

**1**

# МОДЕЛИРОВАНИЕ И АНАЛИЗ ДАННЫХ

НАУЧНЫЙ ЖУРНАЛ

## MODELLING AND DATA ANALYSIS

SCIENTIFIC JOURNAL

**2024**

ISSN: 2219-3758

ISSN: 2311-9454 (ONLINE)

## Моделирование и анализ данных

### Главный редактор:

Л.С. Куравский ФГБОУ ВО МГППУ, Россия

### Заместители главного редактора:

С.Д. Кулик МИФИ, Россия

А.В. Пантелеев МАИ, Россия

### Редакционный совет

#### Председатель редакционного совета:

Г.Г. Амосов МИАН, Россия

#### Члены редакционного совета:

В.А. Барабанщиков ФГБОУ ВО МГППУ, Россия

Питер Бентлер Калифорнийский университет  
Лос-Анджелеса, США

А.В. Горбатов МИСиС, Россия

Л.С. Куравский ФГБОУ ВО МГППУ, Россия

Леонид Либкин Эдинбургский университет,  
Великобритания

А.А. Марголис ФГБОУ ВО МГППУ, Россия

В.В. Рубцов ФГБОУ ВО МГППУ, Россия

Д.В. Ушаков ИП РАН, Россия

Девид Фрэнсис Университет Хьюстона, США

#### Редакционная коллегия:

К.К. Абгарян ФИЦ ИУ РАН, Россия

Г.Г. Амосов МИАН, Россия

М.В. Воронов ФГБОУ ВО МГППУ, Россия

Е.Л. Григоренко МГУ им. М.В. Ломоносова,  
Россия; Йельский университет,  
США

В.К. Захаров МГУ им. М.В. Ломоносова,  
Россия

А.И. Кибзун МАИ, Россия

Леонид Либкин Эдинбургский университет,  
Великобритания

В.Р. Милов НГТУ им. Р.Е. Алексеева,  
Россия

А.В. Наумов МАИ, Россия

Д.Л. Ревизников МАИ, Россия

Холлинг Хайнц Университет Мюнстера,  
Германия

Девид Фрэнсис Университет Хьюстона,  
США

К.В. Хорошенков Брэдфордский университет,  
Великобритания.

Г.А. Юрьев ФГБОУ ВО МГППУ, Россия

## Моделирование и анализ данных

Издательство ФГБОУ ВО МГППУ

Издается с 2011 года. Периодичность: 4 раза в год.

Свидетельство регистрации СМИ: ПИ № ФС77-66444

Дата регистрации: 14.07.2016

Формат: 70×100/16

Тираж 500 экз.

Все права защищены. Название журнала, логотип, рубрики, все тексты и иллюстрации являются собственностью ФГБОУ ВО МГППУ и защищены авторским правом. Перепечатка материалов и использование иллюстраций допускается только с письменного разрешения редакции.

© ФГБОУ ВО «Московский государственный психолого-педагогический университет», 2024, № 1

## Modelling and Data Analysis

### Editor-in-Chief:

L.S. Kuravsky MSUPE, Russia

### Deputy Editors-in-Chief:

S.D. Kulik MPEPhI, Russia

A.V. Panteleev MAI, Russia

### The Editorial Council

#### Chairman of the Editorial Council:

G.G. Amosov MI RAS, Russia

#### The Members of the Editorial Council:

V.A. Barabanschikov MSUPE, Russia

Peter Bentler University of California,  
USA

A.V. Gorbатов MISIS, Russia

L.S. Kuravsky MSUPE, Russia

Leonid Libkin University of Edinburgh,  
UK

A.A. Margolis MSUPE, Russia

V.V. Rubtsov MSUPE, Russia

D.V. Ushakov IP RAS, Russia

David Francis University Of Houston, USA

#### The Editorial Board:

K.K. Abgaryan IU RAS, Russia

G.G. Amosov MI RAS, Russia

M.V. Voronov MSUPE, Russia

E.L. Grigorenko Lomonosov Moscow State  
University, Russia;  
Yale University, USA

V.K. Zakharov Lomonosov Moscow State  
University, Russia

A.I. Kibzun MAI, Russia

Leonid Libkin University of Edinburgh,  
UK

V.R. Milov NNSTU n.a. R.E. Alekseev,  
Russia

A.V. Naumov MAI, Russia

D.L. Reviznikov MAI, Russia

Holling Heinz University Of Münster,  
Germany

David Francis University Of Houston,  
USA

K.V. Horoshenkov University of Bradford,  
UK

G.A. Yuryev MSUPE, Russia

## Modelling and Data Analysis

Publisher MSUPE

Frequency: since 2011

Published: 4 times a year

The mass medium registration certificate:

PN № ФС77-66444.

