - 2 \partial^{(1,1)} x_2(u_{j,k}) \partial^{(1,0)} u_1(x_{j,k}) \partial^{(1,0)} u_2(x_{j,k}) - \\
 & \quad - \partial^{(0,2)} x_2(u_{j,k}) \left(\partial^{(1,0)} u_2(x_{j,k}) \right)^2.
 \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned}
 & \partial^{(2,0)} u_1(x_{j,k}) = \\
 & = \frac{B_1 \partial^{(0,1)} x_2(u_{j,k}) - B_2 \partial^{(0,1)} x_1(u_{j,k})}{\partial^{(1,0)} x_1(u_{j,k}) \partial^{(0,1)} x_2(u_{j,k}) - \partial^{(1,0)} x_2(u_{j,k}) \partial^{(0,1)} x_1(u_{j,k})}; \\
 & \partial^{(2,0)} u_2(x_{j,k}) = \\
 & = \frac{B_2 \partial^{(1,0)} x_1(u_{j,k}) - B_1 \partial^{(1,0)} x_2(u_{j,k})}{\partial^{(1,0)} x_1(u_{j,k}) \partial^{(0,1)} x_2(u_{j,k}) - \partial^{(1,0)} x_2(u_{j,k}) \partial^{(0,1)} x_1(u_{j,k})}.
 \end{aligned} \tag{66}$$

Продифференцируем уравнения (63) по x_1, x_2 . Получим

$$\begin{aligned}
 & \partial^{(1,0)} x_1(u_{j,k}) \partial^{(1,1)} u_1(x_{j,k}) + \partial^{(0,1)} x_1(u_{j,k}) \partial^{(1,1)} u_2(x_{j,k}) = \\
 & = -\partial^{(2,0)} x_1(u_{j,k}) \partial^{(1,0)} u_1(x_{j,k}) \partial^{(0,1)} u_1(x_{j,k}) - \\
 & -\partial^{(1,1)} x_1(u_{j,k}) \left(\partial^{(1,0)} u_1(x_{j,k}) \partial^{(0,1)} u_2(x_{j,k}) + \partial^{(0,1)} u_1(x_{j,k}) \partial^{(1,0)} u_2(x_{j,k}) \right) - \\
 & -\partial^{(0,2)} x_1(u_{j,k}) \partial^{(1,0)} u_2(x_{j,k}) \partial^{(0,1)} u_2(x_{j,k}). \\
 & \partial^{(1,0)} x_2(u_{j,k}) \partial^{(1,1)} u_1(x_{j,k}) + \partial^{(0,1)} x_2(u_{j,k}) \partial^{(1,1)} u_2(x_{j,k}) = \\
 & = -\partial^{(2,0)} x_2(u_{j,k}) \partial^{(1,0)} u_1(x_{j,k}) \partial^{(0,1)} u_1(x_{j,k}) - \\
 & -\partial^{(1,1)} x_2(u_{j,k}) \left(\partial^{(1,0)} u_1(x_{j,k}) \partial^{(0,1)} u_2(x_{j,k}) + \partial^{(0,1)} u_1(x_{j,k}) \partial^{(1,0)} u_2(x_{j,k}) \right) - \\
 & -\partial^{(0,2)} x_2(u_{j,k}) \partial^{(1,0)} u_2(x_{j,k}) \partial^{(0,1)} u_2(x_{j,k}).
 \end{aligned}$$

Обозначим



$$\begin{aligned}
D_1 &= -\partial^{(2,0)}x_1(u_{j,k})\partial^{(1,0)}u_1(x_{j,k})\partial^{(0,1)}u_1(x_{j,k}) - \\
&\quad -\partial^{(1,1)}x_1(u_{j,k})[\partial^{(1,0)}u_1(x_{j,k})\partial^{(0,1)}u_2(x_{j,k}) + \partial^{(0,1)}u_1(x_{j,k})\partial^{(1,0)}u_2(x_{j,k})] - \\
&\quad -\partial^{(0,2)}x_1(u_{j,k})\partial^{(1,0)}u_2(x_{j,k})\partial^{(0,1)}u_2(x_{j,k}) \\
D_2 &= -\partial^{(2,0)}x_2(u_{j,k})\partial^{(1,0)}u_1(x_{j,k})\partial^{(0,1)}u_1(x_{j,k}) - \\
&\quad -\partial^{(1,1)}x_2(u_{j,k})[\partial^{(1,0)}u_1(x_{j,k})\partial^{(0,1)}u_2(x_{j,k}) + \partial^{(0,1)}u_1(x_{j,k})\partial^{(1,0)}u_2(x_{j,k})] - \\
&\quad -\partial^{(0,2)}x_2(u_{j,k})\partial^{(1,0)}u_2(x_{j,k})\partial^{(0,1)}u_2(x_{j,k})
\end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned}
&\partial^{(1,1)}u_1(x_{j,k}) = \\
&= \frac{D_1\partial^{(0,1)}x_2(u_{j,k}) - D_2\partial^{(0,1)}x_1(u_{j,k})}{\partial^{(1,0)}x_1(u_{j,k})\partial^{(0,1)}x_2(u_{j,k}) - \partial^{(1,0)}x_2(u_{j,k})\partial^{(0,1)}x_1(u_{j,k})}; \quad (67)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\partial^{(1,1)}u_2(x_{j,k}) = \\
&= \frac{D_2\partial^{(1,0)}x_1(u_{j,k}) - D_1\partial^{(1,0)}x_2(u_{j,k})}{\partial^{(1,0)}x_1(u_{j,k})\partial^{(0,1)}x_2(u_{j,k}) - \partial^{(1,0)}x_2(u_{j,k})\partial^{(0,1)}x_1(u_{j,k})}. \quad (68)
\end{aligned}$$

Далее продифференцируем уравнения (63) дважды по x_2 . Получим

$$\begin{aligned}
&\partial^{(0,2)}u_1(x_{j,k}) = \\
&= \frac{C_1\partial^{(0,1)}x_2(u_{j,k}) - C_2\partial^{(0,1)}x_1(u_{j,k})}{\partial^{(1,0)}x_1(u_{j,k})\partial^{(0,1)}x_2(u_{j,k}) - \partial^{(1,0)}x_2(u_{j,k})\partial^{(0,1)}x_1(u_{j,k})}; \quad (69)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\partial^{(0,2)}u_2(x_{j,k}) = \\
&= \frac{C_2\partial^{(1,0)}x_1(u_{j,k}) - C_1\partial^{(1,0)}x_2(u_{j,k})}{\partial^{(1,0)}x_1(u_{j,k})\partial^{(0,1)}x_2(u_{j,k}) - \partial^{(1,0)}x_2(u_{j,k})\partial^{(0,1)}x_1(u_{j,k})}, \quad (70)
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
C_1 &= -\partial^{(2,0)}x_1(u_{j,k})\left(\partial^{(0,1)}u_1(x_{j,k})\right)^2 - 2\partial^{(1,1)}x_1(u_{j,k})\partial^{(0,1)}u_1(x_{j,k})\partial^{(0,1)}u_2(x_{j,k}) - \\
&\quad -\partial^{(0,2)}x_1(u_{j,k})\left(\partial^{(0,1)}u_2(x_{j,k})\right)^2;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_2 &= -\partial^{(2,0)}x_2(u_{j,k})\left(\partial^{(0,1)}u_1(x_{j,k})\right)^2 - 2\partial^{(1,1)}x_2(u_{j,k})\partial^{(0,1)}u_1(x_{j,k})\partial^{(0,1)}u_2(x_{j,k}) - \\
&\quad -\partial^{(0,2)}x_2(u_{j,k})\left(\partial^{(0,1)}u_2(x_{j,k})\right)^2.
\end{aligned}$$

Диффеоморфизмы $x_\theta(v) = (x_1(v_1, v_2) \quad x_2(v_1, v_2))^T$, определяющие криволинейные системы координат на X , найдём через их обратные

$$v_\theta(x) = (v_1(x_1, x_2) \quad v_2(x_1, x_2))^T.$$

Как далее увидим, функция $v_2(x_1, x_2)$ не потребуется. Для решения задач теории упругости достаточно иметь только функцию v_1 и соотношения Коши-Римана.

Функция $\theta(x)$ задаётся в дискретном множестве точек границы $\partial\tilde{X}_\rho$. Выбор углов $\theta(x_i)$, где $x_i \in \partial\tilde{X}_\rho$ для приближённого вычисления (40), производится следующим образом. Как было отмечено выше, должно выполняться условие $\int_{\partial\tilde{X}_\rho} a(x) \cos\theta(x) ds = 0$. Таким образом, из (39) следует, что должны быть участки границы, на которых $\theta(x_i) \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right]$, и должны быть участки границы, на которых $\theta(x_i) \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right)$. Поэтому выберем произвольное разбиение кривой s на дуги $[x_{i_s}, x_{i_{s+1}})$, $s = 0, 1, \dots, \tilde{N} - 1$, $i_0 = 0 < i_1 < \dots < i_{\tilde{N}}$ и зафиксируем его.

Пусть

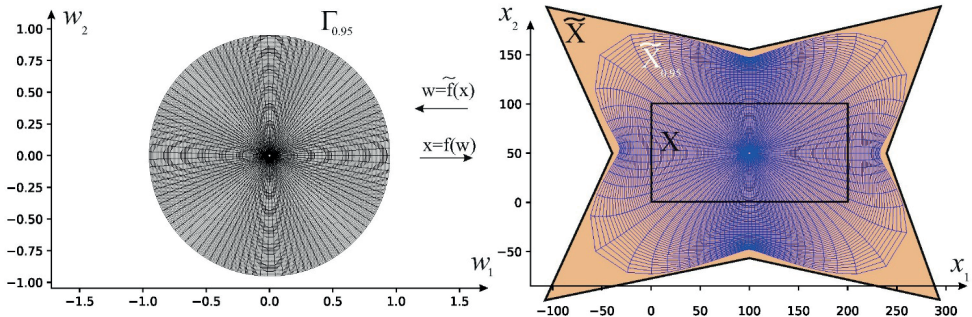
$$I_{\tilde{N}} = \{e = (e_1 \ e_2 \ \dots \ e_{\tilde{N}})^T: e_i \in \{-1, 0, 1\}, i = 1, \dots, \tilde{N} \text{ и } \exists i_1, i_2, e_{i_1} \cdot e_{i_2} = -1\}.$$

На каждой из дуг $[x_{i_s}, x_{i_{s+1}})$

$$\theta(x_i) = \frac{\pi}{2} - e_{s+1} \cdot \theta_i \cdot \frac{\pi}{2}, \quad \theta_i \in (0; 1], \quad i = i_s, \ i_s + 1, \dots, i_{s+1} - 1.$$

Таким образом, если $e_{s+1} = 1$, то $\theta(x_i) \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right)$, $i = i_s, \ i_s + 1, \dots, i_{s+1} - 1$, если $e_{s+1} = -1$, то $\theta(x_i) \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right]$, $i = i_s, \ i_s + 1, \dots, i_{s+1} - 1$ и, если $e_{s+1} = 0$, то $\theta(x_i) = \frac{\pi}{2}$, $i = i_s, \ i_s + 1, \dots, i_{s+1} - 1$. При этом обязательно есть две дуги такие, что на одной – $\theta(x_i) \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right)$, а на другой – $\theta(x_i) \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right]$.

На рис. 5 показано конформное преобразование круга на многоугольник и его ограничения на круги $\Gamma_{0,95}$ и $\Gamma_{0,75}$. На рис. 6 и рис. 7 показано векторное поле, образованное касательными векторами к кривым $v_1(x_1, x_2) = \text{const}$ и $v_2(x_1, x_2) = \text{const}$, построенное для случаев $e = (-1, 1, 1, 1)^T$ и $e = (-1, 1, -1, 1)^T$ соответственно.



a

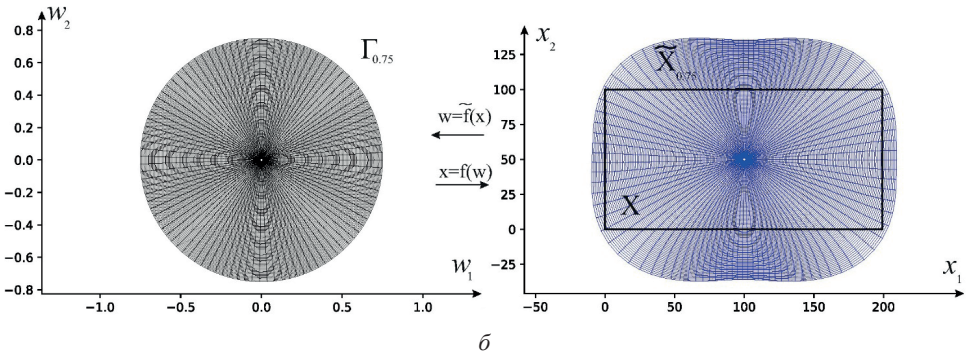


Рис. 5. Конформное преобразование круга на многоугольник и его ограничения на круги: *a* – круг $\Gamma_{0,95}$, *б* – круг $\Gamma_{0,75}$

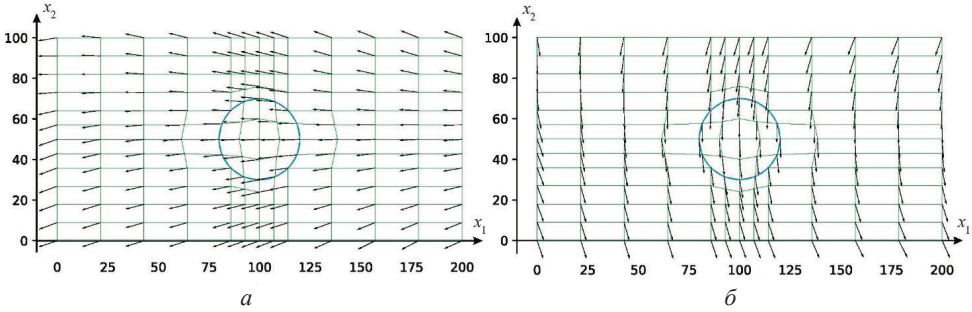


Рис. 6. Касательные векторы к кривым для случая $e = (-1, 1, 1)^T$:
a – кривая $v_1(x_1, x_2) = const$, *б* – кривая $v_2(x_1, x_2) = const$

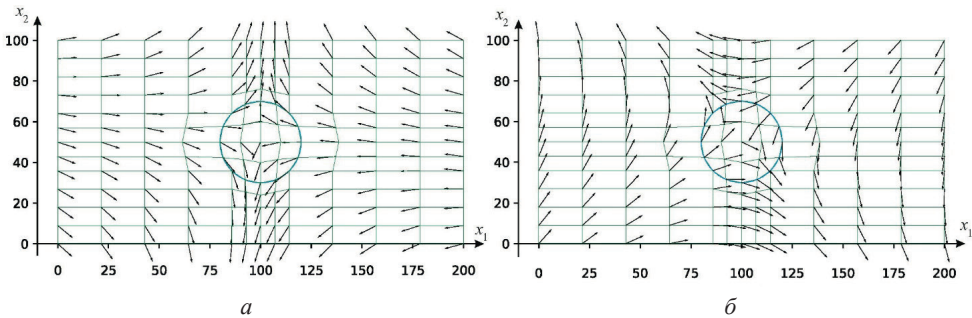


Рис. 7. Касательные векторы к кривым для случая $e = (-1, 1, -1)^T$:
a – кривая $v_1(x_1, x_2) = const$, *б* – кривая $v_2(x_1, x_2) = const$

4. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ ОПТИМИЗАЦИИ ИЗГОТОВЛЕНИЯ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ОБЪЕКТОВ МЕТОДОМ 3D-ПЕЧАТИ

В разделе ставится задача нахождения оптимальных траекторий укладки волокон при 3D-печати функциональных объектов (конструкций из композиционных материалов, армированных непрерывными волокнами).

Пусть $\sigma_1^\pm, \sigma_2^\pm$ – пределы прочности при растяжении и сжатии вдоль и поперёк волокон, а $\hat{\tau}_{12}$ – предел прочности при сдвиге в плоскости слоя. В качестве целевой функции будет использован критерий максимальных напряжений [2]

$$R(\sigma_1, \sigma_2, \tau_{12}) = \max\left(\frac{\sigma_1}{m_1(\sigma_1)}, \frac{\sigma_2}{m_2(\sigma_2)}, \frac{\tau_{12}}{\hat{\tau}_{12}}\right),$$

где

$$m_1(\sigma_1) = \begin{cases} \sigma_1^+, & \text{если } \sigma_1 > 0; \\ \sigma_1^-, & \text{если } \sigma_1 < 0, \end{cases} \quad m_2(\sigma_2) = \begin{cases} \sigma_2^+, & \text{если } \sigma_2 > 0; \\ \sigma_2^-, & \text{если } \sigma_2 < 0. \end{cases}$$

Как было отмечено выше $\sigma_1, \sigma_2, \tau_{12}$ могут быть найдены из уравнений (15) – (33), если задать преобразование $v(x)$, которое можно найти из уравнения (38). Краевые условия к этому уравнению получаем заданием углов $\theta(x_i)$, $x_i \in \partial X$, которые волокна образуют с внешней нормалью к границе множества X . Следовательно, целевая функция, на самом деле, является функция этих углов θ

$$\theta|_{\partial X} \mapsto v(x) = (v_1(x), v_2(x)) \mapsto (\sigma_1, \sigma_2, \tau_{12}) \mapsto \max\left(\frac{\sigma_1}{m_1(\sigma_1)}, \frac{\sigma_2}{m_2(\sigma_2)}, \frac{\tau_{12}}{\hat{\tau}_{12}}\right).$$

Соответствие $(v_1(x), v_2(x)) \mapsto (\sigma_1, \sigma_2, \tau_{12})$ осуществляется с помощью описанного в настоящей работе метода путём приближённого решения уравнений механики композиционных материалов. Минимизировать функцию R предлагается с помощью метода, представленного в работе [25] и реализованного в библиотеке SciPy© для языка программирования Python©.

С учётом обозначений предыдущего раздела оптимальные траектории укладки волокон можно найти из решения оптимизационной задачи

$$(e^*, \theta_0^*, \dots, \theta_{i_N}^*) = \arg \min_{e \in I_N} \min_{\theta_0, \dots, \theta_{i_N-1} \in (0; \pi]} R\left(\frac{\pi - e_1 \cdot \theta_0}{2}, \dots, \frac{\pi - e_N \cdot \theta_{i_N-1}}{2}\right).$$

Также можно будет найти координатное преобразование $v^*(x)$, которое и задаёт траектории укладки волокон.

На основе предлагаемого подхода автором разработаны алгоритмы и программный комплекс управления и оптимизации процесса 3D-печати функционального объекта, в которых реализована возможность нахождения оптимальной схемы печати, диктуемой условиями его эксплуатации [3, 5, 6].



5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе получены следующие результаты:

1. Применительно к предмету исследования проанализированы основные сведения из механики композиционных материалов. Показано, что схема укладки волокна заложена в самих уравнениях механики композиционных материалов в виде некоторой (неизвестной) локальной ортогональной системы координат. Поэтому найти оптимальную схему можно только из уравнений путём их решения с разными локальными системами координат.
2. Разработана математическая модель укладки волокон при 3D-печати функциональных объектов из композиционных материалов. Траектории укладки волокон получаются с помощью аналитических функций, краевые условия для которых – это углы, образуемые волокнами с границей области печати.
3. В рамках модели предложен метод нахождения оптимальной схемы укладки волокон при печати, диктуемой условиями эксплуатации объекта. Критерий разрушения композиционного материала представлен как функция углов, которые волокна образуют с границей области печати. Разработан вычислительный алгоритм нахождения значения критерия разрушения по заданным углам, основанный на конформных преобразованиях.
4. Поставлена задача оптимизации для нахождения траекторий укладки волокон при 3D-печати функциональных объектов из композиционных материалов. Предложен метод нахождения значений критерия разрушения композиционного материала как целевой функции задачи оптимизации.

Литература

1. Босов, А.В., Битюков, Ю.И., Денискина, Г.Ю. О поиске оптимальной схемы 3D-печати конструкций из композиционных материалов / А.В. Босов, Ю.И. Битюков, Г.Ю. Денискина // Информатика и её применения. – 2022. – Т. 16. – Вып. 1. – С. 10–19. – DOI: 10.14357/19922264220102.
2. Васильев, В.В. Механика конструкций из композиционных материалов / В.В. Васильев. – Москва: Машиностроение, 1988. – 272 с.
3. Денискина, Г.Ю. CAD/CAM/CAE-система для изготовления конструкций из волокнистых композиционных материалов методом 3D-печати / Г.Ю. Денискина // Труды МАИ. – 2022. – № 126. – DOI: 10.34759/trd-2022-126-21.
4. Денискина, Г.Ю. Приближённое решение уравнений теории упругости с помощью сплайн-вейвлетов / Г.Ю. Денискина // Труды МАИ. – 2021. – № 121. – DOI: 10.34759/trd-2021-121-24.
5. Денискина, Г.Ю. Программа для моделирования процесса 3D-печати CompositeCAD (подсистема САД) / Г.Ю. Денискина // Свидетельство № 2022682105 о государственной регистрации программы для ЭВМ. – 2022.
6. Денискина, Г.Ю. Программа для моделирования процесса 3D-печати CompositeCAD (подсистема САЕ) / Г.Ю. Денискина // Свидетельство № 2022682106 о государственной регистрации программы для ЭВМ. – 2022.
7. Зорич, В.А. Математический анализ: в 2 ч. / В.А. Зорич. – Изд. 3-е, испр. и доп. – Москва: МЦМНМО, 2001. – 794 с.



8. *Лаврентьев, М.А., Шабат, Б.В.* Методы теории функций комплексного переменного / М.А. Лаврентьев, Б.В. Шабат. – Москва: Наука, 1973. – 736 с.
9. *Amati, G.* The Reuse of Free-Form Surface Features: A Wavelet Approach / G. Amati, A. Liverani, G. Caligiana // Proceedings of the IASTED International Conference APPLIED SIMULATION AND MODELLING, June 28–30, 2004, Rhodes, Greece. – P. 247–252.
10. *Bityukov, Y.I.* Spline Wavelets Use for Output Processes Analysis of Multi-Dimensional Non-Stationary Linear Control Systems / Y.I. Bityukov, Y.I. Deniskin, G.Y. Deniskina // Journal of Physics: Conference Series. – Omsk: Institute of Physics Publishing, 2018. – P. 012018. – DOI 10.1088/1742-6596/944/1/012018.
11. *Deniskina, G.Y.* About Biorthogonal Wavelets, Created on the Basis of Scheme of Increasing of Lazy Wavelets / G.Y. Deniskina, Y.I. Deniskin, Y.I. Bityukov // Lecture Notes in Electrical Engineering. – 2021. – Vol. 729 LNEE. – P. 173–181. – DOI 10.1007/978-3-030-71119-1_18.
12. Application of Wavelets and Conformal Reflections to Finding Optimal Scheme of Fiber Placement at 3D-Printing Constructions from Composition Materials / Yu. Bityukov, Yu. Deniskin, G. Deniskina, I.V. Potsebnova // E3S Web of Conferences: 2021. – P. 05004. – DOI 10.1051/e3sconf/202124405004.
13. *Deniskina, G.Y.* About Some Computational Algorithms for Locally Approximation Splines, Based on the Wavelet Transformation and Convolution / G.Y. Deniskina, Y.I. Deniskin, Y.I. Bityukov // Lecture Notes in Electrical Engineering. – 2021. – Vol. 729 LNEE. – P. 182–191. – DOI 10.1007/978-3-030-71119-1_19.
14. *Bujurke, N., Shiralashetti, S., Salimath, C.* An Application of Single-term Haar Wavelet Series in the Solution of Non-linear Oscillator Equations / N. Bujurke, S. Shiralashetti, C.J. Salimath // Comput. Appl. Math. – 2009. – 227. – P. 234–244.
15. *Daubechies, I.* A Simple Wilson Orthonormal Basis with Exponential Decay / I. Daubechies, S. Jaffard, J.L. Journe // SIAM J. Math. Anal. – 1991. – 22. – P. 554–572.
16. *Daubechies, I.* Orthonormal Bases of Compactly Supported Wavelets / I. Daubechies // Comm. Pure Appl. Math. – 1988. – 41. – P. 909–996.
17. *Daubechies, I.* Orthonormal Bases of Compactly Supported Wavelets II. Variations on a Theme / I. Daubechies // SIAM J. Math. Anal. – 1993. – 21. – P. 499–519.
18. Fiber Line Optimization in Single Ply for 3D Printed Composites / Yusuke Yamanaka, Akira Todoroki, Masahito Ueda, Yoshiyasu Hirano and Ryosuke Matsuzaki // Open Journal of Composite Materials, SCIRP. – 2016, Vol. 6, No 4. – P. 121–131.
19. *Lepik, U.* Application of the Haar Wavelet Transform to Solving Integral and Differential Equations / U. Lepik // Proc. Estonian Acad. Sci. Phys. Math. – 2007. – 56. – P. 28–46.
20. *Lepik, U., Hein, H.* Haar Wavelets with Applications / U. Lepik, H. Hein. – Springer, 2014. – 207 p.
21. *Mallat, S.* Multiresolution Approximation and Wavelets / S. Mallat // Trans. Amer. Math. Soc. – 1989. – 315. – P. 69–88.
22. *Mallat, S.* Zero-crossings of a Wavelet Transform / S. Mallat // IEEE Trans. Inform. Theory. – 1991. – 37. – P. 1019–1033.
23. *Micchelli, C.A.* Interpolatory Subdivision Schemes and Wavelets / C.A. Micchelli // Journal of Approximation Theory. – 1996. – Vol. 86, Issue 1. – P. 41–71.
24. *Stollnitz, E.J.* Wavelets for Computer Graphics: A Primer / Eric J. Stollnitz, T.D. DeRose, David H. Salesin // IEEE Computer Graphics and Applications. – 1995. – May. – 15(3). – P. 76–84 (part 1); July. – 15(4). – P. 75–85 (part 2).
25. *Storn, R., Price, K.* Differential Evolution – A Simple and Efficient Heuristic for Global Optimization Over Continuous Spaces / R. Storn, K. Price // Journal of Global Optimization. – 1997, No. 11. – P. 341–359.



26. *Sweldens, W.* The Lifting Scheme: A Custom-Design Construction of Biorthogonal Wavelets / *W. Sweldens* // *Applied and Computational Harmonic Analysis*. – 1996. – Vol. 3, Issue 2. – P. 186–200.
27. *Torghabehi, O.O.* Developing a Computational Approach Towards a Performance Based Design and Robotic Fabrication of Fibrous Skin Structures / *Omid Oliyan Torghabehi, Alireza Seyedahmadian and Wes McGee* // *Proceedings of the International Association for Shell and Spatial Structures (IASS) Symposium 2015, Amsterdam Future Visions, 17–20 August 2015, Amsterdam, The Netherlands*. – DOI: 10.13140/RG.2.1.2324.6569.



Optimization of Scheme Selection for 3D Printing of Functional Objects from Composite Materials

Galina Y. Deniskina*

Moscow State Aviation Institute (National Research University) (MAI), Moscow, Russia

ORCID: <https://orcid.org/0009-0000-4226-3288>

e-mail: dega17@yandex.ru

The implementation of priority areas for the development of the Economy of the Russian Federation, the digital transformation of production, the improvement and development of new designs used at domestic enterprises in the aviation and rocket and space industries, energy, mechanical engineering and others, is largely associated with the use of polymer composite materials (CM), which provide optimal physical and mechanical characteristics of structures (functional objects). As reinforcing elements of CM, carbon fibers are widely used, because they have high specific strength. At the same time, the mechanical properties of products significantly depend on the direction of the fibers. One of the promising directions for the manufacture of objects from CM, which makes it possible to create structures of complex shape, is 3D printing technology. The use of 3D printing makes it possible to obtain structures with spatial reinforcement along specified trajectories. This is due to the fact that continuous carbon fiber reinforced polymer composite (CFRT) is used for printing. This allows full control over the location of the fibers during the printing process, which allows you to arrange 100 % of the fibers in accordance with the required operating conditions of the object. However, practically unexplored are issues related to the optimization of the process of 3D printing of functional objects from CM by the method CFRT 3D printing in terms of controlling the location of fibers during printing, allowing to take into account the criteria for the destruction of the composite. This work is devoted to this goal, which proposes general approaches to setting and solving the problem of optimizing the selection of a 3D-printing scheme.

Keywords: optimization, composite materials, elasticity theory, composite material destruction criteria, 3D printing, wavelet analysis.

For citation:

Deniskina G.Y. Optimization of Scheme Selection for 3D-Printing of Functional Objects from Composite Materials. *Modelirovanie i analiz dannykh = Modelling and Data Analysis*, 2023. Vol. 13, no. 2, pp. 7–35. DOI: 10.17759/mda.2023130201 (In Russ., abstr. in Engl.).

*Galina Y. Deniskina, Assistant of the Department of Probability Theory and Computer Modeling, Moscow State Aviation Institute (National Research University) (MAI), Moscow, Russia, ORCID: <https://orcid.org/0009-0000-4226-3288>, e-mail: dega17@yandex.ru



References

1. Bosov, A.V., Bityukov, Y.I., Deniskina, G.Y. About Searching for the Optimal 3D Printing Scheme of Structures from Composite Materials / A.V. Bosov, Y.I. Bityukov, G.Y. Deniskina // *Informatics and Applications*. – 2022. – V.16. – Issue 1. – P. 10–19. – DOI: 10.14357/19922264220102.
2. Vasiljev, V.V. *Mechanics of Structures Made of Composite Materials* / V.V. Vasiljev. – Moscow: Mashinostroenie, 1988. – 272 p.
3. Deniskina, G.Y. CAD/CAM/CAE-System for Manufacturing Structures from Fibrous Composite Materials Using 3D-printing / G.Y. Deniskina // *Trudy MAI*. – 2022. – № 126. – DOI: 10.34759/trd-2022-126-21.
4. Deniskina, G.Y. Method for Finding Approximate Solutions of Elasticity Equations Using Spline Wavelets / Г.Ю. Денискина // G.Y. Deniskina // *Trudy MAI*. – 2021. – № 121. – DOI: 10.34759/trd-2021-121-24.
5. Deniskina, G.Y. Program for Modeling the Process of 3D Printing CompositeCAD (CAD-system) / G.Y. Deniskina // Certificate No. 2022682105 on State Registration of the Computer Program. – 2022.
6. Deniskina, G.Y. Program for Modeling the Process of 3D Printing CompositeCAD (CAE-system) / G.Y. Deniskina // Certificate No. 2022682106 on State Registration of the Computer Program. – 2022.
7. Zorich, V.A. *Mathematical analysis: in 2 parts* / V.A. Zorich. – 3rd ed.– Moscow: MCMNMO, 2001. – 794 p.
8. Lavrentjev, M.A., Shabat, B.V. *Methods of the Theory of Functions of a Complex Variable* / M.A. Lavrentjev, B.V. Shabat. – Moscow: Nauka, 1973. – 736 p.
9. Amati, G. The Reuse of Free-Form Surface Features: A Wavelet Approach / G. Amati, A. Liverani, G. Caligiana // *Proceedings of the IASTED International Conference APPLIED SIMULATION AND MODELLING*, June 28–30, 2004, Rhodes, Greece. – P. 247–252.
10. Bityukov, Y.I. Spline Wavelets Use for Output Processes Analysis of Multi-Dimensional Non-Stationary Linear Control Systems / Y.I. Bityukov, Y.I. Deniskin, G.Y. Deniskina // *Journal of Physics: Conference Series*. – Omsk: Institute of Physics Publishing, 2018. – P. 012018. – DOI 10.1088/1742-6596/944/1/012018.
11. Deniskina, G.Y. About Biortogonal Wavelets, Created on the Basis of Scheme of Increasing of Lazy Wavelets / G.Y. Deniskina, Y.I. Deniskin, Y.I. Bityukov // *Lecture Notes in Electrical Engineering*. – 2021. – Vol. 729 LNEE. – P. 173–181. – DOI 10.1007/978-3-030-71119-1_18.
12. Application of Wavelets and Conformal Reflections to Finding Optimal Scheme of Fiber Placement at 3D-Printing Constructions from Composition Materials / Yu. Bityukov, Yu. Deniskin, G. Deniskina, I.V. Potsebnava // *E3S Web of Conferences*: 2021. – P. 05004. – DOI 10.1051/e3sconf/202124405004.
13. Deniskina, G.Y. About Some Computational Algorithms for Locally Approximation Splines, Based on the Wavelet Transformation and Convolution / G.Y. Deniskina, Y.I. Deniskin, Y.I. Bityukov // *Lecture Notes in Electrical Engineering*. – 2021. – Vol. 729 LNEE. – P. 182–191. – DOI 10.1007/978-3-030-71119-1_19.
14. Bujurke, N., Shiralashetti, S., Salimath, C. An Application of Single-term Haar Wavelet Series in the Solution of Non-linear Oscillator Equations / N. Bujurke, S. Shiralashetti, C.J. Salimath // *Comput. Appl. Math*. – 2009. – 227. – P. 234–244.
15. Daubechies, I. A Simple Wilson Orthonormal Basis with Exponential Decay / I. Daubechies, S. Jaffard, J.L. Journe // *SIAM J. Math. Anal.* – 1991. – 22. – P. 554–572.
16. Daubechies, I. Orthonormal Bases of Compactly Supported Wavelets / I. Daubechies // *Comm. Pure Appl. Math.* – 1988. – 41. – P. 909–996.



17. Daubechies, I. Orthonormal Bases of Compactly Supported Wavelets II. Variations on a Theme / I. Daubechies // *SIAM J.Math.Anal.* – 1993. – 21. – P. 499–519.
18. Fiber Line Optimization in Single Ply for 3D Printed Composites / Yusuke Yamanaka, Akira Todoroki, Masahito Ueda, Yoshiyasu Hirano and Ryosuke Matsuzaki // *Open Journal of Composite Materials, SCIRP.* – 2016, Vol. 6, No 4. – P. 121–131.
19. Lepik, U. Application of the Haar Wavelet Transform to Solving Integral and Differential Equations / U. Lepik // *Proc. Estonian Acad. Sci. Phys. Math.* – 2007. – 56. – P. 28–46.
20. Lepik, U., Hein, H. Haar Wavelets with Applications / U. Lepik, H. Hein. – Springer, 2014. – 207 p.
21. Mallat, S. Multiresolution Approximation and Wavelets / S. Mallat // *Trans. Amer. Math. Soc.* – 1989. – 315. – P. 69–88.
22. Mallat, S. Zero-crossings of a Wavelet Transform / S. Mallat // *IEEE Trans. Inform. Theory.* – 1991. – 37. – P. 1019–1033.
23. Micchelli, C.A. Interpolatory Subdivision Schemes and Wavelets / C.A. Micchelli // *Journal of Approximation Theory.* – 1996. – Vol. 86, Issue 1. – P. 41–71.
24. Stollnitz, E.J. Wavelets for Computer Graphics: A Primer / Eric J. Stollnitz, T.D. DeRose, David H. Salesin // *IEEE Computer Graphics and Applications.* – 1995. – May. – 15(3). – P. 76–84 (part 1); July. – 15(4). – P. 75–85 (part 2).
25. Storn, R., Price, K. Differential Evolution – A Simple and Efficient Heuristic for Global Optimization Over Continuous Spaces / R. Storn, K. Price // *Journal of Global Optimization.* – 1997, No. 11. – P. 341–359.
26. Sweldens, W. The Lifting Scheme: A Custom-Design Construction of Biorthogonal Wavelets / W. Sweldens // *Applied and Computational Harmonic Analysis.* – 1996. – Vol.3, Issue 2. – P. 186–200.
27. Torghabehi, O.O. Developing a Computational Approach Towards a Performance Based Design and Robotic Fabrication of Fibrous Skin Structures / Omid Oliyan Torghabehi, Alireza Seyedahmadian and Wes McGee // *Proceedings of the International Association for Shell and Spatial Structures (IASS) Symposium 2015, Amsterdam Future Visions, 17–20 August 2015, Amsterdam, The Netherlands.* – DOI: 10.13140/RG.2.1.2324.6569.

Получена 21.04.2023

Принята в печать 19.05.2023

Received 21.04.2023

Accepted 19.05.2023

Достаточные условия существования H_∞ -наблюдателя состояния линейных непрерывных динамических систем

Пантелеев А.В.*

Московский авиационный институт (НИУ МАИ)
г. Москва, Российская Федерация
ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-2493-3617>
e-mail: avpanteleev@inbox.ru

Яковлева А.А.**

Московский авиационный институт (НИУ МАИ)
г. Москва, Российская Федерация
e-mail: ayakovleva982@gmail.com

В статье рассматривается проблема нахождения H_∞ -наблюдателя вектора состояния линейных непрерывных нестационарных динамических систем при наличии неопределенности задания начальных условий, ограниченных внешних воздействий и погрешностей измерения на конечном промежутке времени. Сформулированы и на основе принципа расширения доказаны достаточные условия существования H_∞ -наблюдателя. Получены соотношения для нахождения параметров наблюдателя и наилучших законах изменения внешних воздействий и погрешностей измерений. Как предельный случай рассмотрена задача синтеза наблюдателя для стационарных линейных динамических систем на полубесконечном промежутке времени. Решены две прикладные задачи оценивания вектора состояния самолета по результатам неполных и неточных измерений.

Ключевые слова: робастное оценивание, наблюдатель состояния, достаточные условия, принцип расширения, игровой подход.

Для цитаты:

Пантелеев А.В., Яковлева А.А. Достаточные условия существования H_∞ -наблюдателя состояния линейных непрерывных динамических систем // Моделирование и анализ данных. 2023. Том 13. № 2. С. 36–63. DOI: [10.17759/mda.2023130202](https://doi.org/10.17759/mda.2023130202)

***Пантелеев Андрей Владимирович**, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой «Математическая кибернетика» института «Информационные технологии и прикладная математика», Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет) (МАИ (НИУ)), г. Москва, Российская Федерация, ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-2493-3617> e-mail: avpanteleev@inbox.ru

****Яковлева Александра Алексеевна**, аспирант, Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет) (МАИ (НИУ)), г. Москва, Российская Федерация, e-mail: ayakovleva982@gmail.com



1. ВВЕДЕНИЕ

Задачи и методы нахождения H_∞ -управления составляют основу современной теории управления [1–6]. Они дополняют классические постановки задач синтеза оптимальных законов управления по различным критериям. При решении различных задач в данной области обычно применяется метод пространства состояний, частотный подход и метод линейных матричных неравенств [7–13]. Задача робастного оценивания координат вектора состояния по результатам измерений изучалась в [14–22]. Среди них выделим работу [19], в которой с помощью применения принципа максимума и игрового подхода найдены соотношения, определяющие матрицу коэффициентов усиления наблюдателя и наилучшие законы изменения возмущений и погрешностей как функции времени. В [23] для решения игровой задачи предложено использовать обучение с подкреплением. Приложение теории построения робастных наблюдателей в задачах управления летательными аппаратами рассмотрено в [24, 25].

В данной статье сформулированы достаточные условия синтеза H_∞ -наблюдателя. Доказательство построено на основе принципа расширения [26–28]. Это позволило получить выражения для управления процессом оценки вектора состояния и законы наилучшего противодействия со стороны внешних воздействий и погрешностей измерения в форме обратных связей по ошибкам оценивания. С применением полученных соотношений решены две задачи оценивания вектора состояния самолетов для нестационарной модели с конечным временем функционирования и для стационарной модели с полубесконечным временем [13].

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Заданы математическая модель объекта управления

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)w(t), \quad x(0) = x_0, \quad (1)$$

и модель измерительной системы

$$y(t) = C(t)x(t) + D(t)v(t), \quad (2)$$

где $x \in R^n$ – вектор состояния, $w \in R^p$ – вектор возмущений, $y \in R^m$ – вектор выхода (вектор измерений), $v \in R^m$ – вектор ошибок и погрешностей измерений, $t \in T = [0, t_1]$ – время, t_1 – заданное положительное число. Заданы непрерывные матрицы $A(t), B(t), C(t), D(t)$ размеров $(n \times n)$, $(n \times p)$, $(m \times n)$, $(m \times m)$ соответственно.

Предполагается, что:

- $w(\cdot) \in L_2[0, \infty)$, $v(\cdot) \in L_2[0, \infty)$,
- $m \leq n$, $\text{rg } C(t) = m \quad \forall t \in T$;
- $D(t)$ – невырожденная матрица.

Ставится задача о нахождении оценки $\hat{x}(t)$ вектора состояния $x(t)$ по результатам накопленной информации, полученной от измерительной системы, т.е. $y_0^t = \{y(\tau), 0 \leq \tau \leq t\}$. При этом требуется минимизировать величину ошибки оценки



вания $\varepsilon(t) = x(t) - \hat{x}(t)$ в условиях неопределенности информации о векторе начальных состояний x_0 , законах изменения векторов возмущений и ошибок измерений.

Предположим, что структура наблюдателя состояния описывается уравнением

$$\frac{d\hat{x}}{dt} = A(t)\hat{x}(t) + K(t)[y(t) - C(t)\hat{x}(t)], \quad \hat{x}(0) = \hat{x}_0, \quad (3)$$

где $\hat{x} \in R^n$ – вектор оценок координат вектора состояния, $K(t)$ – неизвестная непрерывная матрица размеров $(n \times m)$, \hat{x}_0 – вектор начальных значений оценок координат вектора состояния, задаваемый исходя из имеющейся априорной информации о возможных начальных состояниях модели объекта управления (1). Матрица $K(t)$ выполняет функцию управления процессом наблюдения.

Получим уравнение, описывающее изменение ошибки оценивания, вычитая из уравнения (1) уравнение (3) с учетом (2) и обозначения $\varepsilon(t) = x(t) - \hat{x}(t)$:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= A(t)x(t) + B(t)w(t), \quad x(0) = x_0, \\ \frac{d\hat{x}}{dt} &= A(t)\hat{x}(t) + K(t)[C(t)x(t) + D(t)v(t) - C(t)\hat{x}(t)], \quad \hat{x}(0) = \hat{x}_0, \\ \frac{d\varepsilon}{dt} &= [A(t) - K(t)C(t)]\varepsilon(t) + B(t)w(t) - K(t)D(t)v(t), \quad \varepsilon(0) = x_0 - \hat{x}_0. \end{aligned} \quad (4)$$

Далее для упрощения записи зависимость матриц математической модели от времени опущена. Также будет использоваться обозначение взвешенной нормы $\|z(t)\|_{Q(t)}^2 = z^T(t)Q(t)z(t)$, где $Q(t)$ – заданная положительно полуопределенная симметрическая матрица.

Требуется обеспечить (если это возможно) выполнение неравенства:

$$\begin{aligned} & \frac{\int_0^{t_1} \|\varepsilon(t)\|_{Q(t)}^2 dt}{\|\varepsilon(0)\|_{P_0}^2 + \int_0^{t_1} [\|w(t)\|_{W^{-1}(t)}^2 + \|v(t)\|_{V^{-1}(t)}^2] dt} = \\ & = \frac{\int_0^{t_1} [\varepsilon^T(t)Q(t)\varepsilon(t)] dt}{\varepsilon^T(0)P_0^{-1}\varepsilon(0) + \int_0^{t_1} [w^T(t)W^{-1}(t)w(t) + v^T(t)V^{-1}(t)v(t)] dt} \leq \gamma^2, \end{aligned} \quad (5)$$

где $Q(t), P_0, W(t), V(t)$ – симметрические положительно определенные матрицы соответствующих размеров, $\gamma > 0$ – заданное неотрицательное число. При этом желательно найти минимальное значение γ^* , при котором указанные свойства еще справедливы, минимизируя значение числителя дроби при одновременной максимизации знаменателя.



Иными словами, функционал качества управления наблюдателем состоянием должен удовлетворять условию

$$I(K, x_0, w, v) = -\frac{1}{2} \gamma^2 \|\varepsilon(0)\|_{R_0^{-1}}^2 + \frac{1}{2} \int_0^{t_1} \left[\|\varepsilon(t)\|_{Q(t)}^2 - \gamma^2 \|w(t)\|_{W^{-1}(t)}^2 - \gamma^2 \|v(t)\|_{V^{-1}(t)}^2 \right] dt \leq 0, \quad (6)$$

которое будет выполняться при минимизации затрат на управление процессом оценивания при наихудшем влиянии возмущений, начального состояния и ошибок измерений. Множитель $\frac{1}{2}$ добавлен для уменьшения громоздкости записи после дифференцирования.

Требуется найти наилучшую матрицу $K(t)$ наблюдателя (3), наихудшие законы управления внешним воздействием $w(t)$ и погрешностью измерений $v(t)$, наихудший вектор начальных состояний x_0 , обеспечивающие выполнение условия (6).

3. СИНТЕЗ H_∞ – НАБЛЮДАТЕЛЕЙ СОСТОЯНИЯ

Сформулируем поставленную задачу как игровую, где первый игрок – матрица $K(t)$, выбирается при каждом $t \in T$ из условия минимизации значения функционала, а второй игрок – составной вектор $(x_0, w(t), v(t))$, из условия его максимизации:

$$I(K, x_0, w, v) \rightarrow \min_{K(t) \in R^{n \times m}} \max_{(x_0, w(t), v(t))}. \quad (7)$$

Будем считать, что второй игрок при фиксированном действии первого игрока стремится максимизировать величину функционала, характеризующую интегральную ошибку оценивания. Поэтому сначала рассмотрим задачу максимизации функционала по $(x_0, w(t), v(t))$, или, что то же самое, минимизации функционала, отличающегося знаком:

$$\tilde{I}(K, x_0, w, v) = \frac{1}{2} \gamma^2 \|\varepsilon(0)\|_{R_0^{-1}}^2 - \frac{1}{2} \int_0^{t_1} \left[\|\varepsilon(t)\|_{Q(t)}^2 - \gamma^2 \|w(t)\|_{W^{-1}(t)}^2 - \gamma^2 \|v(t)\|_{V^{-1}(t)}^2 \right] dt \rightarrow \min_{(x_0, w(t), v(t))}. \quad (8)$$

Будем использовать достаточные условия оптимальности В.Ф. Кротова [26,27] для задачи

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)), \quad x(t_0) = x_0,$$

$$\tilde{I}(x_0, d) = F(x(t_0)) + \int_{t_0}^{t_1} f^0(t, x(t), u(t)) dt \rightarrow \min_{(x(t), u(t)) \in D},$$

где x – вектор состояния системы, $x \in R^n$, u – вектор управления, $u \in U \subseteq R^q$, U – некоторое заданное множество; t – время, $t \in T' = [t_0, t_1] = T \cup \{t_0\} \cup \{t_1\}$, T' – промежуток времени функционирования системы, моменты времени t_0 и t_1 заданы, $T = (t_0, t_1)$; внешние воздействия на объект управления отсутствуют, $f(t, x, u) : T' \times R^n \times U \rightarrow R^n$ – непрерывно дифференцируемая функция; D – множество допустимых процессов, т. е. множество пар $d = (x(\cdot), u(\cdot))$, образуемых траекториями $x(\cdot)$ и управлениями $u(\cdot)$, в которых $\forall T \quad x(t) \in R^n, u(t) \in U$, функции $x(\cdot)$ –



непрерывны и кусочно-дифференцируемы, а $u(\cdot)$ – кусочно-непрерывны, удовлетворяют дифференциальному уравнению системы и начальному условию.

Утверждение (частный случай достаточных условий оптимальности [26, 27]). Для того чтобы элемент $(x^*(t), u^*(t)) \in D$ был минималью, достаточно существования такой функции $\varphi(t, x) \in C^{1,1}(T' \times R^n)$, чтобы выполнялись два условия:

$$R(t, x^*(t), u^*(t)) = r(t) \quad \forall t \in T,$$

$$G(t_0, x_0) = g,$$

где

$$R(t, x, u) = \frac{\partial \varphi(t, x)}{\partial t} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial \varphi(t, x)}{\partial x_i} f_i(t, x, u) - f^0(t, x, u), \quad (9)$$

$$r(t) = \max_{x \in R^n, u \in U} R(t, x, u),$$

$$G(t_0, x_0) = F(x_0) - \varphi(t_0, x_0), \quad (10)$$

$$g = \min_{x_0 \in R^n} G(t_0, x_0).$$

Функцию $r(t)$ и величину g без ограничения общности можно положить равными нулю. При этом минимальное значение функционала $\min \tilde{I} = \varphi(t_1, x(t_1))$.

Доказательство. Применим принцип расширения [26–28]. Определим множество V пар $d = (x(\cdot), u(\cdot))$, где элементы пар по сравнению с входящими в множество D необязательно связаны дифференциальным уравнением $\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t))$, $x(t_0) = x_0$, допускаются разрывы первого рода функций $x(\cdot)$ на множестве T . Таким образом, множество $D \subset V$ и расширение построено.

Доопределение функционала \tilde{I} на множестве V производится с помощью задания функции $\varphi(t, x)$. На множестве V определим функционал:

$$L(x_0, d) = G(t_0, x_0) - \int_{t_0}^{t_1} R(t, x(t), u(t)) dt + \varphi(t_1, x(t_1)).$$

На множестве $D \subset V$, где между функциями $x(\cdot), u(\cdot)$ существует дифференциальная связь, с учетом равенства $x(t_0) = x_0$ справедливо

$$\begin{aligned} R(t, x(t), u(t)) &= \frac{\partial \varphi(t, x(t))}{\partial t} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial \varphi(t, x(t))}{\partial x_i} f_i(t, x(t), u(t)) - f^0(t, x(t), u(t)) = \\ &= \frac{d\varphi(t, x(t))}{dt} - f^0(t, x(t), u(t)) \end{aligned}$$

и поэтому

$$L(x_0, d) = F(x_0) - \varphi(t_0, x_0) - \int_{t_0}^{t_1} \left[\frac{d\varphi(t, x(t))}{dt} - f^0(t, x(t), u(t)) \right] dt + \varphi(t_1, x(t_1)) = \tilde{I}(x_0, d).$$

Таким образом, на множестве $D \subset V$ функционалы $\tilde{I}(x_0, d)$ и $L(x_0, d)$ совпадают. Поведение функционала $L(x_0, d)$ на множестве $V \setminus D$ полностью определяется выбором функции $\varphi(t, x)$.

Пусть имеется функция $\varphi(t, x) \in C^{1,1}(T' \times R^n)$. Найдем минимум функционала $L(x_0, d)$ на множестве V . Операции нахождения экстремума в первых двух слагаемых могут быть выполнены по отдельности в силу свойств функций $x(\cdot), u(\cdot)$, образующих пары $d \in V$. Тогда

$$\min_{d \in V} L(x_0, d) = g - \int_{t_0}^{t_1} r(t) dt + \varphi(t_1, x(t_1)).$$

Из условий 1) и 2) следует, что $L(x_0, d^*) = \min_{d \in V} L(x_0, d)$, т.е. $L(x_0, d^*) \leq L(x_0, d) \forall d \in V$. Поскольку $d^* \in D \subset V$, то $L(x_0, d^*) \leq L(x_0, d) \forall d \in D$. Но на множестве D справедливо тождество $L(x_0, d) = \tilde{I}(x_0, d)$. Поэтому $\tilde{I}(x_0, d^*) \leq \tilde{I}(x_0, d) \forall d \in D$, что соответствует определению минимума функционала I на множестве D .

Если существует функция $\varphi(t, x)$, удовлетворяющая условиям 1), 2) утверждения при $r(t) \neq 0, g \neq 0$, то, применяя прямую подстановку в $r(t) = \max_{x,u} R(t, x, u)$, $g = \min_{x_0} G(t_0, x_0)$, можно показать, что функция $\varphi'(t, x) = \varphi(t, x) + \int_{t_0}^t r(\tau) d\tau + g$ также удовлетворяет этим условиям при $r'(t) \equiv 0, g' = 0$. В этом случае из доказанного утверждения и выражения для $\min_{d \in V} L(x_0, d)$ следует

$$\min_{d \in V} L(x_0, d) = \min_{d \in D} \tilde{I}(x_0, d) = \varphi'(t_1, x(t_1)).$$

Доказательство закончено.

Замечание 1. В решаемой задаче $t_0 = 0, x \equiv \varepsilon, u = (w, v)$.

Пусть имеется функция $\varphi(t, \varepsilon) \in C^{1,1}$. Составим конструкции (9), (10) для функционала (8) и модели динамической системы, описываемой уравнением (4) для ошибки оценивания:

$$\begin{aligned} R(t, \varepsilon, K, w, v) &= \frac{\partial \varphi(t, \varepsilon)}{\partial t} + \left(\frac{\partial \varphi(t, \varepsilon)}{\partial \varepsilon} \right)^T [(A - KC)\varepsilon + Bw - KDV] + \\ &+ \frac{1}{2} \varepsilon^T Q \varepsilon - \frac{1}{2} \gamma^2 w^T W^{-1} w - \frac{1}{2} \gamma^2 v^T V^{-1} v, \end{aligned} \quad (11)$$

$$G(0, \varepsilon_0) = \frac{1}{2} \gamma^2 \varepsilon_0^T P_0^{-1} \varepsilon_0 - \varphi(0, \varepsilon_0),$$

где $\frac{\partial \varphi(t, \varepsilon)}{\partial \varepsilon} = \left(\frac{\partial \varphi(t, \varepsilon)}{\partial \varepsilon_1}, \dots, \frac{\partial \varphi(t, \varepsilon)}{\partial \varepsilon_n} \right)^T$.

Используем правила векторного дифференцирования [29]: $\frac{\partial [A(t)x]}{\partial x} = A^T(t)$,



$\frac{\partial [x^T A(t)x]}{\partial x} = [A(t) + A^T(t)]x$ (если матрица $A(t)$ симметрическая, то

$\frac{\partial [x^T A(t)x]}{\partial x} = 2A(t)x$, $\frac{\partial [x^T A(t)x]}{\partial x^T \partial x} = A(t) + A^T(t)$ и свойства операции транспонирования $(AB)^T = B^T A^T$, $(A^T)^T = A$.

Найдем максимум функции $R(t, \varepsilon, K, w, v)$ по переменным w, v , используя необходимые условия безусловного экстремума:

$$\frac{\partial R}{\partial w} = B^T \frac{\partial \varphi(t, \varepsilon)}{\partial \varepsilon} - \gamma^2 W^{-1} w = 0, \quad \frac{\partial R}{\partial v} = -D^T K^T \frac{\partial \varphi(t, \varepsilon)}{\partial \varepsilon} - \gamma^2 V^{-1} v = 0.$$

Отсюда

$$w^* = \frac{1}{\gamma^2} W B^T \frac{\partial \varphi(t, \varepsilon)}{\partial \varepsilon}, \quad v^* = -\frac{1}{\gamma^2} V D^T K^T \frac{\partial \varphi(t, \varepsilon)}{\partial \varepsilon}. \quad (12)$$

Проверим выполнение достаточных условий максимума:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 R}{\partial w^T \partial w} & \frac{\partial^2 R}{\partial w^T \partial v} \\ \frac{\partial^2 R}{\partial v^T \partial w} & \frac{\partial^2 R}{\partial v^T \partial v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\gamma^2 W^{-1} & O \\ O & -\gamma^2 V^{-1} \end{pmatrix} < 0,$$

так как $W^{-1} > 0$, $V^{-1} > 0$, а определитель блочно-диагональной матрицы равен произведению определителей блоков.

Тогда

$$\begin{aligned} R(t, \varepsilon, K, w^*, v^*) &= \frac{\partial \varphi(t, \varepsilon)}{\partial t} + \left(\frac{\partial \varphi(t, \varepsilon)}{\partial \varepsilon} \right)^T [(A - KC)\varepsilon + \frac{1}{\gamma^2} B W B^T \frac{\partial \varphi(t, \varepsilon)}{\partial \varepsilon} + \\ &+ \frac{1}{\gamma^2} K D V D^T K^T \frac{\partial \varphi(t, \varepsilon)}{\partial \varepsilon}] + \frac{1}{2} \varepsilon^T Q \varepsilon - \frac{1}{2\gamma^2} \left(\frac{\partial \varphi(t, \varepsilon)}{\partial \varepsilon} \right)^T \underbrace{B W W^{-1} W B^T}_{E} \frac{\partial \varphi(t, \varepsilon)}{\partial \varepsilon} - \\ &- \frac{1}{2\gamma^2} \left(\frac{\partial \varphi(t, \varepsilon)}{\partial \varepsilon} \right)^T \underbrace{K D V V^{-1} V D^T K^T}_{E} \frac{\partial \varphi(t, \varepsilon)}{\partial \varepsilon} = \\ &= \frac{\partial \varphi(t, \varepsilon)}{\partial t} + \left(\frac{\partial \varphi(t, \varepsilon)}{\partial \varepsilon} \right)^T A \varepsilon - \left(\frac{\partial \varphi(t, \varepsilon)}{\partial \varepsilon} \right)^T K C \varepsilon + \frac{1}{2\gamma^2} \left(\frac{\partial \varphi(t, \varepsilon)}{\partial \varepsilon} \right)^T B W B^T \frac{\partial \varphi(t, \varepsilon)}{\partial \varepsilon} + \\ &+ \frac{1}{2\gamma^2} \left(\frac{\partial \varphi(t, \varepsilon)}{\partial \varepsilon} \right)^T K D V D^T K^T \frac{\partial \varphi(t, \varepsilon)}{\partial \varepsilon} + \frac{1}{2} \varepsilon^T Q \varepsilon. \end{aligned}$$

Так как для матриц-столбцов справедливо равенство $a^T b = \text{tr}(ab^T)$, то можно использовать правила нахождения матричных градиентов [30]:

$$\frac{\partial}{\partial K} \text{tr}[AK^T] = A, \quad \frac{\partial}{\partial K} \text{tr}[AKBK^T] = AKB + A^T KB^T.$$

Заметим, что

$$\left(\frac{\partial \varphi(t, \varepsilon)}{\partial \varepsilon} \right)^T KC \varepsilon = \text{tr} \left[\frac{\partial \varphi(t, \varepsilon)}{\partial \varepsilon} \varepsilon^T C^T K^T \right],$$

$$\left(\frac{\partial \varphi(t, \varepsilon)}{\partial \varepsilon} \right)^T KDVD^T K^T \frac{\partial \varphi(t, \varepsilon)}{\partial \varepsilon} = \text{tr} \left[\frac{\partial \varphi(t, \varepsilon)}{\partial \varepsilon} \left(\frac{\partial \varphi(t, \varepsilon)}{\partial \varepsilon} \right)^T KDVD^T K^T \right].$$

Тогда

$$\frac{\partial R}{\partial K} = -\frac{\partial \varphi(t, \varepsilon)}{\partial \varepsilon} \varepsilon^T C^T + \frac{1}{2\gamma^2} \frac{\partial \varphi(t, \varepsilon)}{\partial \varepsilon} \left(\frac{\partial \varphi(t, \varepsilon)}{\partial \varepsilon} \right)^T KDVD^T +$$

$$+ \frac{1}{2\gamma^2} \frac{\partial \varphi(t, \varepsilon)}{\partial \varepsilon} \left(\frac{\partial \varphi(t, \varepsilon)}{\partial \varepsilon} \right)^T KDVD^T = -\frac{\partial \varphi(t, \varepsilon)}{\partial \varepsilon} \varepsilon^T C^T + \frac{1}{\gamma^2} \frac{\partial \varphi(t, \varepsilon)}{\partial \varepsilon} \left(\frac{\partial \varphi(t, \varepsilon)}{\partial \varepsilon} \right)^T KDVD^T = 0.$$

Отсюда

$$\frac{1}{\gamma^2} \frac{\partial \varphi(t, \varepsilon)}{\partial \varepsilon} \left(\frac{\partial \varphi(t, \varepsilon)}{\partial \varepsilon} \right)^T KDVD^T = \frac{\partial \varphi(t, \varepsilon)}{\partial \varepsilon} \varepsilon^T C^T,$$

$$K^* = \gamma^2 \left[\frac{\partial \varphi(t, \varepsilon)}{\partial \varepsilon} \left(\frac{\partial \varphi(t, \varepsilon)}{\partial \varepsilon} \right)^T \right]^{-1} \frac{\partial \varphi(t, \varepsilon)}{\partial \varepsilon} \varepsilon^T C^T (DVD^T)^{-1}. \quad (13)$$

Будем искать функцию $\varphi(t, x) \in C^{1,1}$ в форме

$$\varphi(t, x) = \frac{1}{2} \gamma^2 \varepsilon^T P^{-1}(t) \varepsilon, \quad (14)$$

где $P^{-1}(t)$ – неизвестная симметрическая матрица порядка n .

Тогда $\frac{\partial \varphi(t, \varepsilon)}{\partial \varepsilon} = \gamma^2 P^{-1} \varepsilon$ и из (12),(13) получаем

$$w^* = \frac{1}{\gamma^2} WB^T \gamma^2 P^{-1} \varepsilon = WB^T P^{-1} \varepsilon, \quad v^* = -\frac{1}{\gamma^2} VD^T K^T \gamma^2 P^{-1} \varepsilon = -VD^T K^T P^{-1} \varepsilon, \quad (15)$$

$$K^* = \gamma^2 \left[\frac{\partial \varphi(t, \varepsilon)}{\partial \varepsilon} \left(\frac{\partial \varphi(t, \varepsilon)}{\partial \varepsilon} \right)^T \right]^{-1} \frac{\partial \varphi(t, \varepsilon)}{\partial \varepsilon} \varepsilon^T C^T (DVD^T)^{-1} =$$

$$= \gamma^2 [\gamma^4 P^{-1} \varepsilon \varepsilon^T P^{-1}]^{-1} \gamma^2 P^{-1} \varepsilon \varepsilon^T C^T (DVD^T)^{-1} = P[\varepsilon \varepsilon^T]^{-1} \underbrace{PP^{-1}}_E \varepsilon \varepsilon^T C^T (DVD^T)^{-1} =$$



$$= P \underbrace{[\varepsilon \varepsilon^T]^{-1} \varepsilon \varepsilon^T}_E C^T (DVD^T)^{-1} = PC^T (DVD^T)^{-1} = PC^T (D^T)^{-1} V^{-1} D^{-1} = PC^T \underbrace{(D^{-1})^T V^{-1} D^{-1}}_{\tilde{V}^{-1}}. \quad (16)$$

Запишем равенство 1) из достаточных условий оптимальности с учетом $r(t) \equiv 0$, подставляя в выражение $R(t, \varepsilon, K, w^*, v^*)$ вместо K формулу (16), т.е.

$$R(t, \varepsilon, K^*, w^*, v^*) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{2} \gamma^2 \varepsilon^T \dot{P}^{-1} \varepsilon + \gamma^2 \varepsilon^T P^{-1} A \varepsilon - \gamma^2 \varepsilon^T \underbrace{P^{-1} P}_{\tilde{E}} C^T (D^{-1})^T V^{-1} D^{-1} C \varepsilon + \frac{1}{2\gamma^2} \gamma^2 \varepsilon^T P^{-1} B W B^T \gamma^2 P^{-1} \varepsilon +$$

$$+ \frac{1}{2\gamma^2} \gamma^4 \varepsilon^T \underbrace{P^{-1} P}_{\tilde{E}} C^T \underbrace{(DVD^T)^{-1} DVD^T}_E (D^{-1})^T V^{-1} D^{-1} C \underbrace{PP^{-1}}_{\tilde{E}} \varepsilon + \frac{1}{2} \varepsilon^T Q \varepsilon = 0,$$

$$\frac{1}{2} \gamma^2 \varepsilon^T \dot{P}^{-1} \varepsilon + \gamma^2 \varepsilon^T P^{-1} A \varepsilon - \frac{1}{2} \gamma^2 \varepsilon^T C^T (D^{-1})^T V^{-1} D^{-1} C \varepsilon + \frac{1}{2} \gamma^2 \varepsilon^T P^{-1} B W B^T P^{-1} \varepsilon + \frac{1}{2} \varepsilon^T Q \varepsilon = 0,$$

$$\varepsilon^T \left[\frac{1}{2} \gamma^2 \dot{P}^{-1} + \gamma^2 P^{-1} A - \frac{1}{2} \gamma^2 C^T (D^{-1})^T V^{-1} D^{-1} C + \frac{1}{2} \gamma^2 P^{-1} B W B^T P^{-1} + \frac{1}{2} Q \right] \varepsilon = 0.$$

Используя условие равенства нулю квадратичной формы $x^T A x = 0 \Leftrightarrow A + A^T = 0$, получаем

$$\dot{P}^{-1} + P^{-1} A + A^T P^{-1} - C^T \tilde{V}^{-1} C + P^{-1} B W B^T P^{-1} + \frac{1}{\gamma^2} Q = 0.$$

С учетом равенства $PP^{-1} = E$ имеем $\dot{P}P^{-1} + P\dot{P}^{-1} = 0$ и $\dot{P} = -P\dot{P}^{-1}P$. Тогда, умножая уравнение на матрицу P слева и справа, получаем

$$P\dot{P}^{-1}P + PP^{-1}AP + PA^T P^{-1}P - PC^T \tilde{V}^{-1}CP + PP^{-1}BWB^T P^{-1}P + \frac{1}{\gamma^2} PQP = 0,$$

или

$$\dot{P} = AP + PA^T - PC^T \tilde{V}^{-1}CP + BWB^T + \frac{1}{\gamma^2} PQP. \quad (17)$$

Выпишем условие 2) из достаточных условий оптимальности

$$G(0, \varepsilon_0) = \frac{1}{2} \gamma^2 \varepsilon^T P_0^{-1} \varepsilon - \varphi(0, \varepsilon) = \frac{1}{2} \gamma^2 \varepsilon^T P_0^{-1} \varepsilon - \frac{1}{2} \gamma^2 \varepsilon^T P^{-1}(0) \varepsilon = g = 0 \quad \forall \varepsilon \in R^n.$$

Отсюда следует граничное условие для уравнения (17):

$$P(0) = P_0. \quad (18)$$

Частный случай (линейные стационарные системы с полубесконечным промежутком функционирования).

Рассмотрим случай, когда матрицы системы (1),(2) не зависят от t , а момент окончания процесса функционирования системы $t_1 \rightarrow +\infty$:



$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bw(t), \quad x(0) = x_0, \\ y(t) &= Cx(t) + Dv(t).\end{aligned}$$

Структура наблюдателя состояния (3) имеет вид

$$\frac{d\hat{x}}{dt} = A\hat{x}(t) + K[y(t) - C\hat{x}(t)], \quad \hat{x}(0) = \hat{x}_0.$$

Требуется обеспечить (если это возможно) выполнение неравенства:

$$\begin{aligned}& \frac{\int_0^\infty \|\varepsilon(t)\|_Q^2 dt}{\|\varepsilon(0)\|_{P_0}^2 + \int_0^\infty [\|w(t)\|_{W^{-1}}^2 + \|v(t)\|_{V^{-1}}^2] dt} = \\ & = \frac{\int_0^\infty [\varepsilon^T(t) Q \varepsilon(t)] dt}{\varepsilon^T(0) P_0^{-1} \varepsilon(0) + \int_0^\infty [w^T(t) W^{-1} w(t) + v^T(t) V^{-1} v(t)] dt} \leq \gamma^2,\end{aligned}$$

где Q, P_0, W, V – симметрические положительно определенные матрицы соответствующих размеров, $\gamma > 0$ – заданное неотрицательное число.

Тогда

$$K^* = PC^T (DVD^T)^{-1} = PC^T (D^T)^{-1} V^{-1} D^{-1} = PC^T \underbrace{(D^{-1})^T V^{-1} D^{-1}}_{\tilde{V}^{-1}}. \quad (19)$$

$$w^* = \frac{1}{\gamma^2} WB^T \gamma^2 P^{-1} \varepsilon = WB^T P^{-1} \varepsilon, \quad v^* = -\frac{1}{\gamma^2} VD^T K^T \gamma^2 P^{-1} \varepsilon = -VD^T K^T P^{-1} \varepsilon,$$

где матрица P – положительно определенное решение алгебраического уравнения Риккати

$$AP + PA^T - PC^T \tilde{V}^{-1} CP + BWB^T + \frac{1}{\gamma^2} PQP = 0. \quad (20)$$

Замечание 2. В правую часть математической модели объекта (1) может входить слагаемое с управлением:

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B_1(t)w(t) + B_2u(t), \quad x(0) = x_0,$$

при этом модель измерительной системы остается без изменений:

$$y(t) = C(t)x(t) + D(t)v(t),$$

где $x \in R^n$ – вектор состояния, $w \in R^p$ – вектор возмущений, $u \in R^q$ – вектор управлений; $y \in R^m$ – вектор выхода (вектор измерений), $v \in R^s$ – вектор ошибок и погрешностей измерений, $t \in T = [0, t_1]$ – время, t_1 – заданное положительное число.



Заданы непрерывные матрицы $A(t), B_1(t), B_2(t), C(t), D(t)$ размеров $(n \times n)$, $(n \times p)$, $(n \times q)$, $(m \times n)$, $(m \times s)$ соответственно.

Тогда структура наблюдателя состояния описывается уравнением

$$\frac{d\hat{x}}{dt} = A(t)\hat{x}(t) + B_2 u(t) + K(t)[y(t) - C(t)\hat{x}(t)], \quad \hat{x}(0) = \hat{x}_0. \quad (21)$$

При этом уравнение, описывающее изменение ошибки оценивания, не изменяется, и сохраняются формулы для нахождения $K^*(t), w^*(t), v^*(t)$.

Пример 1

Рассмотрим задачу синтеза наблюдателя в системе управления самолетом L-1011 [13], описываемой моделью нестационарной системы на конечном промежутке времени. В рассматриваемой задаче $n = 3$, $p = 1$, $m = 2$.

Тогда уравнение модели объекта управления (1) имеет вид

$$\dot{x}(t) = \underbrace{\begin{pmatrix} -3 + \sin t & 0 & 1 + \sin 2t \\ 1 & 2 & \sin 4t \\ 0 & 1 + \sin 3t & -2 \end{pmatrix}}_{A(t)} x(t) + \underbrace{\begin{pmatrix} 0, 0128 \\ 0, 001 \\ 0, 001 \end{pmatrix}}_{B_1} \underbrace{\left(\frac{1}{2} \sin\left(\frac{\pi t}{4}\right) + \frac{1}{2} \cos 2t \right)}_{w(t)} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{B_2} u(t).$$

Уравнение измерительной системы (2):

$$y(t) = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}}_N x(t) + \underbrace{\begin{pmatrix} 0, 0001 & 0, 15 \\ 0, 1 & 0, 0017 \end{pmatrix}}_D v(t),$$

где погрешности измерений описываются выражением:

$$v(t) = \begin{pmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \left[\sin Nt + \cos \frac{\pi N}{4} t \right] \\ \frac{1}{4} \left[\sin Nt + \cos \frac{\pi N}{4} t \right] \end{pmatrix}$$

Закон управления самолетом имеет вид [13]

$$u(t) = -(21.6352 \quad -1.0958)y(t) - 5[(0.5 \quad 0.5)y(t) - \eta(t)],$$

где функция $\eta(t)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\dot{\eta}(t) = -(21.6352 \quad -1.0958)y(t) + 0.1((0.5 \quad 0.5)y(t) - \eta(t)), \quad \eta(0) = (1, 6)^T.$$

Уравнение для синтеза наблюдателя с учетом замечания 2 принимают форму

$$\frac{d\hat{x}}{dt} = A(t)\hat{x}(t) + B_2(t)u(t) + K^*(t)[y(t) - C(t)\hat{x}(t)], \quad \hat{x}(0) = \hat{x}_0,$$

$$K^*(t) = P(t)C^T(t)[D(t)V(t)D^T(t)]^{-1} = P(t)C^T(t) \underbrace{(D^{-1}(t))^T V^{-1}(t) D^{-1}(t)}_{\tilde{V}^{-1}(t)},$$



$$\dot{P} = AP + PA^T - PC^T \tilde{V}^{-1} CP + B_1 W B_1^T + \frac{1}{\gamma^2} P Q P, \quad P(0) = P_0,$$

$$w^*(t) = W(t) B_1^T(t) P^{-1}(t) \varepsilon(t),$$

$$v^*(t) = -V(t) D^T(t) K^T(t) P^{-1}(t) \varepsilon(t),$$

$$\frac{d\varepsilon(t)}{dt} = [A(t) - K^*(t)C(t)]\varepsilon(t) + B_1(t)w^*(t) - K(t)D(t)v^*(t), \quad \varepsilon(0) = x_0 - \hat{x}_0.$$

При решении задачи предлагается применить следующую методику.

1. Найти матрицу $P(t)$ – решение дифференциального уравнения Риккати

$$\dot{P} = AP + PA^T - PC^T \tilde{V}^{-1} CP + B W B^T + \frac{1}{\gamma^2} P Q P, \quad P(0) = P_0,$$

2. Найти матрицу коэффициентов усиления наблюдателя

$$K^*(t) = P(t)C^T(t)[D(t)V(t)D^T(t)]^{-1} = P(t)C^T(t) \underbrace{(D^{-1}(t))^T V^{-1}(t) D^{-1}(t)}_{\tilde{V}^{-1}(t)}.$$

3. Найти наилучшие законы изменения возмущения и погрешности измерений:

$$w^*(t) = W(t) B_1^T(t) P^{-1}(t) \varepsilon(t),$$

$$v^*(t) = -V(t) D^T(t) K^{*T}(t) P^{-1}(t) \varepsilon(t).$$

4. Оценить эффективность наблюдателя, исследуя динамику изменения ошибки наблюдения:

$$\frac{d\varepsilon(t)}{dt} = [A(t) - K^*(t)C(t)]\varepsilon(t) + B_1(t)w^*(t) - K^*(t)D(t)v^*(t), \quad \varepsilon(0) = x_0 - \hat{x}_0.$$

Для этого моделировать работу наблюдателя при ограниченных возмущениях и погрешностях измерений вида

$$w(t) = \frac{1}{2} \left[\sin 2Mt + \cos \frac{\pi M}{4} t \right], \quad v(t) = \begin{pmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \left[\sin Nt + \cos \frac{\pi N}{4} t \right] \\ \frac{1}{4} \left[\sin Nt + \cos \frac{\pi N}{4} t \right] \end{pmatrix},$$

где M, N – положительные числа.

Матрицы Q , W и V в (5) подбираются таким образом, чтобы обеспечивать корректный синтез наблюдателя в системе, а также желаемый вид переходных процессов в системе. Вид внешних воздействий и погрешностей измерения, а также подобранные матрицы, представлены в табл. 1.



Таблица 1

Параметры моделирования

Q	$\begin{pmatrix} 0,0001 & 0,001 & 0,001 \\ 0,001 & 0,0001 & 0,01 \\ 0,001 & 0,01 & 0,0001 \end{pmatrix}$
V	$\begin{pmatrix} 1500 & 1000 \\ 1000 & 170 \end{pmatrix}$
W	0,001
γ	0,5
T	[0; 5]
$w(t)$	$\frac{1}{2} \left[\sin 2t + \cos \frac{\pi}{4} t \right]$
$v(t)$	$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \left[\sin t + \cos \frac{\pi}{4} t \right] \\ \frac{1}{4} \left[\sin t + \cos \frac{\pi}{4} t \right] \end{pmatrix}$

На рис. 1–3 отражены результаты моделирования системы управления совместно с наблюдателем состояния при различных начальных условиях:

а) $x(0) = (5,1 \ 1 \ -2)^T$, б) $x(0) = (4,8 \ 1,2 \ -1,7)^T$.

Начальные условия для оценки вектора состояния: $\hat{x}(0) = (5,0667 \ 1,1 \ -1,7333)^T$.

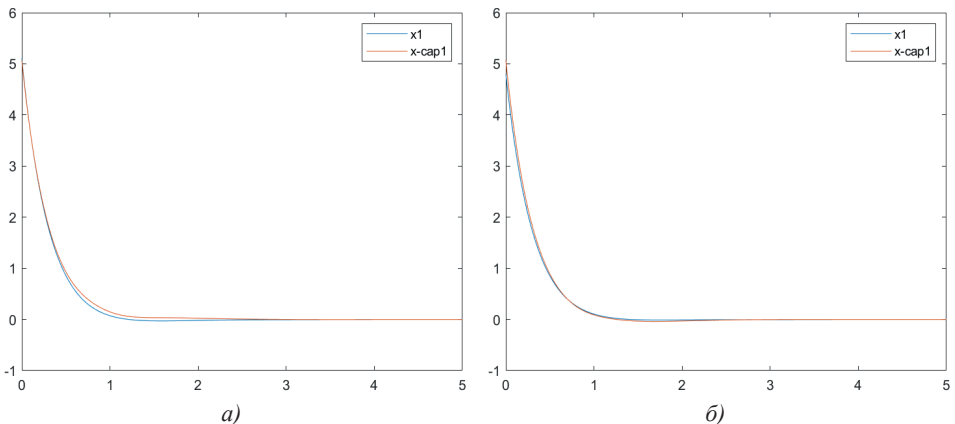


Рис. 1. Переходные процессы для координаты x_1 и ее оценки \hat{x}_1

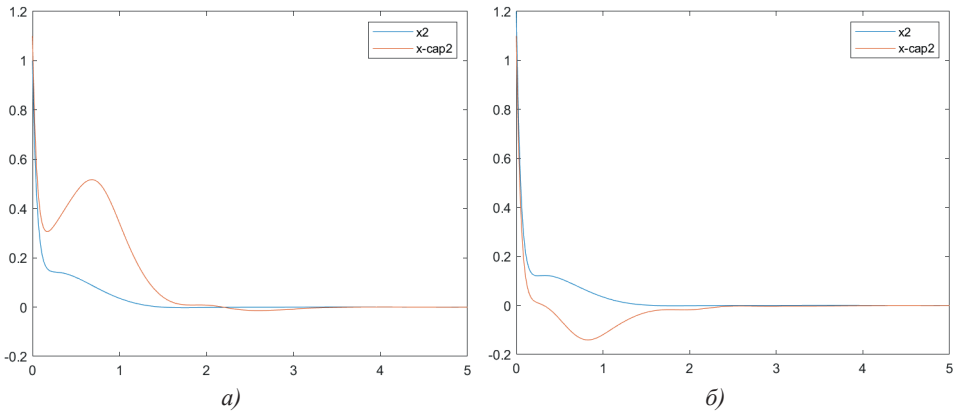


Рис. 2. Переходные процессы для координаты x_2 и ее оценки \hat{x}_2

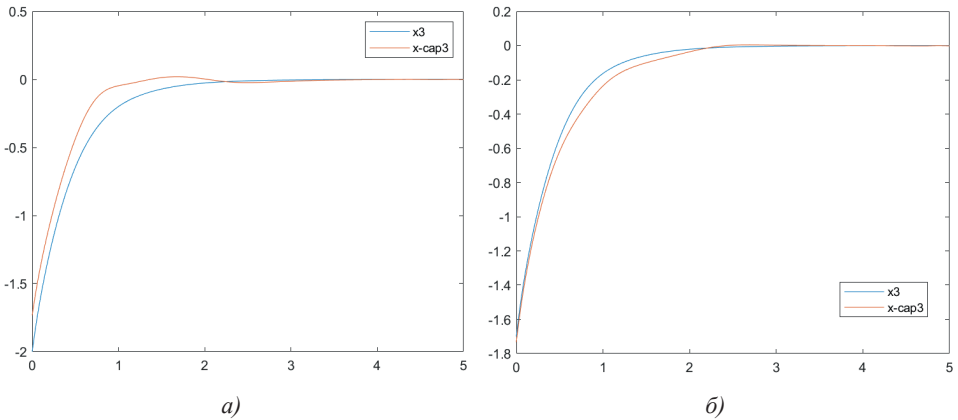


Рис. 3. Переходные процессы для координаты x_3 и ее оценки \hat{x}_3

На рис. 4–6 представлены результаты моделирования системы с двумя различными начальными условиями для вектора состояния объекта и вектора его оценок:

а) $x(0) = (5, 3 \ 1, 1 \ -1, 5)^T$, $\hat{x}(0) = (5, 0, 667 \ 1, 1 \ -1, 7333)^T$;

б) $x(0) = (1 \ 0, 7 \ -1, 3)^T$, $\hat{x}(0) = (1 \ 0, 6667 \ -1, 1333)^T$.

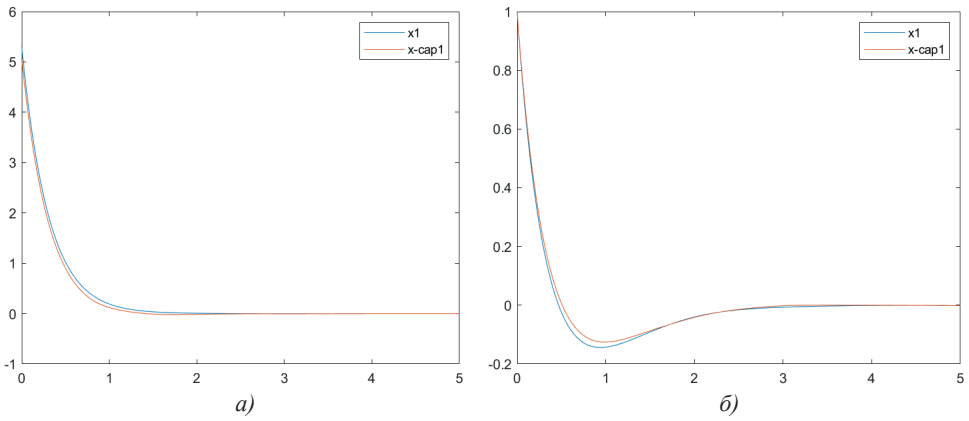


Рис. 4. Переходные процессы для координаты x_1 и ее оценки \hat{x}_1

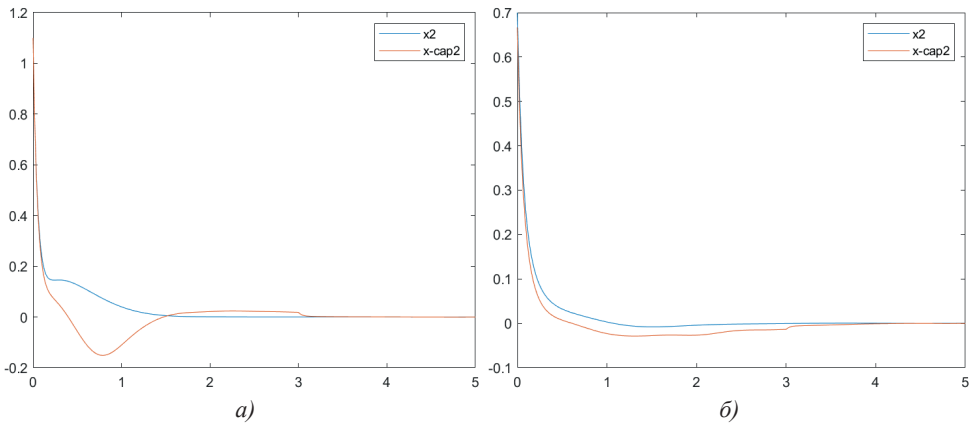


Рис. 5. Переходные процессы для координаты x_2 и ее оценки \hat{x}_2

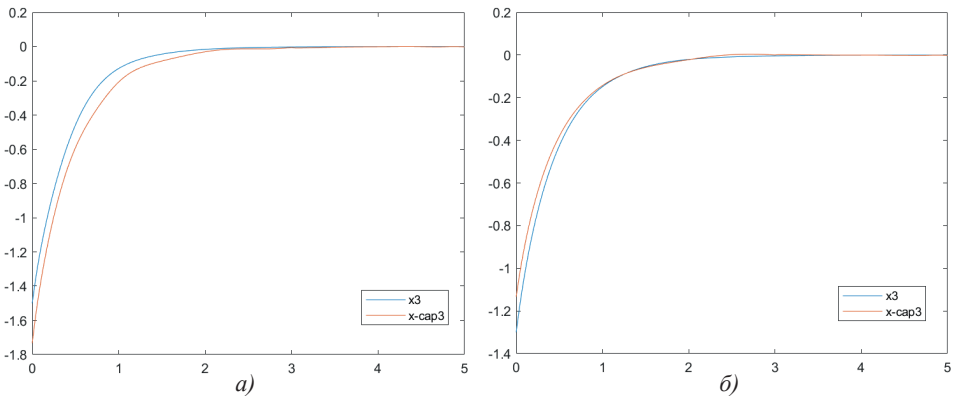


Рис. 6. Переходные процессы для координаты x_3 и ее оценки \hat{x}_3



На рис. 7–9 представлены результаты моделирования системы с двумя различными начальными условиями: а) $x(0) = (3 \ 1 \ -1)^T$, б) $x(0) = (3,3 \ 1,2 \ -1,7)^T$.

Начальные условия для оценки вектора состояния: $\hat{x}(0) = (3,2667 \ 0,9667 \ -1,3333)^T$.

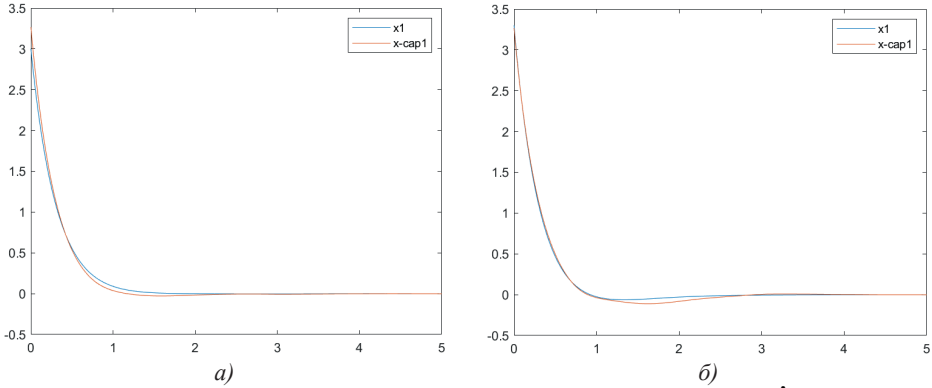


Рис. 7. Переходные процессы для координаты x_1 и ее оценки \hat{x}_1

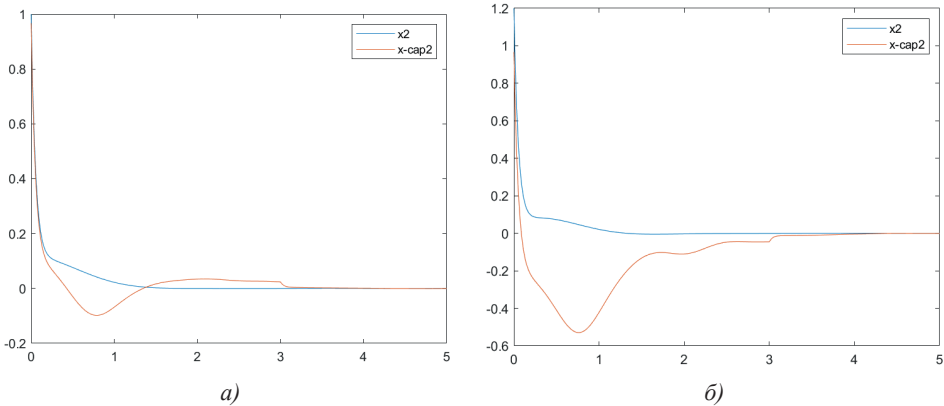


Рис. 8. Переходные процессы для координаты x_2 и ее оценки \hat{x}_2

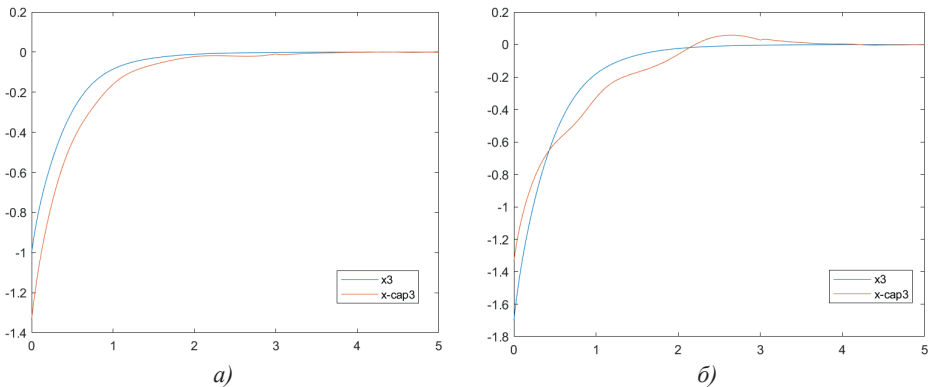


Рис. 9. Переходные процессы для координаты x_3 и ее оценки \hat{x}_3



Анализ полученных результатов моделирования позволяет судить о стремлении ошибки оценивания к нулю при различных начальных условиях движения (при изменении параметра M переходные процессы аналогичны представленным).

Пример 2

Рассмотрим задачу синтеза наблюдателя в системе управления самолетом L-1011 [13], описываемой моделью стационарной системы на полубесконечном промежутке времени. В рассматриваемой задаче $n = 4$, $p = 1$, $m = 2$.

Тогда уравнение модели объекта управления (1) имеет вид

$$\dot{x}(t) = \underbrace{\begin{pmatrix} -2,98 & 0,93 & 0 & -0,0340 \\ -0,99 & -0,21 & 0,035 & -0,0011 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0,39 & -5,555 & 0 & -1,89 \end{pmatrix}}_A x(t) + \underbrace{\begin{pmatrix} -0,128 \\ 0,001 \\ 0,001 \\ 0,04 \end{pmatrix}}_{B_1} w(t) + \underbrace{\begin{pmatrix} -0,032 \\ 0 \\ 0 \\ -1,6 \end{pmatrix}}_{B_2} u(t).$$

Уравнение измерительной системы (2):

$$y(t) = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_C x(t) + \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0,5 \\ 0,01 & 1 \end{pmatrix}}_D v(t).$$

Возмущение $w(t) = \frac{1}{2} \left[\sin 2t + \cos \frac{\pi}{4} t \right]$, а погрешность измерений:

$$v(t) = \begin{pmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \left[\sin Nt + \cos \frac{\pi N}{4} t \right] \\ \frac{1}{4} \left[\sin Nt + \cos \frac{\pi N}{4} t \right] \end{pmatrix}$$

Закон управления [13] имеет вид

$$u(t) = (1.0237 \quad 1.6367) y(t) - 5[(0.1946 \quad -3.1128) y(t) - \eta(t)],$$

где

$$\dot{\eta}(t) = (1,0197 \quad 1,6303) y(t) - 0,0195 \eta(t), \quad \eta(0) = (0,1)^T.$$

При решении задачи предлагается применить следующую методику.

1. Найти матрицу P – положительно определенное решение алгебраического уравнения Риккати

$$AP + PA^T - PC^T \tilde{V}^{-1} CP + B_1 W B_1^T + \frac{1}{\gamma^2} P Q P = 0.$$

2. Найти матрицу коэффициентов усиления наблюдателя



$$K^* = PC^T (DVD^T)^{-1} = PC^T (D^T)^{-1} V^{-1} D^{-1} = PC^T \underbrace{(D^{-1})^T V^{-1} D^{-1}}_{\tilde{\gamma}^{-1}}.$$

3. Найти наилучшие законы изменения возмущения и погрешности измерений:

$$w^* = WB_1^T P^{-1} \varepsilon, \quad v^* = -VD^T K^T P^{-1} \varepsilon. \quad (22)$$

4. Оценить эффективность наблюдателя, исследуя динамику изменения ошибки наблюдения:

$$\frac{d\varepsilon(t)}{dt} = [A - K^* C] \varepsilon(t) + B_1 w^*(t) - KDv^*(t), \quad \varepsilon(0) = x_0 - \hat{x}_0.$$

Для этого моделировать работу наблюдателя при ограниченных возмущениях и погрешностях измерений вида:

$$w(t) = \frac{1}{2} [\sin 2Mt + \cos \frac{\pi M}{4} t], \quad v(t) = \begin{pmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \left[\sin Nt + \cos \frac{\pi N}{4} t \right] \\ \frac{1}{4} \left[\sin Nt + \cos \frac{\pi N}{4} t \right] \end{pmatrix},$$

где M, N – положительные числа.

Матрицы Q, W и V в (5) подбираются таким образом, чтобы обеспечивать корректный синтез наблюдателя в системе, а также желаемый вид переходных процессов. Вид внешних воздействий и погрешностей измерения, а также подобранные матрицы, представлены в табл. 2.

Таблица 2

Параметры моделирования

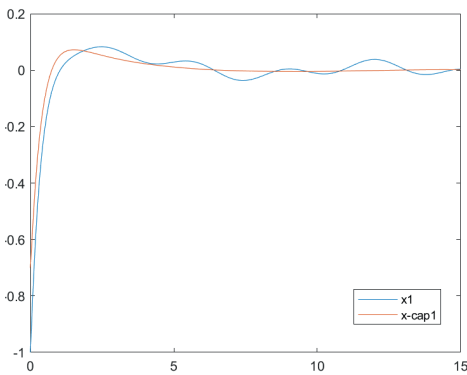
Q	$\begin{pmatrix} 100 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 100 & 100 & 0 \\ 0 & 100 & 100 & 100 \\ 0 & 0 & 100 & 100 \end{pmatrix}$
V	$\begin{pmatrix} 0,5 & 0,1 \\ 0,1 & 0,25 \end{pmatrix}$
W	0,1
γ	0,5
T	[0;15]



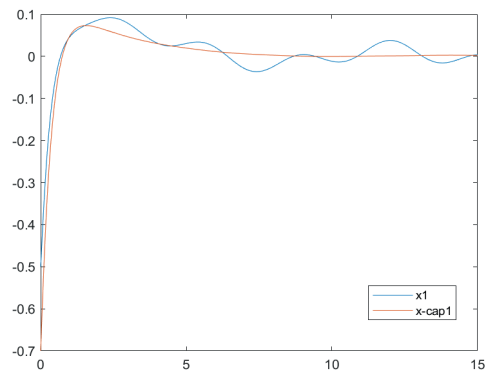
$w(t)$	$\frac{1}{2} \left[\sin 2t + \cos \frac{\pi}{4} t \right]$
$v(t)$	$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \left[\sin t + \cos \frac{\pi}{4} t \right] \\ \frac{1}{4} \left[\sin t + \cos \frac{\pi}{4} t \right] \end{pmatrix}$

На рис. 10–13 представлены результаты моделирования системы с различными начальными условиями: а) $x(0) = (-1 \ 0 \ -1 \ 1)^T$, б) $x(0) = (-0,5 \ 0,25 \ 1,1 \ 0,75)^T$.

Начальные условия для оценки вектора состояния: $\hat{x}(0) = (-0,7 \ 0,1167 \ 1 \ 0,6167)^T$.

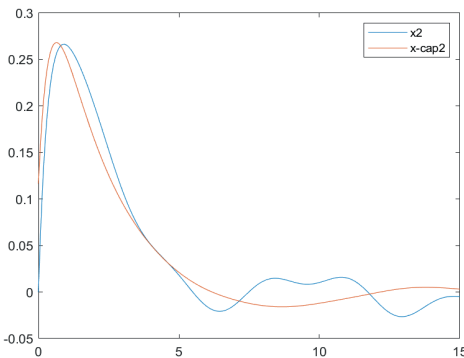


а)

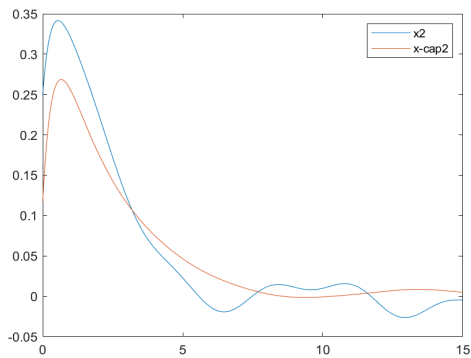


б)

Рис. 10. Переходные процессы для координаты x_1 и ее оценки \hat{x}_1



а)



б)

Рис. 11. Переходные процессы для координаты x_2 и ее оценки \hat{x}_2

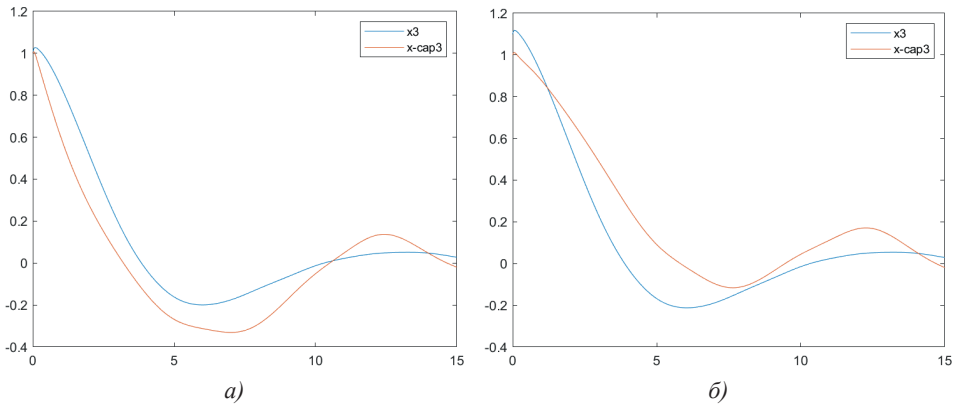


Рис. 12. Переходные процессы для координаты x_3 и ее оценки \hat{x}_3

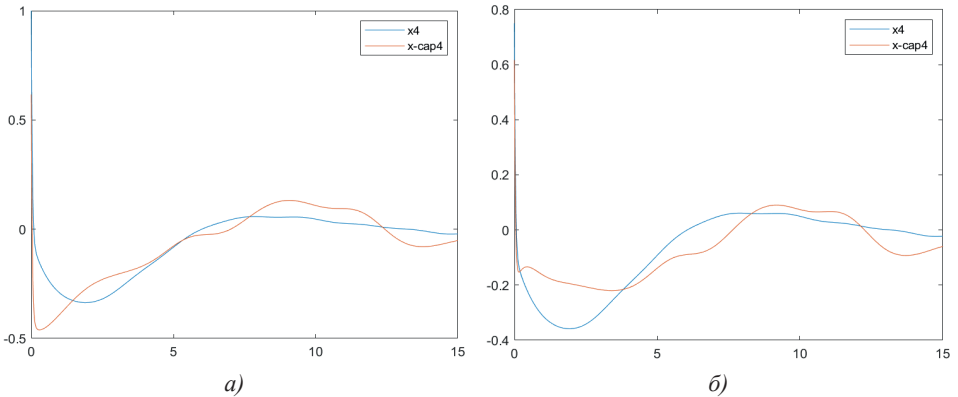


Рис. 13. Переходные процессы для координаты x_4 и ее оценки \hat{x}_4

На рис. 14–17 представлены результаты моделирования системы с различными начальными условиями для вектора состояния и его оценки:

а) $x(0) = (-0,7 \ 0,1 \ 0,9 \ 0,5)^T$, $\hat{x}(0) = (-0,7 \ 0,1167 \ 1 \ 0,6167)^T$;

б) $x(0) = (-1 \ 0 \ 0,7 \ 0,5)^T$, $\hat{x}(0) = (-0,7 \ 0,1167 \ 0,9 \ 0,45)^T$.

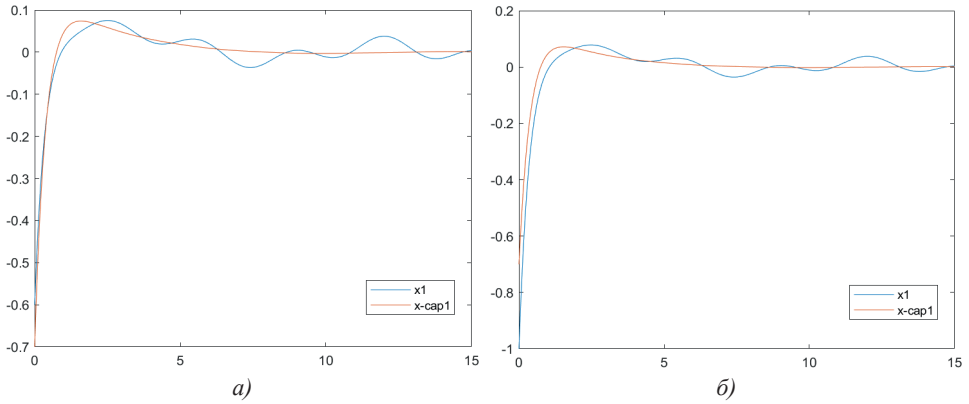


Рис. 14. Переходные процессы для координаты x_1 и ее оценки \hat{x}_1

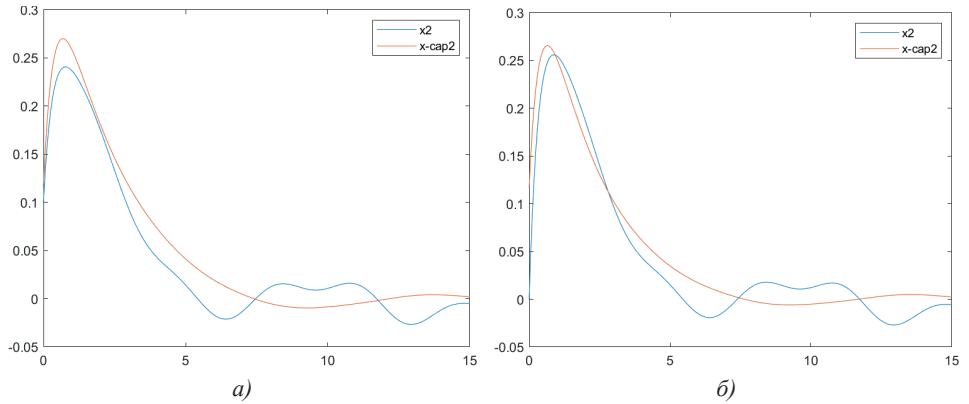


Рис. 15. Переходные процессы для координаты x_2 и ее оценки \hat{x}_2

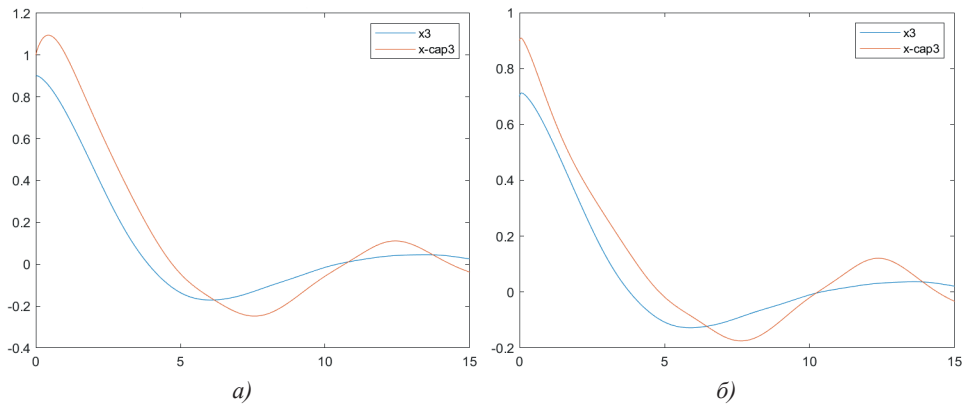


Рис. 16. Переходные процессы для координаты x_3 и ее оценки \hat{x}_3

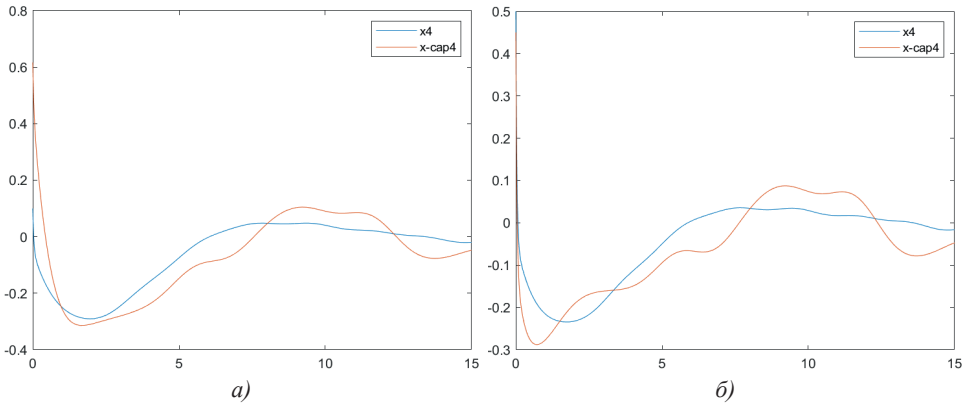


Рис. 17. Переходные процессы для координаты x_4 и ее оценки \hat{x}_4

На рис. 18–21 представлены результаты моделирования системы при воздействии на систему наихудших возмущений и погрешностей измерений (22). Начальные условия для вектора состояния объекта и оценки вектора состояния:

- а) $x(0) = (-1 \ 0 \ -1 \ 1)^T$, $\hat{x}(0) = (-0,7 \ 0,1167 \ 1 \ 0,6167)^T$;
б) $x(0) = (-0,5 \ 0,25 \ 1,1 \ 0,75)^T$, $\hat{x}(0) = (-0,7 \ 0,1167 \ 1 \ 0,6167)^T$.

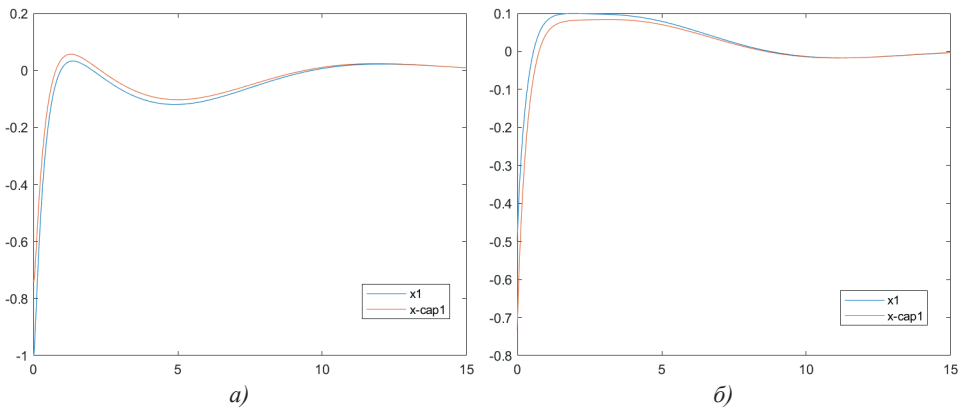


Рис. 18. Переходные процессы для координаты x_1 и ее оценки \hat{x}_1

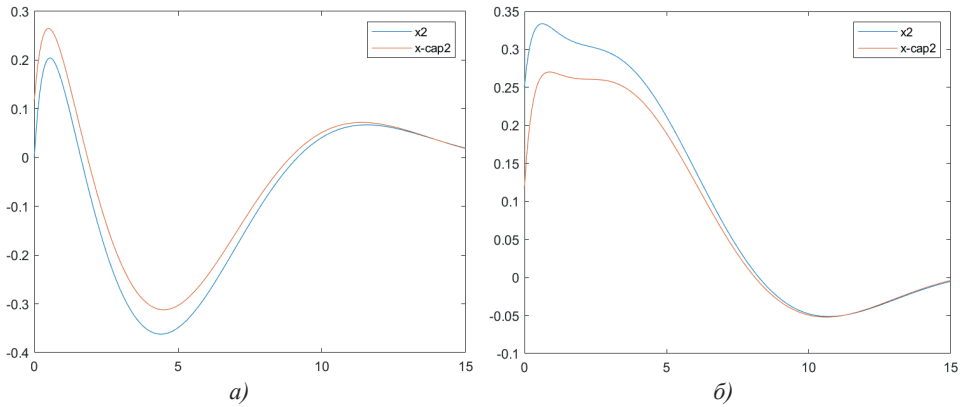


Рис. 19. Переходные процессы для координаты x_2 и ее оценки \hat{x}_2

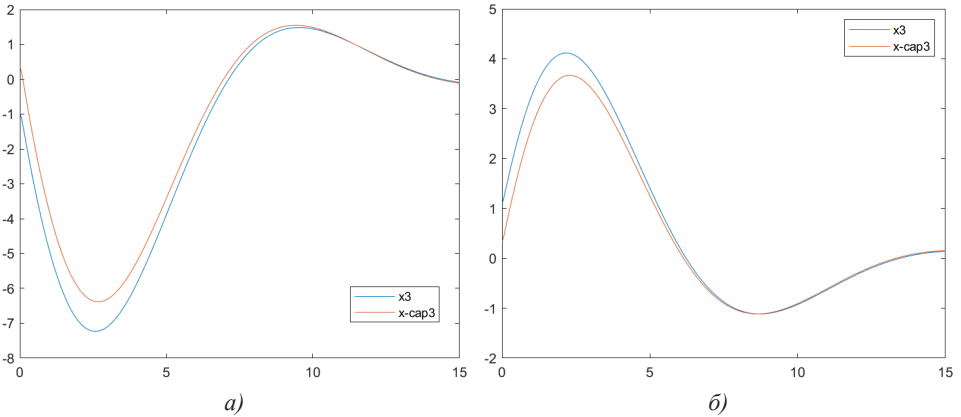


Рис. 20. Переходные процессы для координаты x_3 и ее оценки \hat{x}_3

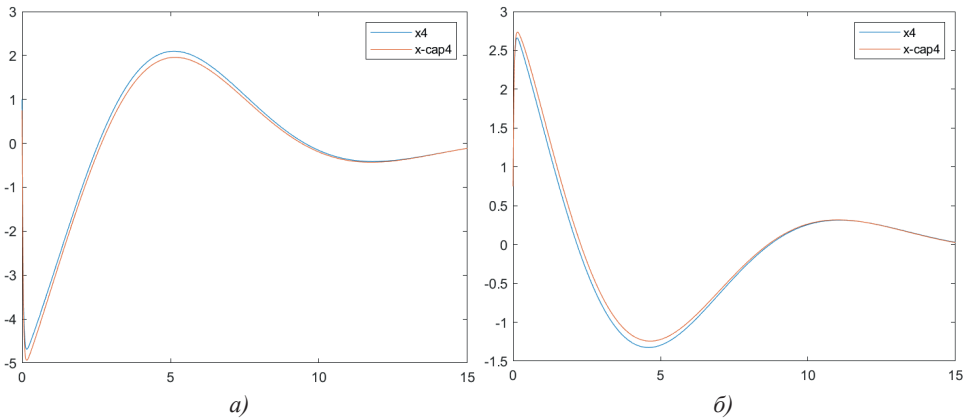


Рис. 21. Переходные процессы для координаты x_4 и ее оценки \hat{x}_4



На основании рис. 10–21 можно сделать вывод, что предложенный подход к синтезу наблюдателя системы позволяет получить достаточно точную оценку координат вектора состояния и желаемое качество переходных процессов в условиях неполной информации о состоянии объекта, ограниченных начальных условиях, внешних воздействиях и погрешностях измерений.

Для произведения вычислений и моделирования использовалась система компьютерной математики MATLAB.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В статье сформулированы и на основе принципа расширения доказаны достаточные условия существования H_∞ -наблюдателя. Получены соотношения для нахождения параметров наблюдателя и наихудших законов изменения внешних воздействий и погрешностей измерений. Решены две прикладные задачи оценивания вектора состояния самолета по результатам неполных и неточных измерений. На основании полученных результатов можно сделать вывод, что предложенный подход к синтезу наблюдателя позволяет получить достаточно точную оценку вектора состояния, обеспечивает желаемое качество переходных процессов и обеспечить асимптотическую устойчивость системы в условиях неполной информации. Предложенный метод оценивания вектора состояния может быть применен к различным задачам управления, например, при проектировании автопилотов или систем автоматической навигации летательных аппаратов.

Литература

1. Koopbloch H.W., Isidori A. *Flockerzi D. Topics in control theory. DMV-Seminar; Bd. 22, Basel; Springer, 1993.*
2. Doyle J., Francis B., Tannenbaum A. *Feedback Control Theory. Macmillan Publishing Co, 1990.*
3. Skogestad S., Postlethwaite I. *Multivariable Feedback Control: Analysis and Design. John Wiley and sons, 2005.*
4. Поляк Б.Т., Щербаков П.С. *Робастная устойчивость и управление. М.: Наука, 2002.*
5. Green M., Limebeer D.J.N. *Linear Robust Control. Dover Publications, 2012.*
6. Simon D. *Optimal State Estimation. Kalman, H_∞ , and Nonlinear Approaches. John Wiley and sons, 2006.*
7. Курдюков А.П., Андрианова О.Г., Белов А.А., Гольдин Д.А. *Между LQG / H_2 и H_∞ теориями управления // Автоматика и телемеханика. 2021. № 4, С. 8–76.*
8. Баландин Д.В., Коган М.М. *Синтез законов управления на основе линейных матричных неравенств. М.: Физматлит, 2007.*
9. Поляк Б.Т., Хлебников М.В., Щербаков П.С. *Управление линейными системами при внешних возмущениях: Техника линейных матричных неравенств. М.: URSS/ЛЕНАНД, 2014.*
10. Хлебников М.В., Поляк Б.Т., Кунцевич В.М. *Оптимизация линейных систем при ограниченных внешних возмущениях (техника инвариантных эллипсоидов) // Автоматика и телемеханика. 2011. № 11, С. 9–59.*
11. Поляк Б.Т., Хлебников М.В., Рапопорт Л.Б. *Математическая теория автоматического управления. М.: URSS/ЛЕНАНД, 2019.*



12. *Gadewadikar J., Lewis F.L., Abu-Khalaf M.* Necessary and Sufficient Conditions for H-infinity Static Output-Feedback Control // *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*. Vol.29, no. 4, 915–920 (2006).
13. *Chang J.-L., Wu T.-C.* Dynamic Compensator-Based Output Feedback Controller Design for Uncertain Systems with Adjustable Robustness // *Journal of Control Science and Engineering*. Vol. 2018, Article ID 5806787.
14. *Баландин Д.В., Коган М.М.* Минимаксный подход к синтезу оптимального управления при неопределенных начальных условиях // *Автоматика и телемеханика*. 2009. № 11, С. 3–12.
15. *Баландин Д.В., Коган М.М.* Минимаксная фильтрация: γ_0 -оптимальные наблюдатели и обобщенные H_∞ -оптимальные фильтры // *Автоматика и телемеханика*. 2013. № 4, С. 43–58.
16. *Баландин Д.В., Коган М.М.* Управление и оценивание в линейных нестационарных системах на основе эллипсоидальных множеств достижимости // *Автоматика и телемеханика*. 2020. № 8, С. 8–28.
17. *Basar T., Bernhard P.* H_∞ -Optimal Control and Related Minimax Design Problems: a Dynamic Game Approach. Birkhauser: Boston, 1995.
18. *Shaked U., Theodor Y.* H_1 -optimal estimation: a tutorial // *Proc. 31st IEEE Conf. Decision Contr.*, New York, NY, USA, Vol. 2, 2278–2286 (1992).
19. *Banavar R.N., Speyer J.L.* A linear-quadratic game approach to estimation and smoothing // *Proceedings of the American Control Conference*, Evanston, IL, USA, 2818–2822 (1991).
20. *Yaesh I., Shaked U.* Game theory approach to optimal linear state estimation and its relation to the minimum H_1 -norm estimation // *IEEE Trans. Automat. Contr.*, Vol. 37, no. 6, 828–831 (1992).
21. *Wu A., Dong H., Duan G.* Improved robust H-infinity estimation for uncertain continuous-time systems // *J. Syst. Sci. Complex.*, Vol. 20, no. 3, 362–369 (2007).
22. *Li H., Fu M.* A linear matrix inequality approach to robust H_1 filtering // *IEEE Trans. Signal Processing*, Vol. 45, no. 9, 2338–2350 (1997).
23. *Li J., Li S.E., Tang K., Lv Y., Cao W.* Reinforcement solver for H-infinity filter with bounded noise // *2020 15th IEEE International Conference on Signal Processing (ICSP)*, Vol. 1, 62–67 (2020).
24. *Shue S., Agarwal R.K.* Design of automatic H_∞ landing systems using mixed H_2 / H_∞ control // *J. of Guidance, Control and Dynamics*, 22, 103–114 (1999).
25. *Lungu R., Lungu M.* Control of the aircraft lateral-directional motion during landing using the H_∞ control and the dynamic inversion // *Proc. Of the Romanian Academy Ser. A*, Vol. 16, no.64, 547–555 (2015).
26. *Кротов В.Ф., Гурман В.И.* Методы и задачи оптимального управления. М.: Наука, 1973.
27. *Гурман В.И.* Принцип расширения в задачах управления. М.: Наука, 1985.
28. *Пацюков В.П.* Дифференциальные игры при различной информированности игроков. М.: Советское радио, 1976.
29. *Бортаковский А.С., Пантелеев А.В.* Линейная алгебра в примерах и задачах. М.: Высшая школа, 2010.
30. *Грон Д.* Методы идентификации систем. М.: Мир, 1979.



Sufficient Conditions for the Existence of a H_∞ -infinity State Observer for Linear Continuous Dynamical Systems

Andrei V. Pantelev*

Moscow Aviation Institute (National Research University) (MAI), Moscow, Russia
ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-2493-3617>
e-mail: avpantelev@inbox.ru

Aleksandra A. Yakovleva**

Moscow Aviation Institute (National Research University) (MAI), Moscow, Russia
e-mail: ayakovleva982@gmail.com

The article deals with the problem of finding the observer of the state vector of linear continuous non-stationary dynamical systems with uncertainty of the initial conditions, limited external influences and measurement errors over a finite time interval. Sufficient conditions for the existence of an observer are formulated and proved on the basis of the expansion principle. Relationships are obtained for finding the parameters of the observer and the worst laws of change in external influences and measurement errors. As a limiting case, the problem of observer synthesis for stationary linear dynamical systems on a semi-infinite time interval is considered. Two applied problems of estimating the aircraft state vector based on the results of incomplete and inaccurate measurements are solved.

Keywords: robust estimation, state observer, sufficient conditions, expansion principle, game approach.

For citation:

Pantelev A.V., Yakovleva A.A. Sufficient Conditions for the Existence of a H_∞ -infinity State Observer for Linear Continuous Dynamical Systems. *Modelirovanie i analiz daniykh = Modelling and Data Analysis*, 2023. Vol. 13, no. 2, pp. 36–63. DOI: [10.17759/mda.2023130202](https://doi.org/10.17759/mda.2023130202) (In Russ., abstr. in Engl.).

References

1. Koopman H.W., Isidori A. Flockerzi D. Topics in control theory. *Basel; Springer* (DMV-Seminar; Bd. 22), 1993.
2. Doyle J., Francis B., Tannenbaum A. Feedback Control Theory. *Macmillan Publishing Co*, 1990.
3. Skogestad S., Postlethwaite I. Multivariable Feedback Control: Analysis and Design. *John Wiley and sons*, 2005.

***Andrei V. Pantelev**, D. Sc. (Physical and Mathematical Sciences), Full Professor, Head of the Department of Mathematics and Cybernetics, Institute of Information Technology and Applied Mathematics, Moscow Aviation Institute (MAI), Moscow, Russia, ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-2493-3617>, e-mail: avpantelev@inbox.ru

****Aleksandra A. Yakovleva**, Postgraduate Student, Moscow Aviation Institute (MAI), Moscow, Russia, e-mail: ayakovleva982@gmail.com



4. Polyak B.T., Shcherbakov P.S. Robastnaya ustoychivost' i upravleniye [Robust stability and control]. *Nauka*, Moscow, 2002. (In Russ.).
5. Green M., Limebeer D.J.N. Linear Robust Control. *Dover Publications*, 2012.
6. Simon D. Optimal State Estimation. Kalman, H_∞ , and Nonlinear Approaches. *John Wiley and sons*, 2006.
7. Kurdyukov A.P., Andrianova O.G., Belov A.A., Gol'din D.A. In between the LQG/H2- and H_∞ -control theories. *Autom. Remote Control*, 82:4 (2021), p. 565–618. (In Russ.).
8. Balandin D.V., Kogan M.M. Sintez zakonov upravleniya na osnove lineynykh matrichnykh neravenstv [Synthesis of control laws based on linear matrix inequalities]. *Fizmatlit*, Moscow, 2007. (In Russ.).
9. Polyak B.T., Khlebnikov M.V., Shcherbakov P.S. Upravleniye lineynymi sistemami pri vneshnikh vozmushcheniyakh: Tekhnika lineynykh matrichnykh neravenstv [Control of linear systems under external disturbances: Technique of linear matrix inequalities]. *URSS/LENAND*, Moscow, 2014. (In Russ.).
10. Khlebnikov M.V., Polyak B.T., Kuntsevich V.M. Optimization of linear systems subject to bounded exogenous disturbances: The invariant ellipsoid technique. *Autom. Remote Control*, 72:11 (2011), p. 2227–2275. (In Russ.).
11. Polyak B.T., Khlebnikov M.V., Rapoport L.B. Matematicheskaya teoriya avtomaticheskogo upravleniya [Mathematical theory of automatic control]. *URSS/LENAND*, Moscow, 2019. (In Russ.).
12. Gadewadikar J., Lewis F.L., Abu-Khalaf M. Necessary and Sufficient Conditions for H-infinity Static Output-Feedback Control. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*. Vol.29, No. 4, 2006. p. 915–920.
13. Chang J.-L., Wu T.-C. Dynamic Compensator-Based Output Feedback Controller Design for Uncertain Systems with Adjustable Robustness. *Journal of Control Science and Engineering*. V. 2018, Article ID 5806787.
14. Balandin D.V., Kogan M.M. Design of Optimal Control Under Uncertain Initial Conditions: A Minimax Approach. *Autom. Remote Control*. 2009. V. 70. No. 11. P. 1767–1775. (In Russ.).
15. Balandin D.V., Kogan M.M. Minimax filtering: γ_0 -optimal observers and generalized H_∞ -optimal filters. *Autom. Remote Control*, 74:4 (2013), p. 575–587. (In Russ.).
16. Balandin D.V., Kogan M.M. Control and estimation in linear time-varying systems based on ellipsoidal reachability sets. *Autom. Remote Control*, 81:8 (2020), p. 1367–1384. (In Russ.).
17. Basar T., Bernhard P. H_∞ -Optimal Control and Related Minimax Design Problems: a Dynamic Game Approach. *Birkhauser*, Boston, 1995.
18. Shaked U., Theodor Y. H_1 -optimal estimation: a tutorial. *Proc. 31st IEEE Conf. Decision Contr.*, New York, NY, USA, 1992, pp. 2278–2286, vol.2.
19. Banavar R.N., Speyer J.L. A linear-quadratic game approach to estimation and smoothing. *Proceedings of the American Control Conference*, Evanston, IL, USA, 1991, pp. 2818–2822.
20. Yaesh I., Shaked U. Game theory approach to optimal linear state estimation and its relation to the minimum H_1 -norm estimation. *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 37, no. 6, pp. 828–831, 1992.
21. Wu A., Dong H., Duan G. Improved robust H-infinity estimation for uncertain continuous-time systems. *J. Syst. Sci. Complex.*, vol. 20, no. 3, pp. 362–369, 2007.
22. Li H., Fu M. A linear matrix inequality approach to robust H_1 filtering. *IEEE Trans. Signal Processing*, vol. 45, no. 9, pp. 2338–2350, 1997.
23. Li J., Li S.E., Tang K., Lv Y., Cao W. Reinforcement solver for H-infinity filter with bounded noise // 2020 15th IEEE International Conference on Signal Processing (ICSP), vol. 1, pp. 62–67, 2020.
24. Shue S., Agarwal R.K. Design of automatic H_∞ landing systems using mixed H_2 / H_∞ control. *J. of Guidance, Control and Dynamics*, 22 pp 103–114, 1999.



25. Lungu R., Lungu M. Control of the aircraft lateral-directional motion during landing using the H_∞ control and the dynamic inversion. *Proc. Of the Romanian Academy Ser. A*, V. 16, № 64 2015, p. 547–555.
26. Krotov V.F., Gurman V.I. *Metody i zadachi optimal'nogo upravleniya* [Methods and problems of optimal control]. *Nauka*, Moscow, 1973. (In Russ.).
27. Gurman V.I. *Printsip rasshireniya v zadachakh upravleniya* [The principle of extension in control problems]. *Nauka*, Moscow, 1985. (In Russ.).
28. Patsyukov V.P. *Differentsial'nyye igry pri razlichnoy informirovannosti igrokov* [Differential games with different awareness of the players]. *Sovetskoye radio*, Moscow, 1976. (In Russ.).
29. Bortakovskiy A.S., Panteleev A.V. *Lineynaya algebra v primerakh i zadachakh* [Linear Algebra in Examples and Tasks]. *Vysshaya shkola*, Moscow, 2010. (In Russ.).
30. Graupe D. *Identification of Systems*. *Kreiger Publishing Comp.*, Huntington, NY, 1976.

Получена 12.04.2023

Принята в печать 12.05.2023

Received 12.04.2023

Accepted 12.05.2023

Проблемы классификации текстов естественного языка методами классического машинного обучения

Сологуб Г.Б.*

Московский авиационный институт
(национальный исследовательский университет) (МАИ)
г. Москва, Российская Федерация
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-5657-4826>
e-mail: glebsologub@ya.ru

Пухов В.А.**

Московский авиационный институт
(национальный исследовательский университет) (МАИ)
г. Москва, Российская Федерация
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-8078-6386>
e-mail: csguard26@gmail.com

В статье описаны проблемы методов классического машинного обучения в задаче классификации естественного языка. Одной из таких задач является классификация структурных элементов в школьных сочинениях. На её примере рассматриваются недостатки классического машинного обучения по сравнению с другими, более сложными алгоритмами.

Ключевые слова: классификация текста, анализ естественного языка, автоматизация проверки сочинений.

Для цитаты:

Сологуб Г.Б., Пухов В.А. Проблемы классификации текстов естественного языка методами классического машинного обучения // Моделирование и анализ данных. 2023. Том 13. № 2. С. 64–76. DOI: <https://doi.org/10.17759/mda.2023130203>

*Сологуб Глеб Борисович, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математической кибернетики института «Компьютерные науки и прикладная математика» Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет) (МАИ), г. Москва, Российская Федерация, ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-5657-4826>, e-mail: glebsologub@ya.ru

**Пухов Вячеслав Александрович, студент магистратуры института «Компьютерные науки и прикладная математика», Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет) (МАИ), г. Москва, Российская Федерация, ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-8078-6386>, e-mail: csguard26@gmail.com



1. ВВЕДЕНИЕ

Задача классификации текста является одной из базовых задач анализа естественного языка.

Проблема выбор метода классификации текста возникла при решении задачи сегментации текста школьных сочинений в рамках соревнования по машинному обучению. Для проверки сочинения требуется выделить в тексте структурные элементы, такие как введение, позиция автора, аргумент и т.д.

При решении данной задачи была предложена модель машинного обучения, которая сначала разделяет структурные элементы, затем их классифицирует.

В этой статье анализируются и сравниваются методы классификации текстов на описанных выше данных.

Для обработки естественного языка был использован метод TF-IDF, впервые изложенный в [1]. Этот метод считает частоту вхождения слов в подстроке и взвешивает их в отношении к частоте встречаемости этого слова в документе. Таким образом, более релевантные слова получают больший вес в векторном представлении текста. Однако, такой способ не учитывает порядок слов в подстроке.

Описание алгоритмов машинного обучения и метрики их качества взяты из [2], что позволило выбрать множество методов для анализа, критерий эффективности работы методов для задачи классификации структурных элементов школьных сочинений, а также такой способ сравнения алгоритмов как обучающая и валидационная кривые.

В работах [3] и [4] описывается архитектура сети LSTM, выбранной в качестве исследуемого метода глубокого обучения.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Имеется датасет (Таблица 1) из 1487369 строк и 3 столбцов.

Таблица 1

id	discourse_text	discourse_type
423A1CA112E2	Modern humans today are always on their phone...	Lead
423A1CA112E2	They are some really bad consequences when stu...	Position
423A1CA112E2	Some certain areas in the United States ban ph...	Evidence
...
4C471936CD75	it is better to seek multiple opinions instead.	Position
4C471936CD75	The impact of asking people to help you make a...	Evidence
4C471936CD75	there are many other reasons one might want to...	Concluding Statement



Столбец `id` – идентификатор сочинения, `discourse_text` – текст структурного элемента, `discourse_type` – тип структурного элемента.

Возможные типы структурных элементов:

- введение (Lead);
- позиция автора сочинения (Position);
- аргумент (Claim);
- контраргумент (Counterclaim);
- опровержение контраргумента (Rebuttal);
- пример, подтверждающий аргумент (Evidence);
- вывод (Concluding Statement).