From: 14.07.2016

Format: 70×100/16

500 copies

All rights reserved. Journal title, logo, rubrics, all texts and images are the property of MSUPE and copyrighted. Using reprints and illustrations is allowed only with the written permission of the publisher.

© MSUPE, 2024, no. 1





## **КОМПЛЕКСЫ ПРОГРАММ**

---

*Щербань П.С., Абу-Хамди Р.В.*

Создание специализированного программного обеспечения  
для оперативного подсчета объемов потерь углеводов в резервуарах..... 155

## **МЕТОДИКА ПРЕПОДАВАНИЯ**

---

*Куланин Е.Д., Степанов М.Е.*

Вычислительный эксперимент в преподавании  
высшей математики на примере теории чисел..... 170

## **КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ**

---

*Макеча Б.Б.*

Анализ климата и сельскохозяйственных факторов  
для прогнозирования урожайности основных зерновых  
культур в Эфиопии: визуальный анализ (1995–2021 гг.)..... 206





## **SOFTWARE**

---

*Shcherban P.S., Abu-Hamdi R.V.*

Design Of Specialized Software for the Operational  
Calculation of Hydrocarbon Losses in Reservoirs..... 167

## **METHOD OF TEACHING**

---

*Kulanin Y.D., Stepanov M.E.*

Computational Experiment in Teaching Higher  
Mathematics by the Example of Number Theory ..... 194

## **SHORT MESSAGES**

---

*Mekecha B.B.*

Analyzing Climate and Agricultural Factors for Yield Prediction  
of Key Cereal Crops in Ethiopia: a Visual Analysis (1995–2021) ..... 196





**\*Платонов Евгений Николаевич**, кандидат физико-математических наук, доцент, Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет) (ФГБОУ ВО МАИ), г. Москва, Российская Федерация, ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-8502-1350>, e-mail: [en.platonov@gmail.com](mailto:en.platonov@gmail.com)

**\*\*Мартынова Ирина Романовна**, студент магистратуры института «Информационные технологии и прикладная математика» Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), г. Москва, Российская Федерация, ORCID: <https://orcid.org/0009-0007-3140-2490>, e-mail: [irina.mart.r@gmail.com](mailto:irina.mart.r@gmail.com)

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Обработка естественного языка (NLP) является областью, которая использует вычислительные методы для анализа и синтеза естественного языка и речи. Эта дисциплина пересекается с лингвистикой, изучая слова и языковые конструкции, и тесно взаимодействует с компьютерными науками и искусственным интеллектом.

NLP не только исследует основы языка, но и успешно применяется для разнообразных задач, начиная от поддержки образовательного процесса [1, 2] и заканчивая исследованиями в области психиатрии, таких как изучение пациентов с шизофренией [3]. Интересно, что NLP также находит применение в неожиданных областях, включая анализ рентгенограмм легочной ткани [4].

Благодаря обработке естественного языка открываются уникальные возможности в решении различных задач, включая анализ настроений [5]. Один из подходов, предложенный в работе [6], использует глубокое обучение для анализа сообщений в социальных сетях с помощью векторных представлений слов (например, fastText, word2vec и GloVe) и сверточных нейронных сетей (CNN).

Другие исследователи [7] разработали новую систему рекомендаций продуктов, основанную на инновационной логике, которая предсказывает наиболее значимые продукты для онлайн-покупок в реальном времени, учитывая предпочтения клиентов и оценки продуктов. Еще одно исследование [8] показало, что, разделяя отзывы на 8 эмоциональных категорий, можно проанализировать поведение клиентов и улучшить их уровень удовлетворенности. Также проводились исследования с применением сложных архитектур нейронных сетей, таких как BERT [9, 10].