Этот набор данных описывает текстовые документы, содержащие сочинения. Каждая строка содержит `id` документа, подстроку соответствующего документа, выделенную как структурный элемент, и тип этого элемента.

Задача классификации формулируется так: пусть X – множество описаний объектов, Y – множество меток классов. Существует неизвестная целевая зависимость – отображение $y^* : X \rightarrow Y$, значения которого известны только на объектах данной обучающей выборки $X^m = \{(x_1, y_1), \dots, (x_m, y_m)\}$. Требуется построить алгоритм $a : X \rightarrow Y$, способный классифицировать произвольный объект $x \in X$.

В контексте данной работы структурные элементы из данного набора данных будут рассматриваться без привязки к текстовым документам: входные признаки X^m – тексты структурных элементов, и целевые метки классов Y^m – типы структурных элементов.

Задача этой работы заключается в сравнении нескольких алгоритмов a . Целью работы ставится выявление наиболее эффективного алгоритма для классификации структурных элементов школьных сочинений с точки зрения заданной метрики.

3. ПРЕДОБРАБОТКА ТЕКСТА

Для работы с естественным языком были произведены преобразования исходного текста структурных элементов в векторные представления:

- количественная векторизация,
- TF-IDF.

Количественная векторизация представляет собой преобразование входного текста к матрице, где номер каждого столбца – индекс слова из словаря входного текста, номер каждой строки – порядковый номер предложения, а значение элемента матрицы – количество вхождений соответствующего слова в соответствующем предложении.

TF-IDF трансформация состоит из:

1. TF (term frequency – частота слова) – отношение числа вхождений некоторого слова к общему числу слов документа. Таким образом, оценивается важность слова t в пределах отдельного документа

$$tf(t, d) = \frac{n_t}{\sum_k n_k},$$

где n_t есть число вхождений слова t в документ, а в знаменателе – общее число слов в данном документе.

2. IDF (inverse document frequency – обратная частота документа) – инверсия частоты, с которой некоторое слово встречается в документах коллекции. Учёт IDF уменьшает вес широкоупотребительных слов

$$idf(t, D) = \frac{\log |D|}{|\{d_i \in D | t \in d_i\}|},$$

где $|D|$ – число документов в коллекции, $|\{d_i \in D | t \in d_i\}|$ – число документов из коллекции D , в которых встречается t (когда $n_t \neq 0$).

3. $TF - IDF(t, d, D) = tf(t, d) \times idf(t, D)$.

Формулы $TF - IDF$ приведены в главе 6 [1].

После того, как тексты преобразованы в векторную форму, можно применять алгоритмы классификации.

4. СРАВНЕНИЕ МЕТОДОВ КЛАССИФИКАЦИИ

При оценке качества алгоритмов машинного обучения использовалась метрика Macro F1 Score [2]:

$$Macro F1 Score = \frac{\sum_{i=1}^N F1 Score_i}{N},$$

где N – число классов структурных элементов (7); i – номер класса;

$F1 Score_i = \frac{TP_i}{TP_i + \frac{1}{2}(FP_i + FN_i)}$, TP_i – количество верно классифицированных объ-

ектов класса i ; FP_i – количество объектов неверно отнесенных к классу i ; FN_i – количество объектов класса i , неверно отнесенных к другому классу.

Таким образом, $Macro F1 Score$ – суть среднее арифметическое $F1 Score$ по каждому классу. В свою очередь $F1 Score$ – среднее гармоническое точности и полноты классификации.

Подобный выбор метрики обусловлен тем, что в задаче сегментации текста сочинений нет предпочтения ложноположительным или ложноотрицательным ошибкам, а количество структурных элементов в обучающем множестве – несбалансированное.

Для анализа эффективности алгоритмов использовались обучающая и валидационная кривые. Первая позволяет понять, как влияет мощность обучающей выборки на оценочную метрику. Вторая, методом скользящего контроля – какое значение гиперпараметра оптимально для решения задачи. Также, для сохранения времени исходный датасет был сокращен до 100000 структурных элементов.

Классические модели машинного обучения подразделены на метрические и неметрические. Одни используют векторное расстояние между объектами, другие – нет.



5. КЛАССИЧЕСКИЕ НЕМЕТРИЧЕСКИЕ АЛГОРИТМЫ

Наиболее совершенным классическим алгоритмом машинного обучения является градиентный бустинг. При исследовании задачи классификации рассматривались несколько его вариаций на деревьях решений: стохастический градиентный бустинг (sklearn GradientBoostingClassifier), экстремальный градиентный бустинг (XGBoost) и CatBoost.

Сравнение алгоритмов представлено в таблице 2 [2].

Таблица 2

	GBC	XGBoost	CatBoost
Построение деревьев	По уровням	По уровням	По уровням однородно
Поиск расщеплений	Полный перебор или гистрограммный подход	Полный перебор или гистрограммный подход	Предварительный биннинг (дискретизация вещественных признаков)
Важность признаков	Impurity	Gain / Frequency или Weight / Coverage	Изменение прогнозируемых значений / функции ошибки
Ранняя остановка	+	-	+

6. СТОХАСТИЧЕСКИЙ ГРАДИЕНТНЫЙ БУСТИНГ

На рисунках 1 и 2 представлены соответственно обучающая и валидационная кривые для стохастического градиентного бустинга.

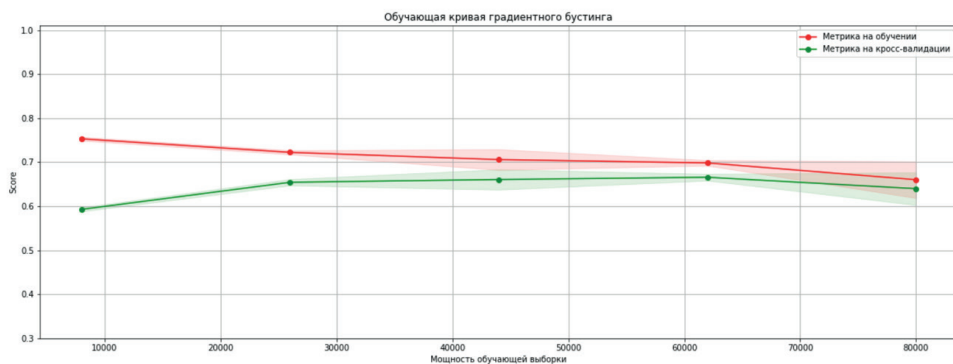


Рис. 1. Обучающая кривая метода GBC

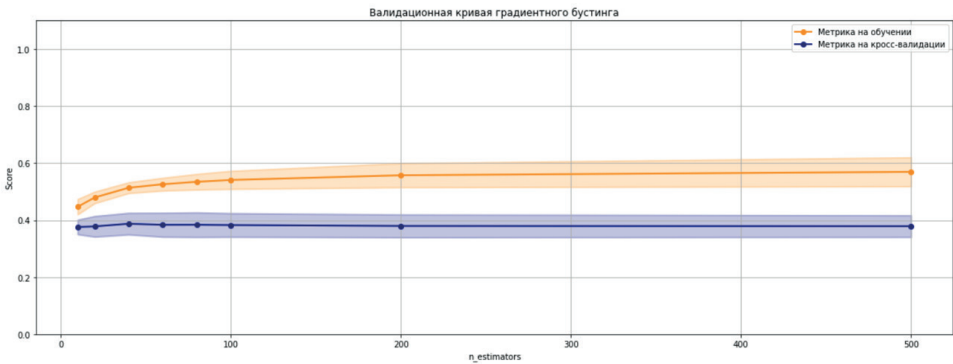


Рис. 2. Валидационная кривая метода GBC

XGBoost

На рисунках 3 и 4 представлены соответственно обучающая и валидационная кривые для экстремального градиентного бустинга.

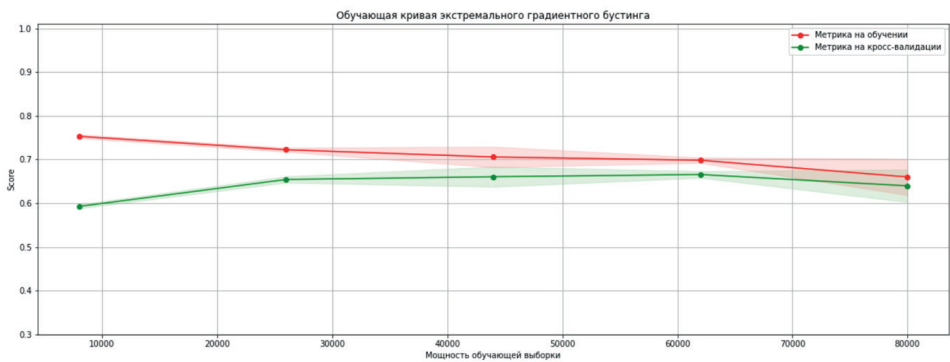


Рис. 3. Обучающая кривая метода XGBoost

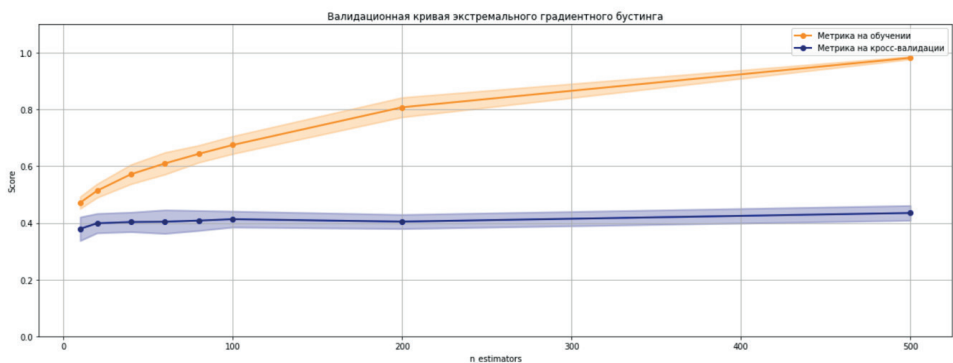


Рис. 4. Валидационная кривая метода XGboost



CatBoost

На рисунках 5 и 6 представлены соответственно обучающая и валидационная кривые для метода CatBoost.

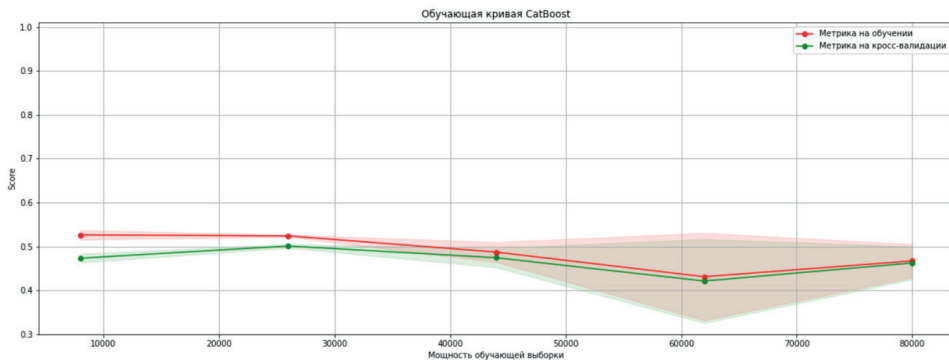


Рис. 5. Обучающая кривая метода CatBoost

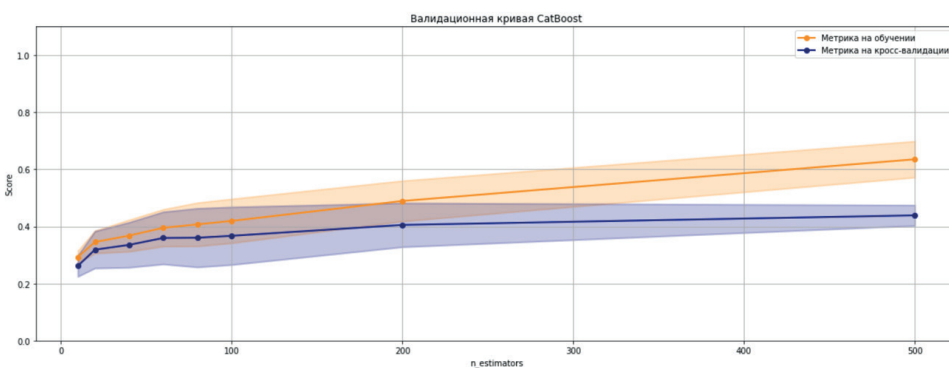


Рис. 6. Валидационная кривая метода CatBoost

Анализ обучающих кривых показывает, что первые две модели перестают улучшаться при увеличении мощности обучающего множества более 70000 образцов, CatBoost имеет аналогичную картину, за исключением необычно большого разброса значения метрики на предпоследнем значении мощности тренировочной выборки.

Валидационные кривые свидетельствуют о том, что увеличение сложности моделей не влияют на целевую метрику.

Максимальное значение метрики на отложенной выборке при решении задачи классификации градиентным бустингом составило $Macro F1 Score = 0.668$.



7. КЛАССИЧЕСКИЕ МЕТРИЧЕСКИЕ АЛГОРИТМЫ

Метрические модели, в основном, работают без учителя, поэтому анализировался только метод N ближайших соседей, обучающийся на данных.

На рисунках 7 и 8 представлены соответственно обучающая и валидационная кривые для метода N ближайших соседей.

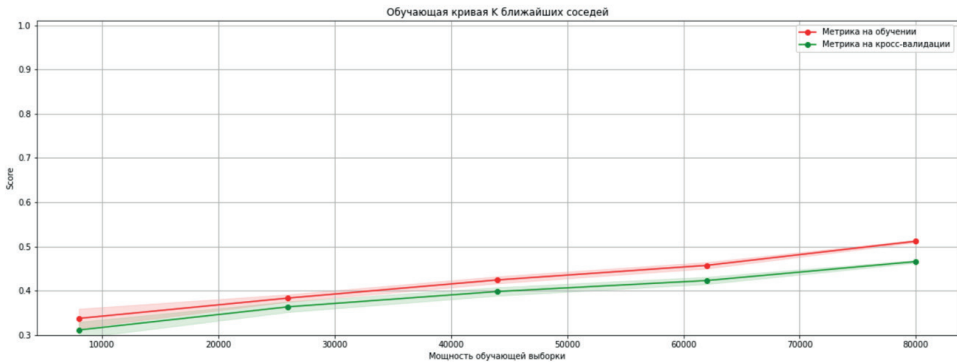


Рис. 7. Обучающая кривая метода N ближайших соседей

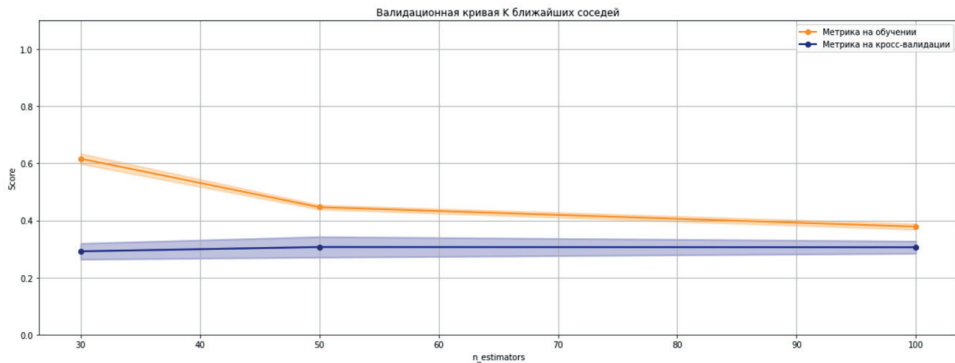


Рис. 8. Валидационная кривая метода N ближайших соседей

В случае N ближайших соседей, обучающая кривая имеет тренд на увеличение, но само обучение замедляется с ростом обучающей выборки, так как алгоритм считает расстояние между всеми её объектами. Поэтому, учитывая выход на плато кривой валидации, этот метод не оказался более эффективным, чем бустинг.

8. ГЛУБОКОЕ ОБУЧЕНИЕ

Далее, был исследован подход глубокого обучения. Наиболее эффективной из рассмотренных оказалась нейросеть долгой краткосрочной памяти (LSTM) [3].



LSTM – рекуррентная нейронная сеть, способная удалять информацию из состояния ячейки.

Пусть x_t – t -ое входное значение фрагмента А нейронной сети, h_t – возвращаемое значение (рисунок 9).

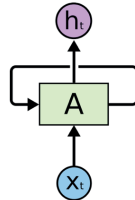


Рис. 9

LSTM слой состоит из нескольких подслоев [4].

1. Фильтр забывания (рисунок 10). Сигмоидальный слой, возвращающий значение от 0 до 1, отвечающий за сохранение информации из ячейки C_{t-1} .

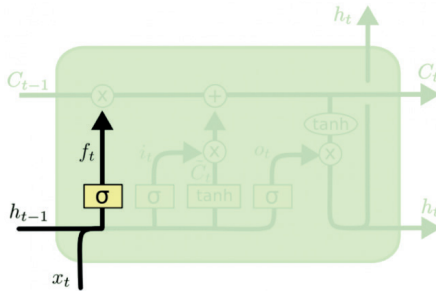


Рис. 10. Схема фильтра забывания

$$f_t = \sigma(W_f [h_{t-1}, x_t] + b_f),$$

где W_f – веса слоя, b_f – вектор смещения.

2. Сигмоидальный и \tanh слой изображен на рисунке 11. Решает, какая новая информация будет храниться в состоянии ячейки.

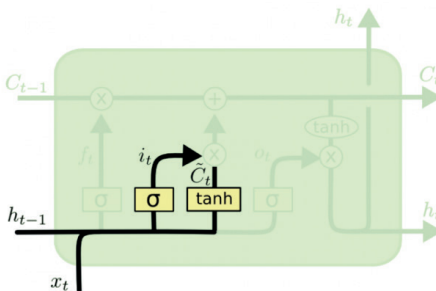


Рис. 11. Схема обновления информации

$$i_t = \sigma(W_i [h_{t-1}, x_t] + b_i)$$

$$\tilde{C}_t = \tanh(W_c [h_{t-1}, x_t] + b_c),$$

где W_i, W_c и b_i, b_c – веса и смещения соответствующих индексу слов, C_t – вектор значений новых кандидатов на добавление в состояние ячейки.

3. Этап замены состояния C_{t-1} на $C_t = f_t C_{t-1} + i_t \tilde{C}_t$ изображен на рисунке 12.

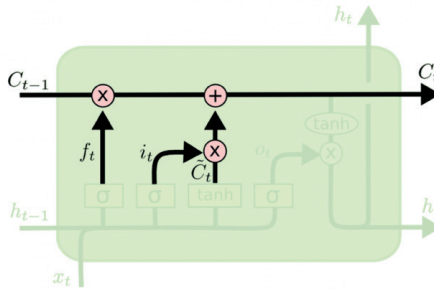


Рис. 12. Схема замены состояния ячейки

4. Получение выходного значения. Схема показана на рисунке 13.

$$o_t = \sigma(W_o [h_{t-1}, x_t] + b_o)$$

$$h_t = o_t \cdot \tanh(C_t),$$

W_o – веса выходного слоя, b_o – выходной вектор смещения.

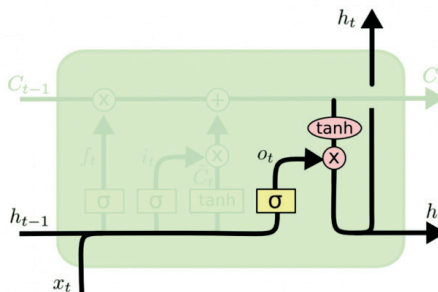


Рис. 13. Схема получения выходного значения ячейки

Структура полученной сети:

- 1) эмбеддинговый слой,
- 2) LSTM-слой из 128 нейронов,
- 3) слой прореживания,
- 4) LSTM-слой из 64 нейронов,



5) слой прореживания,

6) softmax слой.

Валиационная кривая и зависимость функции ошибки от итерации обучения построенной нейронной сети изображены на рисунке 14.

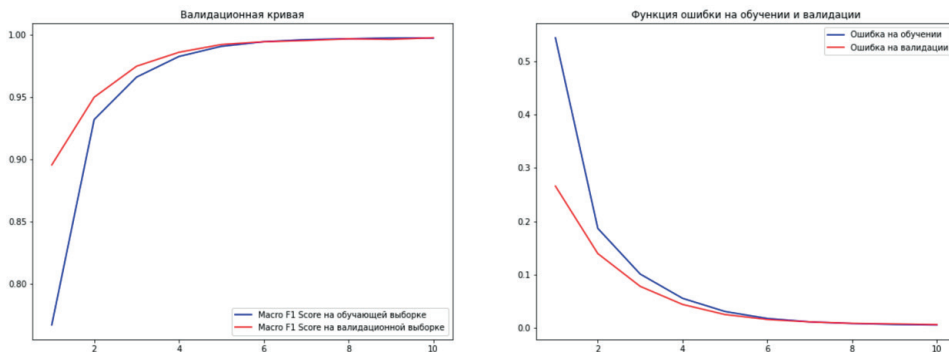


Рис. 14. Валидационная кривая и функция ошибки нейронной сети

Судя по полученным графикам, сеть полностью выучивает обучающую выборку. Тем не менее, значения метрики на отложенной выборке не убывает с каждой итерацией обучения.

Качество такой сети зависит от того, насколько тестовые примеры будут отличаться от данных в датасете. Возможно, следует понизить количество итераций обучения, если для тестовых данных исходная выборка будет не репрезентативна. Исходя из полученного значения метрики $Macro F1 Score = 0.973$ нейронные сети эффективнее решают задачу классификации текстов в сравнении с моделями классического машинного обучения.

9. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

При анализе методов классического машинного обучения (Gradient Boosting, CatBoost, XGBoost, N ближайших соседей) и метода глубокого обучения (LSTM нейронной сети) для решения задачи классификации структурных элементов текстов школьных сочинений было выявлено, что, с точки зрения выбранной метрики, лучше справился метод глубокого обучения.

Литература

1. Manning, C.D.; Raghavan, P.; Schütze, H. Scoring, term weighting, and the vector space model // Cambridge University Press. 2009 P. 109–133 DOI:10.1017/CBO9780511809071.007
2. Дьяконов А.Г. Лекции [Электронный ресурс] URL: <https://dyakonov.org/tag/лекции/>
3. Alex Sherstinsky Fundamentals of Recurrent Neural Network (RNN) and Long Short-Term Memory (LSTM) Network [Электронный ресурс] // Physica D: Nonlinear Phenomena 2020



P. 1–40 DOI:10.1016/j.physd.2019.132306 URL: <https://sciencedirect.com/science/article/abs/pii/S0167278919305974>

4. *Christopher Olah* Understanding LSTM Networks [Электронный ресурс] // 2015 URL: <http://colah.github.io/posts/2015-08-Understanding-LSTMs/>



Problems of Natural Language Classification Using Methods of Classical Machine Learning

Gleb B. Sologub*

Moscow Aviation Institute (National Research University) (MAI), Moscow, Russia

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-5657-4826>

e-mail: glebsologub@ya.ru

Vyacheslav A. Pukhov**

Moscow Aviation Institute (National Research University) (MAI), Moscow, Russia

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-8078-6386>

e-mail: csguard26@gmail.com

This article describes the problems of classical machine learning methods in natural language classification. One of these tasks is the classification of structural elements in school essays. On its example, the shortcomings of classical machine learning are considered in comparison with other, more complex algorithms.

Keywords: text classification, natural language analysis, automation of essay checking.

For citation:

Sologub G.B., Pukhov V.A. Problems of Natural Language Classification Using Methods of Classical Machine Learning. *Modelirovanie i analiz dannykh = Modelling and Data Analysis*, 2023. Vol. 13, no. 2, pp. 64–76. DOI: 10.17759/mda.2023130203 (In Russ., abstr. in Engl.).

References

1. Manning, C.D., Raghavan, P., Schütze, H. Scoring, term weighting, and the vector space model // Cambridge University Press. 2009 P. 109–133 DOI:10.1017/CBO9780511809071.007
2. Dyakonov A.G. Lectures <https://dyakonov.org/tag/лекции/> (In.Russ.)
3. Alex Sherstinsky Fundamentals of Recurrent Neural Network (RNN) and Long Short-Term Memory (LSTM) Network // 2020 P. 1–40 DOI:10.1016/j.physd.2019.132306 Available at: <https://sciencedirect.com/science/article/abs/pii/S0167278919305974> (In.Russ)
4. Christopher Olah Understanding LSTM Networks // 2015 Available at: <http://colah.github.io/posts/2015-08-Understanding-LSTMs/>

***Gleb B. Sologub**, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor of the Department of Mathematical Cybernetics, Institute of Computer Science and Applied Mathematics, Moscow Aviation Institute (National Research University) (MAI), Moscow, Russia, ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-5657-4826>, e-mail: glebsologub@ya.ru

****Vyacheslav A. Pukhov**, Student of the Institute of Computer Science and Applied Mathematics, Moscow Aviation Institute (National Research University) (MAI), Moscow, Russia, ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-8078-6386>, e-mail: csguard26@gmail.com

Получена 21.03.2023

Принята в печать 21.04.2023

Received 21.03.2023

Accepted 21.04.2023

Прогнозирование рейтинга нового фильма по его метаданным

Сологуб Г.Б.*

Московский авиационный институт
(национальный исследовательский университет) (МАИ)
г. Москва, Российская Федерация
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-5657-4826>
e-mail: glebsologub@ya.ru

Сазон Н.С.**

Московский авиационный институт
(национальный исследовательский университет) (МАИ)
г. Москва, Российская Федерация
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-9816-4585>
e-mail: nikitaS1598@gmail.com

В статье описан подход к прогнозированию рейтинга нового фильма на основе данных, известных до его выхода, с использованием моделей классического машинного обучения. Подход включает в себя тестирование различных моделей с соответствующей предобработкой данных и подбором оптимальных гиперпараметров, а также выбор наилучшего алгоритма с точки зрения выбранного функционала качества.

Ключевые слова: машинное обучение, пользовательская оценка фильма.

Для цитаты:

Сологуб Г.Б., Сазон Н.С. Прогнозирование рейтинга нового фильма по его метаданным // Моделирование и анализ данных. 2023. Том 13. № 2. С. 77–84. DOI: <https://doi.org/10.17759/mda.2023130204>

***Сологуб Глеб Борисович**, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математической кибернетики института «Компьютерные науки и прикладная математика», Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет) (МАИ), г. Москва, Российская Федерация, ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-5657-4826>, e-mail: glebsologub@ya.ru

****Сазон Никита Сергеевич**, студент магистратуры института «Компьютерные науки и прикладная математика», Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет) (МАИ), г. Москва, Российская Федерация, ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-9816-4585>, e-mail: nikitaS1598@gmail.com



1. ВВЕДЕНИЕ

В быстро развивающемся мире технологий построение прогнозов на основе данных с использованием методов машинного обучения приобретает всё большую актуальность. Современных мощностей хватает для того, чтобы эффективно обрабатывать большие объёмы данных, автоматизировать процессы и делегировать машинам задачи, которые ещё не так давно могли быть решены только человеком.

В данной работе рассматривается задача предсказания рейтинга нового фильма по данным (жанр, длительность и т.д.), известным ещё до его выхода. Такая оценка может быть полезной для различных групп людей и организаций. Например, для инвесторов, которые хотят вложить деньги в производство фильма; для студий и кинокомпаний, разрабатывающих фильмы; для режиссёров, сценаристов и актёров, присматривающих проекты для участия. Не говоря уже о миллионах людей, не связанных с киноиндустрией, но покупающих билеты в кинотеатры, основываясь лишь на собственных ожиданиях, так как реальный рейтинг ещё не успел сформироваться. Иными словами, это мощный фактор, который может иметь вес при принятии очень разнообразных решений.

Задача рассматривается в большом количестве публикаций, многие из которых вышли относительно недавно. Например, в [1] описано исследование, в котором предлагается строить прогноз с помощью линейных и метрических методов машинного обучения, а также классической полносвязной нейросети. В [2] помимо основной задачи прогнозирования кассовых сборов фильмов рассматривается задача прогнозирования пользовательской оценки, которая решается методами Random forest, gradient boosting и k nearest neighbors. Таким образом, можно сделать вывод, что настоящее время задача является достаточно актуальной.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В качестве источника данных была выбрана база данных IMDb [3]. Выбор обусловлен тем, что это крупнейшая в мире БД о кинематографе, и рейтинги, представленные в ней, пользуются авторитетом во всём мире. На её основе был сформирован файл со следующими характеристиками, описывающими кинокартину:

- titleType – тип/формат (например, фильм, короткометражка, сериал, видео и т. д.);
- isAdult – 0: не для взрослых; 1: для взрослых;
- startYear – год выпуска;
- runtimeMinutes – время в минутах;
- genres – список жанров, поставленных в соответствие фильму;
- directors – id режиссёра;
- (director) primaryProfession – список профессий режиссёра;
- (director) knownForTitles – список фильмов, за которые режиссёр известен;
- writer – id сценариста;
- average rating – средневзвешенный рейтинг.



Также в датасете присутствует столбец `tconst`, содержащий уникальные идентификаторы фильмов.

	<code>tconst</code>	<code>averageRating</code>	<code>titleType</code>	<code>isAdult</code>	<code>startYear</code>	<code>runtimeMinutes</code>	<code>genres</code>	<code>directors</code>
8	tt0000009	5.3	movie	0	1894	45	Romance	nm0085156
34	tt0000036	4.4	short	0	1896	0	Drama,Short	nm0005690
74	tt0000076	4.5	short	0	1896	1	Drama,Short	nm0005690
89	tt0000091	6.7	short	0	1896	3	Horror,Short	nm0617588
106	tt0000108	4.4	short	0	1896	1	Drama,Short	nm0005690
...
1247779	tt9916544	6.9	short	0	2019	12	Drama,Short	nm3219235
1247781	tt9916578	7.4	tvEpisode	0	2019	44	Adventure,Biography,Comedy	nm0373673
1247782	tt9916580	8.5	tvEpisode	0	2012	10	Adventure,Animation,Comedy	nm0996406
1247784	tt9916682	6.4	tvEpisode	0	2012	10	Adventure,Animation,Comedy	nm0996406
1247785	tt9916690	7.4	tvEpisode	0	2012	10	Adventure,Animation,Comedy	nm0996406

760564 rows x 11 columns

Рис. 1. Сведённый датасет (часть 1)

	<code>writers</code>	<code>(director) primaryProfession</code>	<code>(director) knownForTitles</code>
8	nm0085156	director,writer,cinematographer	tt0000009
34	nm0410331	cinematographer,director,producer	tt0308254,tt0219560,tt1428455,tt1496763
74	nm0410331	cinematographer,director,producer	tt0308254,tt0219560,tt1428455,tt1496763
89	nm0617588	director,actor,producer	tt0002113,tt0215737,tt0223267,tt0000091
106	nm0410331	cinematographer,director,producer	tt0308254,tt0219560,tt1428455,tt1496763
...
1247779	nm3219235	director,producer,writer	tt1473818,tt9916544,tt1332123,tt1830903
1247781	nm1485603,nm1485604,nm1866876,nm0909144	director,writer,producer	tt1618470,tt10986410,tt17501750,tt4051832
1247782	nm1482639,nm2586970	director,animation_department,art_department	tt0286490,tt0090315,tt0082509,tt2560206
1247784	nm1482639,nm2586970	director,animation_department,art_department	tt0286490,tt0090315,tt0082509,tt2560206
1247785	nm1482639,nm2586970	director,animation_department,art_department	tt0286490,tt0090315,tt0082509,tt2560206

760564 rows x 11 columns

Рис. 2. Сведённый датасет (часть 2)

Так как данные регулярно обновляются, зафиксируем дату обращения – 15.11.2022.

Итак, чтобы построить прогноз, нужно решить задачу регрессии, состоящую в построении алгоритма, отображающего множество объектов, описываемых признаками, во множество `target`-меток. На значения признаков ограничения не накладываются, а значение `target`-метки может быть любым вещественным числом.

В нашем случае `target`-меткой будем считать переменную `average rating`, принимающую значения в отрезке от 0 до 10, а признаками – 9 оставшихся показателей, описывающих фильм. Однако следует отметить, что это число будет меняться в ходе преобразований.



Для нахождения оптимального решения будем строить разные алгоритмы путём обучения стандартных моделей на основе собранных данных, а затем выберем лучший из них.

В качестве функционала качества будем использовать метрику MAE – средний модуль отклонения ответа алгоритма от истинного значения

$$MAE = \frac{1}{n} \sum_i |y_i - \hat{y}_i|, \quad (1)$$

где – истинное значение target-метки; – значение, полученное от алгоритма; n – число объектов, по которым получен прогноз.

Выбор обусловлен классом решаемой задачи, а также отличной интерпретацией – значение MAE для данной задачи в точности равно баллу, на который в среднем ошибается алгоритм.

Таким образом, лучшим будем считать тот алгоритм, для которого значение MAE на тестовой выборке (части исходного датасета, отведённой для получения прогноза и оценки качества) будет наименьшим.

Для дальнейшей работы будем использовать язык Python, а также вычислительные ресурсы Colab от компании Google [4].

3. ПРЕДОБРАБОТКА ДАННЫХ

Для того чтобы строить прогноз, нужно привести все данные к числовому формату, с которым может работать компьютер.

Признаки “titleType” (тип/формат) и director (id режиссёра) являются категориальными. Признак “titleType” имеет 10 уникальных значений, поэтому для представления в числовом формате применим стандартную технику бинаризации, т.е. для каждого уникального значения сделаем отдельный бинарный столбец, в котором будет стоять 1, если данный тип соответствует фильму и 0, если не соответствует. В результате получим 10 новых признаков.

Признак “directors” же содержит в себе 157557 уникальных значений. Создавать бинарные признаки будет слишком затратным с точки зрения памяти действием, поэтому воспользуемся популярным методом и закодируем каждое значение частотой, с которой оно встречается в датасете.

Значениями признаков “genres”, “(director) PrimaryProfession” и “(director) knownForTitles” являются массивы строк. Метод кодирования частотой здесь не подходит, т.к. в этом случае одно и то же значение получают только фильмы, полностью совпадающие по спискам жанров, то есть удовлетворяющие очень сильному условию схожести. В других же случаях схожесть будет игнорироваться. Бинаризация же применима, но реализуется немного сложнее. Следует отметить, что признак “(director) knownForTitles” содержит большое число уникальных значений, поэтому для него придётся ограничиться, например, 500 самыми распространёнными фильмами с целью экономии ресурсов. Проведём соответствующие преобразования, а также



удалим признак `tconst`, который не понадобится нам в дальнейшем. В результате получим новый датасет, состоящий из 358 столбцов.

	averageRating	isAdult	startYear	runtimeMinutes	directors	writers	Romance	Drama	Short	Horror	...
8	5.3	0	1894	45	1	1	1	0	0	0	...
34	4.4	0	1896	0	14	10	0	1	1	0	...
74	4.5	0	1896	1	14	10	0	1	1	0	...
89	6.7	0	1896	3	57	30	0	0	1	1	...
106	4.4	0	1896	1	14	10	0	1	1	0	...
...
1247779	6.9	0	2019	12	4	1	0	1	1	0	...
1247781	7.4	0	2019	44	111	17	0	0	0	0	...
1247782	8.5	0	2012	10	28	30	0	0	0	0	...
1247784	6.4	0	2012	10	28	30	0	0	0	0	...
1247785	7.4	0	2012	10	28	30	0	0	0	0	...

760564 rows x 358 columns

Рис. 3. Преобразованный датасет

Другие признаки, а также `target`-метка являются числовыми и не требуют никаких дополнительных преобразований. Следует отметить, что при обучении определённых моделей могут понадобиться дополнительные преобразования датасета.

4. ОБУЧЕНИЕ МОДЕЛЕЙ

Разобьём наш датасет на обучающую и тестовую выборки таким образом, чтобы в тестовую выборку попали самые поздние фильмы (так как подобная ситуация лучше всего моделирует реальный мир, в котором мы будем получать новые объекты из будущего). Для этого нужно отсортировать все объекты по признаку `startYear` и разделить датасет. После этого обучим модели Linear Regression, kNN, Random Forest, Gradient Boosting. Конечно, речь идёт о версиях, адаптированных под задачу регрессии. Для первых четырёх моделей есть хорошие реализации в библиотеке `scikit learn`, а для последней будем использовать `LGBMRegressor` из библиотеки `LightGBM` и `CatBoostRegressor` из библиотеки `CatBoost`, так как они являются более мощными и почти всегда лучше работают на практике. Получим следующие значения MAE на тестовой выборке:

- Linear Regression – 0.958;
- kNN – 1.050;
- RandomForestRegressor – 0.943;
- LGBMRegressor – 0.947;
- CatboostRegressor – 0.946.



Как видим, результаты не сильно отличаются, но формально Random Forest оказался чуть более точным. Следует отметить, что при плохо подобранных гиперпараметрах показатели могут стать хуже, в данном случае значение 0.943 достигнуто моделью RandomForest при следующей конфигурации:

- `max_depth = 61;`
- `n_estimators = 1750;`
- `min_samples_split = 3;`
- `min_samples_leaf = 6;`
- `max_features='sqrt'.`

Другие гиперпараметры были взяты по умолчанию.

Для демонстрации работы модели возьмём случайный объект и сделаем на нём предсказание:

```
[68] rf.predict(X_test.iloc[[62701]])  
  
array([7.38036304])
```

Рис. 4. Получение предсказания

Выведем реальное значение target-метки:

```
y_test.iloc[[62701]]  
  
363154    6.8  
Name: averageRating, dtype: float64
```

Рис. 5. Получение реального значения

Видим, что отклонение составило около 0.5 балла. Посмотрим на описание объекта в первоначальном датасете (т.е. на уровне сведённых сырых данных):

```
tconst                tt1669321  
averageRating        6.8  
titleType            tvEpisode  
primaryTitle         The Pilot  
originalTitle        The Pilot  
isAdult              0  
startYear            2010  
endYear              \N  
runtimeMinutes       29  
genres               Comedy  
directors            nm0002433  
writers             nm0255910  
(director) birthYear \N  
(director) deathYear \N  
(director) primaryProfession director,producer,miscellaneous  
(director) knownForTitles tt1558182,tt4254242,tt0169190,tt1755893  
(writer) birthYear   \N  
(writer) deathYear   \N  
(writer) primaryProfession producer,writer,miscellaneous  
(writer) knownForTitles tt15201944,tt0218141,tt1558182,tt7599942
```

Рис. 6. Описание объекта



Видим, что в данном случае речь идёт об одной из серий некоторого комедийного сериала, выпущенной в 2010 году.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, можно сказать, что методы машинного обучения могут решать поставленную задачу с достаточно высокой точностью в терминах MAE, что открывает большие возможности для прикладного применения. Конечно, требования к метрикам зависят от конкретной задачи, и вполне возможно, что в реальной ситуации полученных значений будет недостаточно. Однако было показано, что подход является достаточно перспективным, также при необходимости его можно дорабатывать с целью повышения точности.

Литература

1. *Баев М.А.* Предсказание оценки фильма на IMDB. Материалы 60-й Международной научной студенческой конференции. Новосибирск, 2022 – с.281.
2. *Кирилина Н.А., Горбанёва Е.Н.* Применение алгоритмов машинного обучения random-forest, gradientboosting, kneighbors для прогнозирования кассовых сборов кинофильмов. Программная инженерия: современные тенденции развития и применения (ПИ-2019) Курск, 11–12 марта 2019 года – с. 25–28.
3. IMDB Datasets [<https://datasets.imdbws.com/>].
4. Google Colab [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <https://colab.research.google.com/> (дата обращения 01.09.22.)



Forecasting the Rating of a New Movie Based on its Metadata

Gleb B. Sologub*

Moscow Aviation Institute (National Research University) (MAI), Moscow, Russia

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-5657-4826>

e-mail: glebsologub@ya.ru

Nikita S. Sazon**

Moscow Aviation Institute (National Research University) (MAI), Moscow, Russia

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-9816-4585>

e-mail: nikitaS1598@gmail.com

The article describes an approach to predicting the rating of a new film based on data known prior to its release, using classic machine learning models. The approach includes testing various models with appropriate data preprocessing and selection of optimal hyperparameters, as well as choosing the best algorithm in terms of the selected quality functionality.

Keywords: machine learning, film rating prediction.

For citation:

Sologub G.B., Sazon N.S. Forecasting the Rating of a New Movie Based on its Metadata. *Modelirovanie i analiz dannykh = Modelling and Data Analysis*, 2023. Vol. 13, no. 2, pp. 77–84. DOI: 10.17759/mda.2023130204 (In Russ., *abstr.* in Engl.).

References

1. Baev M.A. Predicting movie ratings on IMDB. Materials of the 60th International Student Scientific Conference. Novosibirsk, 2022 – p. 281.
2. Kirilina N.A., Gorbanyova E.N. Application of machine learning algorithms randomforest, gradientboosting, kneighbors for predicting box office revenues of movies. Software Engineering: Modern Trends in Development and Application (PI-2019) Kursk, March 11–12, 2019 – p. 25–28.
3. IMDB Datasets [<https://datasets.imdbws.com/>].
4. Google Colab [Electronic resource]. – Access mode: <https://colab.research.google.com/> (accessed on September 01, 2022).

***Gleb B. Sologub**, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor of the Department of Mathematical Cybernetics, Institute of Information Technologies and Applied Mathematics, Moscow Aviation Institute (National Research University) (MAI), Moscow, Russia, ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-5657-4826>, e-mail: glebsologub@ya.ru

****Nikita S. Sazon**, Master's Student at the Institute of Information Technologies and Applied Mathematics, Moscow Aviation Institute (National Research University) (MAI), Moscow, Russia, ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-9816-4585>, e-mail: nikitaS1598@gmail.com

Получена 17.03.2023

Принята в печать 17.04.2023

Received 17.03.2023

Accepted 17.04.2023

◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇ МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ ◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇

УДК 519.862.6

Обобщение неэлементарных линейных регрессий

Базилевский М.П. *

Иркутский государственный университет путей сообщения
(ФГБОУ ВО ИРГУПС), г. Иркутск, Российская Федерация
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-3253-5697>
e-mail: mik2178@yandex.ru

Ранее автором была разработана неэлементарная линейная регрессия, состоящая из линейной части и всех возможных комбинаций бинарных операций \min и \max . Данная статья посвящена её обобщению. Впервые введена неэлементарная линейная регрессия с линейной частью и всеми возможными комбинациями бинарных, тернарных, ..., l -арных операций \min и \max . Предложенная модель обобщает как линейную регрессию, так и функцию Леонтьева, и может эффективно применяться как для прогнозирования, так и для интерпретации функционирования объекта исследования. Разработан алгоритм оценивания с помощью метода наименьших квадратов неэлементарных линейных регрессий без линейной части и с l -арной операцией \min (\max), т.е. регрессий со спецификацией в виде функции Леонтьева. Суть алгоритма состоит в формировании множества возможных значений угловых коэффициентов, из которого выбирается точка с минимальной величиной суммы квадратов остатков. Идентифицирована система линейных неравенств, позволяющая формировать такое множество. С помощью алгоритма построена модель валового регионального продукта Иркутской области и дана её интерпретация.

Ключевые слова: машинное обучение, регрессионная модель, неэлементарная линейная регрессия, метод наименьших квадратов, функция Леонтьева, мультиколлинеарность.

Для цитаты:

Базилевский М.П. Обобщение неэлементарных линейных регрессий // Моделирование и анализ данных. 2023. Том 13. № 2. С. 85–98. DOI: <https://doi.org/10.17759/mda.2023130205>

***Базилевский Михаил Павлович**, кандидат технических наук, доцент кафедры математики, Иркутский государственный университет путей сообщения (ФГБОУ ВО ИРГУПС), г. Иркутск, Российская Федерация, ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-3253-5697>, e-mail: mik2178@yandex.ru



1. ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время машинное обучение [1,2], вероятно, самая перспективная область искусственного интеллекта. Предназначение машинного обучения в том, чтобы запрограммировать искусственный интеллект действовать как человек, или даже лучше него, при решении различных прикладных задач. Обучение осуществляется на основе больших массивов статистических данных. Как отмечено в работе [1], «машинное обучение быстро превращается в двигатель современной экономики, управляемой данными». Совсем недавно начало выделяться новое направление – интерпретируемое машинное обучение [3, 4].

С помощью машинного обучения решаются различные типы задач: классификация, кластеризация, регрессия, понижение размерности данных, обнаружение аномалий и т.д. Данная статья посвящена задаче регрессии [5–7], состоящей, как правило, в прогнозировании одной или нескольких характеристик по имеющимся статистическим данным – выборке. На сегодняшний день известно множество математических форм связи между переменными в регрессионных моделях: линейные [5–7], полиномиальные [8, 9], степенные [10, 11], степенно-показательные [12], линейно-логарифмические [12], логистические [13, 14], функции с фиксированными пропорциями факторов (функции Леонтьева) [15] и т.д. Тем не менее, процесс поиска новых спецификаций регрессионных моделей, позволяющих извлекать новые знания о функционировании изучаемого процесса или явления, продолжается.

В работе [16] впервые было проведено смешение линейных регрессий с двухфакторными функциями Леонтьева. Полученный синтез был назван неэлементарной линейной регрессией (НЛР). В той же работе был предложен алгоритм численного оценивания НЛР с помощью метода наименьших квадратов (МНК). В [17] были предложены алгоритмы выбора оптимальной структуры НЛР. А в [18] впервые были введены НЛР с бинарными операциями \min и \max :

$$y_i = \alpha_0 + \sum_{j=1}^l \alpha_j x_{ij} + \sum_{j=1}^p \alpha_j^{\min} \min\{x_{i,\mu_{j1}}, k_j^{\min} x_{i,\mu_{j2}}\} + \sum_{j=1}^p \alpha_j^{\max} \max\{x_{i,\mu_{j1}}, k_j^{\max} x_{i,\mu_{j2}}\} + \varepsilon_i, i = \overline{1, n}, \quad (1)$$

где n – объем выборки; l – число входных переменных; y_i – i -е значение выходной переменной; x_{ij} – i -е значение j -й входной переменной; \min (\max) – бинарные операции, возвращающие минимум (максимум) двух чисел; $p = C_l^2$ – число всех возможных комбинаций пар входных переменных; $\mu_{j1}, \mu_{j2}, j = \overline{1, p}$ – элементы первого и второго столбца матрицы M размера $p \times 2$, содержащей по строкам в лексикографическом порядке индексы всех возможных комбинаций пар входных переменных; $\alpha_j, j = \overline{0, l}, \alpha_j^{\min}, \alpha_j^{\max}, k_j^{\min}, k_j^{\max}, j = \overline{1, p}$ – неизвестные параметры; ε_i – i -я ошибка аппроксимации.

Цель данной работы состоит в обобщении НЛР (1), в разработке алгоритма её оценивания с помощью МНК и в решении задачи моделирования валового регионального продукта (ВРП) Иркутской области.

2. ОБОБЩЕНИЕ НЛР

Введем в рассмотрение НЛР с бинарными, тернарными, кватернарными, ..., l -арными операциями \min и \max :

$$\begin{aligned}
 y_i = & \alpha_0 + \sum_{j=1}^l \alpha_j x_{ij} + \sum_{j=1}^{p_1} \alpha_j^{\min,2} \min\{x_{i,\mu_j^{(1)}}, k_j^{\min,2} x_{i,\mu_j^{(1)}}\} + \sum_{j=1}^{p_1} \alpha_j^{\max,2} \max\{x_{i,\mu_j^{(1)}}, k_j^{\max,2} x_{i,\mu_j^{(1)}}\} + \\
 & + \sum_{j=1}^{p_2} \alpha_j^{\min,3} \min\{x_{i,\mu_j^{(2)}}, k_{j1}^{\min,3} x_{i,\mu_{j2}^{(2)}}, k_{j2}^{\min,3} x_{i,\mu_{j3}^{(2)}}\} + \sum_{j=1}^{p_2} \alpha_j^{\max,3} \max\{x_{i,\mu_j^{(2)}}, k_{j1}^{\max,3} x_{i,\mu_{j2}^{(2)}}, k_{j2}^{\max,3} x_{i,\mu_{j3}^{(2)}}\} + \dots + \\
 & + \sum_{j=1}^{p_{l-2}} \alpha_j^{\min,l-1} \min\{x_{i,\mu_{j1}^{(l-2)}}, k_{j1}^{\min,l-1} x_{i,\mu_{j2}^{(l-2)}}, \dots, k_{j,l-2}^{\min,l-1} x_{i,\mu_{j,l-1}^{(l-2)}}\} + \\
 & + \sum_{j=1}^{p_{l-2}} \alpha_j^{\max,l-1} \max\{x_{i,\mu_{j1}^{(l-2)}}, k_{j1}^{\max,l-1} x_{i,\mu_{j2}^{(l-2)}}, \dots, k_{j,l-2}^{\max,l-1} x_{i,\mu_{j,l-1}^{(l-2)}}\} + \\
 & + \alpha_1^{\min,l} \min\{x_{i1}, k_1^{\min,l} x_{i2}, \dots, k_{l-1}^{\min,l} x_{il}\} +, \\
 & \alpha_1^{\max,l} \max\{x_{i1}, k_1^{\max,l} x_{i2}, \dots, k_{l-1}^{\max,l} x_{il}\} + \varepsilon_i \\
 & i = \overline{1, n}, \tag{2}
 \end{aligned}$$

где \min (\max) – бинарные, тернарные, ..., l -арные операции, возвращающие минимум (максимум) двух, трех, ..., l чисел; $\mu_{jh}^{(s-1)}$ ($s = \overline{2, l}$, $j = \overline{1, p_{s-1}}$, $h = \overline{1, s}$) – элемент j -й строки и h – столбца матрицы M_{s-1} размера $p_{s-1} \times s$, где $p_{s-1} = C_l^s$, содержащей по строкам в лексикографическом порядке индексы всех возможных сочетаний из l входных переменных по s ; α_j , $j = \overline{0, l}$ – неизвестные параметры линейной части; $\alpha_j^{\min,s}$, $\alpha_j^{\max,s}$ ($s = \overline{2, l}$, $j = \overline{1, p_{s-1}}$) – неизвестные параметры при s -арных операциях \min и \max , включающих j -ю комбинацию входных переменных; $k_{jh}^{\min,s}$, $k_{jh}^{\max,s}$ ($s = \overline{2, l}$, $j = \overline{1, p_{s-1}}$, $h = \overline{1, s-1}$) – h -е неизвестные угловые коэффициенты в s -арных операциях \min и \max , включающих j -ю комбинацию входных переменных.

Рассмотрим частные случаи НЛР (2):

- если $\alpha_j^{\min,s} = 0$, $\alpha_j^{\max,s} = 0$ ($s = \overline{2, l}$, $j = \overline{1, p_{s-1}}$), то имеем линейную регрессию;
- если $\alpha_j^{\min,s} = 0$, $\alpha_j^{\max,s} = 0$ ($s = 3, l$, $j = \overline{1, p_{s-1}}$), то имеем НЛР (1) только с бинарными операциями \min и \max ;
- если $\alpha_j = 0$ ($j = \overline{0, l}$), $\alpha_j^{\min,s} = 0$, $\alpha_j^{\max,s} = 0$ ($s = \overline{2, l-1}$, $j = \overline{1, p_{s-1}}$), $\alpha_1^{\max,l} = 0$, то имеем функцию Леонтьева;
- если $\alpha_j = 0$ ($j = \overline{0, l}$), $\alpha_j^{\min,s} = 0$, $\alpha_j^{\max,s} = 0$ ($s = \overline{2, l-1}$, $j = \overline{1, p_{s-1}}$), то имеем кучно-линейную регрессию [19].



НЛР (2) содержит один свободный член α_0 , l параметров при входных переменных, $2 \cdot (\tilde{N}_l^2 + C_l^3 + \dots + C_l^{l-1} + 1)$ параметров при операциях \min и \max , $2 \cdot (\tilde{N}_l^2 + 2C_l^3 + \dots + (l-2)C_l^{l-1} + l-1)$ угловых коэффициентов внутри операций \min и \max . Итого в НЛР (2) содержится $\left(1 + l + 2 \sum_{j=2}^l j \cdot C_l^j\right)$ неизвестных параметров. Их количество значительно увеличится, если в операциях \min и \max использовать свободные члены [20]. Таким образом, НЛР (2) можно отнести к очень гибкому инструменту регрессионного моделирования.

3. НЛР С l -АРНОЙ ОПЕРАЦИЕЙ \min (\max) БЕЗ ЛИНЕЙНОЙ ЧАСТИ

Рассмотрим частный случай модели (2) – НЛР с l -арной операцией \min :

$$y_i = \alpha_0 + \alpha_1 \min \{x_{i1}, k_1 x_{i2}, k_2 x_{i3}, \dots, k_{l-1} x_{il}\} + \varepsilon_i, \quad i = \overline{1, n}. \quad (3)$$

Заметим, что оценивание модели (3) равносильно оцениванию l -факторной функции Леонтьева со свободным членом.

Будем считать, что все значения входных переменных в (3) положительны.

Изначально регрессия (3) нелинейна по оцениваемым параметрам. Но если придать коэффициентам k_1, k_2, \dots, k_{l-1} определенные значения, то НЛР (3) становится линейной по параметрам α_0 и α_1 , оценки которых можно найти с помощью МНК. Возникает вопрос – в какой области D лежат оптимальные МНК-оценки параметров k_1, k_2, \dots, k_{l-1} ? Тот факт, что такую область можно выделить, не вызывает сомнения. Например, нет смысла использовать в (3) значения k_1, k_2, \dots, k_{l-1} существенно превосходящие значения входных переменных, поскольку очевидно, что при $k_1 \rightarrow \infty, k_2 \rightarrow \infty, \dots, k_{l-1} \rightarrow \infty$ в (3) всегда будет срабатывать только переменная x_1 . Иными словами, параметры k_1, k_2, \dots, k_{l-1} должны быть такими, чтобы каждая переменная на выборке срабатывала хотя бы один раз.

Будем формировать область D возможных значений параметров k_1, k_2, \dots, k_{l-1} следующим образом. Исключим из универсального множества U область \bar{D} , в которой для всех наблюдений не срабатывает хотя бы одна переменная. Эта область представляет собой совокупность линейных неравенств:

$$\begin{cases} x_{i1} \geq k_1 x_{i2}, x_{i1} \geq k_2 x_{i3}, \dots, x_{i1} \geq k_{l-1} x_{il}, \\ k_1 x_{i2} \geq x_{i1}, k_1 x_{i2} \geq k_2 x_{i3}, \dots, k_1 x_{i2} \geq k_{l-1} x_{il}, \\ \dots \\ k_{l-1} x_{il} \geq x_{i1}, k_{l-1} x_{il} \geq k_1 x_{i2}, \dots, k_{l-1} x_{il} \geq k_{l-2} x_{i,l-1}, \end{cases} \quad i = \overline{1, n}. \quad (4)$$

Решения каждого неравенства совокупности (4) представлены в таблице 1. В ней

$$\lambda_{ij}^{\min} = \min \left\{ \frac{x_{1i}}{x_{1j}}, \frac{x_{2i}}{x_{2j}}, \dots, \frac{x_{ni}}{x_{nj}} \right\}, \quad \lambda_{ij}^{\max} = \max \left\{ \frac{x_{1i}}{x_{1j}}, \frac{x_{2i}}{x_{2j}}, \dots, \frac{x_{ni}}{x_{nj}} \right\}, \quad i = \overline{1, l-1}, \quad j = \overline{i+1, l}.$$



Таблица 1

Решения неравенств (4)

—	$k_1 \leq \lambda_{12}^{\min}$	$k_2 \leq \lambda_{13}^{\min}$...	$k_{l-2} \leq \lambda_{1,l-1}^{\min}$	$k_{l-1} \leq \lambda_{1,l}^{\min}$
$k_1 \geq \lambda_{12}^{\max}$	—	$k_2 \leq \lambda_{23}^{\min} k_1$...	$k_{l-2} \leq \lambda_{2,l-1}^{\min} k_1$	$k_{l-1} \leq \lambda_{2,l}^{\min} k_1$
$k_2 \geq \lambda_{13}^{\max}$	$k_2 \geq \lambda_{23}^{\max} k_1$	—	...	$k_{l-2} \leq \lambda_{3,l-1}^{\min} k_2$	$k_{l-1} \leq \lambda_{3,l}^{\min} k_2$
...
$k_{l-2} \geq \lambda_{1,l-1}^{\max}$	$k_{l-2} \geq \lambda_{2,l-1}^{\max} k_1$	$k_{l-2} \geq \lambda_{3,l-1}^{\max} k_2$...	—	$k_{l-1} \leq \lambda_{l-1,l}^{\min} k_{l-2}$
$k_{l-1} \geq \lambda_{1,l}^{\max}$	$k_{l-1} \geq \lambda_{2,l}^{\max} k_1$	$k_{l-1} \geq \lambda_{3,l}^{\max} k_2$...	$k_{l-1} \geq \lambda_{l-1,l}^{\max} k_{l-2}$	—

Исключение из области U области \bar{D} означает, что необходимо заменить знаки всех неравенств в таблице 1 на противоположные и внести полученные неравенства в систему. Таким образом, область D представляет собой решение системы линейных неравенств, приведенных в таблице 2.

Таблица 2

Неравенства из системы, идентифицирующей область D

—	$k_1 > \lambda_{12}^{\min}$	$k_2 > \lambda_{13}^{\min}$...	$k_{l-2} > \lambda_{1,l-1}^{\min}$	$k_{l-1} > \lambda_{1,l}^{\min}$
$k_1 < \lambda_{12}^{\max}$	—	$k_2 > \lambda_{23}^{\min} k_1$...	$k_{l-2} > \lambda_{2,l-1}^{\min} k_1$	$k_{l-1} > \lambda_{2,l}^{\min} k_1$
$k_2 < \lambda_{13}^{\max}$	$k_2 < \lambda_{23}^{\max} k_1$	—	...	$k_{l-2} > \lambda_{3,l-1}^{\min} k_2$	$k_{l-1} > \lambda_{3,l}^{\min} k_2$
...
$k_{l-2} < \lambda_{1,l-1}^{\max}$	$k_{l-2} < \lambda_{2,l-1}^{\max} k_1$	$k_{l-2} < \lambda_{3,l-1}^{\max} k_2$...	—	$k_{l-1} > \lambda_{l-1,l}^{\min} k_{l-2}$
$k_{l-1} < \lambda_{1,l}^{\max}$	$k_{l-1} < \lambda_{2,l}^{\max} k_1$	$k_{l-1} < \lambda_{3,l}^{\max} k_2$...	$k_{l-1} < \lambda_{l-1,l}^{\max} k_{l-2}$	—

Заметим, что для НЛР с l -арной операцией \max область D будет точно такой же.

Решение системы линейных неравенств, перечисленных в таблице 2, представляет собой открытый выпуклый многогранник (симплекс) в $(l-1)$ -мерном пространстве. Поскольку в НЛР (3) отсутствует линейная часть, то все неравенства в таблице 2 можно взять нестрогими. Тогда решение будет представлять собой замкнутый выпуклый многогранник.

Таким образом, для численного оценивания с помощью МНК НЛР (3) необходимо выбрать в области D некоторое множество точек, в каждой из них найти МНК-оценки параметров α_0 и α_1 , и выбрать оценки, при которых сумма квадратов остатков регрессии минимальна.



Стоит отметить, что схожий алгоритм оценивания функций Леонтьева можно найти в монографии [21]. Однако в ней область D предложено формировать как l -мерный параллелепипед. Тем самым, представленный в настоящей работе алгоритм, очевидно, эффективнее с вычислительной точки зрения.

4. ПРИМЕР

Для демонстрации предложенного математического аппарата решалась задача моделирования ВРП Иркутской области. Для этого на сайте Федеральной службы государственной статистики (<https://rosstat.gov.ru/>) были собраны ежегодные статистические данные за период с 2000 по 2020 гг. (таблица 3) по следующим переменным:

y – ВРП (млн руб.);

x_1 – продукция сельского хозяйства (млн руб.);

x_2 – инвестиции в основной капитал (млн руб.);

x_3 – объем работ, выполненных по виду экономической деятельности «Строительство» (млн руб.).

Таблица 3

Статистические данные

Год	y	x_1	x_2	x_3	Год	y	x_1	x_2	x_3
2000	103013,8	10006,09	10814	6511,9	2011	634561,4	40990,2	145537	63825,4
2001	120240	14543,88	15233,84	8400,4	2012	737971,6	44079,1	177641	89331,9
2002	140195,9	14894,12	17313,01	7577,2	2013	805197,5	46630	200063	94617
2003	167927,1	15568,4	22122,58	10193,8	2014	916317,5	51765,4	214422	89312,6
2004	213244,2	17824,91	26013,87	14917,2	2015	1001718	53600,8	206075	98839,4
2005	258095,5	19670,4	36675	20544,4	2016	1139207	58721,7	247954,2	131836
2006	330834,3	21925,7	70671,53	28107,2	2017	1268312	61900,4	270018,6	130347,8
2007	402654,7	25942,8	121877,8	45445,2	2018	1460512	63549	318786,9	113826,4
2008	438852,4	29996,7	129951	50022,9	2019	1540238	62154	366723,7	158311,4
2009	458774,9	33196,1	106550	47795,8	2020	1505151	67043	389990,1	164413,5
2010	546141	35119,9	119395	55017,7					

Все перечисленные переменные тесно коррелируют между собой. Так, коэффициент корреляции между переменными y и x_1 равен 0,9798, между y и x_2 –0,9874, между y и x_3 –0,9784, между x_1 и x_2 –0,9689, между x_1 и x_3 –0,976, между x_2 и x_3 –0,9828. Таким образом, заранее можно предположить, что при построении модели множественной линейной регрессии будет иметь место частичная мультиколлинеарность, которая, возможно, исказит знаки коэффициентов уравнения.

Действительно, построенная по данным из таблицы 3 линейная регрессия имеет вид:

$$\tilde{y} = -80519,7 + 9,995x_1 + 2,657x_2 - 0,383x_3. \quad (5)$$

Как видно, в уравнении (5) из-за мультиколлинеарности знак коэффициента при переменной x_3 противоречит содержательному смыслу задачи. Тем самым модель (5)



теряет способность быть интерпретируемой. Однако для прогнозирования её использовать можно, поскольку её коэффициент детерминации R^2 достаточно высок и составляет 0,983742.

Затем с помощью МНК оценивалась НЛР с тернарной операцией \min и без линейной части. Для этого предварительно были вычислены следующие характеристики:

$$\lambda_{12}^{\min} = \min \left\{ \frac{x_{11}}{x_{12}}, \frac{x_{21}}{x_{22}}, \dots, \frac{x_{n1}}{x_{n2}} \right\} = 0,169485, \quad \lambda_{12}^{\max} = \max \left\{ \frac{x_{11}}{x_{12}}, \frac{x_{21}}{x_{22}}, \dots, \frac{x_{n1}}{x_{n2}} \right\} = 0,954709,$$

$$\lambda_{13}^{\min} = \min \left\{ \frac{x_{11}}{x_{13}}, \frac{x_{21}}{x_{23}}, \dots, \frac{x_{n1}}{x_{n3}} \right\} = 0,392606, \quad \lambda_{13}^{\max} = \max \left\{ \frac{x_{11}}{x_{13}}, \frac{x_{21}}{x_{23}}, \dots, \frac{x_{n1}}{x_{n3}} \right\} = 1,965649,$$

$$\lambda_{23}^{\min} = \min \left\{ \frac{x_{13}}{x_{13}}, \frac{x_{22}}{x_{23}}, \dots, \frac{x_{n2}}{x_{n3}} \right\} = 0,392606, \quad \lambda_{23}^{\max} = \max \left\{ \frac{x_{12}}{x_{13}}, \frac{x_{22}}{x_{23}}, \dots, \frac{x_{n2}}{x_{n3}} \right\} = 2,800641.$$

Для идентификации области D с помощью таблицы 2 была составлена следующая система линейных неравенств:

$$\begin{cases} k_1 \geq 0,169485, \\ k_2 \geq 0,392606, \\ k_1 \leq 0,954709, \\ k_2 \geq 1,660652k_1, \\ k_2 \leq 1,965649, \\ k_2 \leq 2,800641k_1. \end{cases} \quad (6)$$

Область D решений системы линейных неравенств (6) представлена на рис. 1.