В данной работе мы стремимся заполнить пробел в исследованиях семантического анализа текста на русском языке с использованием современных нейросетевых архитектур. Мы сосредотачиваемся на анализе тональности отзывов об организациях на Яндекс Картах. Наша цель – разработать модель, автоматически классифицирующую отзывы как положительные, отрицательные или нейтральные, и оценить ее эффективность на реальных данных. Мы подготавливаем корпус текстов отзывов, включающий положительные, нейтральные и отрицательные отзывы, затем модель обучается на корпусе с использованием различных алгоритмов, и в конце происходит сравнение результатов.



## 2. ВЕКТОРНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ТЕКСТА

Теоретической базой для векторного представления слов считается дистрибутивная семантика. Она изучает семантическую близость слов на основе их распределения в текстовых корпусах [11]. Это позволяет перевести информацию о словах в многомерные векторы с помощью линейной алгебры, что обеспечивает их компактное представление для вычислений [12].

### *TF-IDF*

TermFrequency-Inverse Document Frequency – это метод представления слов в векторной форме, учитывающий не только частоту встречаемости слова в документе (TF), но и его важность в контексте всего корпуса (IDF) [13].

*TF* (Частота термина): отражает, насколько часто слово встречается в документе. Вычисляется как отношение числа вхождений слова к общему числу слов в документе.

$$tf(t, d) = \frac{n_t}{\sum_k n_k},$$

где  $n_t$  – число вхождений слова в документ,  $\sum_k n_k$  – общее число слов в данном документе.

*IDF* (Обратная частота документа): показывает, насколько уникально слово в контексте всего корпуса. Вычисляется как логарифм обратного отношения общего числа документов к числу документов, содержащих слово.

$$idf(t, D) = \log \frac{|D|}{|\{d_i \in D | t \in d_i\}|},$$

где  $|D|$  – число документов в коллекции;

$|\{d_i \in D | t \in d_i\}|$  – число документов из коллекции  $D$ , в которых встречается  $t$ .

### *Word2vec*

Модель word2vec базируется на предположении о тесной связи между словами и частями речи в их векторных представлениях [14]. Её архитектура, основанная на контекстной близости слов, обычно включает следующие этапы: 1) токенизация словаря; 2) представление корпуса слов в векторной форме через one-hot encoding; 3) ввод полученных векторов слов в нейронную сеть; 4) расчет ошибки через вычисление функции потерь; 5) коррекция весов модели с использованием обратного распространения ошибки.

Word2vec предлагает две различные архитектуры: Skip-gram (по слову предсказывается контекст) и CBOW (по контексту предсказывается слово) [15].

Для модели Skip-gram условная вероятность генерации любого центрального слова с учетом окружающих слов контекста может быть смоделирована по следующей формуле:

$$P(w_c | w_o) = \frac{\exp(u_c^T v_o)}{\sum_{i \in \text{vexp}} \exp(u_i^T v_o)},$$



где  $w_c$  – центральное слово,  $w_o$  – контекст,  $v_1$  и  $u_1$  – вектора центрального слова и контекста соответственно,  $v$  – размер словаря.

Параметрами модели skip-gram являются вектор центрального слова и вектор контекстного слова для каждого слова в словаре. В процессе обучения мы изучаем эти параметры, максимизируя функцию правдоподобия, что эквивалентно минимизации функции потерь:

$$\mathcal{L} = \sum_{t=1}^T \sum_{-c \leq j \leq c, j \neq 0} \log p(w_{t+j} | w_t),$$

где  $T$  – это общее количество слов в корпусе,  $c$  – это размер окна,  $w_t$  – центральное слово в позиции  $t$ ,  $w_{t+j}$  – контекстное слово в позиции  $t+j$ , а  $p(w_{t+j} | w_t)$  – это вероятность того, что слово  $w_{t+j}$  будет встречаться в контексте слова  $w_t$ .

Часто эта функция правдоподобия реализуется с помощью бинарного кросс-энтропийного лосса:

$$\mathcal{L} = \sum_{t=1}^T \sum_{-c \leq j \leq c, j \neq 0} y_{t,j} \log p_{t,j} + (1 - y_{t,j}) \log(1 - p_{t,j}),$$

где  $y_{t,j}$  – это целевая вероятность того, что слово  $w_{t+j}$  будет встречаться в контексте слова  $w_t$ .

SBOW – метод обучения модели на основе текста, предсказывающий слово по его контексту. Формализуется следующим образом:

$$P(w_o | w_c) = \frac{\exp(u_c^T v_o)}{\sum_{i \in v} \exp(u_i^T v_o)},$$

где  $w_c$  – центральное слово,  $w_o$  – контекст,  $v_1$  и  $u_1$  – вектора центрального слова и контекста соответственно,  $v$  – размер словаря.

Обучение SBOW аналогично обучению skip-gram. Оценка максимального правдоподобия модели SBOW эквивалентна минимизации функции потерь:

$$\mathcal{L} = - \sum_{i=1}^V y_i \log p(w_i | w_t) = - \log p(w_o | w_t),$$

где  $(w_o | w_t)$  – это целевая вероятность.

Классическая модель word2vec имеет проблемы с редкими словами, особенно в морфологически богатых языках, таких как французский, испанский и русский.

### 3. МЕТОДЫ

В работе применяются методы машинного обучения, такие как логистическая регрессия, градиентный бустинг (CatBoost), метод опорных векторов (SVM), мультиномиальный наивный байес, а также методы глубокого обучения, включая рекуррентные



нейронные сети долговременной краткосрочной памяти (LSTM), сверточные нейронные сети (CNN) и трансформеры (Bert и GPT).

### *Логистическая регрессия*

Логистическая регрессия применяется для прогнозирования вероятности принадлежности объекта к определенному классу. В многоклассовой классификации используется метод «Один против остальных» (One-vs-Rest, OvR), где создается  $K$  бинарных классификаторов (где  $K$  – количество классов), каждый из которых отличает один класс от всех остальных:

$$P(Y = k) = \frac{e^{(\beta_{0k} + \beta_{1k}X_1 + \beta_{2k}X_2 + \dots + \beta_{nk}X_n)}}{\sum_{j=1}^K e^{(\beta_{0j} + \beta_{1j}X_1 + \beta_{2j}X_2 + \dots + \beta_{nj}X_n)}}$$

где  $P(Y=k)$  – вероятность принадлежности к классу  $k$ ,

$K$  – общее количество классов,

$\beta_{0k}, \beta_{1k}, \dots, \beta_{nk}$  – коэффициенты регрессии для класса  $k$ ,

Модель выбирает класс с наибольшей предсказанной вероятностью.

### *Метод опорных векторов*

Метод опорных векторов или SVM (Support Vector Machines) – линейный алгоритм для классификации и регрессии. Применяется широко и для линейных, и для нелинейных задач. SVM строит классифицирующую функцию  $F$  в виде:

$$F(x) = \text{sign}\{w, x\} + b,$$

где  $\{ \cdot, \cdot \}$  – скалярное произведение,  $w$  – нормальный вектор к разделяющей гиперплоскости,  $b$  – свободный член.

Мы стремимся выбрать  $w$  и  $b$  так, чтобы максимизировать расстояние до каждого класса. Можно подсчитать, что данное расстояние равно  $\frac{1}{|w|}$ . Проблема нахождения максимума  $\frac{1}{|w|}$  эквивалентна проблеме нахождения минимума  $|w|^2$ . Запишем все это в виде задачи оптимизации:

$$\begin{cases} \arg \min |w|^2 \\ y_i (w, x_i + b) \geq 1, i = 1, \dots, m. \end{cases}$$

Оптимизационная задача сводится к минимизации суммы квадратов весов для каждого бинарного классификатора с соответствующими ограничениями.

### *Градиентный Бустинг (CatBoostClassifier)*

CatBoostClassifier – алгоритм машинного обучения на основе градиентного бустинга деревьев решений. Эффективно справляется с задачами классификации и регрессии [16], снижает переобучение и использует весь набор данных для обучения.