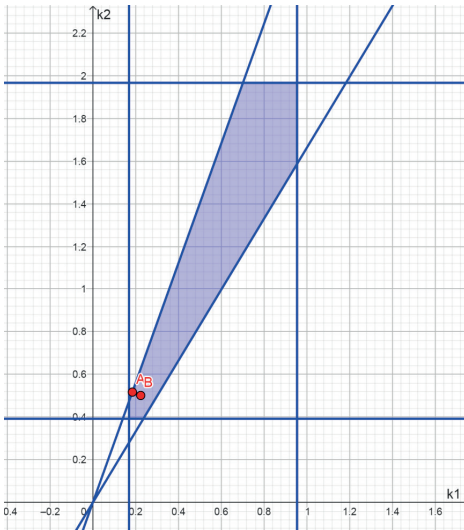


Рис. 1. Область решений системы (6)

Как следует из рис. 1, область D на плоскости представляет собой замкнутый выпуклый шестиугольник. Подчеркнём, что в системе (6) во всех неравенствах были взяты нестрогие знаки, поскольку оцениваемая НЛР представляет собой функцию Леонтьева и не содержит линейной части.

Для численного оценивания НЛР был разработан специальный скрипт на языке программирования `hansl` пакета `Gretl`. Скрипт работает по следующему алгоритму. Прямоугольник $k_1 \geq 0,169485 \wedge k_1 \leq 0,954709 \wedge k_2 \geq 0,392606 \wedge k_2 \leq 1,965649$ равномерно разбивается десятью тысячами точек. В каждой такой точке и на границе области D проверяется выпол-



нение условий $k_2 \geq 1,660652k_1 \wedge k_2 \leq 2,800641k_1$. Если условия выполнены, то точка принадлежит области D , поэтому для неё находятся МНК-оценки НЛР. Всего в область D попало 3422 точки. Лучшая регрессия по величине суммы квадратов остатков была зафиксирована в точке $A(0.185034, 0.517203)$ вблизи границы области D (см. рис. 1). Полученной точке A соответствует следующая НЛР с тернарной операцией \min :

$$\tilde{y} = 35627,5 + 23,026 \min_{(29,12)} \{x_1, 0.185034x_2, 0.517203x_3\}. \quad (7)$$

В уравнении (7) в скобках под коэффициентом 23,026 приведено значение t-критерия Стьюдента, подтверждающее значимость регрессора $\min \{x_1, 0.185034x_2, 0.517203x_3\}$. Для модели (7) $R^2 = 0,978088$. Мультиколлинеарности в регрессии (7) по определению нет, поэтому все коэффициенты при переменных можно интерпретировать. Недостаток НЛР (7) в том, что практически всегда в тернарной операции \min срабатывает только переменная x_2 . Так происходит в 18 наблюдениях из 21 (2000–2017 гг.). Переменная x_1 срабатывает всего 2 раза (2019 и 2020 год), а переменная $x_3 - 1$ раз (2018 год). Всё это сигнализирует о том, что вместо модели (7) можно было обойтись простой парной линейной регрессией y от x_2 . Действительно, такая регрессия имеет вид

$$\tilde{y} = 54617,3 + 4,058 x_2, \quad (8)$$

(27,21)

для которой $R^2 = 0,974977$. Как видно, все коэффициенты и аппроксимационные характеристики моделей (7) и (8) практически не отличаются. В такой ситуации предпочтение следует отдать более простой модели (8). Заметим, что так произошло потому, что точка A (см. рис. 1) оказалась практически на границе области D , на которой нет гарантии срабатывания каждой переменной на выборке хотя бы 1 раз.

После чего с помощью МНК оценивалась НЛР с тернарной операцией \max и без линейной части. Для такой модели область D имеет точно такую же конфигурацию, что и на рис. 1. С помощью того же скрипта была найдена лучшая регрессия по величине суммы квадратов остатков. Она была зафиксирована в точке $B(0.223906, 0.501629)$ внутри области D (см. рис. 1). Точке B соответствует следующая НЛР с тернарной операцией \max :

$$\tilde{y} = -152442 + 20,4354 \max_{(35,98)} \{x_1, 0.223906x_2, 0.501629x_3\}. \quad (9)$$

Коэффициент детерминации НЛР (9) равен 0,985536, что больше чем у любой из приведенных выше моделей (5), (7), (8). Коэффициент при регрессоре $\max \{x_1, 0.223906x_2, 0.501629x_3\}$ значим по t-критерию Стьюдента. Переменная x_1 срабатывает 13 раз (2000–2006, 2008–2011, 2014 и 2015 годы), переменная $x_2 - 4$ раза (2007, 2018–2020 годы), а переменная $x_3 - 4$ раза (2012, 2013, 2016, 2017 годы).

Мультиколлинеарности в регрессии (9) нет, поэтому все коэффициенты при переменных можно интерпретировать. Для этого представим НЛР (9) в кусочно-заданной форме:



$$\tilde{y} = \begin{cases} -152442 + 20,435x_1, & \text{если } \frac{x_1}{x_2} \geq 0,223906, \frac{x_1}{x_3} \geq 0,501629, \\ -152442 + 4,576x_2, & \text{если } \frac{x_1}{x_2} < 0,223906, \frac{x_2}{x_3} \geq 2,240355, \\ -152442 + 10,251x_3, & \text{если } \frac{x_1}{x_3} < 0,501629, \frac{x_2}{x_3} < 2,240355. \end{cases}$$

Тогда модель (9) можно интерпретировать следующим образом.

1. Если отношение продукции сельского хозяйства x_1 к инвестициям в основной капитал x_2 не меньше 0,223906 и отношение x_1 к объемам строительных работ x_3 не меньше 0,501629, то на ВРП оказывает влияние только продукция сельского хозяйства x_1 . Причем, с увеличением x_1 на 1 млн руб. ВРП у увеличивается в среднем на 20,435 млн руб.
2. Если отношение x_1 к x_2 меньше 0,223906 и отношение x_2 к x_3 не меньше 2,240355, то на ВРП оказывают влияние только инвестиции в основной капитал x_2 . Причем, с увеличением x_2 на 1 млн руб. ВРП у увеличивается в среднем на 4,576 млн руб.
3. Если отношение x_1 к x_3 меньше 0,501629 и отношение x_2 к x_3 меньше 2,240355, то на ВРП оказывают влияние только объемы строительных работ x_3 . Причем, с увеличением x_3 на 1 млн руб. ВРП у увеличивается в среднем на 10,251 млн руб.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В статье впервые введены неэлементарные линейные регрессии с линейной частью и со всеми возможными комбинациями бинарных, тернарных, ..., l -арных операций \min и \max . Такие модели обобщают многие известные на сегодняшний день регрессионные модели, в частности, специфицированные на основе функций Леонтьева регрессии. Предложен алгоритм оценивания с помощью МНК НЛР с l -арной операцией \min (\max). На первом шаге алгоритма строится область возможных значений угловых коэффициентов, представляющая собой решение системы линейных неравенств (таблица 2). На втором шаге из этой области выбирается точка, в которой сумма квадратов остатков НЛР минимальна. С помощью предложенного алгоритма решена задача моделирования ВРП Иркутской области. В результате была построена НЛР с тернарной операцией \max , качество аппроксимации которой оказалось выше, чем у линейной регрессии. Дана интерпретация построенной модели. Таким образом, обобщенные НЛР (2) представляют собой довольно гибкий инструмент математического моделирования, просто интерпретируются и могут эффективно применяться в прогнозировании.

Очевидно, что для оценивания с помощью МНК обобщенной НЛР (2) требуется для каждой входящей в неё операции \min или \max формировать свою область возможных значений угловых коэффициентов, а затем в каждой из этих областей выбрать по одной точке так, чтобы минимизировать сумму квадратов остатков. Такая



задача довольно сложна с вычислительной точки зрения, поэтому требует в будущем разработки специализированного программного продукта.

Литература

1. Хенрик Б., Джозеф Р., Марк Ф. Машинное обучение. СПб.: Питер, 2017. 336 с.
2. Флах П. Машинное обучение. Наука и искусство построения алгоритмов, которые извлекают знания из данных / пер. с англ. А.А. Слинкина. М.: ДМК Пресс, 2015. 400 с.
3. Molnar C. Interpretable machine learning. Lulu. com, 2020.
4. Doshi-Velez F., Kim B. Towards a rigorous science of interpretable machine learning. arXiv preprint arXiv:1702.08608. 2017.
5. Montgomery D.C., Peck E.A., Vining G.G. Introduction to linear regression analysis. John Wiley & Sons, 2021.
6. Keith T.Z. Multiple regression and beyond: An introduction to multiple regression and structural equation modeling. Routledge, 2019.
7. Gelman A., Hill J., Vehtari A. Regression and other stories. Cambridge University Press, 2020.
8. Брачунова В.В. Численное моделирование зарядного баланса легкового автомобиля // Известия Тульского государственного университета. Технические науки. 2022. № 9. С. 453–458.
9. Ярымбаи Д.С., Коцур М.И., Ярымбаи С.Т., Килимник И.М. Моделирование электромагнитных процессов при работе силовых трансформаторов под нагрузкой и в режиме холостого хода // Проблемы региональной энергетики. 2020. № 1 (45). С. 1–13.
10. Балгарина Л., Джумабаев С., Шокаманов Ю. Производственная функция Кобба–Дугласа: опыт применения в Северо-Казахстанской области // Экономическая серия вестника Евразийского национального университета имени Л.Н. Гумилева. 2022. Т. 141. № 4.
11. Чесноков Е.А. Сравнение регрессионных моделей экономического развития России // Московский экономический журнал. 2021. № 7. С. 96–105.
12. Базилевский М.П. Построение степенно-показательных и линейно-логарифмических регрессионных моделей // Проблемы управления. 2021. № 3. С. 25–32.
13. Рева С.А., Арнаутов А.В., Клиценко О.А., Петров С.Б. Прогностическая значимость логистической регрессионной модели для оценки риска рецидива у больных раком предстательной железы после радикальной простатэктомии // Research'n Practical Medicine Journal. 2022. Т. 9. № 4. С. 96–105.
14. Кокоулина М.В., Епифанова А., Пелиновский Е.Н., Куркина О.Е., Куркин А.А. Анализ динамики распространения коронавируса с помощью обобщенной логистической модели // Труды НГТУ им. Р.Е. Алексеева. 2020. № 3 (130). С. 28–41.
15. Клейнер Г.Б. Производственные функции: Теория, методы, применение. М.: Финансы и статистика, 1986. 239 с.
16. Базилевский М.П. Оценка линейно-неэлементарных регрессионных моделей с помощью метода наименьших квадратов // Моделирование, оптимизация и информационные технологии. 2020. Т. 8. № 4 (31).
17. Базилевский М.П. Отбор информативных операций при построении линейно-неэлементарных регрессионных моделей // International Journal of Open Information Technologies. 2021. Т. 9. № 5. С. 30–35.
18. Базилевский М.П. Метод построения неэлементарных линейных регрессий на основе аппарата математического программирования // Проблемы управления. 2022. № 4. С. 3–14.
19. Носков С.И., Хоняков А.А. Программный комплекс построения некоторых типов кусочно-линейных регрессий // Информационные технологии и математическое моделирование в управлении сложными системами. 2019. № 3 (4). С. 47–55.



20. *Базилевский М.П.* Оценка методом наименьших квадратов простейших неэлементарных линейных регрессий с линейным аргументом в бинарной операции // Вестник кибернетики. 2022. № 4 (48). С. 69–76.
21. *Носков С.И.* Технология моделирования объектов с нестабильным функционированием и неопределенностью в данных. Иркутск, РИЦ ГП «Облинформпечать», 1996. 320 с.



Generalization of Non-elementary Linear Regressions

Mikhail P. Bazilevskiy*

Irkutsk State Transport University (ISTU), Irkutsk, Russia

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-3253-5697>

e-mail: mik2178@yandex.ru

Earlier, the author developed a non-elementary linear regression consisting of a linear part and all possible combinations of min and max binary operations. This article is devoted to its generalization. For the first time a non-elementary linear regression with a linear part and all possible combinations of binary, ternary, ..., l -ary operations min and max has been introduced. The proposed model generalizes both linear regression and the Leontief function, and can be effectively used both for predicting and for interpreting the study object functioning. An estimation algorithm was developed using the method of least squares for non-elementary linear regressions without a linear part and with an l -ary operation min (max), i.e. regressions with specification in the form of a Leontief function. The essence of the algorithm is to form a set of possible values of slope coefficients, from which a point is selected with the minimum value of the residual sum of squares. A system of linear inequalities is identified that makes it possible to form such a set. Using the algorithm, a model of the gross regional product of the Irkutsk region was construct and its interpretation was given.

Keywords: machine learning, regression model, non-elementary linear regression, ordinary least squares method, Leontief function, multicollinearity.

For citation:

Bazilevskiy M.P. Generalization of Non-elementary Linear Regressions. *Modelirovanie i analiz dannykh = Modelling and Data Analysis*, 2023. Vol. 13, no. 2, pp. 85–98. DOI: 10.17759/mda.2023130205 (In Russ., abstr. in Engl.).

References

1. Khenrik B., Dzhozef R., Mark F. *Mashinnoe obuchenie* [Machine Learning]. Saint Petersburg, Piter, 2017. 336 p.
2. Flakh P. *Mashinnoe obuchenie. Nauka i iskusstvo postroeniya algoritmov, kotorye izvlekayut znaniya iz dannykh* [Machine Learning. The Art and Science of Algorithms that Make Sense of Data]. Moscow, DMK Press, 2015. 400 p.
3. Molnar C. *Interpretable machine learning*. Lulu. com, 2020.
4. Doshi-Velez F., Kim B. Towards a rigorous science of interpretable machine learning. *arXiv pre-print arXiv:1702.08608*, 2017.
5. Montgomery D.C., Peck E.A., Vining G.G. *Introduction to linear regression analysis*. John Wiley & Sons, 2021.

***Mikhail P. Bazilevskiy**, PhD (Engineering), Associate Professor, Department of Mathematics, Irkutsk State Transport University (ISTU), Irkutsk, Russia, ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-3253-5697>, e-mail: mik2178@yandex.ru



6. Keith T.Z. *Multiple regression and beyond: An introduction to multiple regression and structural equation modeling*. Routledge, 2019.
7. Gelman A., Hill J., Vehtari A. *Regression and other stories*. Cambridge University Press, 2020.
8. Brachunova U.V. Chislennoe modelirovanie zaryadnogo balansa legkovogo avtomobilya [Numerical simulation of the charging balance of a passenger car], *Proceedings of the TSU. Technical Sciences*, 2022, no. 9, pp. 453–458.
9. Yarymbash D.S., Kotsur M.I., Yarymbash S.T., Kilimnik I.M. Modelirovanie elektromagnitnykh protsessov pri rabote silovykh transformatorov pod nagruzkoy i v rezhime kholostogo khoda [Electromagnetic Processes Simulation of Power Transformers in Operation and in No-load Mods], *Problemele Energeticii Regionale*, 2020, no. 1 (45), pp. 1–13.
10. Balgarina L., Dzhumabaev S., Shokamanov Yu. Proizvodstvennaya funktsiya Kobba–Duglasa: opyt primeneniya v Severo-Kazakhstanskoy oblasti [Cobb – Douglas Production Function: application experience in the North Kazakhstan region], *Economic Series of the Bulletin of the L.N. Gumilyov ENU*, 2022, vol. 141, no. 4.
11. Chesnokov E.A. Sravnenie regressionnykh modeley ekonomicheskogo razvitiya Rossii [Comparison of regression models of economic development in Russia], *Moscow economic journal*, 2021, no. 7, pp. 96–105.
12. Bazilevskiy M.P. Postroenie stepenno-pokazatel'nykh i lineyno-logarifmicheskikh regressionnykh modeley [Constructing power-exponential and linear-logarithmic regression models], *Control Sciences*, 2021, no. 3, pp. 25–32.
13. Reva S.A., Arnautov A.V., Klitsenko O.A., Petrov S.B. Prognosticheskaya znachimost' logisticheskoy regressionnoy modeli dlya otsenki riska retsidiva u bol'nykh rakom predstatel'noy zhelezy posle radikal'noy prostatektomii [Prognostic significance of the logistic regression model for assessing the risk of recurrence in patients with prostate cancer after radical prostatectomy], *Research 'n Practical Medicine Journal*, 2022, vol. 9, no. 4, pp. 96–105.
14. Kokoulina M.V., Epifanova A., Pelinovskiy E.N., Kurkina O.E., Kurkin A.A. Analiz dinamiki rasprostraneniya koronavirusa s pomoshch'yu obobshchennoy logisticheskoy modeli [Analysis of coronavirus dynamics using the generalized logistic model], *Proceedings of NSTU n.a. R.E. Alekseev*, 2020, no. 3 (130), pp. 28–41.
15. Kleyner G.B. *Proizvodstvennyye funktsii: Teoriya, metody, primeneniye* [Production functions: Theory, methods, application]. Moscow: Finance and Statistics, 1986. 239 p.
16. Bazilevskiy M.P. Otsenivanie lineyno-neelementarnykh regressionnykh modeley s pomoshch'yu metoda naimen'shikh kvadratov [Estimation linear non-elementary regression models using ordinary least squares], *Modeling, optimization and information technology*, 2020, vol. 8, no. 4 (31).
17. Bazilevskiy M.P. Otkor informativnykh operatsiy pri postroenii lineyno-neelementarnykh regressionnykh modeley [Selection of informative operations in the construction of linear non-elementary regression models], *International Journal of Open Information Technologies*, 2021, vol. 9, no. 5, pp. 30–35.
18. Bazilevskiy M.P. Metod postroeniya neelementarnykh lineynykh regressiy na osnove apparata matematicheskogo programmirovaniya [A method for constructing nonelementary linear regressions based on mathematical programming], *Control Sciences*, 2022, no. 4, pp. 3–14.
19. Noskov S.I., Khonyakov A.A. Programmnyy kompleks postroeniya nekotorykh tipov kusochno-lineynykh regressiy [Software complex for building some types pieces of linear regressions], *Information technology and mathematical modeling in the management of complex systems*, 2019, no. 3 (4), pp. 47–55.
20. Bazilevskiy M.P. Otsenka metodom naimen'shikh kvadratov prosteyshikh neelementarnykh lineynykh regressiy s lineynym argumentom v binarnoy operatsii [Ordinary least squares estimation



of simple non-elementary linear regressions with a linear argument in a binary operation], *Proceedings in Cybernetics*, 2022, no. 4 (48), pp. 69–76.

21. Noskov S.I. *Tekhnologiya modelirovaniya ob"ektov s nestabil'nykh funktsionirovaniem i neopredelennost'yu v dannykh* [Technology for modeling objects with unstable operation and uncertainty in data]. Irkutsk, RITs GP «Oblinformpechat'», 1996. 320 p.

Получена 24.04.2023

Принята в печать 19.05.2023

Received 24.04.2023

Accepted 19.05.2023

Псевдоспектральный метод поиска оптимального управления пучками траекторий на базе мультиагентных алгоритмов оптимизации

*Каранэ М.М.С.**

Московский авиационный институт
(национальный исследовательский университет) (МАИ)
г. Москва, Российская Федерация
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-8019-8613>
e-mail: mm_karane@mail.ru

Рассмотрен класс задач оптимального управления нелинейными непрерывными детерминированными системами в условиях неопределенности. Для решения поставленной задачи сформирован численный алгоритм поиска оптимального управления, в котором применяется параметризация закона управления, зависящего от времени и набора координат вектора состояния, доступных измерению. Данный подход основан на аппроксимации закона управления рядом по системе базисных функций с неизвестными коэффициентами. Поиск неизвестных коэффициентов в разложении закона управления, реализуется с применением мультиагентных методов оптимизации: гибридного мультиагентного алгоритма интерполяционного поиска и мультиагентного алгоритма, основанного на использовании линейных регуляторов управления движением агентов. Разработан комплекс программ и решены два модельных примера и прикладная задача о стабилизации спутника с помощью установленных на нем двигателей.

Ключевые слова: оптимальное управление, мультиагентные алгоритмы оптимизации, пучок траекторий, полиномы Чебышева, псевдоспектральный метод.

Для цитаты:

Каранэ М.М.С. Псевдоспектральный метод поиска оптимального управления пучками траекторий на базе мультиагентных алгоритмов оптимизации // Моделирование и анализ данных. 2023. Том 13. № 2. С. 99–122. DOI: [10.17759/mda.2023130206](https://doi.org/10.17759/mda.2023130206)

**Каранэ Мария Магдалина Сергеевна*, аспирант кафедры «Математическая кибернетика», Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет) (ФГБОУ ВО МАИ (НИУ)), г. Москва, Российская Федерация, ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-8019-8613>, e-mail: mm_karane@mail.ru



1. ВВЕДЕНИЕ

При решении многих прикладных проблем теории управления возникают задачи синтеза систем управления, которые описываются нелинейными обыкновенными дифференциальными уравнениями с неопределенно заданными начальными условиями [1–2]. Подобные задачи рассматривались во многих работах [1–6] и решались с помощью различных методов. Одним из возможных подходов к решению задачи является описание и последующее управление всей совокупностью траекторий, исходящих из заданного множества возможных начальных состояний, называемой пучком траекторий.

В статье формулируется стратегия для решения задачи поиска оптимального управления пучками траекторий с неполной обратной связью, где управление зависит от времени и от части координат вектора состояния, информация о значениях которых предполагается известной.

В силу сложности решения нелинейных прикладных задач оптимального управления [7; 8], как правило, применяются численные методы, которые можно разделить на прямые и косвенные. Основная идея прямого подхода заключается в том, что нелинейная динамическая задача оптимального управления сводится к задаче нелинейного математического программирования [4; 6]. Косвенный подход основан на применении необходимых условий оптимальности (принципе максимума Понтрягина) или достаточных условий оптимальности (принципе оптимальности Беллмана или принципе расширения Кротова–Гурмана) [5].

В статье предлагается прямой подход к решению поставленной задачи с параметризацией закона управления. Для этого используется псевдоспектральный метод [7–11], в котором управление аппроксимируется глобальным многочленом, а коллокация выполняется в специально выбранных точках (точках коллокации). Глобальный многочлен подбирает к точкам коллокации сглаживающую функцию. В этом методе фиксируется набор точек коллокации, а степень используемого многочлена может изменяться. В качестве базисных функций обычно рассматриваются полиномы Чебышева или Лагранжа, а управление представляется в виде ряда по базисным функциям с неизвестными коэффициентами. В силу особых свойств полиномов Чебышева [11], в качестве ограничений на коэффициенты используются ограничения, наложенные на управление. Решение представляется в виде значений в $N + 1$ -й точках коллокации, которые однозначно определяют полином, аппроксимирующий решение. Наличие естественных ограничений на коэффициенты, следующих из постановки задачи, является преимуществом псевдоспектрального метода по сравнению со спектральным [12], где никакой априорной информации о коэффициентах нет.

В численных методах поиска оптимального управления при прямом подходе для оптимизации критерия качества управления требуется использовать методы оптимизации, которые могут быть как классическими, так и основанными на эвристических процедурах. Для этой цели успешно применяются метаэвристические алгоритмы [6; 13–23], а также их подгруппа – мультиагентные алгоритмы [17–20], принципиальной



особенностью которых является использование агентов. Если рассматривать целевую функцию $f(x)$, то агент – это набор параметров $x = (x_1, \dots, x_n)^T$. Агенты имеют возможность обмениваться информацией с целью достижения наилучшего результата. Мультиагентные алгоритмы имеют достаточно широкое применение и используются во многих отраслях науки. В статье используются два мультиагентных метода: гибридный мультиагентный алгоритм интерполяционного поиска [17; 18] и метод, основанный на использовании линейных регуляторов управления движением агентов [17–19]. Особенность гибридного мультиагентного алгоритма интерполяционного поиска заключается в построении интерполяционных кривых: Безье, Катмулла–Рома и В-сплайна, и в различной аппроксимации набора точек. Построение интерполяционных кривых дает возможность подстроиться под локально изменяющуюся структуру поверхности уровня целевой функции, а их применение позволяет перейти к задачам одномерной параметрической минимизации с целью нахождения новых агентов по информации о текущем положении агентов, образующих популяцию. Также в алгоритме используется метод роевого интеллекта для минимизации вдоль интерполяционной кривой [21; 22] и самоорганизующийся миграционный алгоритм (Self-Organizing Migrating Algorithm, SOMA) [23]. Особенность метода, основанного на использовании линейных регуляторов управления движением агентов, состоит в том, что движение агентов описывается системой дифференциальных уравнений. Для разных групп агентов используются различные типы критериев и типы оптимального или субоптимального управления с полной обратной связью.

В данной работе на базе этих мультиагентных алгоритмов и идей псевдоспектрального метода сформирован алгоритм поиска оптимального программного управления в условиях неопределенности задания начального состояния, как частного случая управления с неполной обратной связью.

Решены модельные примеры [24], в которых система управления описывается нелинейной системой дифференциальных уравнений, а ограниченное управление входит линейно. Помимо этого решена задача гашения вращательного движения спутника при помощи установленных на нем двигателей [25].

В следующем разделе описана постановка задачи управления пучками траекторий. В третьем разделе излагается стратегия поиска решения поставленной задачи, приведены общие идеи и способы ее решения. В четвертом разделе сформирован пошаговый алгоритм поиска оптимального управления пучками траекторий. Модельные примеры и прикладная задача о стабилизации спутника решены в пятом и шестом разделах соответственно.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Поведение нелинейной непрерывной детерминированной модели объекта управления описывается уравнением

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)), \quad (1)$$



где x – вектор состояния системы, $x \in R^n$; t – непрерывное время, $t \in T = [t_0; t_f]$, моменты t_0 начала процесса и t_f окончания процесса управления считаются заданными; u – вектор управления, $u = (u_1, \dots, u_q)^T \in U \subseteq R^q$; U – множество допустимых значений управления, представляющее собой прямое произведение отрезков $[a_j, b_j]$, $j = \overline{1, q}$; $f(t, x, u) = (f_1(t, x, u), \dots, f_n(t, x, u))^T$ – непрерывно дифференцируемая вектор-функция.

Начальные условия заданы компактным множеством Ω положительной меры с кусочно-гладкой границей:

$$x(t_0) = x_0 \in \Omega \subset R^n, \quad (2)$$

где множество Ω характеризует неопределенность задания начальных условий.

Предполагается, что при управлении используется информация о времени t и о части координат вектора состояния x (без ограничения общности считается, что это первые m координат). Таким образом, о компонентах вектора $x^1 \in R^m$ известна текущая информация, а о компонентах вектора $x^2 \in R^{n-m}$ она отсутствует, при этом $x = (x^1, x^2) \in R^n$, $m \in \{0, n\}$. Если $m = 0$, информация о векторе состояния отсутствует, а если $m = n$, то имеется полная информация о векторе состояния.

Управление, применяемое в каждый момент времени t , имеет вид управления с неполной обратной связью: $u(t) = u(t, x^1(t))$. Если $m = 0$, система управления будет разомкнутой по состоянию, а соответствующее управление $u(t)$ – программным, а если $m = n$, то система управления будет замкнутой с полной обратной связью, определяемой управлением $u(t, x)$. Множество допустимых управлений U_m образуют такие функции $u(t, x^1)$, что $\forall t \in T$ управление $u(t) = u(t, x^1(t)) \in U$ кусочно-непрерывно, а функция $f(t, x, u(t, x^1))$ такова, что решение уравнения (1) с начальным условием (2) существует и единственно. Множество допустимых процессов $D(t_0, x_0)$ – множество пар $d = (x(\cdot), u(\cdot))$, включающих траекторию $x(\cdot)$ и кусочно-непрерывное допустимое управление $u(\cdot)$, где $\forall t \in T$ $u(t) \in U(t)$, удовлетворяющих уравнению состояния (1) и начальному условию (2).

На множестве $D(t_0, x_0)$ определен функционал качества управления отдельной траекторией:

$$I(x_0, d) = \int_{t_0}^{t_f} f^0(t, x(t), u(t)) dt + F(x(t_f)), \quad (3)$$

где $f^0(t, x, u)$, $F(x)$ – заданные непрерывные функции.

Каждому допустимому управлению $u(t, x^1) \in U_m$ и множеству Ω поставим в соответствие пучок (ансамбль) траекторий уравнения (1) [1]:

$$X(t, u(t, x^1)) = \cup \{x(t, u(t, x^1(t)), x(t_0)) \mid x(t_0) \in \Omega\}, t \in T, \quad (4)$$

т.е. объединение решений уравнения (1) по всем возможным начальным состояниям (2). Пучок траекторий порождается множеством Ω и управлением $u(t, x^1) \in U_m$.

Качество управления пучком траекторий предлагается оценивать величиной функционала



$$J[\mathbf{u}(t, x^1)] = \int_{\Omega} I(x_0, d) dx_0 / \text{mes } \Omega \quad (5)$$

или

$$J[\mathbf{u}(t, x^1)] = \max_{x_0 \in \Omega} I(x_0, d), \quad (6)$$

где $\text{mes } \Omega$ – мера множества Ω .

Требуется найти управление $\mathbf{u}^*(t, x^1) \in U_m$, минимизирующее функционал (5) или (6):

$$J[\mathbf{u}^*(t, x^1)] = \min_{\mathbf{u}(t, x^1) \in U_m} J[\mathbf{u}(t, x^1)]. \quad (7)$$

Искомое управление называется оптимальным в среднем, когда минимизируется значение функционала (5), т.е. среднее значение функционала (3) на множестве начальных состояний Ω , или гарантирующим (минимаксным), когда минимизируется функционал (6).

3. СТРАТЕГИЯ ПОИСКА РЕШЕНИЯ

Для решения поставленной задачи определим способ вычисления критерия оптимальности управления пучком траекторий, а также способ параметризации закона управления. Эти процедуры можно разделить на два этапа.

I этап. Приближенное вычисление значения функционала (5) и (6).

Пусть множество начальных состояний Ω представляет собой параллелепипед, определенный прямым произведением отрезков $[\alpha_i; \beta_i]$, $i = \overline{1, n}$, т.е. $\Omega = [\alpha_1; \beta_1] \times \dots \times [\alpha_n; \beta_n]$. Все отрезки $[\alpha_i; \beta_i]$, $i = \overline{1, n}$, с помощью шага Δx_i разбиваются на S_i отрезков, а параллелепипед Ω делится на $S = S_1 \cdots S_n$ элементарных подмножеств Ω_k , $k = \overline{1, S}$. В каждом элементарном подмножестве Ω_k задается начальное состояние x_0^k – центр параллелепипеда Ω_k .

Для каждого начального состояния x_0^k , $k = \overline{1, S}$, из множества начальных состояний Ω следует проинтегрировать систему дифференциальных уравнений (1) с управлением $(\mathbf{u}_1(t, x^1), \dots, \mathbf{u}_q(t, x^1))^T$ одним из численных методов, например методом Рунге–Кутты 4-го порядка. В результате получаются пары d^k , $k = \overline{1, S}$, образованные управлением $u^k(t) = (u^{1,k}(t) = \mathbf{u}_1(t, x^{1,k}(t)), \dots, u^{q,k}(t) = \mathbf{u}_q(t, x^{1,k}(t)))^T$ и соответствующими траекториями $x^k(t)$. Следовательно, можно найти приближенное значение функционалов (5) или (6) соответственно:

$$J[\mathbf{u}(t, x^1)] \cong \frac{1}{S} \sum_{k=1}^S I(x_0^k, d^k) \quad (8)$$

или

$$J[\mathbf{u}(t, x^1)] \cong \max_{x_0^k, k=1, \dots, S} I(x_0^k, d^k). \quad (9)$$

II этап. Параметризация закона управления.

Процедуру поиска решения задачи (7) сведем к проблеме поиска наилучших значений параметров, которые задают структуру управления. Управление ищется



в параметрическом виде, который определяется числом коэффициентов в разложении управления по системе базисных функций и их значениями. В качестве базисных функций предлагается использовать полиномы Чебышева. Применение разложений по многочленам Чебышева широко используется в псевдоспектральных методах [7–11].

Предполагается, что известна оценка множества возможных состояний, которая представляется прямым произведением $[x_1, x_1] \times \dots \times [x_n, x_n]$, где x_i, x_i – нижняя и верхняя границы по каждой координате соответственно, определяемые физическим смыслом решаемой задачи.

Закон управления будем искать в виде функции насыщения sat, гарантирующей выполнение параллелепипедных ограничений на управление [6]:

$$u_j(t, x^1) = \text{sat} \left\{ g_j(t, x_1, \dots, x_m) \right\}, \quad j = \overline{1, q}. \quad (9)$$

Здесь

$$\text{sat } v_j(t) = \begin{cases} v_j(t), & a_j < v_j(t) < b_j, \\ a_j, & v_j(t) \leq a_j, \\ b_j, & v_j(t) \geq b_j, \end{cases} \quad (10)$$

где $v_j(t) = g_j(t, x_1(t), \dots, x_m(t))$, а аргументы $g_j(t, x_1, \dots, x_m)$ функции насыщения предлагается искать в виде линейной комбинации базисных функций. Используем систему многочленов Чебышева первого рода $T_m(x)$, ортогональных с весом $\rho(x) = 1/\sqrt{1-x^2}$ на отрезке $[-1, 1]$:

$$T_0(x) = 1, \quad T_1(x) = x, \dots, \quad T_{m+1}(x) = 2xT_m(x) - T_{m-1}(x), \quad m \geq 1. \quad (11)$$

При этом

$$\int_{-1}^1 \frac{T_m(x)T_n(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = \begin{cases} 0, & m \neq n, \\ \pi, & m = n = 0, \\ \frac{\pi}{2}, & m = n \neq 0. \end{cases}$$

Тогда аргументы функции насыщения находятся по формуле

$$g_j(t, x_1, \dots, x_m) = \sum_{i_0=0}^{N_0^j} \sum_{i_1=0}^{N_1^j} \dots \sum_{i_m=0}^{N_m^j} u_{i_0 i_1 \dots i_m}^j T_{i_0}(t) T_{i_1}(x_1) \dots T_{i_m}(x_m) \quad (12)$$

Здесь $u_{i_0 i_1 \dots i_m}^j$ – неизвестные коэффициенты; $N_0^j, N_1^j, \dots, N_m^j$ – масштабы усечения по времени и координатам вектора состояния, используемым в управлении. Решение ищется как расширенная матрица-столбец $U_N = (U_N^1, \dots, U_N^q)^T$ вида

$$U_N^j = \left[\begin{array}{c} \left[\begin{array}{c} N_0^j \\ N_1^j \\ \vdots \\ N_m^j \end{array} \right] \left\| \left[\begin{array}{c} u_{00\dots 0}^j \\ u_{00\dots 1}^j \\ \vdots \\ u_{00\dots(N_m-1)}^j \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} u_{10\dots 0}^j \\ u_{10\dots 1}^j \\ \vdots \\ u_{10\dots(N_m-1)}^j \end{array} \right] \right. \\ \dots \\ \left[\begin{array}{c} u_{(N_0-1)0\dots 0}^j \\ u_{(N_0-1)0\dots 1}^j \\ \vdots \\ u_{(N_0-1)0\dots(N_m-1)}^j \end{array} \right] \\ \dots \\ \left[\begin{array}{c} u_{(N_0-1)(N_1-1)\dots 0}^j \\ u_{(N_0-1)(N_1-1)\dots 1}^j \\ \vdots \\ u_{(N_0-1)(N_1-1)\dots(N_m-1)}^j \end{array} \right] \end{array} \right]^T \quad (13)$$



с ограничениями

$$\begin{aligned} 0 \leq N_i^j \leq N_{\max}^j, \quad N_i^j - \text{целые}; \quad j = \overline{1, q}, \\ a_j \leq u_{i_0, i_1, \dots, i_m}^j \leq b_j, \end{aligned} \quad (14)$$

где значение N_{\max}^j задается исходя из возможных требований к точности решения и лимиту вычислительных затрат, a_j и b_j – параметры ограничений на управление, известные из постановки задачи.

Таким образом, ищется решение на множестве векторов, полученных путем конкатенации векторов, состоящих из коэффициентов разложения для управлений $u_1(t, x^1), \dots, u_q(t, x^1)$ и векторов масштабов усечения по времени и координатам вектора состояния.

Так как полиномы Чебышева рассматриваются на отрезке $[-1, 1]$, то требуется преобразовать отрезки $[t_0, t_f], [x_1, x_1], \dots, [x_n, x_n]$ к стандартному отрезку $[-1, 1]$, применив линейные преобразования:

$$\begin{aligned} t = \frac{t_f - t_0}{2} \tau + \frac{t_f + t_0}{2}, \quad dt = \frac{t_f - t_0}{2} d\tau, \quad \tau \in [-1, 1], \\ x_i = \frac{x_i + \overline{x_i}}{2} + \frac{\overline{x_i} - x_i}{2} \tilde{x}_i; \quad \tilde{x}_i \in [-1, 1], \quad i = \overline{1, n}. \end{aligned}$$

где $\overline{x_i}, x_i$ – нижняя и верхняя границы по каждой координате соответственно.

В результате уравнение (1) и функционал (3) перепишем в следующей форме:

$$\begin{aligned} \dot{x}(\tau) = \frac{t_f - t_0}{2} f(\tau, x(\tau), u(\tau)), \\ I(x_0, d) = \frac{t_f - t_0}{2} \int_{-1}^1 f^0(\tau, x(\tau), u(\tau)) d\tau + F(x(1)). \end{aligned} \quad (15)$$

Рассмотрим частный случай, когда система разомкнута по состоянию ($m = 0$). Следовательно, будем искать программное управление $u(t)$. Тогда для этого случая требуется переписать рассмотренный способ параметризации. Используя многочлены Чебышева, в качестве узлов интерполяции выберем положения экстремумов многочлена Чебышева степени N^j и крайние точки отрезка интерполяции: $t_k = \cos(\pi k / N^j), k = 0, N^j$. На отрезке $[-1, 1]$ они располагаются так: $1 = t_0 > t_1 > \dots > t_{N^j-1} > t_{N^j} = -1$ и называются точками коллокации Чебышева–Гаусса–Лобатто (CGL (Chebyshev–Gauss–Lobatto)).

Поскольку многочлены Чебышева можно записать в форме $T_m(t) = \cos(m \arccos t)$, $m = 0, N^j$, то их значения в узлах найдем в виде

$$T_m(t_k) = \cos(\pi k m / N^j), \quad k = 0, N^j; \quad j = \overline{1, q},$$

В качестве базисной системы $\{\varphi_i(t)\}_{i=0}^{N^j}$ (рис. 1) предлагается использовать [11]:

$$\varphi_i(t) = \frac{(-1)^{i+1} (1-t^2) T'_{N^j}(t)}{(N^j)^2 c_i (t-t_i)}, \quad i = 0, N^j; \quad c_i = \begin{cases} 2, & i = 0, i = N^j, \\ 1, & i = 1, N^j - 1. \end{cases}$$



Тогда закон управления запишем в виде

$$u_j^{N^j}(t) = \sum_{i=0}^{N^j} u_i^j \varphi_i(t), j = \overline{1, q}, \quad (16)$$

где u_i^j – неизвестные величины.

При этом в узлах выполняются соотношения $\varphi_i(t_k) = \delta_{ik}$, $u_j^{N^j}(t_k) = u_k^j$, где δ_{ik} – символ Кронекера. На коэффициенты разложения накладываются ограничения, следующие из постановки задачи: $a_j \leq u_k^j \leq b_j, k = 0, N^j; j = \overline{1, q}$.

В задаче требуется найти координаты расширенного вектора

$$(N^1, \dots, N^q | u_0^1, \dots, u_{N^1}^1, \dots, u_0^q, \dots, u_{N^q}^q)^T, \quad (17)$$

содержащего блок целочисленных переменных $N = (N^1, \dots, N^q)^T$ и блок действительных переменных $C = (u_0^1, \dots, u_{N^1}^1, \dots, u_0^q, \dots, u_{N^q}^q)^T$, на которые накладываются ограничения вида (14).

Таким образом, предлагается искать значения координат блочных расширенных векторов (17), содержащих блок целочисленных переменных и блок действительных переменных, на которые наложены интервальные ограничения.

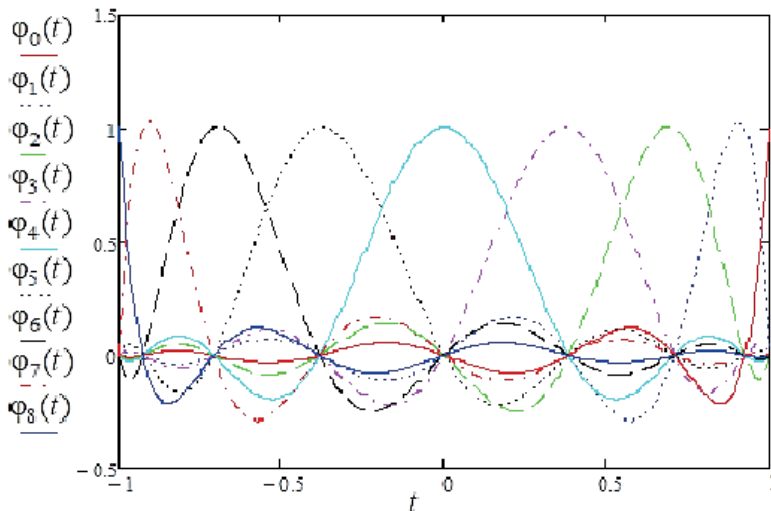


Рис. 1. Графики системы базисных функций для многочлена Чебышева 8-й степени

4. ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ АЛГОРИТМ

Описанный способ параметризации управления приводит к необходимости решения смешанной целочисленно-непрерывной задачи условной оптимизации:

$$f(N^*, C^*) = \min_{N \in N, C \in C} f(N, C), \quad (18)$$

где $N = \{N | N^j \in \{0, \overline{N_{\max}}\}, j = \overline{1, q}\}$, $C = \{C | u_i^j \in [a_j, b_j], a_j \leq b_j, j = \overline{1, q}, i = \overline{0, N^j}\}$.

Для ее решения используются гибридные метаэвристические алгоритмы, относящиеся к группе мультиагентных. Они хорошо зарекомендовали себя при решении задач оптимизации типовых тестовых функций и параметров технических систем [19], а также в задачах поиска оптимального программного управления [18; 20].

Поскольку вектор подбираемых параметров содержит как целочисленные, так и непрерывные координаты, то формируется алгоритм, реализующий два вида поиска: процедуру целочисленного линейного поиска для целочисленных переменных и процедуру поиска по непрерывным переменным, основанную на мультиагентных алгоритмах условной оптимизации. В связи с этим, предлагается последовательная схема решения, включающая описанные ниже шаги.

Шаг 1. Привести исходную постановку задачи к требуемому виду: отрезок $[t_0, t_f]$ привести к стандартному отрезку $[-1, 1]$ по формуле

$$t = \frac{t_f - t_0}{2} \tau + \frac{t_f + t_0}{2}, \quad dt = \frac{t_f - t_0}{2} d\tau, \quad \tau \in [-1, 1].$$

Тогда модель объекта управления будет иметь вид

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \frac{\tau_f - \tau_0}{2} f(t, x(t), u(t)), \quad x(-1) = x_0, \\ I(d) &= \frac{\tau_f - \tau_0}{2} \int_{-1}^1 f^0(t, x(t), u(t)) dt + F(x(1), \tau_f). \end{aligned}$$

Задать параметры выбранного мультиагентного алгоритма и максимальную степень многочлена Чебышева N_{\max} . Положить счетчик числа итерации $it = 0$.

Шаг 2. Генерирование начального приближения.

Для целочисленных переменных:

$$N^j = \text{INT}[\text{rand}[0, 1] (N_{\max} + 1)], \quad 0 \leq N^j \leq N_{\max}, \quad j = \overline{1, q},$$

где $\text{rand}[0, 1]$ – число, генерируемое согласно равномерному закону распределения, $\text{INT}[\cdot]$ – операция выделения целой части числа.

Для непрерывных переменных требуется сгенерировать начальную популяцию, состоящую из NP агентов на интервале $[a_j, b_j]$. Каждый агент соответствует коэффициентам u_0^j в разложении (16):

$$u_i^j = a_j + \text{rand}[0, 1](b_j - a_j), \quad j = \overline{1, q},$$

Шаг 3. Реализация процедуры поиска на множестве N по целочисленным переменным при известных значениях координат вектора C . Применяется процедура целочисленного линейного поиска для решения непрерывных задач оптимизации. При этом значения координат вектора C в блочном векторе (N, C) считаются фиксированными.



Шаг 3.1. Упорядочить координаты N , случайным образом. Положить $New = false$ – индикатор наличия улучшения, $j = 1$.

Шаг 3.2. Пусть на j -м месте стоит i -я переменная. «Просканировать» множество решений вида $z = N + ke_i, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, 0 \leq N \leq N_{\max}$, где e_i – единичный орт, составленный из всех нулей и одной единицы на i -м месте; знак неравенства понимается покоординатно.

Шаг 3.3. Если среди полученных в результате сканирования решений имеется наилучшее, удовлетворяющее условию $f(z, C) < f(N, C)$, то заменить N на z и положить $New = true$.

Действия, описанные на Шаге 3.2 и 3.3, назовем проходом (положим, что число проходов не превосходит максимального числа итераций $ITER$).

Шаг 4. Реализация процедуры поиска на множестве C по непрерывным переменным при фиксированных координатах вектора N .

Шаг 4.1. Разбить отрезок $[t_0, t_f]$: $t_0 = 1, t_1, \dots, t_{N^j-1}, t_{N^j} = -1$, где $t_k = \cos \frac{\pi k}{N^j}, k = 0, 1, \dots, N^j$, где N^j – количество промежуточных точек отрезка известно из Шага 3.

Шаг 4.2. По сгенерированным коэффициентам (см. Шаг 2) сформировать управление в виде функции насыщения sat , гарантирующей выполнение ограничений на управление:

$$u_i^{N^j}(t) = \text{sat} \{g_j(t)\}, j \in \overline{1, q},$$

$$g_j(t) = \sum_{i=0}^{N^j} u_i^j \varphi_i(t), u_j^{N^j}(t_k) = u_k^j.$$

В качестве базисной системы функций $\{\varphi_i(t)\}_{i=0}^{N^j}$ рассматриваются многочлены Чебышева. Базисная система имеет следующие свойства:

– внутри интервала:

$$\varphi_i(t) = \frac{(-1)^{i+1} (1-t^2) T_{N^j}'(t)}{(N^j)^2 c_i (t-t_i)}, i = 0, 1, \dots, N^j; \quad c_i = \begin{cases} 2, & i = 0, i = N^j, \\ 1, & i = 1, \dots, N^j - 1, \end{cases}$$

где $T_0(x) = 1, T_1(x) = x, T_{m+1}(x) = 2xT_m(x) - T_{m-1}(x), m \geq 1$;

– в узлах:

$$\varphi_i(t_k) = \delta_{ik} = \begin{cases} 1, & i = k, \\ 0, & i \neq k. \end{cases}$$

Шаг 4.3. Проинтегрировать NP систем дифференциальных уравнений (см. Шаг 1) с управлениями $u^1(t), \dots, u^{NP}(t)$, например, методом Рунге-Кутты 4-го порядка для каждого начального состояния x_0^k из множества Ω . Для каждого агента и для каждого начального состояния получить соответствующие траектории $(x_{1,x_0^k}^1(\cdot), \dots, x_{1,x_0^k}^{NP}(\cdot)), \dots, (x_{n,x_0^k}^1(\cdot), \dots, x_{n,x_0^k}^{NP}(\cdot))$ и вычислить значения функционала $I^{1,x_0^k}, \dots, I^{NP,x_0^k}$. Найти среднее значение критерия качества управления пучком по формуле (8) (или соответствующее гарантирующему управлению по формуле (9)).



Шаг 4.4. Выполнить очередную итерацию выбранного метода минимизации функционала (8) (или (9)). Получить новые положения агентов $1', \dots, NP'$ (векторы значений коэффициентов разложения по системе базисных функций).

Шаг 4.5. *Проверка критериев окончания поиска.*

Если $it < ITER$ и достигнуто максимально число проходов, завершить процедуру целочисленного линейного поиска и фиксировать найденные значения координат вектора N . Перейти к шагу 4.2.

Если $it < ITER$ и не достигнуто максимально число проходов, то перейти к шагу 3.1.

Если $it \geq ITER$, завершить процедуру поиска значений непрерывных переменных и перейти к Шагу 5.

Шаг 5. *Завершение поиска.* На последней итерации выбирается лучший агент, т.е. вектор C с координатами u_i^j , а также соответствующие ему управление и пучок траекторий, а также значение J функционала (8) (или (9)) принимаются за приближенное решение задачи с найденными коэффициентами $u_i^j, i \in 0, N^j$ и значениями координат вектора N .

5. МОДЕЛЬНЫЕ ПРИМЕРЫ

Пример 1. Исходная постановка задачи [24], приведенная в табл. 1, приводится к виду, удобному для применения описанного псевдоспектрального алгоритма с использованием полиномов Чебышева. Формула преобразования времени ($t_0 = 0, t_f = 1$):

$$t = \frac{t_f - t_0}{2} \tau + \frac{t_f + t_0}{2} = \frac{1}{2} \tau + \frac{1}{2}, \quad dt = \frac{t_f - t_0}{2} d\tau = \frac{1}{2} d\tau, \quad \tau \in [-1; 1].$$

Тогда отрезок времени будет иметь вид $t \in [-1; 1]$, а система дифференциальных уравнений переписывается в форме

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \frac{1}{2}(x_2 + \sin x_1 + u), \\ \dot{x}_2 = \frac{1}{2}(x_1 \cos x_2 u). \end{cases}$$

Таблица 1

Постановка задачи

Размерность вектора состояния	$n = 2$
Временной интервал	$t \in [0; 1]$
Ограничения на управление	$-1 \leq u \leq 1$
Система дифференциальных уравнений	$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + \sin x_1 + u \\ \dot{x}_2 = x_1 \cos x_2 u \end{cases}$
Функционал (3)	$I(x_0, d) = x_2(1)$



Значения параметров гибридного алгоритма интерполяционного поиска: $NP = 30$, $I_{\max} = 100$, $M_1 = 5$, $M_2 = 2$, $PRT = 0,9$, $nstep = 10$, $b_2 = 20$, и метода, основанного на применении линейных регуляторов управления движением агентов: $NP = 13$, $NMAX = 100$, $P_{\max} = 20$, $k_s = 100$, $k_l = 5$, $h = 0,0001$. Множество начальных состояний $\Omega = [-0,05; 0,05] \times [-0,05; 0,05]$, $S_1 = S_2 = 5$.

В табл. 2 приведено численное решение задачи двумя мультиагентными алгоритмами и подсчитано среднее значение критерия, а в табл. 3 – значение критерия для гарантирующего управления. Исходя из полученных результатов, можно сделать вывод о том, что оба алгоритма успешно справились с поставленной задачей, но гибридный мультиагентный алгоритм интерполяционного поиска уступает мультиагентному алгоритму, основанному на применении линейных регуляторов управления движением агентов, в смысле значения функционала, однако при этом было затрачено больше ресурсов на вычисления.

Таблица 2

Пример 1. Результаты решения

Результаты (оптимальное в среднем управление)	Гибридный мультиагентный алгоритм интерполяционного поиска	Мультиагентный алгоритм, основанный на применении линейных регуляторов управления движением агентов
Количество узлов	$N = 10$	$N = 12$
Отрезки значений координат $x_1(1), x_2(1)$	$[0,2596; 0,6102]$, $[-0,1761; -0,0911]$	$[0,2603; 0,6109]$, $[-0,1767; -0,0917]$
Вектор коэффициентов в разложении (16)	$-1,2; -1,2; -1,2; -1,2;$ $-1,2; 1,2; 1,2; 1,2; 1,2; 1,2$	$-1,2; -1,2; -1,2; -1,2; -1,2; -1,2; 1,2;$ $1,2; 1,2; 1,2; 1,2; 1,2$
Значение функционала (8)	$-0,133572$	$-0,134232$
Затраченное время процессора	106 секунд	152 секунд

Таблица 3

Пример 1. Результаты решения

Результаты (гарантирующее управление)	Гибридный мультиагентный алгоритм интерполяционного поиска	Мультиагентный алгоритм, основанный на применении линейных регуляторов управления движением агентов
Количество узлов	$N = 10$	$N = 12$
Отрезки значений координат $x_1(1), x_2(1)$	$[0,2919; 0,6426]$, $[-0,1748; -0,0915]$	$[0,2603; 0,6109]$, $[-0,17617 -0,0917]$
Вектор коэффициентов в разложении (16)	$-1,2; -1,2; -1,2; -1,2;$ $-0,993; 1,2; 1,2; 1,2; 1,2; 1,2$	$-1,2; -1,2; -1,2; -1,2; -1,2; -1,2; 1,2;$ $1,2; 1,2; 1,2; 1,2; 1,2$
Значение функционала (9)	$-0,091459$	$-0,091749$
Затраченное время процессора	120 секунд	285 секунд



На рис. 2 изображены найденные пучки траекторий и управление для случая поиска среднего значения функционала (3) мультиагентным алгоритмом, основанным на применении линейных регуляторов управления движением агентов.

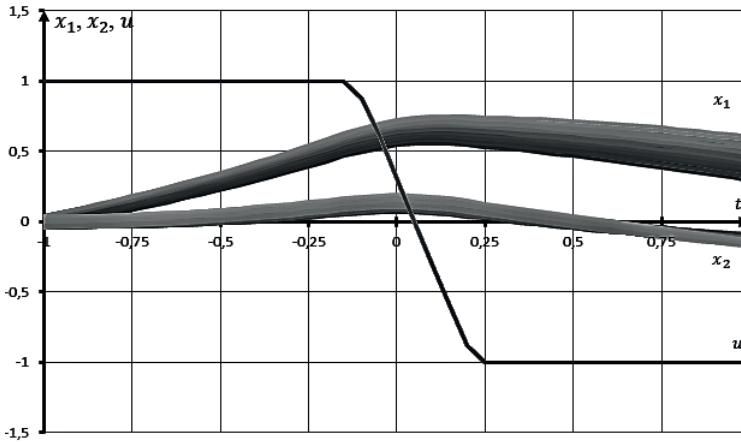


Рис. 2. Графики пучков траекторий и управления. Пример 1

Результаты, приведенные в таблице 2 и 3, сравнивались с известным решением, полученным при известном фиксированном начальном состоянии [24]: координаты вектора состояния в конце времени функционирования системы $x_1(1) = 0,440804$; $x_2(1) = -0,13593$, значение функционала (3): $-0,13599$. Также в [18] получены результаты решения рассматриваемой задачи в условиях неопределенности начального состояния системы. Минимизировалось среднее значение функционала (3) и искалось оптимальное в среднем управление гибридным мультиагентным алгоритмом интерполяционного поиска, с использованием спектрального разложения по системе нестационарных косинусоид. Получены следующие результаты: $x_1(1) \in [0,2667; 0,6172]$; $x_2(1) \in [-0,176; -0,0914]$, среднее значение функционала (3): $-0,1337$.

Пример 2. Исходная постановка задачи [24], приведенная в табл. 4, приводится к виду, удобному для применения описанного псевдоспектрального алгоритма с использованием полиномов Чебышева. Формула преобразования времени ($t_0 = 0, t_f = 1.6$):

$$t = \frac{t_f - t_0}{2} \tau + \frac{t_f + t_0}{2} = \frac{4}{5} \tau + \frac{4}{5}, \quad dt = \frac{t_f - t_0}{2} d\tau = \frac{4}{5} d\tau, \quad \tau \in [-1; 1].$$

Таблица 4

Постановка задачи

Размерность вектора состояния	$n = 2$
Временной интервал	$t \in [0; 1,6]$
Ограничения на управление	$-2 \leq u \leq 1$



Система дифференциальных уравнений	$\begin{cases} \dot{x}_1 = \frac{1}{\cos x_1 + 2} + 3 \sin x_2 + u \\ \dot{x}_2 = x_1 + x_2 + u \end{cases}$
Функционал (3)	$I(x_0, d) = -x_1(1, 6) + \frac{1}{2} x_2(1, 6)$

Тогда будет справедливо, что $t \in [-1; 1]$, а система дифференциальных уравнений переписывается в виде

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \frac{4}{5} \left(\frac{1}{\cos x_1 + 2} + 3 \sin x_2 + u \right), \\ \dot{x}_2 = \frac{4}{5} (x_1 + x_2 + u). \end{cases}$$

Значения параметров гибридного алгоритма интерполяционного поиска: $NP = 30$, $I_{\max} = 100$, $M_1 = 5$, $M_2 = 2$, $PRT = 0,9$, $nstep = 10$, $b_2 = 20$, метода, основанного на применении линейных регуляторов управления движением агентов: $NP = 13$, $NMAX = 100$, $P_{\max} = 10$, $k_s = 100$, $k_l = 5$, $h = 0,0001$. Множество начальных состояний $\Omega = [0,95; 1,05] \times [-0,05; 0,05]$, $S_1 = S_2 = 5$.

Таблица 5

Пример 2. Результаты решения

Результаты (оптимальное в среднем управление)	Гибридный мультиагентный алгоритм интерполяционного поиска	Мультиагентный алгоритм, основанный на применении линейных регуляторов управления движением агентов
Количество узлов	$N = 13$	$N = 12$
Отрезки значений координат $x_1(1), x_2(1)$	[3,4351;3,5566], [12,4475;13,3215]	[3,3571;3,4392], [12,2323;13,1006]
Вектор коэффициентов в разложении (16)	-2,2; -2,2; -2,2; -2,2; 0,49; 1,1; 1,1; 1,1; 1,1; 1,1; 1,1; 1,1; 1,1	-2,2; -2,2; -2,2; -2,2; 1,1; 1,1; 1,1; 1,1; 1,1; 1,1; 1,1; 1,1
Значение функционала (8)	-2,961588	-2,946605
Затраченное время процессора	564 секунд	187 секунд

Таблица 6

Пример 2. Результаты решения

Результаты (гарантирующее управление)	Гибридный мультиагентный алгоритм интерполяционного поиска	Мультиагентный алгоритм, основанный на применении линейных регуляторов управления движением агентов
Количество узлов	$N = 12$	$N = 10$
Отрезки значений координат $x_1(1), x_2(1)$	[3,4963;3,6461], [12,5654;13,4434]	[3,5253;3,6854], [12,6057;13,4832]



Результаты (гарантирующее управление)	Гибридный мультиагентный алгоритм интерполяционного поиска	Мультиагентный алгоритм, основанный на применении линейных регуляторов управления движением агентов
Вектор коэффициентов в разложении (16)	-2,2; -2,2; -2,2; -1,06; 1,1; 1,1; 1,1; 1,1; 1,1; 1,1; 1,1; 1,1	-2,2; -2,2; -2,2; 1,1; 1,1; 1,1; 1,1; 1,1; 1,1; 1,1
Значение функционала (9)	-2,786368	-2,777532
Затраченное время процессора	168 секунд	25 секунд

Решение задачи при поиске оптимального в среднем и гарантирующего управлений представлено в табл. 5 и 6 соответственно. Указано найденное наилучшее количество точек коллокации и значения коэффициентов в управлении. Вычисления проводятся с использованием двух мультиагентных алгоритмов. Исходя из полученных результатов, видно, что при использовании гибридного мультиагентного алгоритма интерполяционного поиска значение функционала было минимальным, по сравнению с другим мультиагентным алгоритмом, но при этом было затрачено большее время процессора. На рис. 3 приведены графики пучков траекторий и график управления. При анализе численных и графических результатов, можно сказать, что оба алгоритма успешно справились с поставленной задачей.

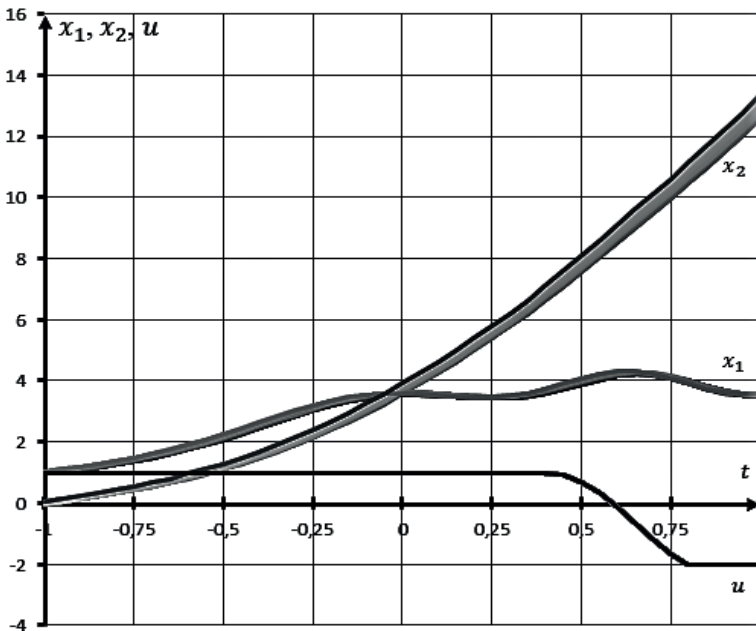


Рис. 3. Графики пучков траекторий и управления. Пример 2

Результат сравнивался с решением, полученным при известном фиксированном начальном состоянии, которое приводится в [24]: координаты вектора состояния



в конце времени функционирования системы $x_1(1, 6) = 3,46114$; $x_2(1, 6) = 12,884$, значение функционала (3): $-2,98086$. В [18] получены результаты решения рассматриваемой задачи в условиях неопределенности задания начального состояния системы. Минимизировалось среднее значение функционала и искалось оптимальное в среднем управление гибридным мультиагентным алгоритмом интерполяционного поиска, с использованием спектрального разложения по системе нестационарных косинусоид. Были получены следующие результаты: $x_1(1) \in [3,3645; 3,4519]$; $x_2(1) \in [12,2765; 13,1466]$, среднее значение функционала (3): $-2,96042$.

Исходя из приведенных данных для двух модельных примеров, можно заключить, что предложенный подход с использованием полиномов Чебышева показал результаты чуть лучше, чем метод, основанный на спектральном разложении по системе нестационарных косинусоид [18].

6. ПРИКЛАДНАЯ ЗАДАЧА

6.1. Постановка задачи

Рассматривается задача гашения вращательного движения спутника с помощью установленных на нем двигателей [25]. Движение твердого тела относительно центра инерции после перехода к безразмерным переменным, имеет вид:

$$\begin{aligned} \dot{p}(t) &= u_1/6, \\ \dot{q}(t) &= u_2 - 0,2rp, \\ \dot{r}(t) &= 0,2(u_3 + pq), \end{aligned} \quad (19)$$

где p, q, r – проекции угловой скорости на главные центральные оси инерции, а u_1, u_2, u_3 – управления, которые характеризуют тяги двигателей, расположенных на спутнике. Ограничение на управление: $U = [-200, 200] \times [-200, 200] \times [-200, 200]$. Начальное состояние системы $t_0 = 0$ задано множеством начальных состояний: $\Omega = [23.85; 24.15] \times [15.85; 16.15] \times [15.85; 16.15]$. В момент окончания функционирования системы $t_1 = 1$ должны выполняться условия: $p(t_1) = q(t_1) = r(t_1) = 0$.

Функционал качества управления характеризует затраты топлива при работе реактивных двигателей и степень выполнения конечных условий:

$$I_1(x_0, d) = \underbrace{\int_{t_0}^{t_1} [|u_1(t)| + |u_2(t)| + |u_3(t)|] dt}_{I(x_0, d)} + R_1 p(t_1)^2 + R_2 q(t_1)^2 + R_3 r(t_1)^2, \quad (20)$$

где R_i – параметры штрафа. Для удобства численной реализации преобразуем задачу Больца (20) к задаче Майера с помощью введения дополнительного дифференциального уравнения:

$$\begin{aligned} \dot{s}(t) &= |u_1(t)| + |u_2(t)| + |u_3(t)|, \quad s(t_0) = 0, \\ I_1(x_0, d) &= s(t_1) + R_1 p(t_1)^2 + R_2 q(t_1)^2 + R_3 r(t_1)^2. \end{aligned} \quad (21)$$



Требуется найти оптимальное в среднем программное управление и соответствующий ему пучок траекторий, минимизирующие среднее значение функционала (20) на множестве начальных условий Ω .