Реализует случайную перестановку данных и вычисляет среднее значение меток для каждого элемента в соответствии с предшествующими элементами в перестановке. Предположим, что у нас имеется набор наблюдений  $D = \{(X_i, Y_i)\}_{i=1..n}$ , где  $X_i = (x_{i,1}, \dots, x_{i,m})$  представляет собой вектор из  $m$  признаков, включающих как числовые, так и категориальные, а  $Y_i \in \mathbb{R}$  – это целевая переменная. Обозначим перестановку как  $\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_n)$ . Тогда значение  $x_{\text{оп},k}$  заменяется соответствующим средним значением.

$$\frac{\sum_{j=1}^{p-1} [x_{\text{о}j,k} = x_{\text{оп},k}] Y_{\text{о}j} + aP}{\sum_{j=1}^{p-1} [x_{\text{о}j,k} = x_{\text{оп},k}] + a},$$

здесь вводится предварительное значение  $P$  и параметр  $a > 0$ , который представляет собой вес предварительного значения. Добавление предварительного значения – распространенная практика, способствующая снижению шума, возникающего из-за категорий с низкой частотой.

#### *Мультиномиальный наивный Байес*

В мультиномиальной модели документ рассматривается как последовательность случайных выборов слов из «мешка слов». Правдоподобие документа оценивается через вероятности совпадения выбранных слов с теми, что встречаются в документе. Наивное предположение заключается в том, что выбор каждого слова из мешка происходит независимо от выбора других слов.

В математической модели, где  $V = \{wt\}_{t=1}^{|V|}$  представляет собой словарь, каждый документ  $d_i$  представляется в виде вектора длины  $|d_i|$ , состоящего из слов, каждое из которых «вынуто» из словаря с вероятностью  $p(w_i|c_j)$ . Правдоподобие принадлежности документа  $d_i$  классу  $c_j$  определяется следующим образом:

$$p(d_i|c_j) = p(|d_i|) |d_i|! \prod_{t=1}^{|V|} \frac{1}{N_{it}!} p(w_t|c_j)^{N_{it}},$$

где  $N_{it}$  – количество вхождений  $w_t$  в  $d_i$ .

Для обучения такого классификатора тоже нужно обучить вероятности  $p(w_t|c_j)$ . Оптимальные оценки вероятностей встречаемости слова  $w_t$  в классе  $c_j$  могут быть вычислены, учитывая набор документов  $D = \{d_i\}_{i=1}^{|D|}$ , уже распределенных по классам  $c_j$ , возможно, даже вероятностно. Дан словарь  $V = wt_{t=1}^{|V|}$ , и известны вхождения  $N_{it}$ . Оптимальные оценки могут быть выражены с учетом сглаживания Лапласа:

$$p(w_t|c_j) = \frac{1 + \sum_{i=1}^{|D|} N_{it} p(c_j|d_i)}{|V| + \sum_{s=1}^{|V|} \sum_{i=1}^{|D|} N_{is} p(c_j|d_i)},$$

Априорные вероятности классов можно посчитать как:

$$p(c_j) = \frac{1}{|D|} \sum_{i=1}^{|D|} p(c_j|d_i),$$

Тогда классификация будет проходить как:

$$c = \arg \max_j \left[ \log \left( \frac{1}{|D|} \sum_{i=1}^{|D|} p(c_j | d_i) \right) + \sum_{i=1}^{|V|} N_{it} \log p(w_i | c_j) \right]$$

### Сверточные нейронные сети (CNN)

Сверточные нейронные сети (CNN) – класс сетей, разработанных для обработки структурированных данных, в первую очередь изображений, широко применяются в компьютерном зрении [17]. Они также могут использоваться для обработки текстовых данных, извлекая признаки из последовательности слов или символов.

В текстовых задачах CNN текст представляется матрицей встраивания, где каждое слово или символ представлено вектором. Сверточные слои применяются для извлечения локальных признаков, используя фильтры разных размеров окна. Затем выполняется операция объединения (pooling), например, максимальное или среднее объединение, для уменьшения размерности признаков. Полученные признаки передаются в полносвязные слои для классификации или других задач обработки текста.