6.2. Решение задачи

В связи с тем, что поставленная задача будет решена описанным выше алгоритмом поиска оптимального программного управления пучками траекторий на основе псевдоспектрального метода, требуется привести исходную постановку задачи к виду, требуемому на Шаге 1. Формула преобразования времени ($t_0 = 0, t_f = 1$):

$$t = \frac{t_f - t_0}{2} \tau + \frac{t_f + t_0}{2} = \frac{1}{2} \tau + \frac{1}{2}, \quad dt = \frac{t_f - t_0}{2} d\tau = \frac{1}{2} d\tau, \quad \tau \in [-1, 1],$$

тогда модель объекта управления переписывается следующим образом:

$$\begin{aligned} \dot{p}(t) &= u_1/12, \\ \dot{q}(t) &= 0,5(u_2 - 0,2rp), \\ \dot{r}(t) &= 0,1(u_3 + pq), \end{aligned}$$

а начальный и конечный момент функционирования системы: $t_0 = -1, t_1 = 1$.

Зададим параметры гибридного мультиагентного алгоритма интерполяционного поиска: $NP = 40, I_{\max} = 100, M_1 = 8, M_2 = 1, PRTVector = 10, nstep = 5, b_2 = 20$, и метода, основанного на применении линейных регуляторов управления движением агентов: $NP = 101, NMAX = 50, P_{\max} = 10, k_s = 0,1, k_l = 5, h = 0,0001$. Множество начальных состояний $\Omega = [23.85; 24.15] \times [15.85; 16.15] \times [15.85; 16.15]$, $S_1 = S_2 = S_3 = 2$.

Таблица 7

Решение прикладной задачи

Алгоритм	Отрезки значений координат $(p(t_1), q(t_1), r(t_1))$	Количество коэффициентов в разложении для $u_1(t), u_2(t), u_3(t)$	Векторы коэффициентов разложения для $u_1(t), u_2(t), u_3(t)$	Значение функционала J
Гибридный мультиагентный алгоритм интерполяционного поиска	$[-0,0723; 0,0777],$ $[-0,156; 0,1659],$ $[-0,4662; 0,1472]$	$L_0^{u_1} = 2$ $L_0^{u_2} = 3$ $L_0^{u_3} = 2$	$(-159,59;$ $-128,38),$ $(17,69; 33,17;$ $-54,73),$ $(0,007; 0,0005)$	181,300499
Мультиагентный алгоритм, основанный на применении линейных регуляторов управления движением агентов	$[-0,1378; 0,0122],$ $[-0,3415; -0,0472],$ $[-0,5527; 0,1354]$	$L_0^{u_1} = 2$ $L_0^{u_2} = 4$ $L_0^{u_3} = 2$	$(-149,4638;$ $-139,2899),$ $(18,3174; 50,594;$ $-10,4979;$ $-11,2656),$ $(-0,01; -0,01)$	183,712969

В табл. 7 приведены численные результаты, полученные двумя мультиагентными алгоритмами. Наилучшие результаты (минимальное значение функционала) получены



при использовании гибридного мультиагентного алгоритма интерполяционного поиска. Для этого случая изображены графики пучков траекторий на рис. 4, а графики управления на рис. 5. Также найден вектор коэффициентов в разложении (16) для управлений $u_1(t)$, $u_2(t)$, $u_3(t)$.

В ходе решения задачи были получены данные о вычислительных затратах (времени решения задачи). Использовался процессор 11th Gen Intel(R) Core(TM) i7–1165G7 с частотой 2.80GHz. При решении гибридным мультиагентным алгоритмом интерполяционного поиска на выполнение задачи было затрачено 686 секунд, а методом, основанном на применении линейных регуляторов управления движением агентов, 895 секунд.

Численный результат сравнивался с решением, полученным с помощью мультиагентного метода, имитирующего поведение стаи криля [21], с параметрами: $NP = 40$, $I_{\max} = 300$, $\mu = 0,05$, $N_{\max} = 0,005$, $V_f = 0,001$, $D_{\max} = 0,0005$. Результат решения задачи этим алгоритмом при заданных параметрах приведен в табл. 8.

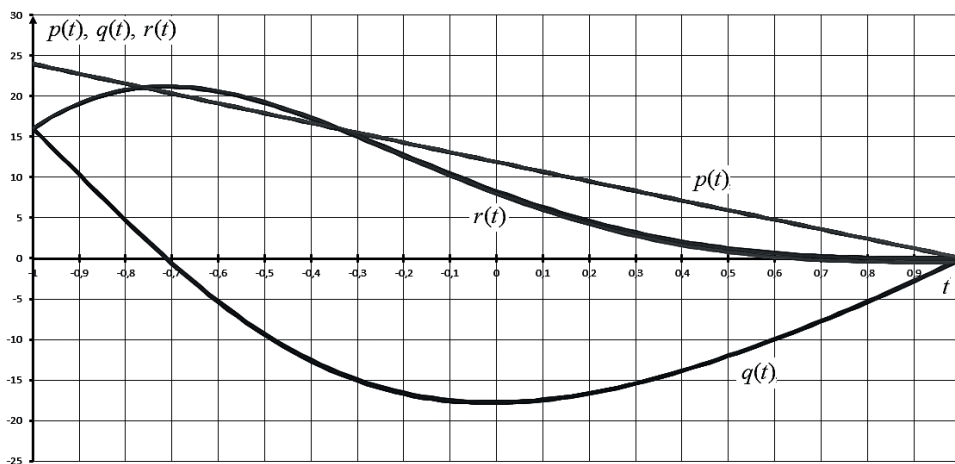


Рис. 4. Задача о стабилизации спутника. Графики пучков траекторий

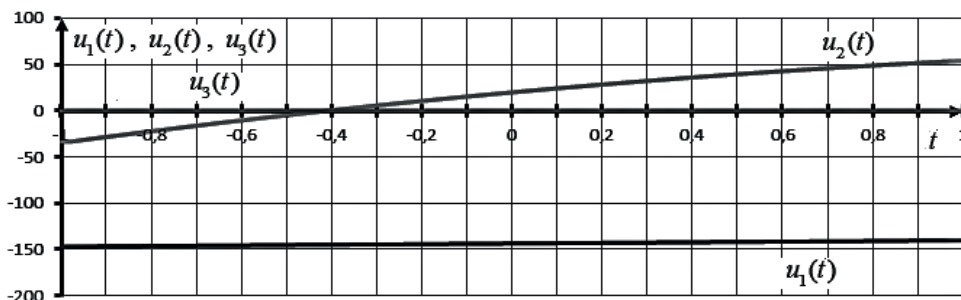


Рис. 5. Задача о стабилизации спутника. Программное управление



Таблица 8

Решение прикладной задачи

Алгоритм	Отрезки значений координат $(p(t_1), q(t_1), r(t_1))$	Количество коэффициентов в разложении для $u_1(t), u_2(t), u_3(t)$	Коэффициенты разложения для $u_1(t), u_2(t), u_3(t)$	Значение функционала J
Метод, имитирующий поведение стаи криля	$[0,025;0,175]$, $[-0,2545;0,0499]$, $[-0,5998;0,0779]$	$L_0^{u_1} = 2$ $L_0^{u_2} = 3$ $L_0^{u_3} = 2$	$(-157,4442;$ $-129,3557)$, $(48,7378; 23,3138;$ $-30,414)$, $(0,0006; 0,0028)$	180,346631

7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Использован прямой подход для решения задачи оптимального программного управления пучками траекторий. Сформирован алгоритм поиска оптимального управления непрерывными детерминированными системами в условиях неопределенности, который базируется на применении псевдоспектрального алгоритма с использованием полиномов Чебышева и мультиагентных алгоритмов условной оптимизации. В частности, в статье рассмотрены два мультиагентных алгоритма: гибридный мультиагентный алгоритм интерполяционного поиска и метод, основанный на использовании линейных регуляторов управления движением агентов. На основе этих алгоритмов разработано программное обеспечение, с использованием которого продемонстрирована эффективность данного подхода на модельных примерах, а также на прикладной задаче о стабилизации спутника. Результаты прикладной задачи сравнивались с решением, полученным мультиагентным методом, имитирующим поведение стаи криля, а результаты модельных примеров – со спектральным мультиагентным алгоритмом, использующим разложение по системе нестационарных косинусоид. Разработанный алгоритм может быть применен в различных областях, таких как гидравлика, электротехника, а также областях, связанных с поиском управления авиационно-космическими системами, например в задаче о планирующем спуске летательного аппарата, задаче о перехвате, задаче об управлении солнечным парусом и др.

Литература

1. Куржанский А.Б. Управление и наблюдение в условиях неопределенности. М.: Изд-во Наука, 1977. 392 с.
2. Овсянников Д.А., Мизинцева М.А., Балабанов М.Ю., Дуркин А.П., Едаменко Н.С., Коми-на Е.Д., Овсянников А.Д. Оптимизация динамики пучков траекторий с использованием гладких и негладких функционалов // Ч.1. Вестн. СПбГУ. Сер.10. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2020. Т. 16. № 1. С. 73–84.
3. Henrion D., Korda M. Convex Computation of the Region of Attraction of Polynomial Control Systems // European Control Conf, (ECC). Zurich, 2013. P. 676–681.
4. Deng H., Zhang W., Shen C. Stability Analysis of Optimal Trajectory for Nonlinear Optimal Control Problems // Journal of Mathematics. 2020. P.1–5. doi:10.1155/2020/1392705.



5. Бортакoвский А.С. Оптимальное и субоптимальное управления пучками траекторий детерминированных систем автоматного типа // Изв. РАН. ТиСУ. 2016. № 1. С. 5–26.
6. Пантелеев А.В. Метаэвристические алгоритмы оптимизации законов управления динамическими системами. М.: Изд-во Факториал, 2020. 564 с.
7. Афанасьев В.Н., Фролова Н.А. Дифференциальная игра в задаче управления нелинейным объектом с ограничениями на управляющие воздействия // Труды Института системного анализа РАН. 2020. Т. 70. № 3. С. 56–64. doi:10.14357/20790279200307
8. Liu M., Zhao J., Hoogendoorn S., Wang M. An optimal control approach of integrating traffic signals and cooperative vehicle trajectories at intersections // *Transportmetrica B: Transport Dynamics*. 2021. No. 10. P.1–17. doi:10.1080/21680566.2021.1991505.
9. Rybakov K.A. Applying Spectral Form of Mathematical Description for Representation of Iterated Stochastic Integrals // *Differencialnie Uravnenia i Protsesty Upravleniya*. 2019. No. 4. P. 1–31.
10. Косников Ю.Н. Особенности применения радиальных базисных функций в геометрическом моделировании трехмерных объектов визуализации // *Модели, системы, сети в экономике, технике, природе и обществе*. 2020. № 4.
11. Garg D., Patterson M., Hager W., Rao A., Benson D. An overview of three pseudospectral methods for the numerical solution of optimal control problems // *Advances in the Astronautical Sciences*. 2017. V.135, P. 1–17.
12. Tang X., Hu Z.L. New results on pseudospectral methods for optimal control // *Automatica*. Vol.65. 2016. P.160–163. doi:10.1016/j.automatica.2015.11.035
13. Mehrpouya M.A., Peng H. A robust pseudospectral method for numerical solution of nonlinear optimal control problems // *International Journal of Computer Mathematics*. 2021, no.98(6), P.1146–1165, doi: 10.1080/00207160.2020.1807521
14. Hager W.W., Liu J., Mohapatra S., Rao A.V., Wang X. -S. A pseudospectral method for optimal control based on collocation at the Gauss points // *IEEE Conference on Decision and Control (CDC)*. 2018, P. 2490–2495, doi: 10.1109/CDC.2018.8618929.
15. Li Y., Chen W., Yang L. Linear Pseudospectral Method with Chebyshev Collocation for Optimal Control Problems with Unspecified Terminal Time // *Aerospace 2022*, no. 9. doi:10.3390/aerospace9080458
16. Gendreau M., Potvin J-Y. *Handbook of Metaheuristic*. N.Y.: Springer, 2019. 604 p.
17. Panteleev A., Karane M. Application of Multi-agent Optimization Methods Based on the Use of Linear Regulators and Interpolation Search for a Single Class of Optimal Deterministic Control Systems // *Applied Mathematics and Computational Mechanics for Smart Applications*. Singapore: Springer, 2021. P. 217–244
18. Panteleev A., Karane M. Multi-agent Optimization Algorithms for a Single Class of Optimal Deterministic Control Systems // *Advances in Theory and Practice of Computational Mechanics*. Singapore: Springer, 2020. pp. 271–291
19. Karane M., Panteleev A. Benchmark Analysis of Novel Multi-agent Optimization Algorithm Using Linear Regulators for Agents Motion Control // *IOP Conf. Series: Materials Science and Engineering*. Alushta, 2020. doi:10.1088/1757-899X/927/1/012023
20. Wang D., Tan D., Liu L. Particle swarm optimization algorithm: an overview // *Soft Computing*, 2018, 22(2), P. 387–408. doi:10.1007/s00500-016-2474-6.
21. Wang G., Gandomi A., Alavi A., Gong D. A comprehensive review of krill herd algorithm: variants, hybrids and applications // *Artificial Intelligence Review*. 2019, no. 51, P. 119–148. doi:10.1007/s10462-017-9559-1.
22. Davendra D., Zelinka I. *Self-Organizing Migrating Algorithm. Methodology and Implementation*. Studies in Computational Intelligence. Springer 2016. 626 p.



23. *Финкельштейн Е.А.* Вычислительные технологии аппроксимации множества достижимости управляемой системы: Автореф. дисс. ... канд. техн. наук. Иркутск, 2018. 19 с.
24. *Крылов И.А.* Численное решение задачи об оптимальной стабилизации спутника // ЖВМ и МФ. 1968. Т.8. № 1. С. 203–208.
25. *Karane, M.M., Panteleev, A.V.* Multiagent Algorithms for Optimizing Bundles of Trajectories of Deterministic Systems with Incomplete Instant Feedback // J. Comput. Syst. Sci. Int. 61. 2022. P. 751–775. doi:10.1134/S1064230722050082



Pseudospectral Method for Finding Optimal Control of Trajectory Bundles Based on Multi-Agent Optimization Algorithms

*Mariia Magdalina S. Karane**

Moscow Aviation Institute (National Research University) (MAI), Moscow, Russia

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-8019-8613>

e-mail: mm_karane@mail.ru

A class of problems of optimal control of nonlinear continuous deterministic systems under conditions of uncertainty is considered. To solve the problem, a numerical algorithm for finding the optimal control is formed, in which the parameterization of the control law is used, which depends on time and a set of coordinates of the state vector available for measurement. This approach is based on the approximation of the control law by a series using a system of basis functions with unknown coefficients. The search for unknown coefficients in the expansion of the control law is implemented using multi-agent optimization methods: a hybrid multi-agent interpolation search algorithm and a multi-agent algorithm based on the use of linear controllers for controlling the movement of agents. A software has been developed and two model examples and an applied problem of stabilizing a satellite with the help of engines installed on it have been solved.

Keywords: optimal control, multi-agent optimization algorithms, trajectory bundle, Chebyshev polynomials, pseudospectral method.

For citation:

Karane M.M.S. Pseudospectral Method for Finding Optimal Control of Trajectory Bundles Based on Multi-agent Optimization Algorithms. *Modelirovanie i analiz dannykh = Modeling and Data Analysis*, 2023. Vol. 13, no. 2, pp. 99–122. DOI: 10.17759/mda.2023130206 (In Russ., abstr. in Engl.).

References

1. Kurzhanskii A.B. Upravlenie i nablyudenie v usloviyakh neopredelennosti [Control and observation in conditions of uncertainty]. Moscow: Publ. Nauka, 1977. 392 p.
2. Ovsyannikov D.A., Mizintseva M.A., Balabanov M.Yu., Durkin A.P., Edamenko N.S., Kotina E.D., Ovsyannikov A.D. Optimizatsiya dinamiki puchkov traektorii c ispol'zovaniem gladkikh i negladkikh funktsionalov [Optimization of dynamics of bundles of trajectories using smooth and non-smooth functionals]. *Ch.1. Vestn. SPbGU. Ser.10. Prikladnaya matematika. Informatika. Protsessy upravleniya = Part 1. Bulletin of St. Petersburg State University. Series 10. Applied Mathematics. Computer science. Control processes*, 2020. Vol.16. no.1. P. 73–84. (In Russ.)
3. Henrion D., Korda M. Convex Computation of the Region of Attraction of Polynomial Control Systems // European Control Conf, (ECC). Zurich, 2013. P. 676–681.

**Mariia Magdalina S. Karane*, Postgraduate Student, Moscow Aviation Institute (National Research University) (MAI), Moscow, Russia, ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-8019-8613>, e-mail: mm_karane@mail.ru



4. Deng H., Zhang W., Shen C. Stability Analysis of Optimal Trajectory for Nonlinear Optimal Control Problems // *Journal of Mathematics*. 2020. P.1–5. doi:10.1155/2020/1392705.
5. Bortakovskii A.S. Optimal'noe i suboptimal'noe upravleniya puchkami traektorii determinirovannykh sistem avtomatnogo tipa [Optimal and suboptimal control of bundles of trajectories of deterministic systems of automatic type]. *Izv. RAN TiSU = Proceedings of the RAS TiSU*. 2016. No. 1. P. 5–26.
6. Pantelev A.V. Metaevristicheskie algoritmy optimizatsii zakonov upravleniya dinamicheskimi sistemami [Metaheuristic algorithms for optimizing control laws for dynamic systems]. Moscow: Publ. Faktorial, 2020. 564 p.
7. Afanas'ev V. N., Frolova N.A. Differentsial'naya igra v zadache upravleniya nelineinym ob'ektom s ogranicheniyami na upravlyayushchie vozdeistviya [Differential game in the control problem for a non-linear object with restrictions on control actions]. *Trudy Instituta sistemnogo analiza RAN = Proceedings of the Institute of System Analysis of the RAS*. 2020. V. 70. no 3. P. 56–64. doi:10.14357/20790279200307
8. Liu M., Zhao J., Hoogendoorn S., Wang M. An optimal control approach of integrating traffic signals and cooperative vehicle trajectories at intersections // *Transportmetrica B: Transport Dynamics*. 2021. No. 10. P. 1–17. doi:10.1080/21680566.2021.1991505.
9. Rybakov K.A. Applying Spectral Form of Mathematical Description for Representation of Iterated Stochastic Integrals // *Differencialnie Uravnenia i Protsey Upravlenia*. 2019. No. 4. P. 1–31.
10. Kosnikov Yu.N. Osobennosti primeneniya radial'nykh bazisnykh funktsii v geometricheskom modelirovanii trekhmernykh ob'ektov vizualizatsii [Features of application of radial basis functions in geometric modeling of three-dimensional visualization objects]. *Modeli, sistemy, seti v ekonomike, tekhnike, prirode i obshchestve = Models, systems, networks in economics, technology, nature and society* 2020. № 4.
11. Garg D., Patterson M., Hager W., Rao A., Benson D. An overview of three pseudospectral methods for the numerical solution of optimal control problems // *Advances in the Astronautical Sciences*. 2017. V.135, P. 1–17.
12. Tang X., Hu Z.L. New results on pseudospectral methods for optimal control // *Automatica*. Vol.65. 2016, P.160–163. doi:10.1016/j.automatica.2015.11.035
13. Mehrpouya M.A., Peng H. A robust pseudospectral method for numerical solution of nonlinear optimal control problems // *International Journal of Computer Mathematics*. 2021, no.98(6), P. 1146–1165, doi: 10.1080/00207160.2020.1807521
14. Hager W.W., Liu J., Mohapatra S., Rao A.V., Wang X.-S. A pseudospectral method for optimal control based on collocation at the Gauss points // *IEEE Conference on Decision and Control (CDC)*. 2018, P. 2490–2495, doi: 10.1109/CDC.2018.8618929.
15. Li Y., Chen W., Yang L. Linear Pseudospectral Method with Chebyshev Collocation for Optimal Control Problems with Unspecified Terminal Time // *Aerospace* 2022, no. 9. doi:10.3390/aerospace9080458
16. Gendreau M., Potvin J-Y. *Handbook of Metaheuristic*. N.Y.: Springer, 2019. 604 p.
17. Pantelev A., Karane M. Application of Multi-agent Optimization Methods Based on the Use of Linear Regulators and Interpolation Search for a Single Class of Optimal Deterministic Control Systems // *Applied Mathematics and Computational Mechanics for Smart Applications*. Singapore: Springer, 2021. P. 217–244
18. Pantelev A., Karane M. Multi-agent Optimization Algorithms for a Single Class of Optimal Deterministic Control Systems // *Advances in Theory and Practice of Computational Mechanics*. Singapore: Springer, 2020. pp. 271–291
19. Karane M., Pantelev A. Benchmark Analysis of Novel Multi-agent Optimization Algorithm Using Linear Regulators for Agents Motion Control // *IOP Conf. Series: Materials Science and Engineering*. Alushta, 2020. doi:10.1088/1757-899X/927/1/012023



20. Wang D., Tan D., Liu L. Particle swarm optimization algorithm: an overview // *Soft Computing*, 2018, 22(2), P. 387–408. doi:10.1007/s00500-016-2474-6.
21. Wang G., Gandomi A., Alavi A., Gong D. A comprehensive review of krill herd algorithm: variants, hybrids and applications // *Artificial Intelligence Review*. 2019, no. 51, P. 119–148. doi:10.1007/s10462-017-9559-1.
22. Davendra D., Zelinka I. Self-Organizing Migrating Algorithm. Methodology and Implementation. Studies in Computational Intelligence. Springer 2016. 626 p.
23. Finkel'shtein E.A. Vychislitel'nye tekhnologii approksimatsii mnozhestva dostizhimosti upravly-aemoi sistemy: Avtoref. diss. kand. tekhn. nauk. [Computational technologies for approximating the reachability set of a controlled system. PhD (Engineering) Thesis] Irkutsk, 2018. 19 p.
24. Krylov I.A. Chislennoe reshenie zadachi ob optimal'noi stabilizatsii sputnik [Numerical solution of the problem of optimal satellite stabilization]. *ZhVM i MF = Journal of Comp. Math. and Math. Physics*. 1968. V.8. no.1. P. 203–208. (In Russ.)
25. Karane, M.M., Pantelev, A.V. Multiagent Algorithms for Optimizing Bundles of Trajectories of Deterministic Systems with Incomplete Instant Feedback // *J. Comput. Syst. Sci. Int.* 61. 2022. P. 751–775. doi:10.1134/S1064230722050082

Получена 17.03.2023

Принята в печать 17.04.2023

Received 17.03.2023

Accepted 17.04.2023

Методика определения свойств компонентов композиционного материала на основе миграционных алгоритмов глобальной оптимизации

Пантелеев А.В. *

Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет) (МАИ), г. Москва, Российская Федерация
ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-2493-3617>
e-mail: avpanteleev@inbox.ru

Ковтунов С.С. **

Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет) (МАИ), г. Москва, Российская Федерация
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-7264-0694>
e-mail: kovtunov.99@inbox.ru

Ракитянский В.М. ***

Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет) (МАИ), г. Москва, Российская Федерация
ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-7894-7462>
e-mail: gymbelv@gmail.com

Сформирована математическая модель расчета упругих характеристик обобщенного материала на основе свойств поперечно-изотропного волокна и изотропной матрицы. Задача выбора параметров материалов сформулирована как проблема минимизации целевой функции на параллелепипедном множестве допустимых решений. Для ее решения применены классический и модифицированный самоорганизующиеся миграционные алгоритмы глобальной оптимизации, относящиеся к группе метаэвристических. Получены рекомендации по выбору наилучших значений параметров.

Ключевые слова: композитный материал, гомогенизация, волокно, матрица, миграционный алгоритм, метод оптимизации.

Для цитаты:

Пантелеев А.В., Ковтунов С.С., Ракитянский В.М. Методика определения свойств компонентов композиционного материала на основе миграционных алгоритмов глобальной оптимизации // Моделирование и анализ данных. 2023. Том 13. № 2. С. 123–141. DOI: [10.17759/mda.2023130207](https://doi.org/10.17759/mda.2023130207)



***Пантелеев Андрей Владимирович**, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой математической кибернетики института «Компьютерные науки и прикладная математика», Московский авиационный институт (Национальный исследовательский университет) (МАИ), г. Москва, Российская Федерация, ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-2493-3617>, e-mail: avpanteleev@inbox.ru

****Ковтунов Сергей Сергеевич**, аспирант института «Авиационная техника», Московский авиационный институт (Национальный исследовательский университет) (МАИ), г. Москва, Российская Федерация, ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-7264-0694>, e-mail: kovtunov.99@inbox.ru

*****Ракитянский Владислав Максимович**, студент магистратуры института «Компьютерные науки и прикладная математика», Московский авиационный институт (Национальный исследовательский университет) (МАИ), г. Москва, Российская Федерация, ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-7894-7462>, e-mail: rymbelvg@gmail.com

1. ВВЕДЕНИЕ

При проектировании и производстве композитных изделий важно учитывать их механические свойства. При этом у полимерных композитных материалов (ПКМ) свойства могут существенно отличаться от свойств отдельных компонентов. Из-за невозможности получения свойств составляющих композитного материала экспериментальным путем, необходимо прогнозировать их свойства с помощью математических моделей и численных методов.

Одним из основных подходов к прогнозированию свойств ПКМ является микро-механическое моделирование, которое позволяет учитывать особенности микро-структуры композита и предсказывать его общие упругие свойства.

На рис. 1 (слева) изображен представительный элемент объема (ПЭО) полимерного композитного материала в микромасштабе, который состоит из нескольких компонентов (в рассматриваемом случае это углеродное волокно и эпоксидная матрица). Волокно является армирующей (усиливающей) составляющей, так как оно намного прочнее и жестче полимерной матрицы. Матрица, в свою очередь, выступает связующим элементом для удержания волокон в определенной конфигурации. Справа представлен однородный сплошной материал с анизотропными свойствами (анизотропные свойства варьируются в зависимости от направления, изотропные свойства одинаковы в любом из направлений).

Подход гомогенизации – это математический метод для определения обобщенных упругих свойств ПКМ. Этот метод используется для расчета упругих свойств материалов, состоящих из двух или более компонентов, имеющих разные упругие свойства. При использовании подхода гомогенизации, микроструктура композитного материала рассматривается как периодическая среда, которая состоит из матрицы и включений. С помощью математических соотношений, справедливых на микроуровне, определяются эффективные упругие свойства на макроуровне.

Подход гомогенизации позволяет получить аналитические формулы для определения эффективных упругих свойств композитного материала на основе свойств его компонентов и микроструктуры. Это позволяет оптимизировать дизайн композитных

материалов, прогнозировать их механические свойства и улучшать производственные процессы.

Задача заключается в том, чтобы найти упругие характеристики обобщенного материала, зная свойства поперечно-изотропного (в поперечном направлении в любой из точек свойства будут одинаковыми) волокна и изотропной матрицы.

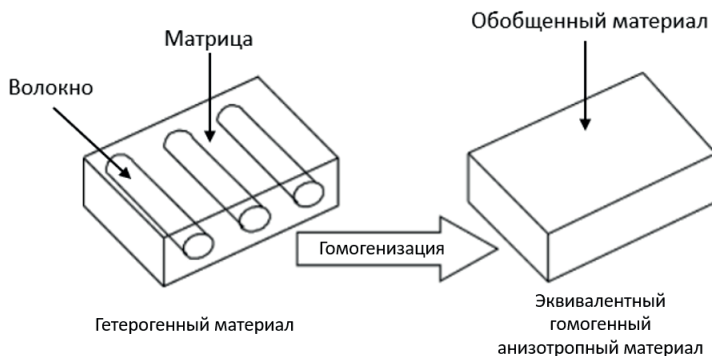


Рис. 1. Описание процесса гомогенизации

2. ФОРМИРОВАНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ПРОЦЕССА ГОМОГЕНИЗАЦИИ

Входными параметрами для реализации процесса гомогенизации являются упругие характеристики составляющих материала.

Упругие характеристики. На рис. 2 изображена диаграмма растяжения (зависимость напряжение-деформация). По закону Гука модуль упругости $E = \frac{\sigma}{\varepsilon}$ (его можно определить по рис. 2) равняется отношению действующего напряжения σ к деформации ε (для рассматриваемого далее прикладного примера в направлении 1 (см. рис. 7): $E_1 = \sigma_1 / \varepsilon_1$, где направление 1 – это направление вдоль волокон в однонаправленном материале).

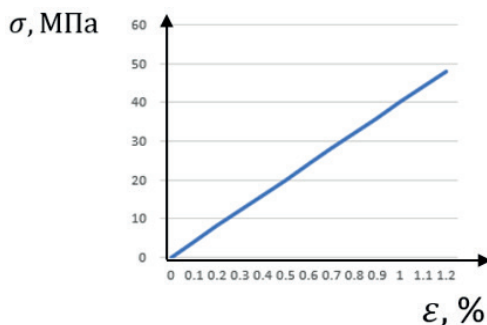


Рис. 2. График зависимости напряжение-деформация при растяжении



На рис. 3 показан типовой график зависимости продольной деформации от поперечной. Так как коэффициент Пуассона определяется отношением относительной поперечной деформации к продольной: $\nu_{12} = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}$, то на рис. 3 коэффициент Пуассона определяется тангенсом угла наклона изображенной кривой.

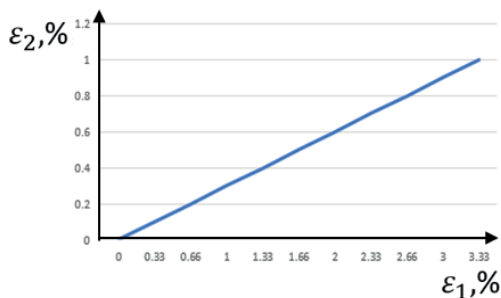


Рис. 3. График зависимости продольной деформации от поперечной

Механические характеристики составляющих композитного материала включают в себя упругие свойства поперечно-изотропного волокна и изотропной матрицы.

Упругие поперечно-изотропные волокна имеют осевой и поперечный модули упругости E_A, E_T, G_A, G_T , а также осевой и поперечный коэффициенты Пуассона ν_A, ν_T :

- осевой модуль упругости E_A (модуль упругости в продольном направлении):
$$E_A = \frac{\sigma_1}{\varepsilon_1};$$
- поперечный модуль упругости E_T (модуль упругости в поперечном направлении):
$$E_T = \frac{\sigma_2}{\varepsilon_2};$$
- осевой модуль сдвига G_A (зависимость касательного напряжения от сдвиговой деформации): $G_A = \frac{\tau_{12}}{\gamma_{12}}$. На рис. 4 показана диаграмма сдвига (зависимость линейная, т.е. угол сдвига пропорционален касательному напряжению).

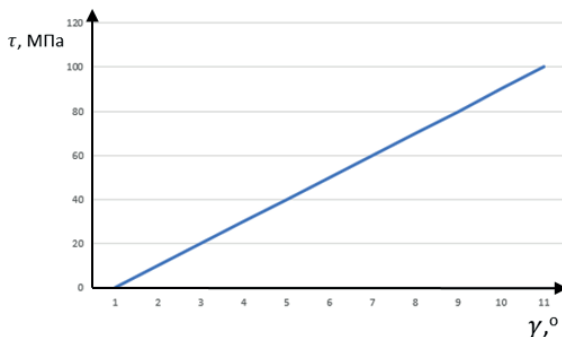


Рис. 4. Диаграмма сдвига

- поперечный модуль сдвига G_T : $G_T = \frac{E_2}{2(1+\nu_{23})}$;
- осевой коэффициент Пуассона ν_A : $\nu_A = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}$;
- поперечный коэффициент Пуассона ν_T : $\nu_T = \frac{\varepsilon_3}{\varepsilon_2}$.

Изотропную матрицу характеризуют:

- объемная доля волокна в материале V_f ; объемная доля (содержание) волокна в представительном элементе объема определяется отношением объема волокна (цилиндра) к объему куба: $V_f = \frac{\pi R^2 a}{abc}$. На рис. 5 изображен представительный элемент объема в виде куба для более наглядного изображения объемной доли волокна (синим цветом изображены волокна, зеленым цветом матрица).

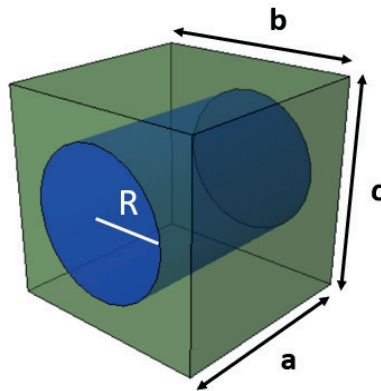


Рис. 5. Кубический представительный элемент объема (ПЭО)

- модуль упругости матрицы E_m ;
 - коэффициент Пуассона для матрицы ν_m .
- Например, в координатах 123 (см. рис. 9) у волокна индексу A соответствуют свойства $E_1, G_{12}, G_{13}, \nu_{12}, \nu_{13}$, а индексу $T - E_2, E_3, G_3, \nu_{23}$.

Напряжения. При деформировании в теле возникают силы, стремящиеся вернуть его в состояние равновесия. Эти силы называются внутренними напряжениями (нормальными и касательными), которые описываются тензором 2-го ранга – тензором напряжений. На рис. 6 изображен тензор напряжений кубического элемента. В описании формул используется сокращенная система обозначений Фохта для тензора второго ранга – индексы $11 \leftrightarrow 1, 22 \leftrightarrow 2, 33 \leftrightarrow 3, 12 \leftrightarrow 6, 13 \leftrightarrow 5, 23 \leftrightarrow 4$):

$$T_\Phi = (\sigma_1 \quad \sigma_2 \quad \sigma_3 \quad \sigma_4 \quad \sigma_5 \quad \sigma_6)^T,$$

где индексы тензора напряжений записаны исходя из двух принципов:



- повторяющиеся индексы записываются только один раз (например, 11 становится 1);
- если два индекса i и j отличаются, то для сокращенной записи можно использовать следующую формулу: $9 - i - j$ (например, 12 становится 6).

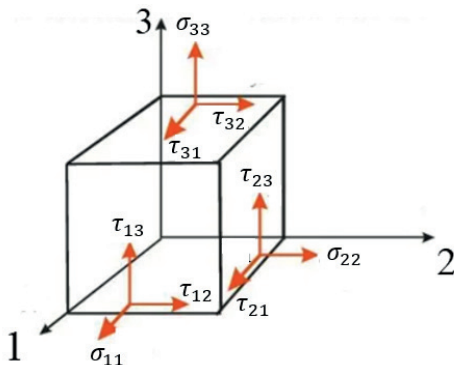


Рис. 6. Тензор кубического элемента

Тензор жесткости. Тензор жесткости – это математический объект, который описывает зависимость напряжений от деформаций в упругих материалах. Он является фундаментальной характеристикой упругих свойств материалов и используется в механике твердого тела для описания и предсказания поведения материалов при механических нагрузках.

Тензор жесткости определяет связь между деформациями и напряжениями в материале и может быть выражен через обратный тензор упругости \hat{N}^{-1} :

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl},$$

где σ_{ij} – компоненты тензора напряжений, ε_{kl} – компоненты тензора деформации, C_{ijkl} – компонент тензора жесткости. Тензор жесткости играет важную роль в механике



Рис. 7. Схематическое изображение того, как выглядит и выражается линейная деформация

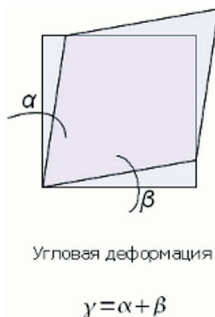


Рис. 8. Схематическое изображение того, как выглядит и выражается сдвиговая (угловая) деформация

твердого тела и используется для моделирования различных процессов, таких как деформации при растяжении, сжатии, изгибе, скручивании и т.д. [1].

Деформации. На рис. 7 показано, как выглядит и выражается линейная деформация.

На рис. 8 показано, как выглядит и выражается сдвиговая (угловая) деформация.

Опишем выходные параметры процесса гомогенизации. На рис. 9 слева показаны обозначения направлений ПКМ, которые взяты за основу при обозначении упругих характеристик материала. Справа показаны обозначения осей симметрии в ПКМ.

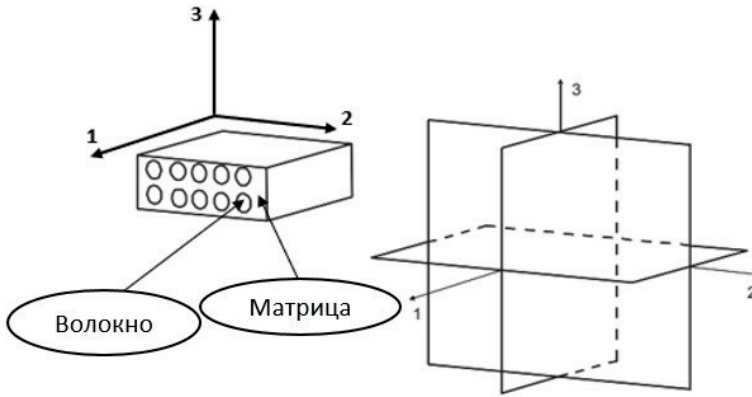


Рис. 9. Обозначение направлений и осей в ПКМ

В задаче рассматривается поперечно-изотропный материал гомогенизированного слоя (слоя с обобщенными свойствами), описываемый пятью константами:

$E_1, E_2, G_{12}, \nu_{12}, \nu_{23}$ (при этом $G_{13} = G_{12}, \nu_{13} = \nu_{12}$ и $G_{23} = \frac{1}{2} E_2 / (1 + \nu_{23})$):

- осевой модуль упругости слоя $E_1 = \sigma_1 / \varepsilon_1$ (физическая величина, характеризующая способность материала сопротивляться упругой деформации в продольном направлении 1);
- поперечный модуль упругости слоя $E_2 = \sigma_2 / \varepsilon_2$ (физическая величина, характеризующая способность материала сопротивляться упругой деформации в поперечном направлении);
- главный коэффициент Пуассона $\nu_{12} = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}$ (представляет собой отношение поперечных деформаций к продольным при действии напряжений вдоль направления 1);
- поперечный коэффициент Пуассона $\nu_{23} = \frac{\varepsilon_3}{\varepsilon_2}$ (представляет собой отношение деформаций в направлении 3 к деформации в направлении 2 при действии напряжений вдоль направления 1);
- модуль сдвига в плоскости слоя $G_{12} = \frac{\tau_{12}}{\gamma_{12}}$ равен отношению касательного напряжения τ_{12} к величине угла сдвига γ_{12} при действии касательных напряжений в плоскости 12 (на рис. 10 дана плоскость 12 с рис. 9).

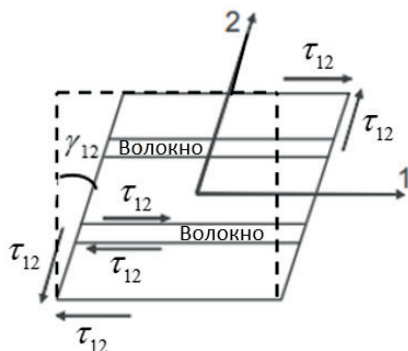


Рис. 10. Изображение сдвига в плоскости слоя

- модуль сдвига в плоскости слоя $G_{23} = \frac{\tau_{23}}{\gamma_{23}}$ равен отношению касательного напряжения τ_{23} к величине угла сдвига γ_{23} при действии касательных напряжений в плоскости 23 (на рис. 11 дана плоскость 23 с рис. 9).

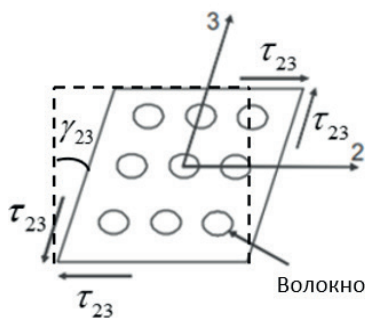


Рис. 11. Изображение поперечного сдвига

Для расчета гомогенизированных свойств однонаправленного слоя углепластика на основе свойств волокна и матрицы применяются формулы РММ (Periodic Microstructure Micromechanics). Это микромеханический метод, который используется для определения обобщенных механических свойств периодических микроструктур, который основывается на представлении периодической микроструктуры в виде повторяющейся единичной ячейки и на анализе поведения материала в этой ячейке [2]. Основные формулы РММ включают уравнения для эффективных упругих свойств (эффективный тензор жесткости и тензор релаксации).

Для определения эффективного тензора жесткости РММ использует теорию ячеек Хасена, которая описывает поведение материала внутри повторяющейся ячейки. Эффективный тензор жесткости определяется путем усреднения тензоров жесткости материалов, образующих ячейку, в соответствии с их объемными долями [3]. Эффективный тензор релаксации в РММ определяется путем анализа



релаксации напряжений в материале при малых деформациях. Тензор релаксации связывает временную зависимость деформаций в материале с временной зависимостью напряжений [4].

Получаемые с помощью формул РММ [6] характеристики являются предсказанными гомогенизированными свойствами однонаправленного слоя углепластика на основе свойств волокна и матрицы.

3. ФОРМАЛИЗАЦИЯ ПРОБЛЕМЫ КАК ЗАДАЧИ УСЛОВНОЙ ПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ ОПТИМИЗАЦИИ

Предполагается, что в результате эксперимента известны параметры

$$E_{1(\text{exp})}, E_{2(\text{exp})}, \nu_{12(\text{exp})}, \nu_{23(\text{exp})}, G_{12(\text{exp})}.$$

Объемная доля волокна V_f задана и не является искомым параметром.

Выбору подлежат следующие параметры: $E_A, E_T, E_m, G_A, G_T, \nu_A, \nu_T, \nu_m$. Множества их допустимых значений заданы отрезками.

В качестве целевой функции задачи используется

$$\Sigma = \lambda_1 \left(\frac{E_{1(\text{calc})} - E_{1(\text{exp})}}{E_{1(\text{exp})}} \right)^2 + \lambda_2 \left(\frac{E_{2(\text{calc})} - E_{2(\text{exp})}}{E_{2(\text{exp})}} \right)^2 + \lambda_3 \left(\frac{\nu_{12(\text{calc})} - \nu_{12(\text{exp})}}{\nu_{12(\text{exp})}} \right)^2 + \lambda_4 \left(\frac{\nu_{23(\text{calc})} - \nu_{23(\text{exp})}}{\nu_{23(\text{exp})}} \right)^2 + \lambda_5 \left(\frac{G_{12(\text{calc})} - G_{12(\text{exp})}}{G_{12(\text{exp})}} \right)^2,$$

характеризующая суммарное отклонение упругих характеристик слоя ПКМ $E_{1(\text{calc})}, E_{2(\text{calc})}, \nu_{12(\text{calc})}, \nu_{23(\text{calc})}, G_{12(\text{calc})}$, полученных расчетным путем от экспериментальных данных. Здесь $\lambda_1, \dots, \lambda_5$ – весовые коэффициенты, учитывающие важность учета каждого слагаемого и размерности входящих величин.

Требуется найти параметры $E_A, E_T, E_m, G_A, G_T, \nu_A, \nu_T, \nu_m$ сформированной модели материала, чтобы характеристики $E_1, E_2, \nu_{12}, \nu_{23}, G_{12}$ наилучшим образом совпали с результатами эксперимента, т.е. достигалось минимальное значение целевой функции на заданном параллелепипедном множестве допустимых решений.

Для решения задачи предлагается использовать самоорганизующиеся миграционные алгоритмы глобальной оптимизации, относящиеся к группе эволюционных метаэвристических методов [6–9].

Самоорганизующийся миграционный алгоритм (Self-Organizing Migrating Algorithm – SOMA) [7] может быть классифицирован, как эволюционный алгоритм оптимизации, основанный на самоорганизующемся поведении групп индивидов в социальном окружении. При решении задачи используются конечные наборы возможных решений, называемые популяциями, где x^j – индивид с номером j , NP – размер популяции. Самоорганизующийся миграционный алгоритм имитирует эволюцию начальной популяции и представляет собой итерационный



процесс, исследующий множество допустимых решений. Изначально популяция создается из индивидов со случайно сгенерированными координатами x_i из промежутка $[x_{i\min}, x_{i\max}]$ с помощью равномерного закона распределения. Далее начинаются миграционные циклы. Перед каждым циклом выявляется лидер – индивид с наилучшим значением целевой функции. В этих циклах все индивиды последовательно двигаются к лидеру по прямой их соединяющей, в том числе продвигаясь за него на некоторое расстояние вдоль той же прямой. При этом лидер остается неподвижным. Затем выбирается та позиция индивида, которой соответствует наилучшее значение целевой функции, полученное в процессе поиска, и она записывается в следующую популяцию. Алгоритм продолжается до того момента, пока разность значений целевой функции, соответствующих лидеру и худшему индивиду популяции, не станет меньше заранее заданного значения, или пока не реализуется максимальное число миграционных циклов.

При разработке модифицированного самоорганизующегося миграционного алгоритма оптимизации (MSOMA) использовалась базовая версия алгоритма SOMA [7–9]. Модификации заключаются в выделении среди индивидов, образующих популяцию, трех лидеров. Для каждого из членов популяции генерируются два клон с той же позицией. Тем самым порождаются три популяции, каждая из которых реализует миграционный цикл относительно своего лидера. Для всех членов популяции находятся наилучшие положения, достигнутые в течение цикла. В процессе поиска популяция регулярно обновляется за счет новых индивидов, генерируемых на множестве допустимых решений. Они замещают выбывающих индивидов с наихудшими значениями целевой функции. После выполнения условий окончания производится уточняющий поиск (миграционный цикл), в котором участвуют три оставшихся лидера популяции. В качестве решения предъявляется наилучший результат.

Для подсчета величины целевой функции предлагается использовать алгоритм, в котором использованы следующие обозначения:

V_f – заданная объемная доля волокна;

$E_{1(\text{exp})}, E_{2(\text{exp})}, \nu_{12(\text{exp})}, \nu_{23(\text{exp})}, G_{12(\text{exp})}$ – известные данные из эксперимента;

$E_A, E_T, \nu_A, \nu_T, G_A, G_T, E_m, \nu_m$ – изменяемые параметры;

$E_1, E_2, \nu_{12}, \nu_{23}, G_{12}$ – выходные параметры.

Значения используемых индексов: m – свойства матрицы, f – свойства волокна, A – осевой (Axial), T – поперечный (Transversal).

4. АЛГОРИТМ ВЫЧИСЛЕНИЯ ЗНАЧЕНИЯ ЦЕЛЕВОЙ ФУНКЦИИ

Шаг 1. Вычисление констант матрицы:

$$\lambda_m = \frac{E_m \nu_m}{(1 + \nu_m)(1 - 2\nu_m)} - \text{коэффициент Ламе}; \quad \mu_m = G_m = \frac{E_m}{2(1 + \nu_m)}.$$



Шаг 2. Вычисление коэффициентов (коэффициенты s_3, s_6, s_7 учитывают геометрию микроструктуры, включая геометрию включений и их геометрическое расположение). Используются формулы для цилиндрических волокон:

$$\begin{aligned} s_3 &= 0.49247 - 0.47603V_f - 0.02748V_f^2; \\ s_6 &= 0.36844 - 0.14944V_f - 0.27152V_f^2; \\ s_7 &= 0.12346 - 0.32035V_f + 0.23517V_f^2. \end{aligned}$$

Шаг 3. Вычисление коэффициентов \tilde{N}'_{ij} в тензоре жесткости поперечно-изотропного материала:

$$\tilde{N}' = \begin{pmatrix} \tilde{N}'_{11} & \tilde{N}'_{12} & \tilde{N}'_{13} & 0 & 0 & 0 \\ \tilde{N}'_{12} & \tilde{N}'_{22} & \tilde{N}'_{23} & 0 & 0 & 0 \\ \tilde{N}'_{13} & \tilde{N}'_{23} & \tilde{N}'_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \tilde{N}'_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \tilde{N}'_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \tilde{N}'_{66} \end{pmatrix}.$$

$$3.1. \Delta = \frac{1 - 2\nu_A^2 E_T / E_A - 2\nu_T^2 - 2\nu_A \nu_T E_T / E_A}{E_A E_T^2};$$

$$3.2. C'_{11} = \frac{1 - \nu_T^2}{E_T^2 \Delta};$$

$$3.3. C'_{22} = C'_{33} = \frac{1 - \nu_A^2 E_T / E_A}{E_A E_T \Delta};$$

$$3.4. C'_{12} = C'_{13} = \frac{\nu_A E_T / E_A + \nu_A \nu_T E_T / E_A}{E_T^2 \Delta};$$

$$3.5. C'_{23} = \frac{\nu_T + \nu_A^2 E_T / E_A}{E_A E_T \Delta};$$

$$3.6. C'_{44} = G_T = \frac{E_T}{2(1 + \nu_T)} = (C'_{22} - C'_{23}) / 2;$$

$$3.7. C'_{55} = C'_{66} = G_A.$$

Шаг 4. Вычислить коэффициенты a_1, \dots, a_4 для упрощенной записи компонент тензора жесткости:

$$\begin{aligned} 4.1. a_1 &= 4\mu_m^2 - 2\mu_m C'_{33} + 6\lambda_m \mu_m - 2C'_{11} \mu_m - 2\mu_m C'_{23} + C'_{23} C'_{11} + 4\lambda_m C'_{12} - \\ &- 2C'_{12}{}^2 - \lambda_m C'_{33} - 2C'_{11} \lambda_m + C'_{11} C'_{33} - \lambda_m C'_{23}; \end{aligned}$$



$$4.2. \quad a_2 = 8\mu_m^3 - \mu_m^2 C'_{33} + 12\mu_m^2 \lambda_m - 4\mu_m^2 C'_{11} - 2\mu_m C'^2_{23} + 4\mu_m \lambda_m C'_{23} + 4\mu_m C'_{11} C'_{33} - \\ - 8\mu_m \lambda_m C'_{33} - 4\mu_m C'^2_{12} + 2\mu_m C'^2_{33} - 4\mu_m C'_{11} \lambda_m + 8\mu_m \lambda_m C'_{12} + 2\lambda_m C'_{11} C'_{33} + 4C'_{12} C'_{23} \lambda_m - \\ - 4\lambda_m C'_{12} C'_{33} - 2\lambda_m C'_{11} C'_{23} - 2C'_{23} C'^2_{12} + C'^2_{23} C'_{11} + 2C'_{33} C'^2_{12} - C'_{11} C'^2_{33} + \lambda_m C'^2_{33} - \lambda_m C'^2_{23};$$

$$4.3. \quad a_3 = \frac{4\mu_m^2 + 4\lambda_m \mu_m - 2C'_{11} \mu_m - 2\mu_m C'_{33} - C'_{11} \lambda_m - \lambda_m C'_{33} - C'^2_{12} + C'_{11} C'_{33} + 2\lambda_m C'_{12}}{a_2} - \\ - \frac{s_3 - \frac{s_6}{2 - 2\nu_m}}{\mu_m};$$

$$4.4. \quad a_4 = - \frac{-2\mu_m C'_{23} + 2\lambda_m \mu_m - \lambda_m C'_{23} - C'_{11} \lambda_m - C'^2_{12} + 2\lambda_m C'_{12} + C'_{11} C'_{23}}{a_2} + \\ + \frac{s_7}{\mu_m (2 - 2\nu_m)}.$$

Шаг 5. Вычисление компонент тензора жесткости \tilde{N}^* для композита с цилиндрическими волокнами и объемной долей волокон V_f (использован метод разложения Фурье):

$$\tilde{N}^* = \begin{pmatrix} \tilde{N}_{11}^* & \tilde{N}_{12}^* & \tilde{N}_{13}^* & 0 & 0 & 0 \\ \tilde{N}_{12}^* & \tilde{N}_{22}^* & \tilde{N}_{23}^* & 0 & 0 & 0 \\ \tilde{N}_{13}^* & \tilde{N}_{23}^* & \tilde{N}_{33}^* & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \tilde{N}_{44}^* & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \tilde{N}_{55}^* & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \tilde{N}_{66}^* \end{pmatrix}.$$

$$5.1. \quad A = \left(\frac{(2\mu_m + 2\lambda_m - C'_{33} - C'_{23})(a_3^2 - a_4^2)}{a_1} + \frac{2(a_4 - a_3)(\lambda_m - C'_{12})^2}{a_1^2} \right)^{-1}.$$

$$5.2. \quad C_{11}^* = \lambda_m + 2\mu_m - \\ - V_f (-a_4^2 + a_3^2) \left(- \frac{(2\mu_m + 2\lambda_m - C'_{33} - C'_{23})(a_4^2 - a_3^2)}{a_1} + \frac{2(a_4 - a_3)(\lambda_m - C'_{12})^2}{a_1^2} \right)^{-1}.$$

$$5.3. \quad C_{12}^* = \lambda_m + V_f \left(\frac{(\lambda_m - C'_{12})(a_4 - a_3)}{a_1} \right) A.$$

$$5.4. \quad C_{22}^* = \lambda_m + 2\mu_m - V_f \left(\frac{(2\mu_m + 2\lambda_m - C'_{33} - C'_{23})a_3}{a_1} + \frac{(\lambda_m - C'_{12})^2}{a_1^2} \right) A.$$

$$5.5. \quad C_{23}^* = \lambda_m + V_f \left(\frac{(2\mu_m + 2\lambda_m - C'_{33} - C'_{23})a_4}{a_1} + \frac{(\lambda_m - C'_{12})^2}{a_1^2} \right) A.$$



$$5.6. C_{44}^* = \mu_m - V_f \left(\frac{2}{2\mu_m - C'_{22} + C'_{23}} - \left(2S_3 - \frac{4S_7}{2 - 2\nu_m} \right) \mu_m^{-1} \right)^{-1}.$$

$$5.7. C_{66}^* = \mu_m - V_f \left((\mu_m - C'_{66})^{-1} - \frac{S_3}{\mu_m} \right)^{-1}.$$

Шаг 6. Вычисление элементов матрицы: $\tilde{N} = \begin{pmatrix} \tilde{N}_{11} & \tilde{N}_{12} & \tilde{N}_{13} & 0 & 0 & 0 \\ \tilde{N}_{12} & \tilde{N}_{22} & \tilde{N}_{23} & 0 & 0 & 0 \\ \tilde{N}_{13} & \tilde{N}_{23} & \tilde{N}_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \tilde{N}_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \tilde{N}_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \tilde{N}_{66} \end{pmatrix}$

$$6.1. C_{11} = C_{11}^*;$$

$$6.2. C_{12} = C_{13} = C_{12}^*;$$

$$6.3. C_{22} = C_{33} = \frac{3}{4}C_{22}^* + \frac{1}{4}C_{23}^* + \frac{1}{4}C_{44}^*;$$

$$6.4. C_{23} = \frac{1}{4}C_{22}^* + \frac{3}{4}C_{23}^* - \frac{1}{4}C_{44}^*;$$

$$6.5. C_{44} = C_{44}^* = \frac{1}{2}(C_{22} - C_{23});$$

$$6.6. C_{55} = C_{66} = C_{66}^*.$$

Шаг 7. Нахождение обратной матрицы вида:

$$S = C^{-1} = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & 0 & 0 & 0 \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} & 0 & 0 & 0 \\ S_{13} & S_{23} & S_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_{66} \end{pmatrix}$$

(далее используются значения $S_{12}, S_{22}, S_{23}, S_{44}, S_{55}$).

Шаг 8. Вычисление выходных параметров:

$$8.1. E_{1(calc)} = 1/S_{11};$$

$$8.2. E_{2(calc)} = E_{3(calc)} = 1/S_{22};$$

$$8.3. \nu_{12(calc)} = \nu_{13(calc)} = -S_{12}/S_{11};$$

$$8.4. \nu_{23(calc)} = -S_{23}/S_{22};$$



$$8.5. G_{12(calc)} = G_{13(calc)} = 1 / S_{55} ;$$

$$8.6. G_{23(calc)} = \frac{E_2}{2(1 + \nu_{23})} = 1 / S_{44} .$$

Шаг 9. Вычисление значения целевой функции

$$\Sigma = \lambda_1 \left(\frac{E_{1(calc)} - E_{1(exp)}}{E_{1(exp)}} \right)^2 + \lambda_2 \left(\frac{E_{2(calc)} - E_{2(exp)}}{E_{2(exp)}} \right)^2 + \lambda_3 \left(\frac{\nu_{12(calc)} - \nu_{12(exp)}}{\nu_{12(exp)}} \right)^2 + \lambda_4 \left(\frac{\nu_{23(calc)} - \nu_{23(exp)}}{\nu_{23(exp)}} \right)^2 + \lambda_5 \left(\frac{G_{12(calc)} - G_{12(exp)}}{G_{12(exp)}} \right)^2 .$$

5. ПРИКЛАДНАЯ ЗАДАЧА

Предполагается, что в результате эксперимента известны параметры

$$E_{1(exp)}, E_{2(exp)}, \nu_{12(exp)}, \nu_{23(exp)}, G_{12(exp)},$$

и объемная доля волокна V_f (таблица 1).

Ограничения на искомые переменные (параметры) заданы в виде отрезков изменения их возможных значений:

$$E_A \in [200000, 600000] \text{ МПа}; E_T \in [8000, 30000] \text{ МПа}; G_A \in [5000, 90000] \text{ МПа};$$

$$\nu_A \in [0,15; 0,4]; \nu_T \in [0,2; 0,4]; E_m \in [3000, 10000] \text{ МПа}; \nu_m \in [0,2; 0,4].$$

Таблица 1

Экспериментальные значения параметров					Объемная доля волокна
E_1 , МПа	E_2 , МПа	ν_{12}	ν_{23}	G_{12} , МПа	V_f
337682	6918	0,3	0,52	4755	0,62

Известно решение поставленной задачи, полученное эмпирически [10].

Таблица 2

Свойства волокна					Свойства матрицы	
E_A , МПа	E_T , МПа	G_A , МПа	ν_A	ν_T	E_m , МПа	ν_m
517000	11158	10636	0,269	0,306	4629,558	0,363

Случай 1. Положим, что все слагаемые в целевой функции имеют равную важность, т.е. $\lambda_1 = \dots = \lambda_5 = 1$. Из-за разного масштаба параметров, от которых зависит целевая функция, и особенностей работы миграционных алгоритмов применяется метод нормализации. Предполагается, что значения всех независимых переменных $x_i^{norm}, i = 1, \dots, n$, принадлежат универсальному отрезку $[0,1]$. Процедура поиска производится на параллелепипедном множестве допустимых решений, размерность



которого определяется числом независимых переменных (в решаемой задаче $n = 7$). При подсчете величины целевой функции значения всех переменных преобразуются к исходным масштабам:

$$x_i = x_{\min} + x_i^{norm} (x_{\max} - x_{\min}), i = 1, \dots, n.$$

Результаты, полученные при помощи алгоритма SOMA (табл. 3): минимальное значение целевой функции $1,767 \cdot 10^{-17}$, затраченное время 283,7 с.

Таблица 3

Свойства волокна					Свойства матрицы	
E_A , МПа	E_T , МПа	G_A , МПа	ν_A	ν_T	E_m , МПа	ν_m
512146	13116	20442	0,269	0,228	3838,357	0,363

Результаты, полученные при помощи алгоритма MSOMA (табл. 4): минимальное значение целевой функции $1,433 \cdot 10^{-18}$, затраченное время: 935,5 с.

Таблица 4

Свойства волокна					Свойства матрицы	
E_A , МПа	E_T , МПа	G_A , МПа	ν_A	ν_T	E_m , МПа	ν_m
484359	13030	80527	0,235	0,311	3232,095	0,385

Заметим, что полученные значения параметра G_A сильно отличаются от эмпирического решения и друг от друга, поэтому в случае 2 предлагается использовать подход, связанный с добавлением регуляризирующего слагаемого в целевую функцию, влияние которого последовательно уменьшается.

Случай 2. Добавим регуляризирующее слагаемое с весовым коэффициентом λ_6 . Тогда целевая функция имеет вид $\Sigma^{reg} = \Sigma + \lambda_6 [G_A - G_A^{stab}]^2$, где $\lambda_6 = 0,1$; $G_A^{stab} = 10636$ МПа.

Результаты, полученные при помощи алгоритма SOMA (табл. 5): минимальное значение целевой функции $9,709 \cdot 10^{-24}$, затраченное время 1062 с.

Таблица 5

Свойства волокна					Свойства матрицы	
E_A , МПа	E_T , МПа	G_A , МПа	ν_A	ν_T	E_m , МПа	ν_m
455936	9111	10635	0,260	0,369	5017,922	0,347

Результаты, полученные при помощи алгоритма MSOMA (табл. 6): минимальное значение целевой функции $1,625 \cdot 10^{-20}$, затраченное время 1851,7 с.

Таблица 6

Свойства волокна					Свойства матрицы	
E_A , МПа	E_T , МПа	G_A , МПа	ν_A	ν_T	E_m , МПа	ν_m
485647	10237	10635	0,278	0,305	4997,997	0,342



Случай 3. Также исследован подход, при котором лучшая особь мигрирующей популяции из предыдущего запуска алгоритмов SOMA и MSOMA добавляется в начальную популяцию для следующего запуска, а значение коэффициента $\lambda_0 = 0,01$ на пяти последовательных итерациях каждый раз уменьшается в 3 раза.

Результаты, полученные при помощи алгоритма SOMA (табл. 7): минимальное значение целевой функции $3,919 \cdot 10^{-32}$, затраченное время 8301 с.

Таблица 7

Свойства волокна					Свойства матрицы	
E_A , МПа	E_T , МПа	G_A , МПа	ν_A	ν_T	E_m , МПа	ν_m
512495	11418	10636	0,291	0,225	4971,129	0,335

Результаты, полученные при помощи алгоритма MSOMA (табл. 8): минимальное значение целевой функции: $1,139 \cdot 10^{-17}$, затраченное время 4157,7 с.

Таблица 8

Свойства волокна					Свойства матрицы	
E_A , МПа	E_T , МПа	G_A , МПа	ν_A	ν_T	E_m , МПа	ν_m
505776	11102	10636	0,288	0,248	4979,134	0,337

Случай 4. Предположим, что значение параметра $G_{12} = 4755$ МПа задано (найде-но предварительно с помощью других подходов к решению задачи гомогенизации).

Результаты, полученные при помощи алгоритма SOMA (табл. 9): минимальное значение целевой функции $3,459 \cdot 10^{-31}$, затраченное время 1049,5 с.

Таблица 9

Свойства волокна					Свойства матрицы	
E_A , МПа	E_T , МПа	G_A , МПа	ν_A	ν_T	E_m , МПа	ν_m
516018	11591	10636	0,293	0,212	4966,414	0,333

Результаты, полученные при помощи алгоритма MSOMA (табл. 10): минимальное значение целевой функции $1,709 \cdot 10^{-25}$, затраченное время 2703,2 с.

Таблица 10

Свойства волокна					Свойства матрицы	
E_A , МПа	E_T , МПа	G_A , МПа	ν_A	ν_T	E_m , МПа	ν_m
504938	11065	10636	0,288	0,251	4980,057	0,337

Выполненные исследования позволяют сделать вывод о том, что определение параметра G_A является математически некорректной задачей. Использование априорной информации о значении этого параметра позволяет получить решение с применением идей регуляризации. При фиксировании значения G_A решение задачи



различными методами оптимизации становится устойчивым к изменению начальных данных и дает удовлетворительный по точности результат при приемлемых вычислительных затратах.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Получение упругих свойств отдельных компонентов ПКМ позволяет решить проблему моделирования материала в микромасштабе, что в свою очередь позволяет учитывать особенности микроструктуры ПКМ и предсказывать их общие упругие свойства.

Кроме того, знание упругих свойств отдельных компонентов важно для эффективного выбора компонентов ПКМ при проектировании и производстве композитных изделий.

Упругие свойства отдельных компонентов могут быть использованы для определения наилучших условий изготовления композита и для контроля качества при производстве композитных изделий.

Получение таких параметров, как E_A , E_T , G_A , G_T , ν_A , ν_T , на данном этапе развития научно-технического прогресса невозможно. Предложенная методика математического моделирования и параметрической оптимизации с помощью миграционных метаэвристических алгоритмов позволяет прогнозировать характеристики композитного материала с приемлемой точностью.

Литература

1. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теория упругости. М.: Наука, 1987. – 247 с.
2. Hill, R. The elastic behavior of a crystalline aggregate. Proc. Phys. Soc. London, 65:349–354, 1952.
3. Torquato S. Random Heterogeneous Materials: Microstructure and Macroscopic Properties. Springer, 2002.
4. Sanchez-Palencia E. Non-Homogeneous Media and Vibration Theory. Springer-Verlag, 1980.
5. Barbero E.J. Introduction to Composite Materials Design, Second Edition. CRC Press, 2018. ISBN 978-1-4987-5983-9.
6. Davendra D., Zelinka I. Self-organizing migrating algorithm. Methodology and implementation // Studies in Computational Intelligence, Springer, 2016, Vol. 626.
7. Пантелеев А.В., Скавинская Д.В. Метаэвристические стратегии и алгоритмы глобальной оптимизации. - Факториал, 2023. – 564 с.
8. Pantelev A.V., Rakitianskii V.M. Application of the modified self-organizing migration algorithm MSOMA in optimal open-loop control problems // Journal of Physics: Conference Series. – 2021. Vol. 1925. Id 012017.
9. Пантелеев А.В., Ракитянский В.М. Разработка модифицированного самоорганизующегося миграционного алгоритма оптимизации (MSOMA) // Моделирование и анализ данных. – 2020. № 2. – С. 62–73.
10. Cabrera Barbero, Javier, “Thermal-Fatigue and Thermo-Mechanical Equivalence for Transverse Cracking Evolution in Laminated Composites” (2018). Graduate Theses, Dissertations, and Problem Reports. 3715.



Methodology for Determining the Properties of Composite Material Components Based on Migration Algorithms of Global Optimization

Andrey V. Panteleev*

Moscow Aviation Institute (National Research University) (MAI), Moscow, Russia

ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-2493-3617>

e-mail: avpanteleev@inbox.ru

Sergei S. Kovtunov**

Moscow Aviation Institute (National Research University) (MAI), Moscow, Russia

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-7264-0694>

e-mail: kovtunov.99@inbox.ru

Vladislav M. Rakitianskii***

Moscow Aviation Institute (National Research University) (MAI), Moscow, Russia

ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-7894-7462>

e-mail: rymbelv@gmail.com

A mathematical model has been formed for calculating the elastic characteristics of a generalized material based on the properties of a transversely isotropic fiber and an isotropic matrix. The problem of choosing the parameters of materials is formulated as the problem of minimizing the objective function on a parallelepiped set of admissible solutions. To solve it, classical and modified self-organizing migration algorithms of global optimization belonging to the group of metaheuristic are applied. Recommendations on the selection of the best parameter values are obtained.

Keywords: composite material, homogenization, fiber, matrix, migration algorithm, optimization method.

For citation:

Panteleev A.V., Kovtunov S.S., Rakitianskii V.M. Methodology for Determining the Properties of Composite Material Components Based on Migration Algorithms of Global Optimization. *Modelirovanie i analiz dannykh = Modelling and Data Analysis*, 2023. Vol. 13, no. 2, pp. 123–141. DOI: 10.17759/mda.2023130207 (In Russ., abstr. in Engl.).

***Andrey V. Panteleev**, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Head of the Department of Mathematics and Cybernetics, Institute “Computer Science and Applied Mathematics”, Moscow Aviation Institute (National Research University) (MAI), Moscow, Russia, ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-2493-3617>, e-mail: avpanteleev@inbox.ru

****Sergei S. Kovtunov**, Postgraduate Student of the Institute “Aviation Engineering”, Moscow Aviation Institute (National Research University) (MAI), Moscow, Russia, ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-7264-0694>, e-mail: kovtunov.99@inbox.ru

*****Vladislav M. Rakitianskii**, Master’s Degree Student of the Institute “Computer Science and Applied Mathematics”, Moscow Aviation Institute (National Research University) (MAI), Moscow, Russia, ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-7894-7462>, e-mail: rymbelv@gmail.com



References

1. Landau L.D., Lifshits E.M. Theory of elasticity. Moscow: *Nauka*, 1987. – 247 p. (In Russ.).
2. Hill, R. The elastic behavior of a crystalline aggregate. *Proc. Phys. Soc. London*, 65:349–354, 1952.
3. Torquato S. Random Heterogeneous Materials: Microstructure and Macroscopic Properties. *Springer*, 2002.
4. Sanchez-Palencia E. Non-Homogeneous Media and Vibration Theory. *Springer-Verlag*, 1980.
5. Barbero E.J. Introduction to Composite Materials Design, Second Edition. *CRC Press*, 2018. ISBN 978-1-4987-5983-9.
6. Davendra D., Zelinka I. Self-organizing migrating algorithm. Methodology and implementation // *Studies in Computational Intelligence, Springer*, 2016, Vol. 626.
7. Pantelev A.V., Skavinskaya D.V. Metaheuristic strategies and algorithms of global optimization. *Factorial*, 2023.– 564 p. (In Russ.).
8. Pantelev A.V., Rakitianskii V.M. Application of the modified self-organizing migration algorithm MSOMA in optimal open-loop control problems // *Journal of Physics: Conference Series*. – 2021. Vol. 1925. Id 012017.
9. Pantelev A.V., Rakityansky V.M. Development of a modified self-organizing migration optimization algorithm (MSOMA) // *Modeling and data analysis*. – 2020. No. 2. – pp. 62–73. (In Russ.).
10. Cabrera Barbero, Javier, “Thermal-Fatigue and Thermo-Mechanical Equivalence for Transverse Cracking Evolution in Laminated Composites” (2018). Graduate Theses, *Dissertations and Problem Reports*. 3715.

Получена 21.04.2023

Received 21.04.2023

Принята в печать 19.05.2023

Accepted 19.05.2023

Задача о назначении производственных ресурсов с системой ограничений

Рассказова В.А.*

Московский авиационный институт (Национальный Исследовательский Университет) (МАИ), г. Москва, Российская Федерация
ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-4943-3133>
e-mail: varvara.rasskazova@mail.ru

Скуридин А.А.**

Московский авиационный институт (Национальный Исследовательский Университет) (МАИ), г. Москва, Российская Федерация
ORCID: <https://orcid.org/0009-0002-6466-2110>
e-mail: aasallex@gmail.com

Задачи оптимизации производства и распределения ресурсов были актуальны во все времена. В статье рассматривается задача о назначении производственных ресурсов с системой ограничений. В качестве примера рассматривается задача оптимизации процесса выливки алюминия-сырца в вакуум-ковши в электролизном отделении литейного цеха. Для решения поставленной задачи предлагается модель целочисленного линейного программирования. Преимуществом такого подхода является возможность гибкой настройки системы ограничений и минимизируемого функционала в соответствии с производственными приоритетами. В статье рассматривается программная реализация разработанной модели, приводятся результаты численного эксперимента на исторических данных. На основе полученного решения делается вывод об эффективности модели целочисленного линейного программирования в данной задаче оптимизации.

Ключевые слова: целочисленное линейное программирование, задача оптимизации, оптимизация производства, металлургия.

Для цитаты:

Рассказова В.А., Скуридин А.А. Задача о назначении производственных ресурсов с системой ограничений // Моделирование и анализ данных. 2023. Том 13. № 2. С. 142–150.
DOI: <https://doi.org/10.17759/mda.2023130208>

***Рассказова Варвара Андреевна**, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры теории вероятности и компьютерного моделирования института «Компьютерные науки и прикладная математика», Московский авиационный институт (Национальный Исследовательский Университет) (МАИ), г. Москва, Российская Федерация, ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-4943-3133>, e-mail: varvara.rasskazova@mail.ru



****Скурин Алексей Анатольевич**, студент магистратуры института «Компьютерные науки и прикладная математика», Московский авиационный институт (Национальный Исследовательский Университет) (МАИ), г. Москва, Российская Федерация, ORCID: <https://orcid.org/0009-0002-6466-2110>, e-mail: aasallex@gmail.com

1. ВВЕДЕНИЕ

Литейный цех – это завод, производящий металлические отливки. Жидкие металлы отливаются в формы, после чего происходит затвердевание металла и удаление материала формы. Один из наиболее распространенных металлов для обработки – алюминий.

На производстве алюминия используется процесс электролиза криолитоглиноземного расплава в специальных электролизных ваннах (электролизерах) для получения алюминия-сырца. Такой алюминий еще не пригоден для использования в промышленности из-за несоответствия стандартам по содержанию примесей. Для определения марки алюминия в электролизере производится проверка на содержание примесей.

Для выливки алюминия из электролизера и дальнейшей его транспортировки в пределах литейного цеха используются вакуум-ковши. Объем вакуум-ковша больше объема электролизера, поэтому для заполнения одного вакуум-ковша требуется несколько электролизеров. На предприятии, производящем алюминий, составляется план по выливке алюминия-сырца в вакуум-ковши, причем алюминий в вакуум-ковше, полученный в результате смешивания алюминия из нескольких электролизеров, должен удовлетворять требованиям по содержанию примесей (быть определенной марки) и по массе. В результате перед сотрудниками электролизного отделения литейного цеха встает вопрос об оптимизации процесса выливки электролизеров с алюминием-сырцом в вакуум-ковши. Для решения данной задачи можно использовать метод целочисленного линейного программирования (ЦЛП). Подобный подход использовался в [9] для решения задачи оптимизации в миксерном отделении сталелитейного завода. Метод целочисленного линейного программирования широко используется для решения транспортных оптимизационных задач. В работе [1] была предложена методология для решения комплексных задач принятия решений в управлении металлургическим производством. В публикации [2] модель ЦЛП применяется для решения задачи о назначении “технологического окна” на участках железнодорожной сети. В работе [3] была разработана модель ЦЛП для решения задачи формирования железнодорожных составов и расписания их движения. В работе [8] модели ЦЛП были предложены для решения некоторых задач промышленного планирования. Работы [4; 5] посвящены классическим постановкам и методам решения задач ЦЛП, включая булевскую задачу ЦЛП, а в работах [6; 7] рассматриваются модели ЦЛП для решения различных задач в области управления, планирования и принятия решений.

Представленный в настоящей работе метод решения задачи о назначении производственных ресурсов с системой ограничений является масштабируемым и



может быть применен не только для решения задачи оптимизации процесса выливки электролизеров с алюминием-сырцом в вакуум-ковши, но и для решения смежных задач оптимизации технологических процессов на металлургическом производстве. Например, задач переназначения технологических маршрутов или управления крановым хозяйством.

2. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ЗАДАЧИ О НАЗНАЧЕНИИ ПРОИЗВОДСТВЕННЫХ РЕСУРСОВ С ОГРАНИЧЕНИЯМИ

Рассмотрим задачу о назначении производственных ресурсов с ограничениями в электролизном отделении литейного цеха. На каждый рабочий день для каждой смены составляется план выливки алюминия. Рассмотрим математическую формулировку задачи о назначении производственных ресурсов с ограничениями для конкретной смены.

В распоряжении каждой смены находится некоторое количество электролизеров, обозначим его как J . Количество требуемых к заполнению для рассматриваемой смены вакуум-ковшей обозначим как I .

Введем множество требуемых к заполнению для рассматриваемой смены вакуум-ковшей K , каждый элемент которого представляет из себя вектор $(\chi_i^{si}, \chi_i^{fe}, \chi_i^{cu}, M_i)^T$, где χ_i^{si} – максимально допустимое содержание примесей кремния, χ_i^{fe} – максимально допустимое содержание примесей железа, χ_i^{cu} – максимально допустимое содержание примесей меди, M_i – требуемая масса алюминия-сырца для выливки в i -й вакуум-ковш.

Также определим множество E доступных к использованию электролизеров для рассматриваемой смены. Каждый элемент множества E представляет из себя вектор $(m_j, \xi_j^{si}, \xi_j^{fe}, \xi_j^{cu})^T$, где m_j – масса алюминия в j -м электролизере, ξ_j^{si} – содержание примесей кремния в j -м электролизере, ξ_j^{fe} – содержание примесей железа в j -м электролизере, ξ_j^{cu} – содержание примесей меди в j -м электролизере.

Введем переменные $\delta_{i,j}$, характеризующие использование j -го электролизера при заполнении i -го вакуум-ковша. Если j -й электролизер используется при заполнении i -го вакуум-ковша, то переменная $\delta_{i,j}$ будет равна единице, и нулю в обратном случае.

Используя указанные переменные, составим множество допустимых стратегий. По определению переменных $\delta_{i,j}$ имеем

$$\delta_{i,j} \in \{0, 1\}, i = \overline{1, I}, j = \overline{1, J} \quad (1)$$

Для того, чтобы каждый электролизер был использован в решении не более одного раза, введем ограничения

$$\sum_{i=1}^N \delta_{i,j} \leq 1, j = 1, \dots, J \quad (2)$$



Будем считать, что доля содержания примесей сторонних металлов в заполненном вакуум-ковше равна среднему арифметическому долей содержания примесей сторонних металлов в электролизерах, которые использовались для его заполнения.

Для того, чтобы не превысить максимально допустимое содержание примесей сторонних металлов в вакуум-ковшах, то есть удовлетворить требованиям по марке алюминия-сырца, требуется ввести ограничения на максимально допустимое содержание примесей кремния, железа и меди. Но сначала рассмотрим гипотетическую задачу, в процессе поиска решения которой решатель не смог найти решение, которое удовлетворяет всем ограничениям “на химию”. Это значит, что решатель не смог составить план выливки алюминия-сырца для одного или нескольких вакуум-ковшей. Такая ситуация часто встречается на реальном производстве и полностью исключить возможность ее появления невозможно.

Для того, чтобы решатель мог искать не только полное, но и частичное решение поставленной задачи, введем вспомогательные переменные “на химию” δ_i^{si} , $\tilde{\delta}_i^{fe}$. δ_i^{si} равна единице, если для i -го ковша не удалось найти решение, которое удовлетворяет ограничениям на максимально допустимое содержание примесей кремния и нулю в обратном случае. Аналогично для $\tilde{\delta}_i^{fe}$.

Введем ограничения на максимально допустимые доли содержания кремния, железа и меди в вакуум-ковшах

$$\sum_{j=1}^J \xi_j^{si} \delta_{i,j} - K_{si,i} \tilde{\delta}_i^{si} \leq \chi_i^{si} \sum_{j=1}^J \delta_{i,j}, \quad i = 1, \dots, I \quad (3)$$

$$\sum_{j=1}^J \xi_j^{fe} \delta_{i,j} - K_{fe,i} \tilde{\delta}_i^{fe} \leq \chi_i^{fe} \sum_{j=1}^J \delta_{i,j}, \quad i = 1, \dots, I \quad (4)$$

$$\sum_{j=1}^J \xi_j^{cu} \delta_{i,j} \leq \chi_i^{cu} \sum_{j=1}^J \delta_{i,j}, \quad i = 1, \dots, I \quad (5)$$

где $K_{si,i}$, $K_{fe,i}$ – положительные коэффициенты (больше единицы). Их смысл заключается в том, чтобы в случае, когда вспомогательная переменная на “химию” равна единице, гарантировать выполнение ограничения.

Введем ограничения на массу алюминия-сырца в вакуум-ковше. Поскольку выполнить требования на массу можно лишь с некоторой точностью, введем параметр Δ , который задает максимально допустимое отклонение фактической массы заполненного вакуум-ковша от его требуемой массы. Также, как и в случае с ограничениями на максимально допустимое содержание примесей, требуется ввести вспомогательные переменные $\tilde{\delta}_i^m$. $\tilde{\delta}_i^m$ равна единице, если для i -го ковша не удалось найти решение, которое удовлетворяет ограничениям на массу алюминия-сырца в вакуум-ковше и нулю в обратном случае. Итак, ограничения на максимально допустимое отклонение фактической массы заполненного вакуум-ковша от его требуемой массы имеют следующий вид

$$M_i - \Delta \leq \sum_{j=1}^J m_j \delta_{i,j} + 0.5 K_{m,i} \tilde{\delta}_i^m \leq M_i + \Delta, \quad i = 1, \dots, I \quad (6)$$



где $K_{m,i} = 2M_i$. Его смысл заключается в том, чтобы в случае, когда вспомогательная переменная равна единице, гарантировать выполнение ограничения.

3. ФУНКЦИОНАЛ

С учетом введенных переменных и ограничений получаем следующую задачу минимизации:

$$\sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \delta_{i,j} + \sum_{i=1}^I K_{si,i} \tilde{\delta}_i^{si} + \sum_{i=1}^I K_{fe,i} \tilde{\delta}_i^{fe} + \sum_{i=1}^I K_{m,i} \tilde{\delta}_i^m \rightarrow \min_{\delta_{i,j}, \tilde{\delta}_i^{si}, \tilde{\delta}_i^{fe}, \tilde{\delta}_i^m, i=1, \dots, I, j=1, \dots, J} \quad (7)$$

4. СМЫСЛ ВСПОМОГАТЕЛЬНЫХ ПЕРЕМЕННЫХ

Как можно видеть из определения функционала (7), переменные $\delta_{i,j}^{si}$ входят в него с коэффициентом 1, а вспомогательные переменные $\tilde{\delta}_i^{si}$, $\tilde{\delta}_i^{fe}$, $\tilde{\delta}_i^m$ с большими положительными коэффициентами $K_{si,i}$, $K_{fe,i}$, $K_{m,i}$ соответственно. Такой подход необходим, чтобы при решении задачи минимизации программа-решатель отдавала предпочтение использованию переменных $\delta_{i,j}^{si}$, поскольку использование любой из вспомогательных переменных $\tilde{\delta}_i^{si}$, $\tilde{\delta}_i^{fe}$, $\tilde{\delta}_i^m$ (то есть присваивание ей значения 1) приведет к значительному увеличению значения функционала. Если же в оптимальном решении, полученном в результате работы программы-решателя будет задействована хотя бы одна из вспомогательных переменных $\tilde{\delta}_i^{si}$, $\tilde{\delta}_i^{fe}$, $\tilde{\delta}_i^m$, это будет индикатором того, что данного множества электролизеров E недостаточно для выполнения плана по выливке алюминия-сырца в вакуум ковши из множества вакуум-ковшей K .

5. ГИПОТЕЗА И ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ

Была выдвинута гипотеза, согласно которой решение поставленной задачи целочисленного линейного программирования позволит сократить число отклонений от плана производства. Для проверки гипотезы была написана программа на языке Python и проведен вычислительный эксперимент. В качестве решателя задачи целочисленного линейного программирования была использована open-source библиотека PuLP. Для вычислительного эксперимента были использованы исторические данные электролизного отделения литейного цеха. В табл. указаны значения параметров $K_{si,i}$, $K_{fe,i}$, $K_{m,i}$, использованные в вычислительном эксперименте.

В результате вычислительного эксперимента было получено оптимальное решение. Иногда алгоритм “перевыполняет” план производства, заполняя вакуум-ковши алюминием-сырцом более высокого качества, чем требуется. Также в некоторых случаях алгоритм использует меньше электролизеров для выливки вакуум-ковша, чем использовали сотрудники завода согласно историческим данным.



6. ЗНАЧЕНИЯ ПАРАМЕТРОВ

$K_{si,i}$	$400M_i$
$K_{fe,i}$	$600M_i$
$K_{m,i}$	$2M_i$
Δ	500

Впрочем, алгоритм не всегда справляется с составлением оптимального плана выливки алюминия-сырца в вакуум-ковши. Для некоторых бригад и отдельных вакуум-ковшей программа не смогла найти оптимальный способ выливки алюминия-сырца в вакуум-ковш. Исходя из анализа решения был сделан вывод о недостаточности множества электролизеров E для нахождения оптимального решения поставленной задачи для некоторых бригад. На реальном производстве, если у некоторой бригады не хватает доступных электролизеров для выполнения плана производства, используются электролизеры другой бригады. В текущей версии математической постановки задачи использование электролизеров другой бригады не предусмотрено.

7. АНАЛИЗ ПОЛУЧЕННЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

В результате работы алгоритма было получено распределение электролизеров между вакуум-ковшами, которое удовлетворяет требованиям плана производства в 83 % случаев. Для сравнения, аналогичный показатель, посчитанный на исторических данных равен 58 %. Из этих 83 % в 19 % случаев план производства был выполнен в точности и в 64 % случаев перевыполнен. Для сравнения, аналогичные показатели, посчитанные на исторических данных равны 53,6 % и 4,4 % соответственно. Из этого можно сделать вывод, что предлагаемый алгоритм чаще перевыполняет план, то есть заполняет вакуум-ковши алюминием-сырцом более высокого качества, чем требуется согласно плану производства. Основываясь на этих данных можно сделать вывод об эффективности предлагаемого алгоритма.

8. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

По результатам выполнения работы составлена математическая модель задачи о назначении производственных ресурсов с ограничениями в виде задачи целочисленного линейного программирования. Сформулирована гипотеза, согласно которой предложенное решение поставленной задачи позволит сократить число отклонений от плана производства. Для проверки гипотезы написана программа на языке Python с использованием open-source библиотеки PuLP. На основе исторических данных сначала была проведена симуляция процесса распределения электролизеров между вакуум-ковшами. Затем было проведено сравнение распределения электролизеров,



полученного в результате решения поставленной задачи и распределения электролизеров из исторических данных. По результатам сравнения сделан вывод об эффективности предлагаемого алгоритма.

В дальнейшей работе планируется проведение эксперимента по замене односторонних ограничений на максимально допустимые доли содержания кремния, железа и меди в вакуум-ковшах на двусторонние. Это необходимо, чтобы алгоритм не пытался перевыполнить план, как это происходит при односторонних ограничениях в текущей математической постановке задачи. Также планируется добавить возможность использования при поиске решения электролизеров не только рассматриваемой бригады, но и других бригад. Согласно гипотезе, это должно повысить качество решения.

Литература

1. Кабулова Е.Г. Интеллектуальное управление многостадийными системами металлургического производства // Моделирование, оптимизация и информационные технологии. – 2019. – Т. 7. – № 1(24). – С. 341–351. – DOI 10.26102/2310-6018/2019.24.1.022
2. О задаче назначения “технологического окна” на участках железнодорожной сети / Гайданов Д.Н., Игнатов А.Н., Наумов А.В., Рассказова В.А. // Автоматика и телемеханика. – 2020. – № 6. – С. 3–16. – DOI 10.31857/S0005231020060013
3. Лазарев А.А., Мусатова Е.Г. Целочисленные постановки задачи формирования железнодорожных составов и расписания их движения // Управление большими системами: сборник трудов. – 2012. – № 38. – С. 161–169
4. Шевченко В.Н., Золотых Н.Ю. Линейное и целочисленное линейное программирование. Нижний Новгород: Издательство Нижегородского государственного университета им. Н.И. Лобачевского, 2004
5. Схрейвер А. Теория линейного и целочисленного программирования. М.: Мир, 1991
6. Сигал И.Х., Иванова А.П. Введение в прикладное дискретное программирование. Модели и вычислительные алгоритмы. М.: Физматлит, 2007
7. Appa G.M., Pitsoulis L.S., Paul W.H. (Eds.) Handbook on modeling for discrete optimization. Springer Series, Int. Series in Operations Research & Management Science, vol. 88, XXII, 2006
8. Pochet Y., Wolsey L.A. Production planning by mixed integer programming. In: Springer Series in Operations Research & Financial Engineering (Eds. Mikosh, T. V., Resnick, S. I., Robinson, S. M.). 2006
9. Integer Linear Programming in Solving an Optimization Problem at the Mixing Department of the Metallurgical Production. / Gainanov D.N., Berenov D.A., Nikolaev E.A., Rasskazova V.A. Lecture Notes in Computer Science (2023) vol. 13621, pp. 145–161. doi: https://doi.org/10.1007/978-3-031-24866-5_12



The Problem of Allocation of Production Resources with a System of Constraints

Varvara A. Rasskazova*

Moscow Aviation Institute (National Research University) (MAI), Moscow, Russia
ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-4943-3133>
e-mail: varvara.rasskazova@mail.ru

Alexey A. Skuridin**

Moscow Aviation Institute (National Research University) (MAI), Moscow, Russia
ORCID: <https://orcid.org/0009-0002-6466-2110>
e-mail: aasallex@gmail.com

The problem of optimizing production and resource allocation have been always relevant. The paper deals with the problem of allocation of production resources with a system of constraints. As an example, the problem of optimizing the process of pouring raw aluminum into vacuum buckets in the electrolysis department of the foundry is considered. To solve this problem, a model of integer linear programming is proposed. The advantage of this approach is the ability to flexibly configure the system of constraints and minimized of objective in accordance with production priorities. The paper discusses the software implementation of the developed model and presents the results of a numerical experiment based on test samples. Based on the obtained solution, a conclusion is made about the effectiveness of the integer linear programming model in this optimization problem.

Keywords: integer linear programming, optimization problem, production optimization, metallurgy.

For citation:

Rasskazova V.A., Skuridin A.A. The Problem of Allocation of Production Resources with a System of Constraints. *Modelirovanie i analiz dannykh = Modelling and Data Analysis*, 2023. Vol. 13, no. 2, pp. 142–150. DOI: 10.17759/mda.2023130208 (In Russ., abstr. in Engl.).

References

1. Kabulova E.G. Intellektual'noe upravlenie mnogostadiinymi sistemami metallurgicheskogo proizvodstva [Intelligent management of multi-stage systems of metallurgical production]. *Modelirovanie, optimizatsiya i informatsionnye tekhnologii*. [Modeling, optimization and information technology.] – 2019. – T. 7. – № 1(24). – S. 341–351. – DOI 10.26102/2310-6018/2019.24.1.022

***Varvara A. Rasskazova**, PhD (Physics and Mathematics), Associate Professor, Department of Probability Theory and Computer Modeling, Institute of Computer Science and Applied Mathematics, Moscow Aviation Institute (National Research University) (MAI), Moscow, Russia, ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-4943-3133>, e-mail: varvara.rasskazova@mail.ru

****Alexey A. Skuridin**, Graduate Student, Department of the Institute of Computer Science and Applied Mathematics, Moscow Aviation Institute (National Research University) (MAI), Moscow, Russia, ORCID: <https://orcid.org/0009-0002-6466-2110>, e-mail: aas-allex@gmail.com



2. O zadache naznacheniya “tekhnologicheskogo okna” na uchastkakh zheleznodorozhnoi seti [About the task of assigning a “technological window” on sections of the railway network]. Gainanov D.N., Ignatov A.N., Naumov A.V., Rasskazova V.A. *Avtomatika i telemekhanika*. [Automation and telemechanics.] – 2020. – № 6. – S. 3–16. – DOI 10.31857/S0005231020060013
3. Lazarev A.A., Musatova E.G. Tselochislennye postanovki zadachi formirovaniya zheleznodorozhnykh sostavov i raspisaniya ikh dvizheniya [Integer statements of the problem of forming railway trains and their schedules]. *Upravlenie bol’shimi sistemami: sbornik trudov*. [Managing large systems: a collection of works.] – 2012. – № 38. – S. 161–169
4. Shevchenko V.N., Zolotykh N. Yu. Lineinoe i tselochislennoe lineinoe programmirovaniye. [Linear and integer linear programming.] Nizhnii Novgorod: Izdatel’stvo Nizhegorodskogo gosuniversiteta im. N.I. Lobachevskogo [Nizhni Novgorod University Press (NNUP)], 2004
5. Skhreiber A. Teoriya lineinogo i tselochislennogo programmirovaniya. [Theory of linear and integer programming.] Moscow: Mir, 1991
6. Sigal I. Kh., Ivanova A.P. Vvedenie v prikladnoe diskretnoe programmirovaniye. Modeli i vychislitel’nye algoritmy. [Introduction to applied discrete programming. Models and computational algorithms.] Moscow: Fizmatlit, 2007
7. Appa G.M., Pitsoulis L.S., Paul, W. H. (Eds.) Handbook on modeling for discrete optimization. Springer Series, Int. Series in Operations Research & Management Science, vol. 88, XXII, 2006
8. Pochet Y., Wolsey L.A. Production planning by mixed integer programming. In: Springer Series in Operations Research & Financial Engineering (Eds. Mikosh, T. V., Resnick, S. I., Robinson, S. M.). 2006
9. Integer Linear Programming in Solving an Optimization Problem at the Mixing Department of the Metallurgical Production. Gainanov D.N., Berenov D.A., Nikolaev E.A., Rasskazova V.A. *Lecture Notes in Computer Science* (2023), vol. 13621, pp. 145–161. doi: https://doi.org/10.1007/978-3-031-24866-5_12

Получена 17.04.2023

Принята в печать 17.05.2023

Received 17.04.2023

Accepted 17.05.2023

Суперэллипсоидальные аппроксимации в задаче быстрогодействия для двумерной линейной дискретной системы с ограниченным управлением

Ибрагимов Д.Н.*

Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет) (МАИ), г. Москва, Российская Федерация

ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-7472-5520>

e-mail: rikk.dan@gmail.com

Подгорная В.М.**

Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет) (МАИ), г. Москва, Российская Федерация

ORCID: <https://orcid.org/0009-0004-9956-3002>

e-mail: vita1401@outlook.com

В статье рассматривается двумерная линейная дискретная система с ограниченным управлением. Для системы решается задача быстрогодействия, то есть построение процесса управления, который переводит систему из начального состояния в начало координат за минимальное число шагов. Если множество допустимых значений управления имеет структуру суперэллипса, то задача вычисления оптимального управления может быть сведена к решению системы алгебраических уравнений. Для множеств произвольной структуры разработан метод суперэллипсоидальной аппроксимации. Приведены примеры.

Ключевые слова: линейная система управления, задача быстрогодействия, множества 0-управляемости, принцип максимума, суперэллипс.

Для цитаты:

Ибрагимов Д.Н., Подгорная В.М. Суперэллипсоидальные аппроксимации в задаче быстрогодействия для двумерной линейной дискретной системы с ограниченным управлением // Моделирование и анализ данных. 2023. Том 13. № 2. С. 151–179. DOI: <https://doi.org/10.17759/mda.2023130209>

***Ибрагимов Данис Наилевич**, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры теории вероятностей и компьютерного моделирования, Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет) (МАИ), г. Москва, Российская Федерация, ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-7472-5520>, e-mail: rikk.dan@gmail.com

****Подгорная Виолетта Михайловна**, магистрант, инженер кафедры теории вероятностей и компьютерного моделирования, Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет) (МАИ), г. Москва, Российская Федерация, ORCID: <https://orcid.org/0009-0004-9956-3002>, e-mail: vita1401@outlook.com



1. ВВЕДЕНИЕ

Одним из естественных функционалов качества управления является время, затрачиваемое системой на достижение заданного терминального состояния. На практике полученная задача оптимального управления называется задачей быстродействия. Существенно, что задача быстродействия для линейных дискретных систем обладает рядом серьезных отличий от аналогичной задачи для непрерывных систем. В то время как в случае непрерывного времени решение, полученное на основе принципа максимума Понтрягина [10] для линейной системы, гарантирует релейный характер оптимального по быстродействию управления, аналогичные системы с дискретным временем [11, 12] в силу дискретного характера функционала качества предполагают принципиально иные критерии оптимальности.

Рассмотрение условий оптимальности процесса при использовании различных классических подходов приводит к двум принципиально отличающимся методам формирования оптимального управления. Метод динамического программирования Беллмана [8] позволяет построить оптимальное управление в позиционной форме. В случае, когда множество допустимых значений управления представляет собой многогранник, вычисление каждого управляющего воздействия сводится к решению задачи линейного программирования [6]. Также в [6] продемонстрирован метод формирования оптимального управления в случае произвольных выпуклых ограничений на управление, основанный на проведении полиэдральной аппроксимации [9]. Такой подход обладает рядом недостатков, связанных в основном с вычислительными сложностями. Повышение точности гарантирующего решения в задаче быстродействия достигается за счет наращивания числа вершин полиэдральной аппроксимации, что в итоге приводит к экспоненциальному росту сложности соответствующих задач линейного программирования. По этой причине данный подход при реализации на стандартных вычислительных устройствах отличается либо малой точностью решения, либо сравнительно небольшим временным горизонтом особенно для систем большой размерности.

Напротив, сочетание условий оптимальности с дискретным принципом максимума [10–12] позволяет формировать оптимальное программное управление [4]. Однако существенным условием применимости данных методов является строгая выпуклость множества допустимых значений управления. С другой стороны, соотношение для начального состояния сопряженной системы в случае произвольной структуры ограничений на управление довольно трудно разрешить. В [7] представлен частный случай эллипсоидальной структуры множества допустимых значений управления, а также аналитическое решение задачи быстродействия для такой системы на основе необходимых и достаточных условий оптимальности, представленных в [4].

Естественным подходом является объединение идей построения гарантирующего решения из [6] на основе проведения эллипсоидальной аппроксимации множества допустимых значений управления в сочетании с методами формирования программного управления согласно принципу максимума [4, 7]. Методика эллипсоидальной аппроксимации широко распространена в теории оптимального управления [19, 13].



Однако класс эллипсоидов не позволяет добиться произвольной точности аппроксимации исходного множества, а следовательно, и точности решения задачи оптимального управления. С другой стороны, класс суперэллипсоидальных множеств [14, 15] допускает большой порядок точности при сохранении условий строгой выпуклости, что гарантирует простоту решения поставленной задачи аналогично [7].

Целью данной работы является разработка метода формирования оптимального управления в явном виде для случая суперэллипсоидальной структуры множества допустимых значений управления, а также описание подхода построения суперэллипсоидальной аппроксимации произвольного выпуклого тела с максимально возможной точностью на плоскости. Принципиальным отличием от известных результатов по данной тематике [16–18] является рассмотрение произвольного векторного управления, на значения которого наложены выпуклые ограничения.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. ОБОЗНАЧЕНИЯ

В рамках данной работы будем предполагать, что фазовое пространство совпадает с \mathbb{R}^2 , которое является евклидовым со скалярным произведением, определяемым соотношением

$$(x, y) = x_1 y_1 + x_2 y_2.$$

Для произвольного $r \in [1; +\infty)$ введем на \mathbb{R}^2 норму

$$\|x\|_r = \left(|x_1|^r + |x_2|^r \right)^{\frac{1}{r}}.$$

При $r = 2$ норма $\|\cdot\|_2$ оказывается согласованной со скалярным произведением. Значение $r = 1$ с точки зрения теории является допустимым, но в рамках данной работы рассматриваться не будет, что позволяет ввести число $q > 1$ как сопряженное по Гельдеру числу r :

$$\frac{1}{r} + \frac{1}{q} = 1.$$

Для произвольных множеств $\mathcal{X}, \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2$ и матрицы $D \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ через $\mathcal{X} + \mathcal{U}$ будем обозначать сумму по Минковскому:

$$\mathcal{X} + \mathcal{U} = \{x + u : x \in \mathcal{X}, u \in \mathcal{U}\},$$

а через $D\mathcal{U}$ – образ множества \mathcal{U} при воздействии на него отображения D :

$$D\mathcal{U} = \{Du : u \in \mathcal{U}\}.$$

Через $\partial\mathcal{U}$ и $\text{int } \mathcal{U}$ обозначим множества граничных и внутренних точек \mathcal{U} соответственно. Под $\text{cone}\{\mathcal{U}\}$ будем понимать коническую оболочку множества \mathcal{U} [3, §2 гл. I].



Если множество $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2$ является выпуклым компактом, то для произвольной точки $u \in \mathcal{U}$ через $\mathcal{N}(u, \mathcal{U})$ обозначим нормальный конус множества \mathcal{U} в точке u :

$$\mathcal{N}(u, \mathcal{U}) = \left\{ p \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} : (p, u) = \max_{\tilde{u} \in \mathcal{U}} (p, \tilde{u}) \right\},$$

элементы нормального конуса $\mathcal{N}(u, \mathcal{U})$ будем называть векторами, опорными к \mathcal{U} в точке u . Заметим, что по построению $\mathcal{N}(u, \mathcal{U}) = \emptyset$ тогда и только тогда, когда $u \in \text{int } \mathcal{U}$. Если также верно включение $0 \in \text{int } \mathcal{U}$, то для произвольного $x \in \mathbb{R}^2$ введем функционал Минковского [1, раздел 3 §2 гл. III] или калибровочную функцию [3 §4 гл. I]:

$$M(x, \mathcal{U}) = \inf \{ t > 0 : x \in t\mathcal{U} \} = \inf \left\{ t > 0 : \frac{x}{t} \in \mathcal{U} \right\}.$$

Будем называть суперэллипсом или суперэллипсоидальным множеством $\mathcal{E}_r(a_1, a_2) \subset \mathbb{R}^2$ для некоторых $a_1 > 0, a_2 > 0, r > 1$ множество вида

$$\mathcal{E}_r(a_1, a_2) = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 : \left| \frac{x_1}{a_1} \right|^r + \left| \frac{x_2}{a_2} \right|^r \leq 1 \right\}. \quad (1)$$

Для краткости будем полагать $a = (a_1, a_2)^T$ и обозначать соответствующий суперэллипс через $\mathcal{E}_r(a)$. Под $\text{diag}(a) \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ будем полагать диагональную матрицу, построенную из вектора $a \in \mathbb{R}^2$:

$$\text{diag}(a) = \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix}.$$

3. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ БЫСТРОДЕЙСТВИЯ

Рассматривается линейная дискретная система с ограниченным управлением (A, \mathcal{U}) :

$$\begin{aligned} x(k+1) &= Ax(k) + u(k), \\ x(0) &= x, \quad u(k) \in \mathcal{U}, \quad k \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \end{aligned} \quad (2)$$

где $x(k) \in \mathbb{R}^2$ – вектор состояния системы, $u(k) \in \mathbb{R}^2$ – управляющее воздействие, $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ – матрица системы, $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2$ – множество допустимых значений управлений. Предполагается, что $\det A \neq 0$, \mathcal{U} – выпуклый компакт, $0 \in \text{int } \mathcal{U}$.

Для системы (2) решается задача быстродействия, т.е. требуется перевести систему (A, \mathcal{U}) из заданного начального состояния $x_0 \in \mathbb{R}^2$ в начало координат за минимальное число шагов N_{\min} :

$$N_{\min} = \min \{ N \in \mathbb{N} \cup \{0\} : \exists u(0), \dots, u(N-1) \in \mathcal{U} : x(N) = 0 \}.$$

Процесс управления $\{x^*(k), u^*(k-1), x_0\}_{k=1}^{N_{\min}}$, удовлетворяющий условию $x^*(N_{\min}) = 0$, будем называть оптимальным. Предполагается, что задача быстродей-



ствия для системы (A, \mathcal{U}) разрешима, т.е. $N_{\min} < \infty$. Подробно вопросы разрешимости задачи быстрогодействия для системы (2) рассмотрены в [21].

Вопросы построения оптимальных по быстроддействию процессов тесно связаны с аппаратом множеств 0-управляемости [4,6]. Для произвольного $N \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ обозначим через $\mathcal{X}(N) \subset \mathbb{R}^2$ множество 0-управляемости системы (2) за N шагов, т.е. множество тех начальных состояний, из которых систему (2) возможно перевести в 0 за N шагов посредством выбора допустимых управляющих воздействий:

$$\mathcal{X}(N) = \begin{cases} \{x_0 \in \mathbb{R}^2 : \exists u(0), \dots, u(N-1) \in \mathcal{U} : x(N) = 0\}, & N \in \mathbb{N}, \\ \{0\}, & N = 0. \end{cases} \quad (3)$$

Тогда согласно определению N_{\min} также справедливо представление:

$$N_{\min} = \min \{N \in \mathbb{N} \cup \{0\} : x_0 \in \mathcal{X}(N)\}. \quad (4)$$

При этом управление, как продемонстрировано в [4,6], оптимально тогда и только тогда, когда для всех $k = 0, N_{\min} - 1$ верно включение

$$x^*(k+1) = Ax^*(k) + u^*(k) \in \mathcal{X}(N_{\min} - k - 1). \quad (5)$$

Известно решение задачи быстрогодействия в форме принципа максимума для строго выпуклого \mathcal{U} .

Теорема 1 ([4, теорема 5]). Пусть $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2$ – строго выпуклое и компактное множество, $0 \in \text{int } \mathcal{U}$, $\det A \neq 0$, класс множеств $\{\mathcal{X}(N)\}_{N=0}^{\infty}$ определяется согласно (3), процесс управления $\{x^*(k), u^*(k-1), x_0\}_{k=1}^{N_{\min}}$ и траектория сопряженной системы $\{\psi(k)\}_{k=1}^{N_{\min}-1}$ удовлетворяют соотношениям

$$\begin{aligned} x^*(k+1) &= Ax^*(k) + u^*(k), \\ u^*(k) &= \alpha \arg \max_{u \in \mathcal{U}} \left((A^{-1})^T \psi(k), u \right), \\ \psi(k+1) &= (A^{-1})^T \psi(k), \\ x^*(0) &= x_0, \\ -\psi(0) &\in \mathcal{N}(x_0, \alpha \mathcal{X}(N_{\min})), \\ \alpha &= M(x_0, \mathcal{X}(N_{\min})). \end{aligned}$$

Тогда

1. $\{x^*(k), u^*(k-1), x_0\}_{k=1}^{N_{\min}}$ – оптимальный по быстроддействию процесс системы (A, \mathcal{U}) ;
2. если $\alpha = 1$, то оптимальный процесс единственный;
3. $-\psi(k) \in \mathcal{N}(x^*(k), \alpha \mathcal{X}(N_{\min} - k)), k = 0, N_{\min} - 1$.



4. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ АППРОКСИМАЦИИ

С вычислительной точки зрения вопрос применения теоремы 1 сводится к определению α и $\psi(0)$ из условий

$$\begin{aligned} -\psi(0) &\in \mathcal{N}(x_0, \alpha \mathcal{X}(N_{\min})), \\ \alpha &= M(x_0, \mathcal{X}(N_{\min})), \end{aligned} \quad (6)$$

что в случае произвольного выпуклого тела \mathcal{U} может быть нетривиальной задачей.

Основной целью данной работы является построение эффективных методов разрешения условий (6) относительно $\psi(0) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ и $\alpha > 0$ для частного случая, когда \mathcal{U} допускает представление

$$\mathcal{U} = B\mathcal{E}_r(a), \quad B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}, \det B \neq 0, a_1, a_2 > 0, r > 1. \quad (7)$$

Другой целью статьи является разработка метода аппроксимации произвольного выпуклого тела \mathcal{U} вложенным в него множеством $\hat{\mathcal{U}}$ вида (7), минимизирующим меру Лебега разности двух множеств $\mu(\mathcal{U} \setminus \hat{\mathcal{U}})$, с целью построения гарантирующего решения в задаче быстродействия для системы (A, \mathcal{U}) .

5. ОПТИМАЛЬНЫЙ ПРОЦЕСС В СЛУЧАЕ СУПЕРЭЛЛИПСОИДАЛЬНОЙ СТРУКТУРЫ ОГРАНИЧЕНИЙ НА УПРАВЛЕНИЕ

Покажем, что условия (6) можно свести к эквивалентной системе алгебраических уравнений в случае (7). Для этого приведем аналитическое описание множеств 0-управляемости и некоторые свойства строго выпуклых и суперэллипсоидальных множеств.

Лемма 1 ([4, лемма 1]). Пусть $\det A \neq 0$, класс множеств $\{\mathcal{X}(N)\}_{N=0}^{\infty}$ определяется соотношениями (3). Тогда для любого $N \in \mathbb{N}$ верно представление

$$\mathcal{X}(N) = -\sum_{k=1}^N A^{-1} \mathcal{U}.$$

Лемма 2 ([5, лемма 3]). Пусть $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2$ – строго выпуклый компакт. Тогда для любых различных $u^1, u^2 \in \mathcal{U}$ верно

$$\mathcal{N}(u^1, \mathcal{U}) \cap \mathcal{N}(u^2, \mathcal{U}) = \emptyset.$$

Лемма 3 ([5, леммы 5,6]). Пусть $\mathcal{U}, \mathcal{X} \subset \mathbb{R}^2$ – выпуклые компакты, $u \in \mathcal{U}$, $x \in \mathcal{X}$, $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$, $\det A \neq 0$.

Тогда

1. $\mathcal{N}(u+x, \mathcal{U} + \mathcal{X}) = \mathcal{N}_T^-(u, \mathcal{U}) \cap \mathcal{N}(x, \mathcal{X})$;
2. $\mathcal{N}(Ax, A\mathcal{X}) = (A^{-1})^T \mathcal{N}(x, \mathcal{X})$.

Лемма 3 определяет преобразование нормального конуса выпуклых множеств при невырожденном линейном преобразовании и сложении по Минковскому. С уче-



том леммы 1 это позволяет описать произвольный нормальный конус любого множества 0-управляемости в терминах нормальных конусов множества \mathcal{U} или $\mathcal{E}_r(a_1, a_2)$ в случае (7). С другой стороны, лемма 2 позволяет установить взаимоднозначное соответствие между граничной точкой и ее нормальным конусом для строго выпуклого множества. Если данную зависимость описать в явном виде, то можно получить алгебраические уравнения, эквивалентные условиям (6).

Введем для произвольного $r > 1$ биективный оператор $I_r : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, действующий по правилу

$$I_r(x) = \left(\text{sign}(x_1)|x_1|^{r-1}, \text{sign}(x_2)|x_2|^{r-1} \right)^T.$$

Лемма 4. Пусть множество $\mathcal{E}_r(a)$ определяется соотношениями (1). Тогда

1. для любого $x \in \partial \mathcal{E}_r(a)$

$$\mathcal{N}(x, \mathcal{E}_r(a)) = \text{cone} \left\{ \text{diag}(a)^{-1} I_r \left(\text{diag}(a)^{-1} x \right) \right\} \setminus \{0\}.$$

2. для любого $p \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ существует единственная

$$x^*(p) = \arg \max_{x \in \mathcal{E}_r(a)} (p, x) = \frac{\text{diag}(a) I_r \left(\text{diag}(a) p \right)}{\text{diag}(a) p^{q-1}}.$$

Доказательство. 1) Поскольку функционал Минковского множества (1) является гладкой функцией на всем \mathbb{R}^n :

$$M(x, \mathcal{E}_r(a)) = \left(\left| \frac{x_1}{a_1} \right|^r + \left| \frac{x_2}{a_2} \right|^r \right)^{\frac{1}{r}},$$

то согласно [3, теорема 26.1] для произвольного $x \in \partial \mathcal{E}_r(a)$ верно представление

$$\begin{aligned} \mathcal{N}(x, \mathcal{E}_r(a)) &= \text{cone} \left\{ \nabla_x M(x, \mathcal{E}_r(a)) \right\} \setminus \{0\} = \\ &= \text{cone} \left\{ \frac{1}{r} \left(\left| \frac{x_1}{a_1} \right|^r + \left| \frac{x_2}{a_2} \right|^r \right)^{\frac{1}{r}-1} \left(\frac{r|x_1|^{r-1} \text{sign}(x_1)}{|a_1|^r}, \frac{r|x_2|^{r-1} \text{sign}(x_2)}{|a_2|^r} \right)^T \right\} \setminus \{0\} = \\ &= \text{cone} \left\{ \left(\frac{|x_1|^{r-1} \text{sign}(x_1)}{|a_1|^r}, \frac{|x_2|^{r-1} \text{sign}(x_2)}{|a_2|^r} \right)^T \right\} \setminus \{0\}. \end{aligned}$$

Отсюда следует пункт 1 леммы 4.

2) Согласно определению нормального конуса верно включение

$$p \in \mathcal{N}(x^*(p), \mathcal{E}_r(a)).$$

Тогда с учетом пункта 1 леммы 4 найдется $\alpha > 0$ такое, что

$$p = \alpha \left(\frac{|x_1^*(p)|^{r-1} \text{sign}(x_1^*(p))}{|a_1|^r}, \frac{|x_2^*(p)|^{r-1} \text{sign}(x_2^*(p))}{|a_2|^r} \right)^T,$$



$$\begin{aligned} x^*(p) &= \frac{1}{\alpha^{r-1}} \left(|p_1 a_1^r|^{\frac{1}{r-1}} \text{sign}(p_1), |p_2 a_2^r|^{\frac{1}{r-1}} \text{sign}(p_2) \right)^T = \\ &= \frac{1}{\alpha^{q-1}} \left(|p_1|^{|q-1|} a_1^q \text{sign}(p_1), |p_2|^{|q-1|} a_2^q \text{sign}(p_2) \right)^T = \frac{1}{\alpha^{q-1}} \text{diag}(a) I_q (\text{diag}(a) p). \end{aligned}$$

Величину α можно вычислить из условия $x^*(p) \in \partial \mathcal{E}_r(a)$, которое эквивалентно равенству

$$\begin{aligned} &\left(\left| \frac{x_1^*(p)}{a_1} \right|^r + \left| \frac{x_2^*(p)}{a_2} \right|^r \right)^{\frac{1}{r}} = 1, \\ 1 &= \frac{1}{\alpha^{q-1}} \left(\left| \frac{|p_1|^{|q-1|} a_1^q}{a_1} \right|^r + \left| \frac{|p_2|^{|q-1|} a_2^q}{a_2} \right|^r \right)^{\frac{1}{r}} = \frac{1}{\alpha^{q-1}} \left(|p_1 a_1|^q + |p_2 a_2|^q \right)^{\frac{1}{r}}, \\ \alpha^{q-1} &= \left(|p_1 a_1|^q + |p_2 a_2|^q \right)^{\frac{1}{r}} = \text{diag}(a) p_q^{q-1}. \end{aligned}$$

Второй пункт леммы 4 полностью доказан.

Лемма 5. Пусть $\mathcal{U} = D\mathcal{E}_r(a)$, где $\mathcal{E}_r(a)$ определяется соотношениями (1), $D \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$, $\det D \neq 0$. Тогда

1. для любого $u \in \partial \mathcal{U}$

$$\mathcal{N}(u, \mathcal{U}) = \text{cone} \left\{ \left(D^{-1} \right)^T \text{diag}(a)^{-1} I_r \left(\text{diag}(a)^{-1} \left(D^{-1} \right)^T u \right) \right\} \setminus \{0\}.$$

2. для любого $p \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ существует единственная

$$u^*(p) = \arg \max_{u \in \mathcal{U}} (p, u) = \frac{D \text{diag}(a) I_q (\text{diag}(a) D^T p)}{\text{diag}(a) D^T p_q^{q-1}}.$$

Доказательство. Пункт 1 следует из пункта 1 леммы 4, пункта 2 леммы 3 и представления

$$\mathcal{N}(u, \mathcal{U}) = \mathcal{N}(DD^{-1}u, D\mathcal{E}_r(a)).$$

Пункт 2 следует из пункта 2 леммы 4 и цепочки равенств

$$\arg \max_{u \in \mathcal{U}} (p, u) = D \arg \max_{x \in \mathcal{E}_r(a)} (p, Dx) = D \arg \max_{x \in \mathcal{E}_r(a)} (D^T p, x).$$

Лемма 5, с одной стороны, позволяет вычислить оптимальное управление согласно теореме 1 в случае (7) при выборе $D = B$. С другой стороны, лемма 5 в сочетании с леммами 1 и 2 позволяет связать точку на границе множества 0-управляемости с элементом ее нормального конуса при выборе $D = -A^{-k}B$, что позволяет свести условия (6) к эквивалентным алгебраическим уравнениям. Сформулируем данный факт в виде теоремы.

Теорема 2. Пусть \mathcal{U} определяется согласно (7), $x_0 \neq 0$. Тогда $\psi(0) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ и $\alpha > 0$ удовлетворяют условиям (6) тогда и только тогда, когда справедливы соотношения

$$\begin{cases} -x_0 = \alpha \sum_{k=1}^{N_{\min}} \frac{A^{-k} B \text{diag}(a) I_q \left(\text{diag}(a) (A^{-k} B)^T \psi(0) \right)}{\text{diag}(a) (A^{-k} B)^T \psi(0)_q^{q-1}}, \\ \alpha > 0. \end{cases}$$

Доказательство. Пусть $\psi(0) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ и α удовлетворяют условиям (6). Поскольку $x_0 \neq 0$, согласно определению функционала Минковского $\alpha > 0$ и верно включение $\frac{x_0}{\alpha} \in \partial \mathcal{X}(N_{\min})$. С учетом леммы 1 и представления (7) также справедливо

$$\frac{x_0}{\alpha} \in \partial \left(-\sum_{k=1}^{N_{\min}} A^{-k} \mathcal{U} \right) = \partial \sum_{k=1}^{N_{\min}} A^{-k} B \mathcal{E}_r(a).$$

Тогда в силу определения алгебраической суммы множеств найдутся такие $x^1 \in A^{-1} B \mathcal{E}_r(a), \dots, x^{N_{\min}} \in A^{-N_{\min}} B \mathcal{E}_r(a)$, что

$$\frac{x_0}{\alpha} = \sum_{k=1}^{N_{\min}} x^k. \tag{8}$$

С учетом пункта 1 леммы 3

$$\begin{aligned} -\psi(0) &\in \mathcal{N} \left(\frac{x_0}{\alpha}, \mathcal{X}(N_{\min}) \right) = \mathcal{N} \left(\sum_{k=1}^{N_{\min}} x^k, \sum_{k=1}^{N_{\min}} A^{-k} B \mathcal{E}_r(a) \right) = \\ &= \bigcap_{k=1}^{N_{\min}} \mathcal{N} \left(x^k, A^{-k} B \mathcal{E}_r(a) \right), \end{aligned}$$

откуда в силу пункта 2 леммы 5 следует, что

$$x^k = \frac{A^{-k} B \text{diag}(a) I_q \left(-\text{diag}(a) (A^{-k} B)^T \psi(0) \right)}{\text{diag}(a) (A^{-k} B)^T \psi(0)_q^{q-1}}.$$

Поскольку $I_q(-x) = -I_q(x)$ для любого $x \in \mathbb{R}^2$, из (8) получим

$$\frac{x_0}{\alpha} = \sum_{k=1}^{N_{\min}} x^k = -\frac{A^{-k} B \text{diag}(a) I_q \left(\text{diag}(a) (A^{-k} B)^T \psi(0) \right)}{\text{diag}(a) (A^{-k} B)^T \psi(0)_q^{q-1}},$$

т.е. $\psi(0) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ и $\alpha > 0$ удовлетворяют указанной в условии теоремы 2 системе.

Пусть $\psi(0) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ и $\alpha > 0$ удовлетворяют указанной в условии теоремы 2 системе. Введем обозначение



$$x^k = \frac{A^{-k} B \text{diag}(a) I_q \left(-\text{diag}(a) (A^{-k} B)^T \psi(0) \right)}{\text{diag}(a) (A^{-k} B)^T \psi(0)_q^{q-1}}.$$

Тогда с учетом нечетности оператора I_q справедливо равенство (8). При этом в силу пункта 2 леммы 5 для всех $k = 1, N_{\min}$ верно

$$x^k = \arg \max_{u \in A^{-k} B \mathcal{E}_r(a)} (-\psi(0), u),$$

что согласно определению нормального конуса эквивалентно включению

$$-\psi(0) \in \mathcal{N}(x^k, A^{-k} B \mathcal{E}_r(a)).$$

Тогда равенство (8) и пункт 1 леммы 3 приводят к соотношениям

$$-\psi(0) \in \bigcap_{k=1}^{N_{\min}} \mathcal{N}(x^k, A^{-k} B \mathcal{E}_r(a)) = \mathcal{N}\left(\frac{x_0}{\alpha}, \sum_{k=1}^{N_{\min}} A^{-k} B \mathcal{E}_r(a)\right),$$

что с учетом симметричности относительно нуля множеств вида (1) и леммы 1 эквивалентно включению

$$-\psi(0) \in \mathcal{N}\left(\frac{x_0}{\alpha}, \mathcal{X}(N_{\min})\right) = \mathcal{N}(x_0, \alpha \mathcal{X}(N_{\min})).$$

Поскольку $\mathcal{N}(x_0, \alpha \mathcal{X}(N_{\min})) \neq \emptyset$, то $x_0 \in \alpha \mathcal{X}(N_{\min})$, что с учетом определения функционала Минковского приводит к равенству

$$\alpha = M(x_0, \mathcal{X}(N_{\min})),$$

то есть справедливы соотношения (6).

Теорема 2 полностью доказана.

Система уравнений, представленная в теореме 2, вообще говоря имеет не единственное решение, поскольку правая часть инвариантна к домножению вектора $\psi(0)$ на любое положительное число. Для использования численных методов можно предложить модификацию данной системы, которая имеет единственное решение.

Следствие 1. Пусть \mathcal{U} определяется согласно (7). Тогда для любого $x_0 \neq 0$ существует единственно решение системы уравнений

$$\left\{ \begin{array}{l} -x_0 = \alpha \sum_{k=1}^{N_{\min}} \frac{A^{-k} B \text{diag}(a) I_q \left(\text{diag}(a) (A^{-k} B)^T \psi(0) \right)}{\text{diag}(a) (A^{-k} B)^T \psi(0)_q^{q-1}}, \\ (\psi(0), \psi(0)) = 1, \\ \alpha > 0, \end{array} \right.$$

которое также удовлетворяет условиям (6).

Доказательство. В силу теоремы 2 решение системы существует и удовлетворяет условиям (6). Тогда в силу леммы 1 и симметрии множеств вида (1) найдутся



такие $x^1 \in A^{-1}B\mathcal{E}_r(a), \dots, x^{N_{\min}} \in A^{-N_{\min}}B\mathcal{E}_r(a)$, что справедливо равенство $x_0 = x^1 + \dots + x^{N_{\min}}$. Откуда в силу пункта 1 леммы 3 следует, что любое решение $(\psi(0), \alpha)$ удовлетворяет включению

$$-\psi(0) \in \mathcal{N}(x_0, \alpha \mathcal{X}(N_{\min})) = \bigcap_{k=1}^{N_{\min}} \mathcal{N}(x^k, A^{-k}B\mathcal{E}_r(a)).$$

Но согласно пункту 1 леммы 5 для всех $k = 1, \overline{N_{\min}}$ множества $\mathcal{N}(x^k, A^{-k}B\mathcal{E}_r(a))$ являются одномерными лучами с началом в 0, т.е. содержат единственный вектор $-\psi(0)$, удовлетворяющий равенству $(\psi(0), \psi(0)) = 1$. Единственность величины $\alpha > 0$ следует из определения функционала Минковского и условий (6).

Теорема 2 и следствие 1 в совокупности с теоремой 1 позволяют полностью решить задачу быстрогодействия для линейной дискретной системы в случае (7). Следствие 1 позволяет численно разрешить (6). Одновременно оптимальный процесс и траектория сопряженной системы могут быть вычислены по рекуррентным соотношениям, представленным в теореме 1. Оптимальное управление явным образом определяется пунктом 2 леммы 5.

Пример 1. Рассмотрим пример составления системы алгебраических уравнений, представленной в следствии 1 для следующих параметров:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}, a_1 = 2, a_2 = 3, r = \frac{4}{3}, q = 4, x_0 = \left(\frac{1}{3}, \frac{4}{3}\right)^T.$$

Для $N = 2$ система имеет вид:

$$\left\{ \begin{aligned} & \frac{0.20(0.20\psi_{01} + 0.81\psi_{02})^3 + 0.91(0.91\psi_{01} - 0.61\psi_{02})^3}{((0.20\psi_{01} + 0.81\psi_{02})^4 + (0.91\psi_{01} - 0.61\psi_{02})^4)^{\frac{3}{4}}} + \\ & + \frac{0.17(0.17\psi_{01} - 0.32\psi_{02})^3 + 0.17(0.17\psi_{01} + 0.39\psi_{02})^3}{((0.17\psi_{01} - 0.32\psi_{02})^4 + (0.17\psi_{01} + 0.39\psi_{02})^4)^{\frac{3}{4}}} = -\frac{1}{3\alpha}, \\ & \frac{0.81(0.20\psi_{01} + 0.81\psi_{02})^3 - 0.61(0.91\psi_{01} - 0.61\psi_{02})^3}{((0.20\psi_{01} + 0.81\psi_{02})^4 + (0.91\psi_{01} - 0.61\psi_{02})^4)^{\frac{3}{4}}} + \\ & + \frac{-0.32(0.17\psi_{01} - 0.32\psi_{02})^3 + 0.39(0.17\psi_{01} + 0.39\psi_{02})^3}{((0.17\psi_{01} - 0.32\psi_{02})^4 + (0.17\psi_{01} + 0.39\psi_{02})^4)^{\frac{3}{4}}} = -\frac{4}{3\alpha}, \\ & \psi_{01}^2 + \psi_{02}^2 = 1, \\ & \alpha > 0. \end{aligned} \right.$$

Решение данной системы имеет следующий вид

$$\psi_{01} = -0.35, \psi_{02} = -0.94, \alpha = 1.08.$$



Как видно, $\alpha > 1$, откуда следует, что $x_0 \notin \mathcal{X}(2)$.

В таком случае рассмотрим систему для $N = 3$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{0.20(0.20\psi_{01} + 0.81\psi_{02})^3 + 0.91(0.91\psi_{01} - 0.61\psi_{02})^3}{((0.20\psi_{01} + 0.81\psi_{02})^4 + (0.91\psi_{01} - 0.61\psi_{02})^4)^{\frac{3}{4}}} + \\ + \frac{0.17(0.17\psi_{01} - 0.32\psi_{02})^3 + 0.17(0.17\psi_{01} + 0.39\psi_{02})^3}{((0.17\psi_{01} - 0.32\psi_{02})^4 + (0.17\psi_{01} + 0.39\psi_{02})^4)^{\frac{3}{4}}} + \\ + \frac{0.004(0.004\psi_{01} - 0.16\psi_{02})^3 + 0.11(0.11\psi_{01} - 0.14\psi_{02})^3}{((0.004\psi_{01} - 0.16\psi_{02})^4 + (0.11\psi_{01} - 0.14\psi_{02})^4)^{\frac{3}{4}}} = -\frac{1}{3\alpha}, \\ \\ \frac{0.81(0.20\psi_{01} + 0.81\psi_{02})^3 - 0.61(0.91\psi_{01} - 0.61\psi_{02})^3}{((0.20\psi_{01} + 0.81\psi_{02})^4 + (0.91\psi_{01} - 0.61\psi_{02})^4)^{\frac{3}{4}}} + \\ + \frac{-0.32(0.17\psi_{01} - 0.32\psi_{02})^3 + 0.39(0.17\psi_{01} + 0.39\psi_{02})^3}{((0.17\psi_{01} - 0.32\psi_{02})^4 + (0.17\psi_{01} + 0.39\psi_{02})^4)^{\frac{3}{4}}} + \\ + \frac{0.17(0.004\psi_{01} + 0.16\psi_{02})^3 - 0.14(0.11\psi_{01} - 0.14\psi_{02})^3}{((0.004\psi_{01} + 0.16\psi_{02})^4 + (0.11\psi_{01} - 0.14\psi_{02})^4)^{\frac{3}{4}}} = -\frac{4}{3\alpha}, \\ \\ \psi_{01}^2 + \psi_{02}^2 = 1, \\ \alpha > 0. \end{array} \right.$$

Решение данной системы имеет следующий вид:

$$\psi_{01} = -0.50, \psi_{02} = -0.87, \alpha = 0.96.$$

Как можно видеть, $\alpha < 1$. Отсюда следует, что $x_0 \in \mathcal{X}(3)$, и в соответствии с (4)

$$N_{min} = 3.$$

6. ВНУТРЕННЯЯ СУПЕРЭЛЛИПСОИДАЛЬНАЯ АППРОКСИМАЦИЯ ВЫПУКЛОГО ТЕЛА

Случай (7) является достаточно частным. Более того зачастую невозможно гарантировать даже строгую выпуклость множества \mathcal{U} . В связи с чем оказывается актуальной внутренняя аппроксимация множества \mathcal{U} множеством $\hat{\mathcal{U}}$ вида (7). Переход в задаче быстродействия от исходной системы (A, \mathcal{U}) к вспомогательной системе $(A, \hat{\mathcal{U}})$ позволяет построить гарантирующее управление в исходной системе на основе методов, представленных в разделе 3, применительно к системе вспомогательной.

При этом погрешность гарантирующего решения в сравнении с решением оптимальным будет тем меньше, чем больше по включению аппроксимирующее множество $\hat{\mathcal{U}}$. Данный факт приводит к необходимости решения задачи оптимальной суперэллипсоидальной аппроксимации выпуклого компактного тела $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2$



множеством вида (7). В качестве критерия качества аппроксимации рассмотрим меру Лебега двумерного множества $\mu(\bullet)$ [1]. Результирующая оптимизационная задача примет вид

$$\begin{aligned} \mu(\mathcal{U} \setminus B\mathcal{E}_r(a_1, a_2)) &\rightarrow \min_{a_1, a_2, r, B} \\ a_1 &> 0, a_2 > 0, \\ r &> 1, \\ B &\in \mathbb{R}^{2 \times 2}, \det B \neq 0, \\ \mathcal{E}_r(a_1, a_2) &\subset \mathcal{U}. \end{aligned}$$

Данную задачу можно разбить на два отдельных этапа: подбор матрицы ориентации суперэллипса $B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ и подбор чисел $a_1, a_2 > 0, r > 1$, параметризующих множество (1).

7. ПОДБОР МАТРИЦЫ ОРИЕНТАЦИИ СУПЕРЭЛЛИПСОИДАЛЬНОГО МНОЖЕСТВА

Поскольку суперэллипс является симметричным множеством, то предлагается искать матрицу B в виде матрицы поворота. Таким образом, все сводится к тому, чтобы понять, как надо ориентировать аппроксимируемое множество \mathcal{U} , чтобы в него можно было вписать максимальный по мере суперэллипс $\mathcal{E}_r(a)$. В качестве осей симметрии произвольного выпуклого тела \mathcal{U} можно рассмотреть главные оси эллипсоида инерции, которые определяются тензором инерции. Тензор инерции можно рассчитать по следующим соотношениям:

$$J = \begin{pmatrix} J_{xx} & J_{xy} \\ J_{yx} & J_{yy} \end{pmatrix},$$

$$J_{xx} = \int_{\mathcal{U}} y^2 dx dy, \quad J_{yy} = \int_{\mathcal{U}} x^2 dx dy, \quad J_{xy} = J_{yx} = -\int_{\mathcal{U}} xy dx dy.$$

Поскольку тензор инерции задается симметрической матрицей, то его собственные векторы будут действительными и взаимно ортогональными [20]. Матрица S , составленная из таких собственных векторов, является ортогональной матрицей, то есть является матрицей поворота:

$$S^{-1}JS = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2), S^{-1} = S^T.$$

Тогда для перехода в базис собственных векторов тензора инерции необходимо использовать S в качестве матрицы перехода. Будем полагать, что искомая матрица B совпадает с S .

Пример 2. Продемонстрируем, как работает данный метод на примере различных множеств. Рассмотрим в качестве \mathcal{U} многогранник

$$\mathcal{U} = \text{conv} \left\{ \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}.$$



В ходе расчетов было получено следующее значение матрицы B :

$$B = \begin{pmatrix} 0.64 & -0.77 \\ 0.77 & 0.64 \end{pmatrix}.$$

Процедура ориентации множества \mathcal{U} изображена на рисунке 1.

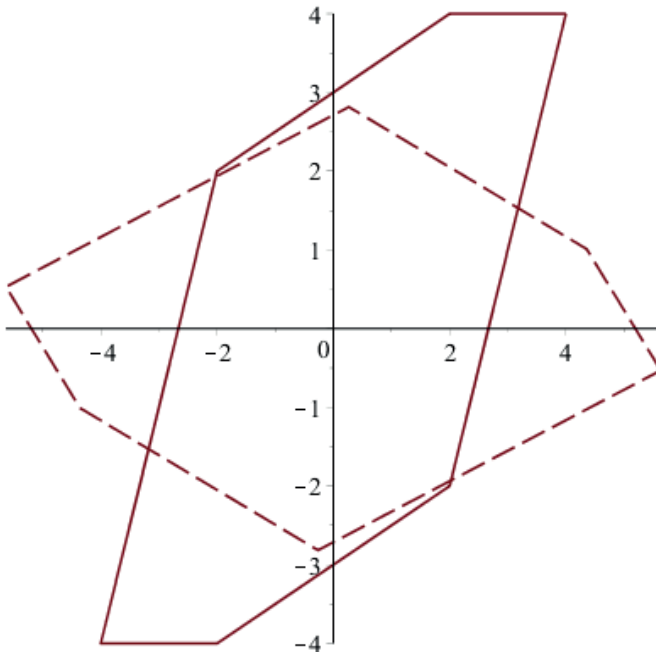


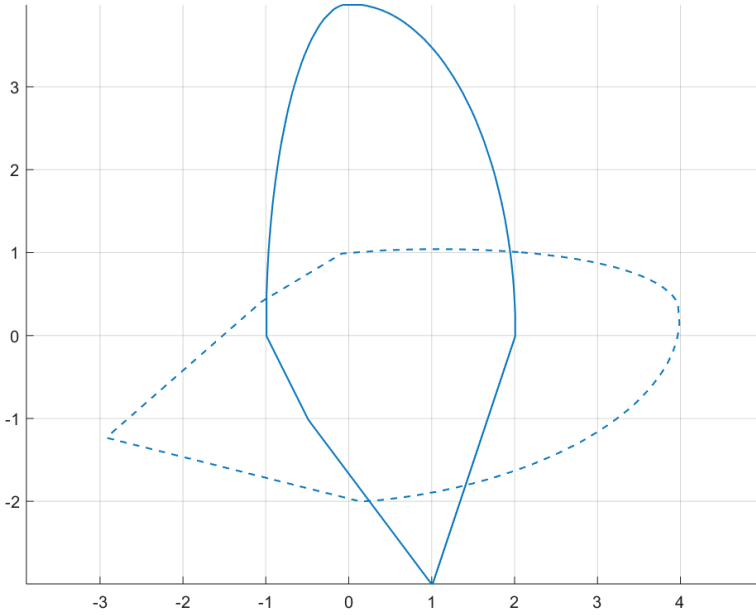
Рис. 1. Исходное множество \mathcal{U} (непрерывной линией)
и ориентированное $B^{-1}\mathcal{U}$ (пунктирной линией)

Пример 3. Рассмотрим в качестве множества \mathcal{U} выпуклое тело, заданное системой ограничений

$$\begin{cases} 0.25y^2 + x^2 \leq 4, \\ 0.0625y^2 + x^2 \leq 1, \\ 3x - y \leq 6, \\ -4x - 3y \leq 5, \\ y + 2x \geq -2. \end{cases}$$

Матрица B для такого выпуклого тела имеет вид:

$$B = \begin{pmatrix} 0.08 & -0.99 \\ 0.99 & 0.08 \end{pmatrix}.$$



*Рис. 2. Исходное множество \mathcal{U} (непрерывной линией)
 и ориентированное $B^{-1}\mathcal{U}$ (пунктирной линией)*

8. ПОДБОР ПАРАМЕТРОВ СУПЕРЭЛЛИПСОИДАЛЬНОГО МНОЖЕСТВА

Далее будем полагать, что матрица B ориентации суперэллипса подобрана в форме матрицы поворота. Поскольку преобразование поворота сохраняет меру Лебега, то справедливы равенства

$$\mu(\mathcal{U} \setminus B\mathcal{E}_r(a)) = \mu(B^{-1}(\mathcal{U} \setminus B\mathcal{E}_r(a))) = \mu(B^{-1}\mathcal{U} \setminus \mathcal{E}_r(a)),$$

которые позволяют свести исходную аппроксимационную задачу к задаче оптимальной внутренней аппроксимации произвольного выпуклого компактного тела $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2$ суперэллипсом $\mathcal{E}_r(a)$. Предполагается, что $0 \in \text{int } \mathcal{U}$. То есть требуется решить следующую аппроксимационную задачу:

$$\begin{aligned} \mu(\mathcal{U} \setminus \mathcal{E}_r(a_1, a_2)) &\rightarrow \min_{a_1, a_2, r, B} \\ a_1 &> 0, a_2 > 0, \\ r &> 1, \\ \mathcal{E}_r(a_1, a_2) &\subset \mathcal{U}. \end{aligned} \tag{9}$$

Сформулируем ряд утверждений, которые позволят свести задачу (9) к эквивалентной задаче выпуклого программирования, которая может быть решена численно.



Лемма 6. Пусть $\mathcal{E}_r(a)$ определяется соотношениями (1). Тогда

$$\mu(\mathcal{E}_r(a)) = a_1 a_2 \mu(\mathcal{E}_r(1,1)).$$

Доказательство. Рассмотрим замену переменных

$$\begin{cases} x_1 = a_1 y_1, \\ x_2 = a_2 y_2, \end{cases}$$

якобиан которой имеет вид $J = a_1 a_2$. Тогда

$$\mu(\mathcal{E}_r(a)) = \int_{\left\{ \frac{|x_1|^r}{a_1} + \frac{|x_2|^r}{a_2} \leq 1 \right\}} 1 dx = \int_{|y_1|^r + |y_2|^r \leq 1} J dy = a_1 a_2 \mu(\mathcal{E}_r(1,1)).$$

Лемма 7. Пусть $\mathcal{E}_r(a)$ определяется соотношениями (1). Тогда

$$\mu(\mathcal{E}_r(a)) = a_1 a_2 \frac{\left(2\Gamma\left(\frac{1}{r} + 1\right)\right)^2}{\Gamma\left(\frac{2}{r} + 1\right)}.$$

Доказательство. В части пространства $x_1, x_2 > 0$ рассмотрим замену переменных

$$\begin{cases} x_1 = R(\cos \varphi)^{\frac{2}{r}}, \\ x_2 = R(\sin \varphi)^{\frac{2}{r}}. \end{cases} \quad (10)$$

$$R \geq 0, \quad \varphi \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right).$$

Построим якобиан замены (10).

$$\frac{\partial x_1}{\partial R} = \frac{x_1}{R}, \quad \frac{\partial x_2}{\partial R} = \frac{x_2}{R},$$

$$\frac{\partial x_i}{\partial \varphi} = \begin{cases} \frac{2 \cos \varphi}{r \sin \varphi} x_i, & i = 2, \\ -\frac{2 \sin \varphi}{r \cos \varphi} x_i, & i = 1, \end{cases}$$

$$\begin{aligned} J &= \begin{vmatrix} \frac{x_1}{R} & -\frac{2}{r} x_1 \operatorname{tg} \varphi \\ \frac{x_2}{R} & \frac{2}{r} x_2 \operatorname{ctg} \varphi \end{vmatrix} = \frac{2}{rR} x_1 x_2 \operatorname{tg} \varphi \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & \operatorname{ctg}^2 \varphi \end{vmatrix} = \\ &= \frac{2}{rR} x_1 x_2 \operatorname{tg} \varphi \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 + \operatorname{ctg}^2 \varphi \end{vmatrix} = \frac{2}{rR} x_1 x_2 \operatorname{tg} \varphi (1 + \operatorname{ctg}^2 \varphi) = \end{aligned}$$



$$= \frac{2}{rR} x_1 x_2 \frac{1}{\sin \varphi \cos \varphi} = \frac{2R}{r} (\cos \varphi)_r^{\frac{2}{r}-1} (\sin \varphi)_r^{\frac{2}{r}-1}.$$

Тогда можно вычислить меру Лебега суперэллипса $\mathcal{E}_r(1,1)$ через интеграл Лебега:

$$\mu(\mathcal{E}_r(1,1)) = \int_{\left| \frac{x_1}{a_1} \right|^r + \left| \frac{x_2}{a_2} \right|^r \leq 1} 1 dx = \frac{8}{r} \int_0^1 R dR \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos \varphi)_r^{\frac{2}{r}-1} (\sin \varphi)_r^{\frac{2}{r}-1} d\varphi.$$

Вычислим вспомогательный интеграл:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos \varphi)_r^{\frac{2}{r}-1} (\sin \varphi)_r^{\frac{2}{r}-1} d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos \varphi)_r^{\frac{2}{r}-2} (\sin \varphi)_r^{\frac{2}{r}-1} d \sin \varphi.$$

Введем замену $\sin \varphi = t$:

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos \varphi)_r^{\frac{2}{r}-2} (\sin \varphi)_r^{\frac{2}{r}-1} d \sin \varphi &= \int_0^1 (1-t^2)^{\frac{1}{r}-1} t^{\frac{2}{r}-1} dt = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 (1-t^2)^{\frac{1}{r}-1} t^{\frac{2}{r}-2} dt^2. \end{aligned}$$

Введя следующую замену $t^2 = s$, получаем

$$\frac{1}{2} \int_0^1 (1-t^2)^{\frac{1}{r}-1} t^{\frac{2}{r}-2} dt^2 = \frac{1}{2} \int_0^1 (1-s)^{\frac{1}{r}-1} s^{\frac{1}{r}-1} ds = \frac{1}{2} B\left(\frac{1}{r}, \frac{1}{r}\right),$$

где через $B(x, y)$ обозначена бета-функция Эйлера. Тогда исходный интеграл имеет вид

$$\mu(\mathcal{E}_r(1,1)) = \frac{2}{r} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{r}\right)\Gamma\left(\frac{1}{r}\right)}{\Gamma\left(\frac{2}{r}\right)} = \frac{\left(\frac{2}{r}\Gamma\left(\frac{1}{r}\right)\right)^2}{\frac{2}{r}\Gamma\left(\frac{2}{r}\right)} = \frac{\left(2\Gamma\left(\frac{1}{r}+1\right)\right)^2}{\Gamma\left(\frac{2}{r}+1\right)}.$$

С учетом леммы 6 окончательно получаем равенство

$$\mu(\mathcal{E}_r(a)) = a_1 a_2 \frac{\left(2\Gamma\left(\frac{1}{r}+1\right)\right)^2}{\Gamma\left(\frac{2}{r}+1\right)}.$$

Лемма 8. Пусть $\mathcal{E}_r(a)$ определяется соотношениями (1), $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2$ – выпуклое тело. Тогда включение $\mathcal{E}_r(a) \subset \mathcal{U}$ справедливо тогда и только тогда, когда для любых $x \in \mathbb{R}^2$ верно неравенство

$$\left| \frac{x_1}{a_1} \right|^r + \left| \frac{x_2}{a_2} \right|^r \geq (M(x, \mathcal{U}))^r.$$



Лемма 9. Пусть $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2 \subset \mathbb{R}^2$ – выпуклые и компактные тела, содержащие 0 в качестве внутренней точки. Тогда включение $\mathcal{U}_1 \subset \mathcal{U}_2$ верно тогда и только тогда, когда для произвольного $x \in \mathbb{R}^2$ справедливо неравенство

$$M(x, \mathcal{U}_1) \geq M(x, \mathcal{U}_2).$$

Доказательство. Пусть $\mathcal{U}_1 \subset \mathcal{U}_2$. Выберем $x_0 \in \mathbb{R}^2$.

$$M(x_0, \mathcal{U}_1) = \alpha_1,$$

$$M(x_0, \mathcal{U}_2) = \alpha_2.$$

Тогда по определению функционала Минковского α_1, α_2 существуют и конечны

$$x_0 \in \alpha_1 \mathcal{U}_1 \subset \alpha_1 \mathcal{U}_2,$$

$$\alpha_1 \in \{t > 0 : x_0 \in t\mathcal{U}_2\},$$

$$\alpha_1 \geq \inf \{t > 0 : x_0 \in t\mathcal{U}_2\} = M(x_0, \mathcal{U}_2) = \alpha_2.$$

Пусть для любых $x \in \mathbb{R}^2$ выполнено неравенство

$$M(x, \mathcal{U}_1) \geq M(x, \mathcal{U}_2).$$

Выберем произвольный $x_0 \in \mathcal{U}_1$. Пусть

$$M(x_0, \mathcal{U}_1) = \alpha_1,$$

$$M(x_0, \mathcal{U}_2) = \alpha_2.$$

Так как $x_0 \in \mathcal{U}_1$, то

$$\alpha_1 \in \{t > 0 : x_0 \in t\mathcal{U}_1\},$$

$$\alpha_1 \geq \inf \{t > 0 : x_0 \in t\mathcal{U}_1\} = M(x_0, \mathcal{U}_1) = \alpha_1 \geq \alpha_2 =$$

$$= \inf \{t > 0 : x_0 \in t\mathcal{U}_2\} = M(x_0, \mathcal{U}_2).$$

Следовательно, по определению функционала Минковского

$$x_0 \in \alpha_1 \mathcal{U}_1 \subset \mathcal{U}_2,$$

$$\mathcal{U}_1 \subset \mathcal{U}_2.$$

Доказательство леммы 8. В силу теоремы Минковского

$$\left\{ x \in \mathbb{R}^n : \left| \frac{x_1}{a_1} \right|^r + \left| \frac{x_2}{a_2} \right|^r \leq 1 \right\} = \mathcal{E}_r(a),$$

$$M(x, \mathcal{E}_r(a)) = \left(\left| \frac{x_1}{a_1} \right|^r + \left| \frac{x_2}{a_2} \right|^r \right)^{\frac{1}{r}}.$$

Таким образом, согласно лемме 9 включение $\mathcal{E}_r(a) \subset \mathcal{U}$ эквивалентно неравенству

$$\left(\left| \frac{x_1}{a_1} \right|^r + \left| \frac{x_2}{a_2} \right|^r \right)^{\frac{1}{r}} \geq M(x, \mathcal{U}).$$

На основе лемм 7 и 8 представим задачу (9) в эквивалентном виде.

Теорема 3. Пусть $\mathcal{E}_r(a)$ определяется соотношениями (1), $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2$ – выпуклое тело. Тогда оптимизационная задача (9) эквивалентна следующей задаче:

$$\begin{aligned} a_1 a_2 \frac{\left(2\Gamma\left(\frac{1}{r} + 1\right) \right)^2}{\Gamma\left(\frac{2}{r} + 1\right)} \rightarrow \max_{a_1, a_2, r} \\ \left(\left| \frac{x_1}{a_1} \right|^r + \left| \frac{x_2}{a_2} \right|^r \right)^{\frac{1}{r}} \geq M(x, \mathcal{U}), \text{ для всех } x \in \mathbb{R}^2, \\ a_1 > 0, \quad a_2 > 0, \\ r > 1. \end{aligned} \tag{11}$$

Доказательство. Поскольку $\mathcal{E}_r(a) \subset \mathcal{U}$, то с учетом леммы 7

$$\mu(\mathcal{U} \setminus \mathcal{E}_r(a)) = \mu(\mathcal{U}) - \mu(\mathcal{E}_r(a)) = \mu(\mathcal{U}) - a_1 a_2 \frac{\left(2\Gamma\left(\frac{1}{r} + 1\right) \right)^2}{\Gamma\left(\frac{2}{r} + 1\right)}.$$

Так как $\mu(\mathcal{U}) = const$, то

$$\begin{aligned} \arg \min_{a_1, a_2, r} \left(\mu(\mathcal{U}) - a_1 a_2 \frac{\left(2\Gamma\left(\frac{1}{r} + 1\right) \right)^2}{\Gamma\left(\frac{2}{r} + 1\right)} \right) = \\ = \arg \max_{a_1, a_2, r} \left(a_1 a_2 \frac{\left(2\Gamma\left(\frac{1}{r} + 1\right) \right)^2}{\Gamma\left(\frac{2}{r} + 1\right)} \right). \end{aligned}$$

С учетом леммы 8 ограничения задач (11) и (9) эквивалентны.

Теорема 3 доказана.

Вообще говоря, (11) не является задачей выпуклого программирования, а значит, в общем случае она не может быть решена стандартными оптимизационными методами [2]. Проведем ряд преобразований, который позволяет решить (11) численно. Также отдельно рассмотрим случай, когда \mathcal{U} представляет собой многогранник, что позволит в явном виде построить функционал Минковского $M(x, \mathcal{U})$.

Лемма 10. Пусть $\mathcal{E}_r(a)$ определяется соотношениями (1), \mathcal{U} – ограниченный полиэдр, т.е. существуют такие $K \in \mathbb{N}$, $p^1, \dots, p^K \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, $\alpha_1, \alpha_2 > 0$, что справедливо представление



$$\mathcal{U} = \bigcap_{k=1}^K \{x \in \mathbb{R}^2 : (p^k, x) \leq \alpha_k\}.$$

Тогда включение $\mathcal{E}_r(a) \subset \mathcal{U}$ эквивалентно условию

$$(p^k, x^*(p^k)) \leq \alpha_k, k = \overline{1, K},$$

где $x^*(p) = \arg \max_{x \in \mathcal{E}_r(a)} (p, x)$ определяется согласно лемме 4.

Лемма 11. Пусть существуют $p^1, \dots, p^K \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ и $\alpha_1, \alpha_2 > 0$ такие, что

$$\mathcal{U} = \bigcap_{k=1}^K \{x \in \mathbb{R}^2 : (p^k, x) \leq \alpha_k\}, 0 \in \text{int } \mathcal{U}.$$

Тогда

$$M(x, \mathcal{U}) = \max_{k=1, K} \frac{(p^k, x)}{\alpha_k}.$$

Доказательство. Поскольку для любого $t > 0$

$$\begin{aligned} t\mathcal{U} &= \{u \in \mathbb{R}^2 : u = tx, x \in \mathcal{U}\} = \\ &= \{u \in \mathbb{R}^2 : u = tx, (p^k, x) \leq \alpha_k, k = \overline{1, K}\} = \\ &= \left\{u \in \mathbb{R}^2 : \left(p^k, \frac{u}{t}\right) \leq \alpha_k, k = \overline{1, K}\right\} = \{u \in \mathbb{R}^2 : (p^k, u) \leq t\alpha_k, k = \overline{1, K}\} = \\ &= \bigcap_{k=1}^K \{u \in \mathbb{R}^2 : (p^k, u) \leq t\alpha_k\}, \end{aligned}$$

то согласно определению функционала Минковского

$$\begin{aligned} M(x, \mathcal{U}) &= \inf \{t > 0 : x \in t\mathcal{U}\} = \inf \{t > 0 : (p^k, x) \leq t\alpha_k, k = \overline{1, K}\} = \\ &= \inf \left\{t > 0 : t \geq \frac{(p^k, x)}{\alpha_k}, k = \overline{1, K}\right\} = \max_{k=1, K} \frac{(p^k, x)}{\alpha_k}. \end{aligned}$$

Лемма 11 полностью доказана.

Доказательство леммы 10. Согласно лемме 8 включение $\mathcal{E}_r(a) \subset \mathcal{U}$ верно тогда и только тогда, когда для всех $x \in \mathbb{R}^2$ верно неравенство

$$\left(\left| \frac{x_1}{a_1} \right|^r + \left| \frac{x_2}{a_2} \right|^r \right)^{\frac{1}{r}} \geq M(x, \mathcal{U}),$$

что с учетом леммы 11 эквивалентно неравенству

$$\left(\left| \frac{x_1}{a_1} \right|^r + \left| \frac{x_2}{a_2} \right|^r \right)^{\frac{1}{r}} \geq \max_{k=1, K} \frac{(p^k, x)}{\alpha_k},$$

$$\alpha_k \geq \frac{(p^k, x)}{\left(\left| \frac{x_1}{a_1} \right|^r + \left| \frac{x_2}{a_2} \right|^r \right)^{\frac{1}{r}}}$$

Поскольку данные неравенства должны выполняться при любом $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ можно перейти к равносильному соотношению

$$\begin{aligned} \alpha_k &\geq \max_{k=1, K} \frac{(p^k, x)}{\left(\left| \frac{x_1}{a_1} \right|^r + \left| \frac{x_2}{a_2} \right|^r \right)^{\frac{1}{r}}} = \max_{k=1, K} \left(p^k, \frac{x}{\left(\left| \frac{x_1}{a_1} \right|^r + \left| \frac{x_2}{a_2} \right|^r \right)^{\frac{1}{r}}} \right) = \\ &= \max_{y \in \mathcal{E}_r(a)} (p^k, y) = (p^k, x^*(p^k)), \end{aligned}$$

где $x^*(p^k)$ определяется пунктом 2 леммы 4.

Лемма 10 полностью доказана.

Сложность решения задачи (11) заключается в том, что множество допустимых значений вектора переменных оптимизации $(r, a_1, a_2)^T$ не является выпуклым в \mathbb{R}^3 . Тем не менее при фиксированном значении $r > 1$, соответствующее множество допустимых значений вектора $(a_1, a_2)^T$ уже является выпуклым. Сформулируем данный факт в виде леммы.

Лемма 12. Пусть $\mathcal{E}_r(a)$ определяется соотношениями (1), $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2$ – выпуклое и компактное тело, для произвольного $r > 1$ через $\mathcal{P}_r(\mathcal{U}) = \{a \in \mathbb{R}^2 : \mathcal{E}_r(a) \subset \mathcal{U}, a_1 > 0, a_2 > 0\}$ обозначено множество всех допустимых значений a_1, a_2 в задачах (9) и (11).

Тогда $\mathcal{P}_r(\mathcal{U})$ – выпуклое и компактное множество.

Доказательство. Обозначим для произвольного выпуклого множества \mathcal{U} и $p \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ через $s(p, \mathcal{U})$ опорную функцию \mathcal{U} :

$$s(p, \mathcal{U}) = \sup_{x \in \mathcal{U}} (p, x).$$

Как продемонстрировано в [3], произвольное выпуклое множество $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2$ представляет собой пересечение всех опорных полупространств:

$$\mathcal{U} = \bigcap_{p \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}} \{x \in \mathbb{R}^2 : (p, x) \leq s(p, \mathcal{U})\}.$$

Тогда вложение $\mathcal{E}_r(a) \subset \mathcal{U}$ эквивалентно тому, что для каждого $p \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ будет выполнено неравенство

$$s(p, \mathcal{E}_r(a)) \leq s(p, \mathcal{U}). \tag{12}$$

Пусть $a, b \in \mathcal{P}_r(\mathcal{U})$, $\lambda \in (0, 1)$, $p \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Тогда в силу пункта 2 леммы 4 и неравенства Минковского [1]

$$s(p, \mathcal{E}_r(\lambda a + (1-\lambda)b)) = \max_{x \in \mathcal{E}_r(\lambda a + (1-\lambda)b)} (p, x) =$$



$$\begin{aligned}
&= \left(|(\lambda a_1 + (1-\lambda)b_1)p_1|^q + |(\lambda a_2 + (1-\lambda)b_2)p_2|^q \right)^{\frac{1}{q}} \leq \\
&\leq \lambda \left(|a_1 p_1|^q + |a_2 p_2|^q \right)^{\frac{1}{q}} + (1-\lambda) \left(|b_1 p_2|^q + |b_2 p_2|^q \right)^{\frac{1}{q}} = \\
&= \lambda s(p, \mathcal{E}_r(a)) + (1-\lambda) s(p, \mathcal{E}_r(b)) \leq s(p, \mathcal{U}).
\end{aligned}$$

Тогда $\mathcal{E}_r(\lambda a + (1-\lambda)b) \subset \mathcal{U}$, что по определению эквивалентно включению $\lambda a + (1-\lambda)b \in \mathcal{P}_r(\mathcal{U})$. Откуда следует выпуклость $\mathcal{P}_r(\mathcal{U})$.

Выберем в качестве $p \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ i -й координатный вектор:

$$p = \left(\underbrace{0, \dots, 0}_{i-1}, 1, 0, \dots, 0 \right)^T.$$

Тогда по построению

$$s(\pm p, \mathcal{E}_r(a)) = a_i.$$

С учетом условия (12) получим, что для любого $a \in \mathcal{P}_r(\mathcal{U})$ верно неравенство $0 \leq a_i \leq \min \{s(p, \mathcal{U}), s(-p, \mathcal{U})\}$.

Поскольку \mathcal{U} ограничено, то для любого $p \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ значение опорной функции $s(p, \mathcal{U})$ конечно. Тогда $\mathcal{P}_r(\mathcal{U})$ ограничено.

Замкнутость $\mathcal{P}_r(\mathcal{U})$ следует из замкнутости \mathcal{U} .

Лемма 12 позволяет аппроксимировать исходные эквивалентные задачи (9) и (11) аналогичной оптимизационной задачей, в которой область определения параметра r сужена до конечного множества:

$$\begin{aligned}
&a_1 a_2 \rightarrow \max_{a_1, a_2} \\
&(a_1, a_2)^T \in \mathcal{P}_r(\mathcal{U}).
\end{aligned}$$

Пример 4. Построим оптимизационную задачу (13) для заданных численно параметров. В качестве аппроксимируемого множества рассмотрим ориентированный многогранник $B^{-1}\mathcal{U}$ из примера 2:

$$\mathcal{U}_{rot} = B^{-1}\mathcal{U} = \left(\begin{array}{cccccc} 5.63 & 4.36 & 0.27 & -5.63 & -4.36 & 0.27 \\ -0.53 & 1.01 & 2.82 & 0.53 & -1.01 & -2.82 \end{array} \right).$$

Также \mathcal{U}_{rot} допускает представление

$$\begin{aligned}
\mathcal{U}_{rot} &= \bigcap_{k=1}^6 \{x \in \mathbb{R}^2 : (p^k, x) \leq \alpha_k\}, \\
(p^1, \dots, p^6) &= \left(\begin{array}{cccccc} 1.54 & 1.81 & -2.29 & -1.54 & -1.81 & 2.29 \\ 1.28 & 4.09 & 5.90 & -1.28 & -4.09 & -5.90 \end{array} \right), \\
(\alpha_1, \dots, \alpha_6) &= (8.00 \quad 12.00 \quad 16.00 \quad 8.00 \quad 12.00 \quad 16.00).
\end{aligned}$$



Построим ограничения задачи (13) на основе леммы 10 для различных значений $r \in \left\{ \frac{4}{3}, 2, 4 \right\}$. Для $r = \frac{4}{3}$ получим ограничения

$$\begin{cases} (5.63a_1^4 + 2.65a_2^4)^{\frac{1}{4}} \leq 8.00, \\ (10.64a_1^4 + 280.22a_2^4)^{\frac{1}{4}} \leq 12.00, \\ (27.27a_1^4 + 1209.78a_2^4)^{\frac{1}{4}} \leq 16.00. \end{cases}$$

Решение задачи (13) имеет вид

$$a_1' \cdot a_2' = 32.61, \quad a_2' =$$

Для $r = 2$ получим ограничения

$$\begin{cases} \sqrt{2.37a_1^2 + 1.63a_2^2} \leq 8.00, \\ \sqrt{3.26a_1^2 + 16.74a_2^2} \leq 12.00, \\ \sqrt{5.22a_1^2 + 34.78a_2^2} \leq 16.00. \end{cases}$$

Решение задачи (13) имеет вид

$$a_1'' \cdot a_2'' = 9.50, a_1'' = 4.94, a_2'' = 1.92.$$

Для $r = 4$ получим ограничения

$$\begin{cases} \left(\sqrt[3]{5.63a_1^4} + \sqrt[3]{2.65a_2^4} \right)^{\frac{3}{4}} \leq 8.00, \\ \left(\sqrt[3]{10.64a_1^4} + \sqrt[3]{280.22a_2^4} \right)^{\frac{3}{4}} \leq 12.00, \\ \left(\sqrt[3]{27.27a_1^4} + \sqrt[3]{1209.78a_2^4} \right)^{\frac{3}{4}} \leq 16.00. \end{cases}$$

Решение задачи (13) имеет вид

$$a_1''' \cdot a_2''' = 6.72, a_1''' = 4.17, a_2''' = 1.62.$$

Сравним полученные результаты с точки зрения меры Лебега аппроксимирующих суперэллипсоидальных множеств:

$$\mu \left(\mathcal{E}_{\frac{4}{3}} (a_1', a_2') \right) = 32.61,$$

$$\mu \left(\mathcal{E}_2 (a_1'', a_2'') \right) = 29.84,$$

$$\mu \left(\mathcal{E}_4 (a_1''', a_2''') \right) = 24.91.$$



Суперэллипс, соответствующий $r = \frac{4}{3}$, обладает наибольшей мерой, а значит, является более качественной аппроксимацией, которую следует использовать для дальнейших расчетов.

9. ФОРМИРОВАНИЕ ОПТИМАЛЬНОГО ПРОЦЕССА

Решим задачу быстродействия для системы (A, U) , где U определяется аналогично примеру 2 и 4,

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Множество $B^{-1}U$ построено в примере 2. Расширим множество значений параметра r в сравнении с примером 4 до $r \in \left\{ \frac{6}{5}, \frac{4}{3}, 2, 4, 6 \right\}$.

Решая оптимизационные задачи (13) для различных значений r , получены следующие оптимальные значения параметров суперэллипсоидальной аппроксимации

$$r = \frac{4}{3}, a_1 = 5.16, a_2 = 2.49.$$

На рис. 3 изображены результаты аппроксимации.

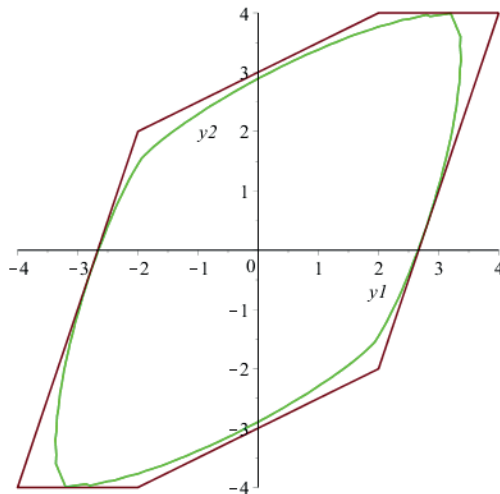


Рис. 3. Исходное множество U и ориентированный суперэллипс $B^{-1}\mathcal{E}_4\left(\frac{4}{3}, a\right)$

В ходе решения системы алгебраических уравнений для вычисления $\psi(0), \alpha$, определенной согласно следствию 1, были получены следующие численные значения параметров:



$$\alpha = 0.99, \psi_{01} = -0.94, \psi_{02} = -0.33, N_{\min} = 10.$$

Оптимальная траектория, построенная в соответствии с теоремой 1, представлена в таблице:

Таблица 1

Оптимальная траектория (k=0..5)

k	0	1	2	3	4	5
$x^*(k)$	2.65 2.45	4.4175 -3.6160	1.9235 4.0975	4.5772 -5.6793	0.1947 6.2950	4.1884 -5.6947
$\psi(k)$	-0.9425 -0.3342	-0.4256 0.0914	-0.1723 -0.0809	0.0844 -0.0035	-0.0293 0.0258	-0.0184 0.0075
$u^*(k)$	-3.3325 -3.8160	-3.2955 -3.9360	-3.3673 -3.5053	-3.2805 -3.9615	-2.4959 0.4056	-3.2637 -3.9692

Таблица 2

Оптимальная траектория (k=6..10)

k	6	7	8	9	10
$x^*(k)$	-0.5815 5.9139	3.1613 -4.6335	-1.3000 3.8121	2.1467 -1.7625	0 0
$\psi(k)$	0.0075 -0.0111	-0.0111 0.0062	0.0004 -0.0058	-0.0058 0.0040	0.0007 -0.0032
$u^*(k)$	-1.5897 1.8619	-2.9892 -3.9827	0.9346 3.3497	-2.5309 -3.9091	

10. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В разделе 2 описана постановка задачи быстрогодействия и задачи аппроксимации. В разделе 3 рассматривается приведение сложноразрешаемых условий из принципа максимума к суперэллипсоидальной структуре ограничений, которую можно разрешить аналитически. В разделе 4 представлена внутренняя суперэллипсоидальная аппроксимация выпуклого тела, в частности рассмотрены подбор матрицы поворота суперэллипса, параметров суперэллипса, которые определяют форму и размеры суперэллипса. В разделе 5 приведен пример решения задачи быстрогодействия на основе доказанных утверждений.

Разработанные в статье методы могут быть использованы для проведения численных симуляций и моделирования динамики различных технических и естественных систем. Низкая сложность формирования программного управления и построения



оптимальных процессов на основе принципа максимума позволяет как решить задачу быстродействия для заданного начального состояния, так и за приемлемое машинное время накопить большой объем модельных данных и различных траекторий для дальнейшего анализа системы. С другой стороны, аппарат суперэллипсоидальных аппроксимаций гарантирует большую точность в сравнении с классическими эллипсоидальными аппроксимационными методами.

Литература

1. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа // М.: Физматлит. 2012.
2. Ашманов С.А., Тимохов С.В. Теория оптимизации в задачах и упражнениях // М.: Наука. 1991.
3. Рокафеллар Р. Выпуклый анализ // М.: Мир. 1973.
4. Ибрагимов Д.Н., Сиротин А.Н. О задаче быстродействия для класса линейных автономных бесконечномерных систем с дискретным временем и ограниченным управлением // *АиТ*. 2017. № 10. С. 3–32.
5. Ибрагимов Д.Н. О задаче быстродействия для класса линейных автономных бесконечномерных систем с дискретным временем, ограниченным управлением и вырожденным оператором // *АиТ*. 2019. № 3. С. 3–25.
6. Ибрагимов Д.Н., Новожилкин Н.М., Порцева Е.Ю. О достаточных условиях оптимальности гарантирующего управления в задаче быстродействия для линейной нестационарной дискретной системы с ограниченным управлением // *АиТ*. 2021. № 12. С. 48–72.
7. Ибрагимов Д.Н. Оптимальная по быстродействию коррекция орбиты спутника [Электронный ресурс] // *Тр. МАИ*. 2017. № 94. Доступ в журн. <http://trudymai.ru/published.php>
8. Беллман Р. Динамическое программирование // М.: ИИЛ. 1960.
9. Каменев Г.К. Численное исследование эффективности методов полиэдральной аппроксимации выпуклых тел // М.: Вычислительный центр РАН. 2010.
10. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Б.Ф. Математическая теория оптимальных процессов // М.: Наука. 1969.
11. Болтянский В.Г. Оптимальное управление дискретными системами // М.: Наука. 1973.
12. Проний А.И. Элементы теории оптимальных дискретных процессов // М.: Наука. 1973.
13. Kurzhanskiy A., Varaiya P. Ellipsoidal Techniques for Reachability Analysis of Discrete-Time Linear Systems // *IEEE Transactions on Automatic Control*. 2007. Vol. 52, № 1. P. 26–38. DOI: 10.1109/TAC.2006.887900
14. Tobler W.R. Superquadrics and Angle-Preserving Transformations // *IEEECGA*. 1981. Vol. 1. № 1. P. 11–23.
15. Tobler W.R. The Hyperelliptical and Other New Pseudo Cylindrical Equal Area Map Projections // *Journal of Geophysical Research*. 1973. Vol. 78. № 11. P. 1753–1759.
16. Desoer C.A., Wing J. The Minimal Time Regulator Problem for Linear Sampled-Data Systems: General Theory // *J. Franklin Inst.* 1961. Vol. 272. № 3. P. 208–228.
17. Lin W.-S. Time-Optimal Control Strategy for Saturating Linear Discrete Systems // *Int. J. Control*. 1986. Vol. 43. № 5. P. 1343–1351.
18. Мороз А.И. Синтез оптимального по быстродействию управления для линейного дискретного объекта третьего порядка // *АиТ*. 1965. № 2. С. 193–207.
19. Черноусько Ф.Л. Оценивание фазового состояния динамических систем. Метод эллипсоидов // М.: Наука. 1988.



20. Хорн Р., Джонсон И. Матричный анализ // М.: Мир. 1989.
21. Ибрагимов Д.Н., Берендакова А.В. Метод построения и оценивания асимптотических множеств управляемости двумерных линейных дискретных систем с ограниченным управлением // Труды МАИ. 2022. № 126. DOI: 10.34759/trd-2022-126-17



Superellipsoidal Approximations in the Speed-in-action Problem for a Two-dimensional Linear Discrete System with Bounded Control

Danis N. Ibragimov*

Moscow Aviation Institute (National Research University) (MAI), Moscow, Russia
ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-7472-5520>
e-mail: rikk.dan@gmail.com

Violetta M. Podgornaya**

Moscow Aviation Institute (National Research University) (MAI), Moscow, Russia
ORCID: <https://orcid.org/0009-0004-9956-3002>
e-mail: vita1401@outlook.com

The paper considers a two-dimensional linear discrete system with bounded control. For the system, the problem of speed is solved, that is, the construction of a control process that transfers the system from the initial state to the origin in the minimum number of steps. If the set of acceptable control values has a superellipse structure, then the problem of calculating optimal control can be reduced to solving a system of algebraic equations. A superellipsoidal approximation method has been developed for sets of arbitrary structure. Examples are considered in the paper.

Keywords: linear control system, speed problem, 0-controllability sets, maximum principle, superellipse.

For citation:

Ibragimov D.N., Podgornaya V.M. Superellipsoidal Approximations in the Speed-in-action Problem for a Two-dimensional Linear Discrete System with Bounded Control. *Modelirovanie i analiz dannykh = Modelling and Data Analysis*, 2023. Vol. 13, no. 2, pp. 151–179. DOI: 10.17759/mda.2023130209 (In Russ., abstr. in Engl.).

References

1. Kolmogorov A.N., Fomin S.V. *Elementy teorii funktsij i funkcional'nogo analiza* [Elements of the theory of functions and functional analysis]. *Moskva: Fizmatlit=Moscow: Physical education*. 2012. (In Russ.).
2. Ashmanov S.A., Timohov S.V. *Teoriya optimizacii v zadachah i uprazhneniyah* [Optimization theory in problems and exercises]. *Moskva: Nauka=Moscow: The science*. 1991. (In Russ.).

***Danis N. Ibragimov**, PhD (Physics and Mathematics), Associate Professor at the Department of Probability Theory and Computer Modeling, Moscow Aviation Institute (National Research University) (MAI), Moscow, Russia, ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-7472-5520>, e-mail: rikk.dan@gmail.com

****Violetta M. Podgornaya**, Master's Student, Engineer at the Department of Probability Theory and Computer Modeling, Moscow Aviation Institute (National Research University) (MAI), Moscow, Russia, ORCID: <https://orcid.org/0009-0004-9956-3002>, e-mail: vita1401@outlook.com



3. Rokafellar R. Vypuklyj analiz [Convex analysis]. Moskva: Mir=Moscow: Mir. 1973. (In Russ.).
4. Ibragimov D.N., Sirotin A.N. On the Problem of Operation Speed for the Class of Linear Infinite-Dimensional Discrete-Time Systems with Bounded Control. *Autom. Remote Control*. 2017. Vol. 78. no. 10. pp. 1731–1756.
5. Ibragimov D.N. On the Optimal Speed Problem for the Class of Linear Autonomous Infinite-Dimensional Discrete-Time Systems with Bounded Control and Degenerate Operator. *Autom. Remote Control*. 2019. Vol. 80. no. 3. pp. 393–412.
6. Ibragimov D.N., Novozhilin N.M., Portseva E.Yu. On Sufficient Optimality Conditions for a Guaranteed Control in the Speed Problem for a Linear Time-Varying Discrete-Time System with Bounded Control/ *Autom. Remote Control*. 2021. Vol. 82. no. 12. pp. 2076–2096.
7. Ibragimov D.N. Optimal'naya po bystrodejstviyu korrekciya orbity sputnika [Optimal speed correction of the satellite orbit]. *Elektronnyj zhurnal Trudy MAI= Electronic journal Works of MAI*. 2017. no. 94. Available at: <http://trudymai.ru/published.php>
8. Bellman R. Dinamicheskoe programmirovaniye [Dynamic programming]. Moskva: Izdatel'stvo inostrannoj literatury=Moscow: Publishing House of Foreign Literature. 1960. (In Russ.).
9. Kamenev G.K. CHislennoe issledovanie effektivnosti metodov poliedral'noj approksimacii vypuklykh tel [Numerical investigation of the effectiveness of polyhedral approximation methods for convex bodies]. Moskva: Vychislitel'nyj centr RAN=Moscow: Computing Center of the Russian Academy of Sciences. 2010. (In Russ.).
10. Pontryagin L.S., Boltyanskij V.G., Gamkrelidze R.V., Mishchenko B.F. Matematicheskaya teoriya optimal'nyh processov [Mathematical theory of optimal processes]. Moskva: Nauka=Moscow: The science. 1969. (In Russ.).
11. Boltyanskij V.G. Optimal'noe upravlenie diskretnymi sistemami [Optimal control of discrete systems]. Moskva: Nauka=Moscow: The science. 1973. (In Russ.).
12. Propoj A.I. Elementy teorii optimal'nyh diskretnykh processov [Elements of the theory of optimal discrete processes]. Moskva: Nauka=Moscow: The science. 1973. (In Russ.).
13. Kurzhanskiy A., Varaiya P. Ellipsoidal Techniques for Reachability Analysis of Discrete-Time Linear Systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*. 2007. Vol. 52, no.1. pp. 26–38. DOI: 10.1109/TAC.2006.887900
14. Tobler W.R. Superquadrics and Angle-Preserving Transformations. *IEEECGA*. 1981. Vol. 1. no. 1. pp. 11–23.
15. Tobler W.R. The Hyperelliptical and Other New Pseudo Cylindrical Equal Area Map Projections. *Journal of Geophysical Research*. 1973. Vol. 78. no. 11. pp. 1753–1759.
16. Desoer C.A., Wing J. The Minimal Time Regulator Problem for Linear Sampled-Data Systems: General Theory. *J. Franklin Inst.* 1961. Vol. 272. no. 3. pp. 208–228.
17. Lin W.-S. Time-Optimal Control Strategy for Saturating Linear Discrete Systems. *Int. J. Control*. 1986. Vol. 43. no. 5. pp. 1343–1351.
18. Moroz A.I. Synthesis of Time-Optimal Control for Linear Discrete Objects of the Third Order. *Autom. Remote Control*. 1965. V. 25. no. 9. pp. 193–206.
19. Chernous'ko F.L. Ocenivaniye fazovogo sostoyaniya dinamicheskikh sistem. Metod ellipsoidov [Estimation of the phase state of dynamical systems. Ellipsoid method]. Moskva: Nauka=Moscow: The science. 1988. (In Russ.).
20. Horn R., Dzhonson I. Matrichnyj analiz [Matrix analysis]. Moskva: Mir=Moscow: Mir. 1989. (In Russ.).
21. Ibragimov D.N., Berendakova A.V. Method of Constructing and Estimating Asymptotic Control-ability Sets of Two-Dimensional Linear Discrete Systems with Limited Control. *Trudy MAI*. 2022, no. 126. DOI: 10.34759/trd-2022-126-17

◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆ **КОМПЛЕКСЫ ПРОГРАММ** ◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆

УДК 004.42

Разработка ETL процесса на базе open source технологий для решения задачи доставки данных потребителям

Старков В.В.*

Московский институт стали и сплавов

(национальный исследовательский технологический университет)

(НИТУ МИСиС), г. Москва, Российская Федерация

ORCID: <https://orcid.org/0009-0006-0662-4852>

e-mail: starkov.viatcheslav@yandex.ru

Горбатова С.С.*

Московский институт стали и сплавов

(национальный исследовательский технологический университет)

(НИТУ МИСиС), г. Москва, Российская Федерация

ORCID: <https://orcid.org/0009-0005-5213-6780>

e-mail: ssgorbatova@misis.ru

Водолага В.И.***

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова (МГУ)

г. Москва, Российская Федерация

ORCID: <https://orcid.org/0009-0003-1816-0088>

e-mail: vikavodolaga1@gmail.com

В статье рассматриваются вопросы разработки ETL процесса для хранилища данных на базе open source технологий, взамен частного ПО, поставляемого вендором. Процесс позволяет доставлять данные от источника к потребителю, ориентируясь на скорость доставки, затрачиваемые ресурсы и удобство разработки. Представлена архитектура для решения задачи с описанием заменяемых процессов, реализована передача данных по новому процессу. Задействованы современные инструменты, применяемые для работы с данными, описаны способы взаимодействия с ними и подбор технических характеристик для процесса.

Ключевые слова: хранилище данных, open source, программное обеспечение, ETL процесс, доставка данных.



Для цитаты:

Старков В.В., Горбатова С.С., Водолага В.И. Разработка ETL процесса на базе open source технологий для решения задачи доставки данных потребителям // Моделирование и анализ данных. 2023. Том 13. № 2. С. 180–193. DOI: <https://doi.org/10.17759/mda.2023130210>

***Старков Вячеслав Вячеславович**, аспирант, Московский институт стали и сплавов (национальный исследовательский технологический университет) (НИТУ МИСЦ), г. Москва, Российская Федерация, ORCID: <https://orcid.org/0009-0006-0662-4852>,

e-mail: starkov.viatcheslav@yandex.ru

****Горбатова Светлана Сергеевна**, старший преподаватель, Московский институт стали и сплавов (национальный исследовательский технологический университет) (НИТУ МИСЦ), г. Москва, Российская Федерация, ORCID: <https://orcid.org/0009-0005-5213-6780>, e-mail: ssgorbatova@misis.ru

*****Водолага Виктория Игоревна**, магистр, Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова (МГУ), г. Москва, Российская Федерация, ORCID: <https://orcid.org/0009-0003-1816-0088>, e-mail: vikavodolaga1@gmail.com

1. ВВЕДЕНИЕ

Процесс ETL (extract, transform, load) призван доставлять данные из источника к приемнику и проводить трансформации данных, нацеленные на получение из массива сырых данных информации необходимой структуры для интерпретации. Источником данных может быть как БД, так и файлы заданной структуры, то же самое справедливо и для приемника. Конечной целью процесса является доставка данных потребителю в удобное для него представление, это может быть, как view в БД, так и предварительно написанная форма в приложении или на сайте [1]. Существует множество программных реализаций для доставки данных, однако большинство из них реализованы проприетарным ПО и подлежат лицензированию. В последнее время получили распространение решения, основанные на open source подходе, что является важным фактором при выборе, так как в текущих условиях наблюдаются проблемы при взаимодействиях с поставщиками ПО, поставкой покупкой лицензий, обновлениями имеющихся решений.

Преимуществами решений с открытым исходным кодом можно назвать возможности: экспериментировать с решениями, доработать продукт, проанализировать исходный код на наличие угроз гибкости разработки, а также отсутствие затрат на лицензии. Однако существуют и минусы – потеря интереса разработчиков к продукту может вызвать необходимость затрат собственных сил на разработку и поддержку, возникновение непроработанных решений внутри продукта, отсутствие необходимых интеграций с другими компонентами, требующее доработок, недостаточность функционала решения, требующее комбинировать ПО между собой. Одно из решений данных проблем описано в статье, также построена архитектура решения и создан реальный рабочий процесс, заменяющий аналогичный от частного вендора. Произведена оценка результатов решения.



2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Разработать решение на стеке open source технологий, позволяющее заменить частное ПО по доставке данных пользователю. Реализовать работающие ETL процессы с помощью нового ПО. Решение должно соответствовать требованиям отказоустойчивости, времени обработки и доставки данных, количеству передаваемых данных и затрачиваемых на работу ресурсов.

3. СУЩЕСТВУЮЩИЕ ЗАДАЧИ

Известно решение, использующее ПО IBM InfoSphere Datastage для доставки данных от поставщиков в хранилище данных. В данном ПО ETL процесс представляет собой поток из заданий, объединенный в единую управляющую последовательность, называемую Job Sequences [2]. Главное задание предоставляет единый интерфейс для передачи значений параметров контролируемым заданиям, управления последовательностью их исполнения, предоставляет механизмы ветвления и запуска заданий. Инструмент обладает широким функционалом и реализует написание последовательности с помощью графического интерфейса, внутри которого возможно параметризовать каждую из стадий, задавать свои запросы и их последовательность исполнения, реализовывать различные проверки данных.

Источниками данных для инструмента могут выступать файлы, последовательности файлов, реляционные базы данных, архивы, приложения. Реализован обширный набор коннекторов к различным базам данных, таких как Oracle, Sybase, Greenplum, HBase, Snowflake и др. Возможна настройка подключений через JDBC и ODBC. Внутри коннекторов доступна настройка правил проверки данных, так возможно проверить типы передаваемых данных, их содержимое и кодировку, наличие NULL значений, определить колонки, на основании которых необходимо формировать ключи. При управлении запросами к БД возможно задать пред-запрос, в котором сформировать временные таблицы для заполнения данными, сам запрос для извлечения данных и пост-запрос, использующийся, например, для очистки временных таблиц. В дополнительных настройках возможно настраивать буфер под запросы, партиционирование данных, ограничивать количество выдаваемых данных, настраивать уровни изоляции.

Работа с данными и их преобразование реализуется в ПО с помощью компонентов: Merge, Modify, Sort, Transformer, ряда генераторов данных, компонента удаления дубликатов и других. Компоненты позволяют из входных источников агрегировать, преобразовывать, очищать и дополнять данные по необходимым правилам. На выходе готовые данные можно как сразу отдавать потребителю для работы, так и использовать для последующих технических этапов подготовки данных.

Выгрузка данных в приемники аналогична по функционалу загрузке и является заключительным этапом в работе процесса. Стоит также отметить наличие контейнеров, позволяющих приводить к единообразию работу со многими источниками



в большом количестве заданий, так как в таком случае на выходе данные записываются в файлы заранее заданной структуры и затем использовать их для дальнейшей передачи по назначению.

Отдельно стоит отметить наличие компонентов онлайн обработки данных, таких как Kafka Connector, работа с IBM MQ, Streams Connector и другими. Основное применение Datastage заключается в обработке данных процессом Batch ETL. Наличие данных компонентов обеспечивает Datastage возможностями работы с Streaming ETL, при котором джоб в Datsatge может работать непрерывно, генерируя в ходе работы файлы для обработки или транслировать данные.

Sequence Job необходимы в DS для организации работы параллельных заданий в последовательность. Так возможно объединить ряд заданий с трансформациями данных в единую цепочку для загрузки во множество таблиц приемника. Есть опции организации циклов загрузки, ветвление последовательностей, реализации параллельности исполнения шагов, настройка вызовов системных скриптов и скриптов языков программирования, определить события, вызывающие прерывание исполнения заданий. Основное задание ставится на расписание с помощью встроенного в DS планировщика или через отдельный сервер – планировщик с помощью стоп скриптов.

DS предоставляет инструменты управления выдачей прав пользователям согласно определенной ролевой модели. Так можно выдать права разработчикам на редактирование и запуск джобов, в то время как аналитики будут обладать правами только на чтение дизайна задания. Система логирования предоставляет разработчику полный журнал событий, с помощью которого можно разобраться со всеми ошибками, возникающими во время исполнения, отследить стабильность подключений и передачи данных.

Рассмотрим пример реализации решения передачи данных с помощью DS от источника потребителю. Задача состоит в том, чтобы передать данные о клиентах и их операциях из БД источника в БД приемника для построения отчетов об операциях. Для каждой таблицы источника реализуется ETL процесс с помощью параллельных джобов DS, объединяющий данные по смысловой нагрузке. Данные трансформируются в структуру, необходимую приемнику, очищаются от выбросов, возможно дополнение данных или пробелов в данных из других источников. Далее параллельные джобы объединяются в управляющем для построения логики заполнения таблиц (см. Рис. 1).

Инструмент использует внутренние средства и шифронаборы, проприетарный протокол однопроходного симметричного шифрования с использованием одного из тридцати двух 16-и битных ключей, выбираемых циклически. Ключи скрыто встроены в программное обеспечение.

Инструмент полностью реализует задачи работы с данными, однако обладает рядом критических недостатков. Последние версии ПО более не предоставляются для установки на изолированные сервера, а доступны только для облачных решений компании IBM. Таким образом можно сказать, что развитие инструмента прекратилось для компаний, который не имеют возможности использовать чужие облачные решения и должны хранить все данные внутри компании. Продление лицензирования для ПО требует значительных затрат и недоступно в некоторых регионах.

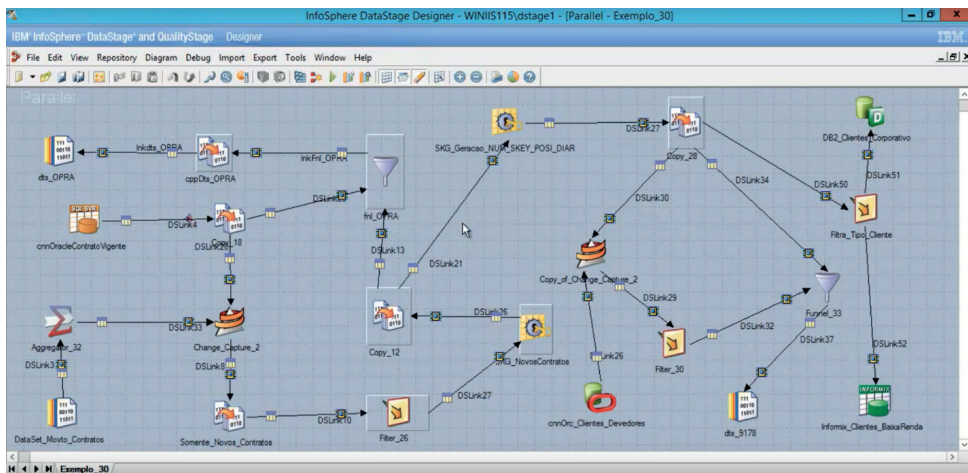


Рис. 1. Пример ETL задания реализованного на ПО Datastage

Известно решение, использующее Azure Data Factory (ADF) для передачи данных (см. Рис. 2). ADF – это облачный сервис, предназначенный для организации ETL процесса [3]. ПО требует наличия облачного хранилища данных для использования. Платформа решает задачи анализа, структурирования, обогащения данных из других источников. В ADF создаются конвейеры, которые могут принимать информацию из разрозненных хранилищ. Инструменты разработки реализованы с помощью визуальных представлений. Во многом инструмент завязан на продукты, предоставляемые компанией Microsoft Azure, поддержка в РФ прекращена.

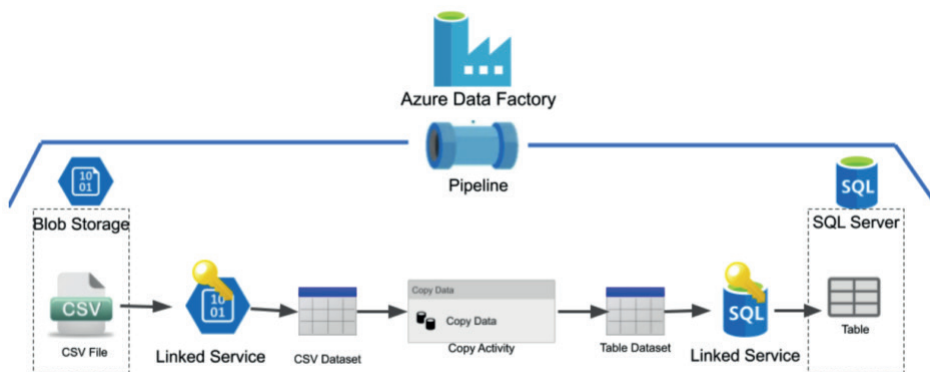


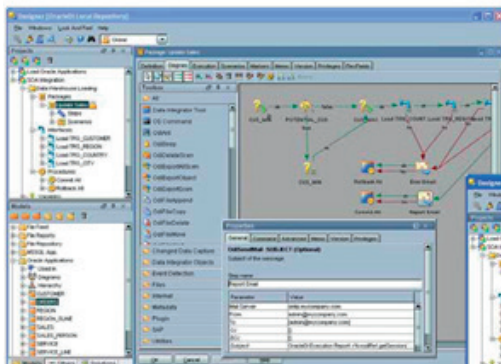
Рис. 2. Пример ETL на Azure Data Factory

Другим примером ETL инструмента можно назвать Oracle Data Integrator (ODI). Это комплексная платформа интеграции данных, которая охватывает все требования

к интеграции данных: от высокопроизводительных пакетных загрузок больших объемов до управляемых событиями процессов непрерывной интеграции и сервисов данных с поддержкой SOA. ODI поддерживает работу с большими данными за счет параллелизма при выполнении процессов интеграции данных.

ПО обладает рядом стандартных функций для создания и управления ETL процессом. В общем случае реализуется механизм копирования данных из различных СУБД, преобразования и передачи в хранилище. Основными компонентами ПО являются дизайнер (средство для создания ETL), оператор (средство мониторинга), менеджер топологий (архив источников и потребителей данных), менеджер безопасности (инструмент выдачи прав пользователям), агент (оркестратор процессов). ODI во многом похож на IBM Datastage (см. Рис. 3), поддерживает использование условных переходов, циклов, обработчиков ошибок. Отличительным моментом можно назвать возможность инструмента ожидать наступления заранее заданного события. Т.е. работающий процесс ожидает появления файла по пути, и при его появлении обрабатывает. В DS же необходимо проверять наличие файла в таком случае по расписанию, каждые 5 минут или др. интервал времени запускать ETL джоб.

Графический интерфейс проектирования



Настройка шагов
звука

Определение бизнес-правил

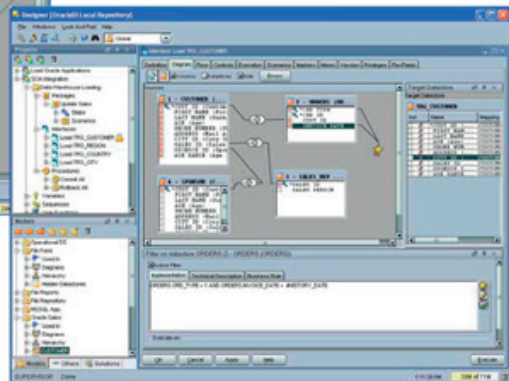


Рис. 3. ETL процесс на ODI

Анализ имеющихся решений на рынке показал, что большинство компаний, предоставляющих ETL инструменты, нацелены на внедрение этих инструментов исключительно в облачной среде с привязкой клиента к своему облаку для хранения данных. Такой подход не удовлетворяет все запросы потребителей ввиду необходимости хранения критических данных внутри компаний. Наблюдаются также проблемы



поддержки и сертификации решений в различных регионах, поддержка многих инструментов в РФ не оказывается.

4. АРХИТЕКТУРА РЕШЕНИЯ (ПО)

Разработана схема замены проприетарного решения на основе ПО IBM Datastage Open Source аналогами. Потоки 1, 4, 7, 10, 11, 13, 17 (см. Рис. 4) заменяются аналогичными 2, 3, 5, 6, 8, 9, 12, 14, 15, 18, 19. Поток передачи данных от источника в хранилище 1, 7, 10 на основе ПО от IBM заменяется потоками 2, 5, 14 и 3, 6, 15 для передачи стриминговых и пакетных данных. В качестве решения для пакетной передачи предлагается использовать ПО Apache Spark. Apache Kafka отвечает за передачу потоковых сообщений. HDFS предлагается использовать в качестве промежуточного хранилища выгружаемых данных, что позволит реализовать Data Lake подход, т.е. загрузить данные в исходном виде для последующей обработки.

Поток 17 возможно заменить потоками 18 и 19. Поток отвечает за транслирование данных от источника к потребителю в обход хранилища.

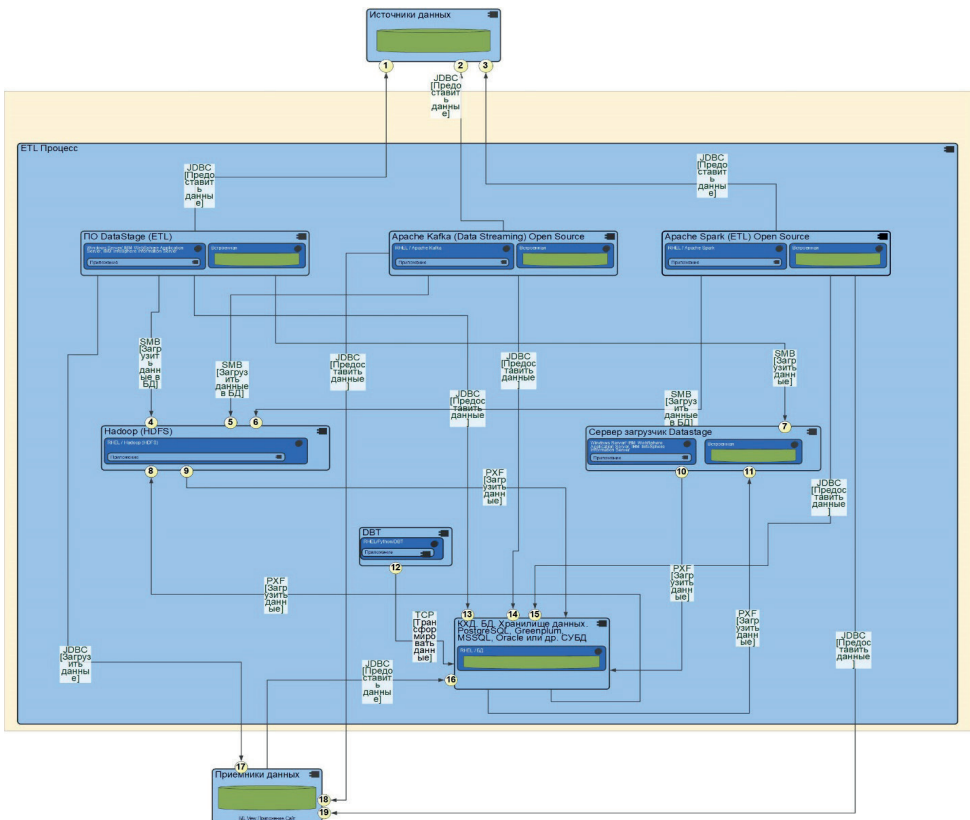


Рис. 4. Схема архитектуры нового решения



Потоки 10 и 11 исключаются при замене на новое ПО, вместо них используются потоки 8 и 9. Поток 16 отвечает за доставку данных от хранилища потребителю, может быть реализован как обращение клиента через ПО Aqua Data Studio, DBeaver напрямую к БД с помощью SQL запросов.

Поток 12 необходим для реализации трансформаций внутри хранилища данных. Инструмент DBT используется для облегчения процессов преобразования данных внутри хранилища, упрощения документирования функционала, а также дает возможность строить линии данных в удобном графическом представлении и упрощает процесс написания автотестов.

Установку ПО возможно проводить как на один сервер, так и на кластер серверов. Возможность масштабирования позволяет оптимально подобрать ресурсы под заданную задачу. Рекомендуется следующий порядок установки: Apache ZooKeeper (для настройки кластера), HDFS, Yarn, Hive, Apache Spark, Apache Kafka, DBT, Apache Airflow (для управления и планирования процессов) [4]. DBT и Apache Airflow необходимо разворачивать в разных `env` для того, чтобы избежать возможных конфликтов библиотек. К ПО DBT необходимо будет дополнительно установить плагины коннекторы ко всем рабочим базам, пример `dbt-postgre`. В случае установки в офлайн-режиме необходимо собрать пакеты для DBT и Apache Airflow заранее со всеми зависимостями.

Для тестовой сборки был реализован кластер из одной мастер ноды и трех рабочих нод. На мастер ноду были установлены – DBT, Apache Airflow (Standalone версия), мастер ноды Kafka и Spark. На всех нодах был установлен HDFS, Apache Spark и Apache Kafka на рабочих нодах. В качестве хранилища данных выступали СУБД Greenplum и Postgre [5].

Определить правильно количество рабочих нод для Spark можно с помощью таблицы 1. В общем случае число зависит от объема обрабатываемых данных [6].

Таблица 1

Методика определения количества рабочих нод для Spark

Объем обрабатываемых данных за сутки	x
Годовой объем обрабатываемых данных	$z = 365 * x$
Процентный рост обрабатываемых данных за год	$y \%$
Объем архивных данных	a
Общий объем данных за год	$t = z + (y * z / 100) + a$
Коэффициент репликации 3	$r = t * 3$
Объем диска на рабочей ноде	w
Пространство задействованное под ОС	$o = 0.2 * w$
Доступный объем дискового пространства для рабочих нод	$c = w - o$
Количество рабочих нод	t/c

Если в сутки обрабатывается 100 Гб данных, то в год эта цифра будет 36,5 Тб. При проектировании кластера необходимо учитывать увеличение объема данных, так как в общем случае количество данных все время растет. Для примера возьмем



значение в $y = 20\%$, а для $a = 10$ Тб архивных данных (необходимы в том случае, если возникнут пробелы при обработке). Таким образом t за год составляет 54 Тб. При проектировании кластера осуществляется установка коэффициента репликации, который копирует данные между несколькими рабочими узлами. При таком коэффициенте, равном 3, потребуется 162 Тб места для HDFS (если привязать Spark к Hadoop для хранения данных, альтернативный вариант S3).

Таким образом для сервера с 8 Тб дискового пространства нужно оставить 20% объема под систему и ее нужды, тогда будет доступно 6 Тб дискового пространства. Результатом деления t на s получится, что для обработки такого объема данных потребуется 27 серверов. Добавим к этому числу 1 мастер ноду и 1 ноду Standby для резервирования мастера и получим 29 серверов для формирования рабочего промышленного кластера. Количество CPU и RAM можно подобрать экспериментально, основываясь на работе кластера. В общем случае минимальные требования для одного сервера: 8 CPU и 8 GB RAM; рекомендованные значения: 8 CPU и 16 GB RAM.

5. ПРОГРАММНАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ ЗАДАЧИ

Был разработан аналог процесса, работающего на ПО IBM Datastage с помощью нового стека технологий. Обработывается информация о клиентах и их операциях за сутки, сырые данные выкладываются на HDFS, информация загружается из необработанного формата в КХД, в третьей нормальной форме соответствующей формату хранилища.

Управляет процессом Airflow, в нем определена последовательность запуска заданий, так называемых DAG-ов. Согласно расписанию запускаются задачи, отвечающие за выгрузку данных из источника с помощью Spark (см. Рис. 5). Далее запускается задание по загрузке файлов из HDFS в само хранилище, аналогично первому заданию.

Процесс также можно запускать вручную. Механизм работы Airflow позволяет гибко управлять заданиями, на всех этапах идет подробное логирование, в случае неисполнения какой-либо части логики можно вручную запустить только недостающие процессы, экономя время выполнения предыдущих шагов.

После отработки ряда первых двух заданий на выходе получаем данные в БД, готовые к дальнейшей обработке. При загрузке возможно точно отфильтровать только необходимые колонки и записи. За дальнейшие трансформации внутри хранилища отвечает DBT. Данные распределяются внутри хранилища согласно его структуре, обогащаются при наличии информации от других источников. На основе итоговых таблиц строятся представления для конечного потребителя. Управляет последовательностью исполнения трансформаций Airflow (см. Рис. 6).

Обработка данных с помощью ПО Kafka во многом аналогична процессу, описанному для Spark [7]. Создается DAG с подключением к Kafka, далее задается потребитель данных, в нашем случае это хранилище, можно записывать информацию в файлы json для последующей обработки. Далее прописывается стадия приема сообщений от брокера [8].



```
from airflow import DAG
from airflow.providers.postgres.operators.postgres import PostgresOperator
from airflow.providers.apache.hdfs.operators.hdfs import HdfsPutFileOperator
from datetime import datetime, timedelta

default_args = {
    'owner': 'airflow',
    'depends_on_past': False,
    'start_date': datetime(2023, 3, 26),
    'retries': 1,
    'retry_delay': timedelta(minutes=5),
}

dag = DAG('postgresql_to_hdfs', default_args=default_args, schedule_interval='@daily')

pg_operator = PostgresOperator(
    task_id='extract_data_from_postgresql',
    postgres_conn_id='my_postgresql_connection',
    sql='SELECT * FROM clients_operations;',
    dag=dag
)

hdfs_operator = HdfsPutFileOperator(
    task_id='load_data_to_hdfs',
    hdfs_conn_id='my_hdfs_connection',
    source='/tmp/clients_operations.csv',
    destination='/user/hadoop/clients_operations.csv',
    dag=dag
)

pg_operator >> hdfs_operator
```

Рис. 5. Выгрузка данных из источника

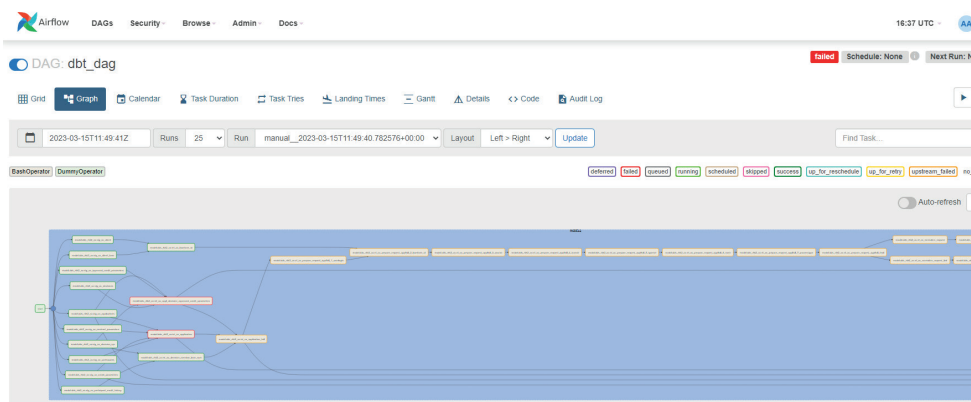


Рис. 6. Обработка данных с помощью DBT

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Работоспособность системы была проверена на тестовом наборе данных. Работа заданий показала, что обработка данных осуществляется согласно требованиям ко времени и к скорости выполнения. Управлять производительностью можно с помощью изменения характеристик серверов или добавлением новых нод к кластеру. Таким образом ресурсы, затрачиваемые на сертификацию, экономятся и позволяют использовать их для расширения рабочего кластера.

В работе представлена архитектура решения, потоки данных и способы их замещения, примеры реализации заданий с помощью open source ПО. Решение можно использовать взамен проприетарного ПО, ввиду наличия ограничений на его использование, аналог является полностью работоспособным и пригодным к применению.

Разработанная система может иметь широкое применение из-за своей доступности, открытости и наличия подробной документации в различных областях, ставящих своей задачей обработку данных. Сами программные продукты активно развиваются, обновления ускоряют обработку данных, расширяют функционал, добавляют новые удобные инструменты для разработки и автоматизации процессов.

Литература

1. *David Loshin*. ETL (Extract, Transform, Load) // Business Intelligence. – 2nd. – Morgan Kaufmann, 2012. – 400 p
2. *Ralph Kimball, Joe Caserta*. The Data Warehouse ETL Toolkit: Practical Techniques for Extracting, Cleaning, Conforming, and Delivering Data. – John Wiley & Sons, 2004. – 528 p.
3. *David Haertzen*. ETL Tools // The Analytical Puzzle: Profitable Data Warehousing, Business Intelligence and Analytics. – Technics Publications, 2012. – 346 p.
4. *С. Риза, У. Лезерсон, Ш. Оуэн, Д. Уиллс*. Spark для профессионалов: современные паттерны обработки больших данных = Advanced Analytics with Spark. Patterns for Learning from Data at Scale (O'Reilly, 2015). 2017. – 272 с.



5. *Уоррен Р., Карая Х.* Эффективный Spark. Масштабирование и оптимизация = High Performance Spark. Best Practices for Scaling and Optimizing Apache Spark. 2018. – 352 с.
6. *Х. Карая, Э. Конвински, П. Венделл, М. Захария.* Изучаем Spark. Молниеносный анализ данных = Learning Spark: Lightning-Fast Big Data Analytics (O'Reilly, 2015). 2015. – 304 с.
7. *Нархид Ния, Шапира Гвен, Палино Тодд.* Apache Kafka. Поточковая обработка и анализ данных. – СПб., 2019 320 с.
8. *Vohra, Deepak* (October 2016). Practical Hadoop Ecosystem: A Definitive Guide to Hadoop-Related Frameworks and Tools (1st ed.). Apress. p. 429.



Development of an ETL Process Based on Open Source Technologies to Solve the Problem of Data Delivery to Consumers

Vyacheslav V. Starkov*

Moscow Institute of Steel and Alloys (National Research Technological University) (NUST MISIS), Moscow, Russia

ORCID: <https://orcid.org/0009-0006-0662-4852>

e-mail: starkov.viatcheslav@yandex.ru

Svetlana S. Gorbatova **

Moscow Institute of Steel and Alloys (National Research Technological University) (NUST MISIS), Moscow, Russia

ORCID: <https://orcid.org/0009-0005-5213-6780>

e-mail: ssgorbatova@misis.ru

Victoria I. Vodolaga ***

Lomonosov Moscow State University (MSU), Moscow, Russia

ORCID: <https://orcid.org/0009-0003-1816-0088>

e-mail: vikavodolaga1@gmail.com

The article discusses the issues of developing an ETL process for a data warehouse based on open source technologies, instead of private software supplied by the vendor. The process allows you to deliver data from the source to the consumer, focusing on the speed of delivery, the resources spent and the convenience of development. The architecture for solving the problem with a description of the processes being replaced is presented, data transmission over a new process is implemented. Modern tools used to work with data are involved, methods of interaction with them and selection of technical characteristics for the process are described.

Keywords: database, open source, software, ETL process, data delivery.

For citation:

Starkov V.V., Gorbatova S.S., Vodolaga V.I. Development of an ETL Process Based on Open Source Technologies to Solve the Problem of Data Delivery to Consumers. *Modelirovanie i analiz dannykh = Modelling and Data Analysis*, 2023. Vol. 13, no. 2, pp. 180–193. DOI: 10.17759/mda.2023130210 (In Russ., abstr. in Engl.).

****Vyacheslav V. Starkov***, Postgraduate Student, Moscow Institute of Steel and Alloys (National Research Technological University) (NUST MISIS), Moscow, Russia, ORCID: <https://orcid.org/0009-0006-0662-4852>, e-mail: starkov.viatcheslav@yandex.ru

*****Svetlana S. Gorbatova***, Senior Lecturer, Moscow Institute of Steel and Alloys (National Research Technological University) (NUST MISIS), Moscow, Russia, ORCID: <https://orcid.org/0009-0005-5213-6780>, e-mail: ssgorbatova@misis.ru

******Victoria I. Vodolaga***, Master's Degree, Lomonosov Moscow State University (MSU), Moscow, Russia, ORCID: <https://orcid.org/0009-0003-1816-0088>, e-mail: vikavodolaga1@gmail.com



References

1. David Loshin. ETL (Extract, Transform, Load) . Business Intelligence. – 2nd. – Morgan Kaufmann, 2012. – 400 p
2. Ralph Kimball, Joe Caserta. The Data Warehouse ETL Toolkit: Practical Techniques for Extracting, Cleaning, Conforming, and Delivering Data. – John Wiley & Sons, 2004. – 528 p.
3. David Haertzen. ETL Tools . The Analytical Puzzle: Profitable Data Warehousing, Business Intelligence and Analytics. – *Technics Publications*, 2012. – 346 p.
4. S. Riza, U. Lezerson, Sh. Ouen, D. Uills. Spark dlya professionalov: sovremennye patterny obrabotki bol'shikh dannykh = Advanced Analytics with Spark. Patterns for Learning from Data at Scale (O'Reilly, 2015). 2017. – 272 p.
5. Uorren R., Karau Kh. Effektivnyi Spark. Masshtabirovanie i optimizatsiya = High Performance Spark. Best Practices for Scaling and Optimizing Apache Spark. 2018. – 352 s.
6. Kh. Karau, E. Konvinski, P. Vendell, M. Zakhariya. *Izuchaem Spark. Molnienosnyi analiz dannykh* = Learning Spark: Lightning-Fast Big Data Analytics (O'Reilly, 2015). 2015. – 304 s.
7. Narkhid Niya, Shapira Gven, Palino Todd. Apache Kafka. Potokovaya obrabotka i analiz dannykh. – SPb., 2019 p = 320.
8. Vohra, Deepak (October 2016). Practical Hadoop Ecosystem: A Definitive Guide to Hadoop-Related Frameworks and Tools (1st ed.). *Apress*. p. 429.

Получена 12.04.2023

Принята в печать 12.05.2023

Received 12.04.2023

Accepted 12.05.2023

◇◇◇◇◇ МЕТОДИКА ПРЕПОДАВАНИЯ ◇◇◇◇◇

УДК 37.022

Анализ результатов педагогического эксперимента по внедрению дистанционных образовательных технологий в преподавание математических дисциплин для технических специальностей вузов

*Мартюшова Я.Г.**

Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет) (МАИ), г. Москва, Российская Федерация

ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-7803-5914>

e-mail: ma1554@mail.ru

В статье рассматриваются результаты педагогического эксперимента по внедрению современных дистанционных образовательных технологий в преподавание математических дисциплин студентам технических специальностей высшей школы. В качестве базы для проведения эксперимента использовался электронный учебник по курсу «Теория функции комплексного переменного», используемый в рамках системы дистанционного обучения CLASS.NET для преподавания этой дисциплины в Московском авиационном институте. В работе приводятся результаты предварительного статистического анализа однородности экспериментальных и контрольных групп студентов и результаты их анкетирования с целью выявления мотивации к использованию средств дистанционного обучения в учебном процессе. Приводится сравнительный анализ текущих рейтингов студентов экспериментальных и контрольных групп, вычисляемых в моменты проведения контрольных мероприятий в течение семестра. Эффективность применения разработанной технологии использования средств дистанционного обучения (СДО) в учебном процессе подтверждается результатами статистических исследований финальных оценок студентов, полученных в ходе очного тестирования.

Ключевые слова: электронный учебник, дистанционное обучение, статистический анализ, анкетирование, эффективность применения СДО, внутренняя мотивация, внешняя мотивация.

Финансирование. Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского научного фонда (РНФ) в рамках научного проекта по гранту № 22-28-00588, <https://rscf.ru/project/22-28-00588/>.

Для цитаты:

Мартюшова Я.Г. Анализ результатов педагогического эксперимента по внедрению дистанционных технологий в преподавание математических дисциплин для технических специальностей вузов // Моделирование и анализ данных. 2023. Том 13. № 2. С. 194–205. DOI: <https://doi.org/10.17759/mda.2023130211>

***Мартюшова Янина Германовна**, кандидат педагогических наук, доцент кафедры теории вероятностей и компьютерного моделирования, Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет) (МАИ), г. Москва, Российская Федерация, ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-7803-5914>, e-mail: ma1554@mail.ru

1. ВВЕДЕНИЕ

Повсеместное использование в современном образовательном процессе средств дистанционного обучения порождает актуальность исследований, направленных на оценку эффективности применения дистанционных образовательных технологий по сравнению с традиционной очной формой ведения образовательной деятельности. Появляются исследования направленные на оценку качества используемых в современных системах дистанционного обучения (СДО) электронных учебников [4, 8, 9]. Появляются новые смешанные формы ведения образовательной деятельности в высшей школе, когда СДО используется для организации самостоятельной работы студента и выполнения им домашних работ, в то время как традиционные лекционные и семинарские занятия проводятся в привычном очном формате. По такому принципу организовано применение СДО CLASS.NET [7,11] Московского авиационного института, используемое в преподавании математических дисциплин для студентов технических специальностей. В рамках этого СДО автором статьи был разработан электронный учебник (ЭУ) по курсу «Теория функции комплексного переменного» [1], с использованием которого в весеннем семестре 2023 года был проведен педагогический эксперимент, направленный на оценку эффективности применения разработанного электронного учебника при смешанной форме ведения занятий, а также на изучение изменения мотивационной составляющей учебного процесса для задействованных в эксперименте студентов. Электронный учебник был разработан на основе применения дидактических принципов конструирования электронных учебников [5] в рамках парадигмы адаптивного компьютерного тестирования [8], учитывающей индивидуальные особенности студентов экспериментальных групп. Контент электронного учебника разбит на 17 разделов, что соответствует 17 семинарским занятиям стандартного семестрового курса ТФКП для студентов технических факультетов. Каждый раздел состоит из блоков тестовых и контрольных заданий, а также заданий с дозированной педагогической помощью (заданий для самостоятельного обучения). Структура типового электронного учебника, используемого в СДО CLASS.NET, подробно описана в [7]. Проведению педагогического эксперимента предшествовал статистический анализ однородности экспериментальных и контрольных групп студентов, проведенный с использованием аппарата проверки статистических гипотез.



Мотивационная составляющая, привнесенная использованием ЭУ исследовалась на основе проведенного анкетирования студентов. Эффективность применения в образовательном процессе электронного учебника обосновывалась на основе статистического анализа результатов их очных финальных тестов, согласно методике, предложенной в [6].

2. ОРГАНИЗАЦИЯ ПЕДАГОГИЧЕСКОГО ЭКСПЕРИМЕНТА И ИССЛЕДОВАНИЕ МОТИВАЦИОННОЙ СОСТАВЛЯЮЩЕЙ ПРИМЕНЕНИЯ ДИСТАНЦИОННЫХ ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫХ ТЕХНОЛОГИЙ

Для организации педагогического эксперимента было задействовано 2 экспериментальные и 2 контрольные группы студентов одного из технических факультетов МАИ. Для чистоты эксперимента с помощью критерия хи-квадрат была проверена гипотеза об однородности выбранных групп студентов на основе анализа набранного ими балла ЕГЭ.

Состав академических групп не подлежит изменению, поэтому результаты групп были сопоставлены попарно и таким образом, были выделены 4 группы с наиболее близкими результатами.

С помощью критерия хи-квадрат проверки гипотезы об однородности наблюдений [3, с.194] проверялась гипотеза о том, что баллы ЕГЭ по математике в той и другой группе студентов имеют один и тот же закон распределения.

Значение статистики критерия хи-квадрат вычисляется по формуле

$$z = n \cdot \left(\sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^r \frac{n_{ji}^2}{n_i N_j} - 1 \right),$$

где n – количество всех наблюдений (суммарное количество студентов в обеих группах), s – количество групп, r – количество интервалов, n_i , $i = \overline{1, s}$, – объемы выборок (количество студентов в группах), N_j , $j = \overline{1, r}$, – суммарное количество попаданий в j -й интервал, n_{ji} – количество попаданий баллов студентов i -й группы в j -й интервал.

В рассматриваемом случае, $s = 2$, $r = 6$. Доверительная область $G = [0, x_{1-\alpha}(m)]$, где $x_{1-\alpha}(m)$ – квантиль уровня $1-\alpha$ распределения хи-квадрат с $m = (s-1)(r-1)$ степенями свободы. При $m = 5$ и $\alpha = 0,05$ $x_{0,95}(5) = 11,07$. Значения статистики попарно по группам приведены в табл. 1.

Таблица 1

**Значения статистики хи-квадрат при проверке
однородности по результатам ЕГЭ**

Группы	Контрольная группа 1	Контрольная группа 2
Эксперимент. группа 1	3.75	4.85
Эксперимент. группа 2	2.91	4.51

Так как вычисленное по исходным данным значение статистики попадает в доверительную область, то на уровне доверия 0.95 можно утверждать, что опытные данные согласуются с первоначальной гипотезой об однородности выборок. Таким образом, начальный уровень математической подготовки в экспериментальных и контрольных группах можно считать одинаковым.

Следуя дидактическому принципу конструирования электронного учебника, связанному с компетентностным подходом [2, 5], были также проверены на однородность результаты, которые продемонстрировали студенты групп по курсу «Математический анализ», предшествующему курсу ТФКП, и позволяющему студентам овладеть необходимыми компетенциями для его освоения. Однородность результатов проверялась тем же способом. Результаты проверки приведены в табл. 2.

Таблица 2

Значения статистики хи-квадрат при проверке однородности по результатам освоения требуемых компетенций

Группы	Контрольная группа 1	Контрольная группа 2
Эксперимент. группа 1	5.75	8.45
Эксперимент. группа 2	7.91	10.32

При той же границе доверительной области $x_{0,95}(5) = 11,07$ (квантили распределения хи-квадрат) видно, что все четыре гипотезы об однородности по-прежнему принимаются. Однако это происходит значительно менее уверенно (значение статистики близко к границе доверительной области), что можно объяснить различными преподавателями, которые вели в группах семинарские занятия по курсу «Математический анализ».

Помимо анализа однородности выбранных групп студентов методом анкетирования был проведен сравнительный анализ мотивационной составляющей участвующих в эксперименте студентов к использованию в процессе обучения средств дистанционного обучения. Анкетирование проводилось до и после проведения эксперимента в группах, где применялся в процессе обучения электронный учебник для организации самостоятельной работы студентов.

Согласно методике, использованной в [5], студентам было предложено оценить значимость для них 16 утверждений. Для оценки была использована 7-балльная шкала. Утверждения были сформулированы таким образом, чтобы можно было оценить отношение студентов к целесообразности, или нецелесообразности использования электронного учебника в процессе обучения.

Они состояли в том, что «работа с электронным учебником...»: позволит мне хорошо освоить курс ТФКП (утверждение 1); получить положительную оценку по курсу ТФКП (2); мне интересен сам процесс работы с электронным учебником (3); даст мне возможность контролировать свой рейтинг среди сокурсников в лекционном потоке (4); работа с электронным учебником эмоционально вовлекает, как компьютерная игра (5); даст мне возможность продемонстрировать свои текущие успехи родителям (6); я заинтересован в современных способах получения знаний предмета (7);



я хочу учиться по электронному учебнику, так как я ориентирован на получение современной престижной специальности, поэтому мои ожидания связаны с тем, что методы обучения будут соответствовать времени (8); мне удобнее решать выполняющие задание в электронном учебнике, а не в школьной тетради (9); использование современных методов обучения в моем вузе повышает мой шанс хорошей карьеры в будущем (10); даст мне возможность получить подсказку в момент решения задачи, не откладывая решение до встречи с преподавателем (11); хочу быть востребованным в современной жизни и поэтому хочу владеть современными методами работы в изучаемых мной дисциплинах (12); позволит мне выполнять задание, следуя индивидуальной траектории выполнения заданий, учитывающей мой уровень знаний (13); я хочу получить диплом о высшем образовании и поэтому должен выполнять все требования, которые предъявляются ко мне в учебном процессе (14); даст мне возможность потратить меньше времени на выполнение задания (15); быть в глазах сверстников современным человеком, получающим образование в соответствии с требованиями времени.

Средние значения оценки мотива для студентов экспериментальной группы до и после работы с электронным учебником отражены на рисунке 1.



Рис. 1. Оценки значимости для студентов использования ЭУ в учебном процессе

На описании изменений позиций наиболее важных для студентов мотивов использования электронного учебника остановимся чуть подробнее. Произошло изменение положений мотивов, занимающих пять первых позиций по результатам опроса до начала формирующего этапа опытно-экспериментальной работы (февраль 2023 г.) по сравнению с их расположением на конец учебного семестра (май 2023 г.). Так, уровень внешней мотивации получения хорошей оценки по изучаемому предмету снизился, а желание получить глубокие и прочные знания укрепило свою позицию. После изучения курса с помощью ЭУ возникла потребность в получении подсказки, дозированной педагогической помощи, непосредственно в процессе самостоятельной работы, поскольку такая возможность оказалась реальной, желание ее реализации

вышло на ведущие позиции. Потребность следования индивидуальной траектории обучения позицию не поменяла, осталась на четвертом месте.

Надо заметить, что оценки некоторых функций электронного учебника снизились. Так, не оправдались надежды студентов на уменьшение времени на выполнение заданий и сам процесс работы с электронным учебником не получил высоких оценок, в отличие от конкретных его функций, упомянутых выше. Это задает направление дальнейшего совершенствования конкретного электронного учебника, использованного на формирующем этапе эксперимента. Очевидна необходимость дальнейшего расширения возможности индивидуализации обучения, совершенствования программной оболочки и корректировки системы задач, исключая требующие громоздких вычислений с большим количеством действий.

Увеличение данных студентами субъективных оценок функций электронного учебника, позволяющих контролировать рейтинг студентов, предоставлять возможность получения дозированной педагогической помощи, обеспечивать индивидуализацию выбора заданий и темпа изучения материала, подтверждает результативность с точки зрения студентов использования электронного учебника, построенного в соответствии с дидактическими принципами конструирования ЭУ [2, 5].

Кроме того, если разделить мотивы работы с электронным учебником на два кластера, внутренние мотивы, связанные непосредственно с учебной деятельностью с использованием электронного учебника, и внешние по отношению к этой деятельности, то можно проследить изменение структуры мотивационной сферы студентов экспериментальной группы на рис. 2.



Рис. 2. Изменение структуры мотивационной сферы студентов экспериментальных групп



Доля студентов, для которых наиболее значимыми являются внутренние мотивы, увеличилась в конце семестра с 62 % до 71 %, что также подтверждает результативность использования электронного учебника [10, 12].

3. АНАЛИЗ ЭФФЕКТИВНОСТИ ПРИМЕНЕНИЯ ДИСТАНЦИОННЫХ ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫХ ТЕХНОЛОГИЙ НА ОСНОВЕ ОЧНОГО ТЕСТИРОВАНИЯ

Эффективность применения электронного учебника по курсу ТФКП оценивалась на основе анализа финальных оценок за курс, полученных студентами экспериментальных и контрольных групп в ходе очного финального тестирования. Уровень теоретической и практической подготовки студентов контролировался в течение семестра на промежуточных аттестациях в виде аудиторных работ, предусматривающих проверку соответствующих проверяемой теме компетенций путем решения задач. Окончательная оценка уровня усвоения учебного материала, как теоретического, так и практического, определялась оценкой, полученной на итоговой аттестации в конце учебного семестра. По учебному плану итоговая аттестация предусмотрена в виде зачета с оценкой, дающего оценку по 4-балльной системе: «отлично», «хорошо», «удовлетворительно», «неудовлетворительно». При этом есть еще одна категория студентов – не явившиеся на зачет, классификация которых затруднена, поэтому эти студенты исключались из рассмотрения, что незначительно меняло численный состав группы. Таким образом, по окончании формирующего этапа эксперимента, контингент студентов был разделен на 4 группы по уровню усвоения учебного материала: высокий, хороший, средний, низкий.

Результаты проведения итоговой аттестации в объединенных экспериментальных и объединенных контрольных группах представлены на диаграмме ниже (рис. 3).

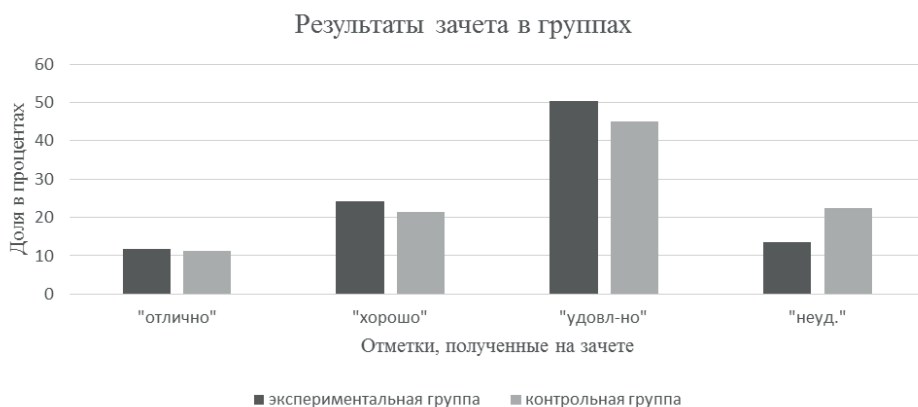


Рис. 3. Результаты финального тестирования в экспериментальных и контрольных группах

На рис. 3 по горизонтали отмечены оценки на экзамене, по вертикали – доля студентов, получивших соответствующие оценки на экзамене, в процентах. На диаграмме представлены доли, в процентах от общего числа студентов группы, тех обучающихся, которые получили на экзамене указанные отметки. По сравнению с началом семестра, распределения оценок в экспериментальной и контрольной группах отличаются от распределения баллов ЕГЭ по группам. Если при анализе однородности распределения результатов ЕГЭ, сделанном до начала опытно-экспериментальной работы, критерий хи-квадрат показал однородность выборок, то по данным зачета однородность не подтверждается. Значение критерия хи-квадрат возросло до $z = 6,80278$, что больше критического значения $\chi_{0,9}(3) = 6,25$ (квантили уровня 0.9 распределения хи-квадрат с 3 степенями свободы), то есть различия существенны на уровне доверия 0,9.

Доли студентов с высоким и хорошим уровнем усвоения материала отличаются незначительно, но доля студентов с низким уровнем в экспериментальной группе существенно ниже (10 % в экспериментальной группе против 27 % в контрольной), в то время как наблюдается резкое возрастание студентов среднего уровня (45 % в экспериментальной и 27 % в контрольной). Такую динамику можно объяснить наличием в электронном учебнике обратной связи и возможности мониторинга деятельности студентов, видимостью для преподавателя той части процесса, которая относится к часам самостоятельной работы студентов и заложена в учебных планах и программах дисциплин, изучаемых в вузах. Кроме того, самими студентами отмечен стимулирующий эффект в виде рейтинга студентов в группе, рейтинга групп в потоке и самой автоматизированной рейтинговой оценки, пересчет которой происходит в СДО CLASS.NET при каждом изменении статистической информации, связанной с конкретным пользователем.

В обеих группах при изучении ТФКП учебники в печатной форме использовались одни и те же, то есть отличие в обеспечении учебного процесса учебниками заключалось только в наличии или отсутствии электронного учебника, поэтому отличия в прохождении итоговой аттестации, которую проводит один и тот же лектор, так как группы учились на одном потоке, можно отнести к результативности использования электронного учебника.

Кроме того, исследовалось соответствие оценки активности и качества самостоятельной работы студента, полученной с помощью электронного учебника, оценке уровня знаний студентов, данной преподавателями. Методами корреляционного анализа оценивалась зависимость этих двух параметров. При значимом отличии от нуля коэффициента корреляции можно утверждать, что показатели зависимы, а значит, можно использовать статистические данные работы студента в электронном учебнике в качестве одного из параметров оценки учебной работы студента в семестре, что также говорит о результативности использования электронного учебника.

В качестве статистического параметра, вычисляемого при помощи одной из функций блока статистической информации СДО CLASS.NET, был взят «прогресс», то есть отношение количества правильно выполненных заданий учебника к максимальному числу заданий, которые могут быть предложены студенту. Показатели



были сняты в конце весеннего семестра 2022/2023 учебного года и после получения студентами оценок на экзамене, был вычислен коэффициент корреляции Пирсона, который составил $r = 0,6305$. Эмпирическое значение t -критерия Стьюдента значимости коэффициента корреляции получилось равным 6,212 при критическом значении критерия $t_{\text{крит.}}(0,95;40) = 2,021$. Эмпирически найденное значение коэффициента корреляции значительно превышает критический порог, что говорит о значимости коэффициента корреляции и наличии связи между рассматриваемыми параметрами, статистики работы студентов в электронном учебнике и оценкой, полученной впоследствии на экзамене.

Конечно, на окончательную оценку по дисциплине влияет множество факторов и электронный учебник только один из них, но, тем не менее связь между рассмотренными параметрами существует и, исходя из модуля r (коэффициента корреляции), ее можно охарактеризовать как умеренную, то есть можно использовать статистические показатели электронного учебника, относящиеся к конкретному студенту, в качестве одного из параметров оценки его учебной работы в семестре, что говорит о результативности использования электронного учебника.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Приведенные в статье результаты педагогического эксперимента по применению электронного учебника по курсу ТФКП для организации самостоятельной работы студентов технических специальностей МАИ продемонстрировали эффективность его применения по ряду показателей. Основным показателем безусловно является финальная оценка, полученная студентами за курс в результате традиционного очного тестирования (зачета с оценкой). Применение аппарата проверки статистических гипотез убедительно подтвердило объективность сделанных выводов о существенном отличии (в лучшую сторону) результатов освоения предмета и заявленных в его учебном плане компетенция студентами экспериментальных групп, в которых применялся электронный учебник. Вторым, не менее важным показателем результата применения СДО, явилось изменение мотивационной сферы студента в сторону увеличения доли внутренних мотивов, что также способствует повышению эффективности освоения материала. В тоже время проведенный анализ выявил направления совершенствования как структуры электронного учебника, так и функций электронной управляющей оболочки СДО, в целом соответствующие дидактическим принципам конструирования электронных учебников, предложенным ранее авторами статьи.

Рост часов на самостоятельную работу студентов в высшей школе требует ее контроля и организации, что может быть реализовано с помощью дистанционных средств обучения с хорошо организованной обратной связью. Эта же обратная связь позволяет пользователям СДО (студентам) осуществлять самоконтроль своей деятельности, создает дополнительный мотивационный эффект к процессу познания нового материала и является основой для адаптивного подхода к процессу формирования с помощью СДО индивидуальной траектории студента, наиболее полно учитывающей



его особенности и текущий уровень знаний. Проведенный анализ результатов педагогического эксперимента позволяет сделать вывод, что объединение традиционной очной формы ведения педагогической деятельности с применением дистанционных образовательных технологий дает синергетический эффект, способный существенно улучшить усвоение студентами, преподаваемых им дисциплин высшей математики.

Литература

1. *Битюков Ю.И., Мартюшова Я.Г.* Решение задач по теории функций комплексного переменного: учебное пособие. М.: Изд-во МАИ, 2022. 88 с.
2. *Босов А.В., Мартюшова Я.Г., Наумов А.В.* Особенности формирования контента электронных учебников на основе дидактических принципов их конструирования // Отечественная и зарубежная педагогика. 2022. Т. 1, № 4 (85). С. 34–45. DOI:10.24412/2224-0772-2022-85-34-45
3. *Кибзун А.И., Горяинова Е.Р., Наумов А.В.* Теория вероятностей и математическая статистика. Базовый курс с примерами и задачами. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2017. 232 с.
4. *Курбацкий В.Н., Сиренко С.Н.* Критерии оценки качества современного электронного учебного курса [Электронный ресурс] // Электронная библиотека БГУ. URL: https://elib.bsu.by/bitstream/123456789/164738/1/Курбацкий_5_2012-046-049.pdf (дата обращения: 19.04.2023).
5. *Мартюшова Я.Г.* Дидактические принципы конструирования электронного учебника для студентов университетов: дисс. ... канд. пед. наук. М., 2019. 161 с.
6. *Мартюшова Я.Г., Мецержаков Е.А., Мхитарян Г.А.* Организация автоматизированной рейтинговой формы контроля в электронных учебниках СДО МАИ CLASS.NET // Приложение к международному научному журналу Современные информационные технологии и ИТ-образование. 2017. Т. 13, № 3. С. 174–180.
7. *Наумов А.В., Джимураат А.С., Иноземцев А.О.* Система дистанционного обучения математическим дисциплинам CLASS.NET // Вестник компьютерных и информационных технологий. 2014. № 10. С. 36–44. DOI: 10.14489/vkit.2014.010.pp.036-044
8. *Наумов А.В., Мартюшова Я.Г.* Адаптация системы дистанционного обучения на основе статистической обработки результатов работы пользователей [Электронный ресурс] // Труды МАИ. 2019. № 109. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=111420> (дата обращения: 19.04.2023). DOI: 10.34759/trd-2019-109-21
9. *Панькина Е.В., Черчик И.В.* Оценка качества электронного учебного курса как необходимое условие современного обучения // Профессиональное образование в России и за рубежом. 2021. № 1(41). С. 39–47.
10. *Реан А.А., Коломинский Я.Л.* Социальная педагогическая психология. СПб.: Издательство «Питер», 2000. 416 с.
11. СДО МАИ CLASS.NET [Электронный ресурс] // URL <http://www.distance.mai.ru/> (дата обращения: 19.04.2023).
12. *Якунин В.А.* Психология учебной деятельности студентов. М.: Логос, 1994. 160 с.



Analysis of the Pedagogical Experiment Results on the Implementation of Distance Learning Technologies in the Teaching of Mathematical Disciplines for Technical Specialties of Universities

Yanina G. Martyushova*

Moscow Aviation Institute (State Research University) (MAI), Moscow, Russia

ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-7803-5914>

e-mail: ma1554@mail.ru

The article considers the results of a pedagogical experiment on the implementation of modern distance educational technologies in the teaching of mathematical disciplines to students of technical specialties of higher education. As a basis for the experiment, an electronic textbook on the course “Theory of the function of a complex variable” was used. It was used as part of the distance learning system CLASS.NET to teach this discipline at the Moscow Aviation Institute. The article presents the results of the preliminary statistical analysis of the homogeneity of experimental and control groups of students and the results of their questionnaire in order to identify the motivation for the use of distance learning tools in the educational process. A comparative analysis of the current ratings of students of experimental and control groups, calculated at the time of conducting control measures during the semester, is provided. The effectiveness of using the developed distance learning technology (LMS) in the educational process is confirmed by the results of statistical studies of the final assessments of students obtained during full-time testing.

Keywords: electronic textbook, distance learning, statistical analysis, questionnaire, effectiveness of LMS, intrinsic motivation, extrinsic motivation.

Funding. The reported study was funded by Russian Science Foundation (RSF), project number 22-28-00588

For citation:

Martyushova Ya.G. Analysis of the Pedagogical Experiment Results on the Implementation of Distance Learning Technologies in the Teaching of Mathematical Disciplines for Technical Specialties of Universities. *Modelirovanie i analiz dannykh = Modelling and Data Analysis*, 2023. Vol. 13, no. 2, pp. 194–205. DOI: 10.17759/mda.2023130211 (In Russ., abstr. in Engl.).

***Yanina G. Martyushova**, PhD (Pedagogy), Associate Professor of the Department of Probability Theory, Moscow Aviation Institute (State Research University) (MAI), Moscow, Russia, ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-7803-5914>, e-mail: ma1554@mail.ru



References

1. Bityukov Yu.I., Martyushova Ya.G. Reshenie zadach po teorii funktsii kompleksnogo peremennogo: uchebnoe posobie. [Solving problems in the theory of functions of a complex variable] M.: Publ. MAI, 2022. 88 p. (In Russ.).
2. Bosov A.V., Martyushova Ya.G., Naumov A.V. Osobennosti formirovaniya kontenta elektronnykh uchebnikov na osnove didakticheskikh printsipov ikh konstruirovaniya. [Features of electronic textbook content formation based on didactic principles of their design] *Otechestvennaya i zarubezhnaya pedagogika*. 2022. Vol. 1, № 4 (85). Pp. 34–45. DOI:10.24412/2224-0772-2022-85-34-45 (In Russ., abstr. in Engl.)
3. Kibzun A.I., Goryainova E.R., Naumov A.V. Teoriya veroyatnostei i matematicheskaya statistika. Bazovyi kurs s primerami i zadachami. [Probability theory and mathematical statistics. Basic course with examples and tasks] M.: FIZMATLIT, 2017. 232 p. (In Russ.).
4. Kurbatskii V.N., Sirenko S.N. Kriterii otsenki kachestva sovremennogo elektronnoogo uchebnogo kursa [Criteria for assessing the quality of a modern electronic training course] [Elektronnyi resurs]. Elektronnaya biblioteka BGU. URL: https://elib.bsu.by/bitstream/123456789/164738/1/Kurbatskii_5_2012-046-049.pdf (Accessed 19.04.2023). (In Russ.).
5. Martyushova Ya.G. Didakticheskie printsipy konstruirovaniya elektronnoogo uchebnika dlya studentov universitetov: diss. ... kand. ped. nauk. [Didactic principles of designing an electronic textbook for university students. Ph.D. (Pedagogy) diss.] M., 2019. 161 p. (In Russ.).
6. Martyushova Ya.G., Meshcheryakov E.A., Mkhitaryan G.A. Organizatsiya avtomatizirovannoi reitingovoi formy kontrolya v elektronnykh uchebnikakh SDO MAI CLASS.NET. [Organization of automated rating control in electronic textbooks of the RES MAI CLASS.NET] *Prilozhenie k mezhdunarodnomu nauchnomu zhurnalu Sovremennyye informatsionnyye tekhnologii i IT-obrazovanie*. 2017. Vol. 13, № 3. Pp. 174–180. (In Russ.).
7. Naumov A.V., Dzhimurat A.S., Inozemtsev A.O. Sistema distantsionnogo obucheniya matematicheskimi distsiplinami CLASS.NET. [Distance learning system for mathematical disciplines CLASS.NET] *Vestnik komp'yuternykh i informatsionnykh tekhnologii*. 2014. № 10. Pp. 36–44. DOI: 10.14489/vkit.2014.010.pp.036-044 (In Russ., abstr. In Engl.).
8. Naumov A.V., Martyushova Ya.G. Adaptatsiya sistemy distantsionnogo obucheniya na osnove statisticheskoi obrabotki rezul'tatov raboty pol'zovatelei [Adaptation of the distance learning system based on statistical processing of user results] [Elektronnyi resurs]. *Trudy MAI*. 2019. № 109. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=111420> (Accessed 19.04.2023). DOI: 10.34759/trd-2019-109-21 (In Russ.).
9. Pan'kina E.V., Cherchik I.V. Otsenka kachestva elektronnoogo uchebnogo kursa kak neobkhodimoe uslovie sovremennogo obucheniya. [Assessing the quality of an electronic training course as a prerequisite for modern training] *Professional'noe obrazovanie v Rossii i za rubezhom*. 2021. № 1(41). Pp.39–47. (In Russ.).
10. Rean A.A., Kolominskii Ya.L. Sotsial'naya pedagogicheskaya psikhologiya. [Social pedagogical psychology] SPb.: Publ. «Piter», 2000. 416 p. (In Russ.).
11. SDO MAI CLASS.NET [Elektronnyi resurs]. URL <http://www.distance.mai.ru/> (Accessed 19.04.2023). (In Russ.).
12. Yakunin V.A. Psikhologiya uchebnoi deyatel'nosti studentov. [Psychology of students' learning activities] M.: Logos, 1994. 160 p. (In Russ.)

«Перевернутый» учебный план – это решение или проблема?

Волков А.И.*

Московский технический университет связи и информатики (МТУСИ)
г. Москва, Российская Федерация
e-mail: a.i.volkov@mtuci.ru

Лукин В.Н.**

Московский государственный психолого-педагогический университет
(ФГБОУ ВО МГППУ), г. Москва, Российская Федерация
Московский авиационный институт – национальный исследовательский
университет (МАИ), г. Москва, Российская Федерация
ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-8906-2686>
e-mail: lukinvn@list.ru

Чернышов Л.Н.***

Московский авиационный институт
(национальный исследовательский университет) (МАИ)
г. Москва, Российская Федерация
Финансовый университет при правительстве РФ (Финуниверситет)
г. Москва, Российская Федерация
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-1512-4052>
e-mail: levchern@gmail.com

Статья посвящена актуальной на сегодняшний день проблеме реформирования высшего образования в связи с отменой болонской системы. Некоторые специалисты предлагают идею «перевернутого» плана, где начальные стадии обучения посвящены практическим дисциплинам, а теоретические переносятся на старшие курсы. Однако такой подход вызывает ряд возражений, самое веское из которых – студенты не будут заинтересованы в продолжении обучения вообще. Авторами предлагаются определенные меры по преобразованию образовательных программ, в частности модификация тематики практических занятий по теоретическим дисциплинам, формирование унифицированных наборов обязательных компетенций на разных уровнях, активное использование проектного обучения, изменение стиля преподавания. Эти меры позволят повысить качество подготовки студентов.

Ключевые слова: перевернутый учебный план, прикладные навыки, фундаментальные дисциплины, проектное обучение.



Для цитаты:

Волков А.И., Лукин В.Н., Чернышов Л.Н. «Перевернутый» учебный план – это решение или проблема? // Моделирование и анализ данных. 2023. Том 13. № 2. С. 206–214. DOI: <https://doi.org/10.17759/mda.2023130212>

***Волков Андрей Иванович**, кандидат технических наук, доцент, доцент кафедры «Информатика», Московский технический университет связи и информатики (МТУСИ), г. Москва, Российская Федерация, e-mail: a.i.volkov@mtuci.ru

****Лукин Владимир Николаевич**, кандидат физико-математических наук, профессор, Московский государственный психолого-педагогический университет (ФГБОУ ВО МГППУ), г. Москва, Российская Федерация, ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-8906-2686>, e-mail: lukinvn@list.ru

*****Чернышов Лев Николаевич**, кандидат физико-математических наук, доцент, Московский авиационный институт – национальный исследовательский университет (МАИ), Финансовый университет при правительстве РФ, г. Москва, Российская Федерация, ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-1512-4052>, e-mail: levchern@gmail.com

1. ВВЕДЕНИЕ

Традиционно в университетах образовательные программы строятся так, что студенты сначала изучают общеобразовательные фундаментальные дисциплины: историю, философию, иностранный язык, экономику, математику, физику и т.п. А на старших курсах изучается больше практических специальных дисциплин.

Однако некоторые специалисты, подчеркивая прагматичность современных студентов, утверждают, что те не понимают, зачем нужна та или иная дисциплина на практике, и не проявляют стремления ее изучать. В результате эффективность образования в целом падает. Эта точка зрения породила идею построения учебного процесса в вузе на основе так называемого «перевернутого» учебного плана.

Такой подход предполагает насыщение начальных стадий обучения студентов специальными практическими дисциплинами, а овладение ими теоретическими фундаментальными знаниями переносится, в основном, на старшие курсы. Подобное перераспределение предлагается проводить в различных соотношениях. По замыслу, это должно обеспечить заинтересованность студентов в учебе и получении практических навыков на младших курсах. А на старших курсах у них появится потребность в получении фундаментальных знаний [1, 2].

Среди преподавателей вузов есть приверженцы такого подхода, но, тем не менее, большинство относится к этому с осторожностью или вообще негативно. Возникает подозрение, что такой подход является очередным, возможно последним, посылом болонской системы, с «достоинствами» которой все уже хорошо знакомы.

2. АНАЛИЗ ПОДХОДА

Рассмотрим «за» и «против», которые обнаруживаются при анализе предложенного подхода.



Во-первых, кто сказал, что студенты младших курсов, получившие начальные навыки в работе по специальности, не вникая в тонкости дела, будут заинтересованы в освоении теоретических фундаментальных дисциплин на старших курсах? Скорее всего, широкое введение практических дисциплин на младших курсах приведет к тому, что студенты на начальных этапах не будут сильно перенапрягаться в учебе, и в то же время у них будет создаваться иллюзия, что они действительно приобретают какие-то серьезные профессиональные знания и навыки.

Реально в этом случае студенты с первых дней не привыкнут к необходимости постоянной и активной работы по освоению дисциплин, определенных учебным планом. Поэтому они и далее не будут готовы к энергичному добыванию профессиональных знаний. Это приведет к тому, что многие из них, получив начальные прикладные навыки и считая их достаточными, будут устраиваться на работу (отнюдь не высококвалифицированную) с целью зарабатывать денег «здесь и сейчас», и все меньше будут уделять внимание учебе. Постепенно они придут к мысли, что учеба мешает им зарабатывать, и станут либо сами уходить из вуза, либо их будут отчислять из-за неуспеваемости. В результате страна в целом получит резкое снижение количества и, что хуже, качества выпускников вузов. Их профессиональный рост без продолжения образования в дальнейшем, конечно же, станет практически невозможным. Особенно сильно это скажется на специальностях, связанных с информационными технологиями. Здесь слегка поднатаскавшийся молодой человек, которому удалось отладить пару-тройку программ, считает себя в состоянии зарабатывать этой профессией и забрасывает учёбу, полагая себя мастером. А дефицит кадров в этой области только стимулирует подобный процесс.

Во-вторых, уверовав, что на младших курсах они приобрели какие-то серьезные профессиональные знания и навыки без особых усилий, большого желания изучать сложные фундаментальные дисциплины они не проявят. В результате у них сложится справедливое мнение, что вуз как-то не так организует их подготовку. И престиж вуза в их глазах будет падать.

Сторонники ранней специализации предлагают и менее радикальный вариант: не перемещать фундаментальные дисциплины на старшие курсы, а растягивать их изучение на весь период обучения. На освободившееся место предлагается поставить прикладные дисциплины. Казалось бы, компромиссный вариант, но в данном случае такое дробное изучение фундаментальных дисциплин не приводит ни к чему хорошему. Фрагментарное изучение этих дисциплин и встречи с преподавателем раз в неделю (или реже) приводит к тому, что к очередному занятию студенты многое забывают, и приходится тратить больше времени на подготовку. А времени лишнего нет. Таким образом, «размазывание» большого количества сложных дисциплин не облегчает, а усложняет работу студентов. Тем более, что современные студенты, как правило, не способны длительно держать в памяти и анализировать такой объем сложной информации без закрепления. И несмотря на то, что по этим дисциплинам знания пополняются редко, студентам воспринимать их станет трудно, и хорошего результата ожидать не приходится.



Приверженцы концепции «перевернутого» учебного плана предлагают существенно уменьшить и количество лекций в учебной программе, порой указывается снижение объёма лекций до 10–15 % от общего числа аудиторных занятий [2]. Обосновывается такой подход тем, что в век высокого развития информационных и телекоммуникационных технологий преподаватели могут выкладывать учебные материалы на соответствующие информационные ресурсы, чтобы студенты самостоятельно с ними познакомились. Кроме того, студентам предлагается и самостоятельный поиск нужной информации в интернете.

Это предложение, конечно, не выдерживает никакой критики. Например, далеко не каждый студент, особенно младших курсов, будет добросовестно самостоятельно изучать теоретический материал, и тем более не каждый студент сможет четко выделить главные и второстепенные аспекты прочитанных материалов. К тому же не факт, что студенты смогут понять, как применять полученные знания на практике.

С самостоятельным поиском информации в интернете также не все в порядке. Студентам необходимо, во-первых, знать, что конкретно искать, а во-вторых, четко сформулировать поисковый запрос. К тому же после нахождения большого количества информации нужно отфильтровать нужные материалы от ненужных, тем более что неподходящей информации будет гораздо больше. Очевидно, что студенты, не прослушавшие соответствующие лекции, с такой задачей не справятся.

Чтобы находить дополнительные учебные материалы и расширять свои знания и умения, нужно ещё знать, что искать. Значит, об этом студент должен хотя бы услышать на лекции.

Таким образом, сокращение лекционных занятий приведет к существенному снижению знаний студентов: они будут просто «натаскиваться» на выполнение каких-либо действий по заданному алгоритму без понимания, почему и зачем это нужно делать. В результате образовательный уровень студентов высоким явно не будет.

При использовании «перевернутого» учебного плана возникнут проблемы и с «изюминкой» болонской системы: мобильностью студентов, возможностью перевода в другие вузы или с одного направления подготовки на другое. Дело здесь, прежде всего, в том, что в каждом вузе на младшие курсы будут выноситься различные дисциплины, не совпадающие даже на разных направлениях и профилях одного вуза, а в разных вузах и подавно. В результате для подобных переводов в программную разницу потребуется выносить слишком много дисциплин, что станет непреодолимым препятствием для перевода студентов.

Совершенно очевидно, что для возможности таких переводов следует, наоборот, по возможности унифицировать изучаемые на младших курсах дисциплины. Представляется разумным сформировать унифицированные наборы обязательных компетенций, и универсальных, и общепрофессиональных, и профессиональных, которые создавались бы на следующих уровнях:

- на уровне подготовки (бакалавриат, специалитет, магистратура);
- на уровне укрупненных групп специальностей и направлений (УГСН);
- на уровне направления подготовки или специальности.



Если на верхнем уровне эту работу выполняет специальная комиссия Минобрнауки, то на двух нижних уровнях работу могли бы взять на себя федеральные учебно-методические объединения (ФУМО). Кроме того, эти объединения могли бы определить и рекомендуемые дисциплины для формирования наборов обязательных компетенций.

Кроме обязательных, для реализации конкретной образовательной программы (профиля/специализации) каждый вуз сможет формировать свои наборы компетенций по уровням.

Здесь уместно сделать историческое отступление. В советском образовании, которое считалось лучшим в мире (выше МГУ, например, котировались лишь отдельные зарубежные университеты), было несколько уровней. Один из них, понятно, школа. Высшее образование – это университет или институт. А вот рангом ниже было среднее профессиональное образование – система техникумов. Выпускники техникума весьма ценились за высокую техническую подготовку и готовность работать на производстве. Заметим – в отличие от бакалавров, у них было полноценное образование. Чтобы в этом убедиться, достаточно полистать учебники для техникумов. Выпускник техникума, поступивший в вуз, отличался прочной базой и умением получать знания. Был и ещё один уровень – среднее специальное образование, это профтехучилища (ПТУ), в которых давали среднее образование и готовили рабочих различных специальностей.

Таким образом удовлетворялась потребность государства в квалифицированных специалистах разного уровня: инженерах, техниках, рабочих. Конечно, кроме технических учебных заведений были и гуманитарные, и медицинские, и сельскохозяйственные. В тех условиях говорить о каком-то перевернутом плане смысла не было: необходимые навыки они получали в рамках производственной практики, которая базировалась на теоретической подготовке. Конечно, производственная практика – это не производство в полном смысле этого слова, но мастера производственного обучения не даром хлеб ели. Заметим, что при учебных заведениях были и полноценные производства, о чём, в частности, говорил А.Н.Терехов [3]. Кроме того, была практика выполнения государственных заказов подразделениями вузов в рамках госбюджетных тем, и к этим работам активно привлекали студентов (НИРС).

После внедрения болонской системы всё было разрушено. Но заметим, само появление этой системы за рубежом было вызвано именно дефицитом кадров средней квалификации! Считалось, что бакалавры станут примерно тем, чем у нас были выпускники техникумов, а в магистратуру пойдёт тот же контингент, что шёл в советские вузы. Но до отлаженной советской многоступенчатой системы образования это было далеко, что мы сейчас наглядно и видим. Поэтому обозначившееся движение к отказу от болонской системы можно только приветствовать. И идея «перевернутого» плана прекрасно демонстрирует её провал.

Если уж говорить о перевернутом плане, то нужно говорить не о «сдвиге» фундаментальных дисциплин на конец обучения, а максимальное их приближение к практике: примеры на лекциях, подбор тематики заданий, выполняемых на практических



занятиях, чтобы они стали действительно практическими. Нужно, чтобы студенты с самого начала, изучая сложные фундаментальные вопросы, понимали, зачем нужна та или иная дисциплина, где могут найти применение получаемые ими знания, умения и навыки. Надо сказать, что в период становления советского высшего и среднего технического образования (двадцатые – тридцатые годы прошлого века) был именно такой подход. И это позволило в предвоенное десятилетие вывести страну в число лидеров мировой экономики.

Для реализации подобного подхода преподавателям фундаментальных дисциплин непременно понадобится помощь преподавателей специальных и выпускающих кафедр для формирования наборов прикладных примеров и заданий. Такое методическое взаимодействие разных кафедр окажет полезное влияние на всех участников этой работы и повысит их квалификацию: одни смогут повысить фундаментальность своих исследований, а другие – прикладную направленность своих работ.

В результате активное использование прикладных примеров и заданий окажет существенное положительное влияние на формирование интереса студентов младших курсов к изучению профессиональных и фундаментальных дисциплин, что в свою очередь повысит эффективность всего учебного процесса.

Положительным следует считать и предложение активнее применять проектное обучение [4]. Однако этот подход не нужно доводить до абсурда. Количество проектов должно быть не более двух в год. Они могут выполняться в рамках одной или, что лучше, нескольких дисциплин. Их тематика постепенно должна усложняться, а сами проекты должны неуклонно подводить студента к выполнению дипломного проекта (выпускной квалификационной работы). Значит, тематика проектов на старших курсах должна по возможности соответствовать будущему дипломному проекту, или представлять его часть. Демонстрацию и защиту семестровых проектов целесообразно с младших курсов проводить публично – перед комиссией и другими студентами. Это научит студентов ясно и убедительно выражать свою мысль, что, безусловно, сыграет положительную роль при защите дипломного проекта [5].

3. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Итак, напрашивается вывод, что, если мы хотим получать качественных специалистов в количестве, необходимом для устойчивого развития страны, стиль преподавания необходимо менять. Полумеры типа «перевернутого плана» приведут только к окончательной деградации высшего образования, производству «самодельных», и тогда о технологическом прорыве не стоит и мечтать. Вернуть эффективную многоступенчатую советскую систему мы не в силах, но хотя бы постараемся сделать из вуза не ПТУ, а связку «грамотный бакалавр – эффективный магистр», что соответствовало бы связке «техникум – вуз».

Литература

1. Онлайн-магистратура и перевернутый учебный план // Наталья Савицкая, «Независимая газета», 09.11.2022 (https://www.ng.ru/education/2022-11-09/8_8585_online.html).



2. *Филиппович А.Ю.* «Мы были первыми, кто предложил новую модель организации учебного процесса, которая строится на «перевернутом» учебном плане» / Системный администратор, 2019, Выпуск № 03 (196), <https://samag.ru/archive/article/3833>.
3. *Терехов А.Н.* Технология программирования [Электронный ресурс] / А.Н. Терехов. – 2-е изд. – М.: Интернет-Университет Информационных Технологий, 2007. – 149 с. – URL: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=233491>.
4. *Куклина М.В., Труфанов А.И., Уразова Н.Г., Бондарева А.В.* Анализ внедрения проектного обучения в российских вузах // Современные проблемы науки и образования. – 2021 – № 6; URL: <https://science-education.ru/ru/article/view?id=31320> (дата обращения: 10.03.2023).
5. *Волков А.И.* Методические вопросы организации дипломного проектирования // «Совершенствование IT-специалистов по направлению «Прикладная информатика» для инновационной экономики»: сборник статей научно-методической конференции (2 декабря 2014 г.) – М.: МЭСИ, 2015. – С. 22–26.



Is the «Inverted» Curriculum Solution or Problem?

Andrey I. Volkov*

Moscow Technical University of Communications and Informatics (MTUCI)
Moscow, Russia
e-mail: a.i.volkov@mtuci.ru

Vladimir N. Lukin**

Moscow State University of Psychology and Education (MSUPE),
Moscow Aviation Institute (National Research University) (MAI), Moscow, Russia
ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-8906-2686>
e-mail: lukinvn@list.ru

Lev N. Chernyshov ***

Moscow Aviation Institute (National Research University) (MAI),
Financial University under the Government of the Russian Federation (FU)
Moscow, Russia
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-1512-4052>
e-mail: levchern@gmail.com

The article is devoted to the current problem of reforming higher education in connection with the abolition of the Bologna system. Some experts suggest the idea of an “inverted” plan, where the initial stages of training are devoted to practical disciplines, and theoretical ones are transferred to senior courses. However, this approach raises a number of objections, the most significant of which is that students will not be interested in continuing their studies at all. The authors propose certain measures for the transformation of educational programs, in particular, the modification of the topics of practical classes in theoretical disciplines, the formation of unified sets of mandatory competencies at different levels, the active use of project-based learning, and a change in teaching style. These measures will improve the quality of students’ training.

Keywords: inverted curriculum, applied skills, fundamental disciplines, project training.

For citation:

Volkov A.I., Lukin V.N., Chernyshov L.N. Is the «Inverted» Curriculum Solution or Problem?. *Modelirovanie i analiz dannykh = Modelling and Data Analysis*, 2023. Vol. 13, no. 2, pp. 206–214. DOI: 10.17759/mda.2023130212 (In Russ., abstr. in Engl.).

***Andrey I. Volkov**, Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, Associate Professor of the Department of Computer Science, Moscow Technical University of Communications and Informatics (MTUCI), Moscow, Russia, e-mail: a.i.volkov@mtuci.ru

****Vladimir N. Lukin**, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Moscow State University of Psychology and Education (MSUPE), Moscow Aviation Institute (National Research University) (MAI), Moscow, Russia, ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-8906-2686>, e-mail: lukinvn@list.ru



*****Lev N. Chernyshov**, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Moscow Aviation Institute (National Research University) (MAI), Financial University under the Government of the Russian Federation (FU), Moscow, Russia, ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-1512-4052>, e-mail: levchern@gmail.com

References

1. Onlain-magistratura i perevernutyi uchebnyi plan // Natal'ya Savitskaya, «Nezavisimaya gazeta», 09.11.2022 (https://www.ng.ru/education/2022-11-09/8_8585_online.html).
2. Filippovich A.YU. «Мы были первыми, кто предложил novuyu model' or-ganizatsii uchebnogo protsessa, kotoraya stroitsya na «perevernutoM» uchebnom planE» / Sistemnyi administrator, 2019, Vypusk № 03 (196), <https://samag.ru/archive/article/3833>.
3. Terekhov A.N. Tekhnologiya programmirovaniya [Elektronnyi resurs] / A.N. Terekhov. – 2-e izd. – M.: Internet-Universitet Informatsionnykh Tekhnologii, 2007. – 149 s. – URL: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=233491>.
4. Kuklina M.V., Trufanov A.I., Urazova N.G., Bondareva A.V. Analiz vned-reniya proektnogo obucheniya v rossiiskikh vuzakh // Sovremennye problemy nauki i obrazovaniya. – 2021 – № 6; URL: <https://science-education.ru/ru/article/view?id=31320> (data obrashcheniya: 10.03.2023).
5. Volkov A.I. Metodicheskie voprosy organizatsii diplomnogo proektirovaniya // “Sovershenstvovanie IT-spetsialistov po napravleniyu «Prikladnaya in-formatika» dlya innovatsionnoi ekonomiki”: sbornik statei nauchno-metodicheskoi konferentsii (2 dekabrya 2014 g.) – M.: MEHSI, 2015. – S. 22–26.

Получена 12.04.2023

Received 12.04.2023

Принята в печать 12.05.2023

Accepted 12.05.2023

Моделирование и анализ данных 2023. Том 13. № 2.

Научный журнал

Издаётся с 2011 года

Учредитель

Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Московский государственный психолого-педагогический университет»

Адрес редколлегии:

г. Москва, ул. Сретенка, 29, факультет информационных технологий

Тел.: +7 (499) 167-66-74

E-mail: mad.mgppu@gmail.com

Журнал зарегистрирован в Государственном комитете РФ по печати.

Свидетельство о регистрации средств массовой информации

ПИ № ФС77-66444 от 14 июля 2016 года

ISSN: 2219-3758

ISSN: 2311-9454 (online)

Подписано в печать: 08.06.2023.

Формат: 70*100/16. Гарнитура Times.

Усл. печ. п. 13,4. Усл.-изд. л. 11,6.

Тираж 500 экз.