CNN выделяют локальные паттерны и последовательности слов, что помогает модели анализировать различные языковые структуры, такие как n-граммы и контексты. Это полезно для классификации текста, анализа тональности, определения языка и других задач обработки.

### Рекуррентные нейронные сети (RNN)

Рекуррентные нейронные сети (RNN) – модели глубокого обучения, которые обрабатывают последовательности с использованием рекуррентных связей, передающих информацию между временными шагами. Они развертываются по времени, применяя одни и те же параметры на каждом шаге, в отличие от стандартных сетей, которые передают информацию синхронно на каждом слое.

Сеть долговременной краткосрочной памяти LSTM (Long Short-Term Memory) была создана чтобы нивелировать недостатки базовой рекуррентной нейронной сети, такие как взрыв и затухание градиентов и проблемы с памятью сети [18].

Рассмотрим ячейку памяти LSTM:

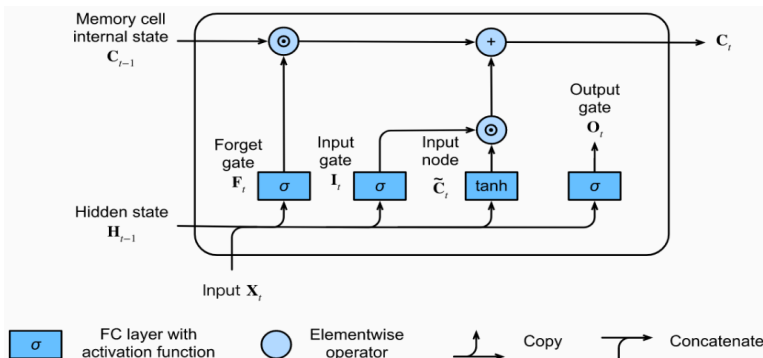


Рис. 1. Вычисление внутреннего состояния ячейки памяти в модели LSTM



LSTM включает в себя три вида шлюзов (Gate): входной, забывания и выходной. Выход скрытого слоя LSTM состоит из скрытого состояния и внутреннего состояния ячейки памяти. Только скрытое состояние передается на выходной слой, в то время как внутреннее состояние ячейки памяти остается полностью внутренним.

### Трансформеры

Трансформер – модель, использующая только механизмы внимания без сверточных или рекуррентных слоев. Популярна в различных областях глубокого обучения, включая языковые задачи, обработку изображений и обучение с подкреплением [19]. Рассмотрим архитектуру:

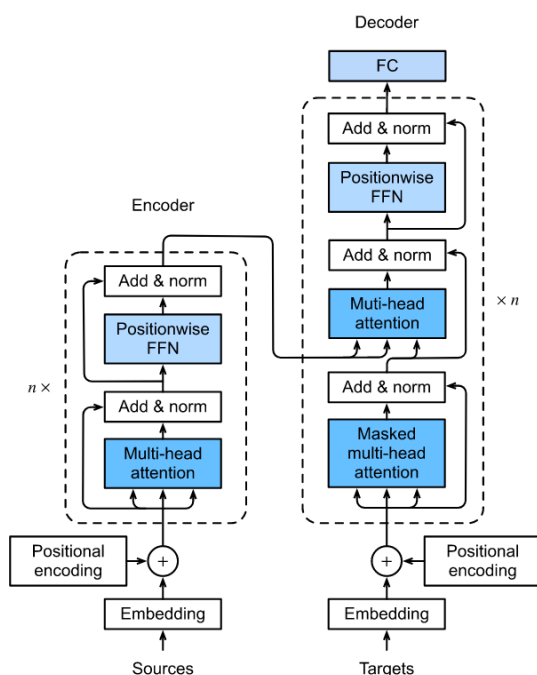


Рис 2. Архитектура трансформера

И одним из важных механизмов работы трансформеров является механизм Self-Attention, его стоит разобрать более подробно. Механизм работы self-attention состоит из того, что на вход подаётся вектор слов  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , а на выходе мы получаем вектор представлений  $z_1, z_2, \dots, z_n$ .

Для этого для каждого слова обучают три вектора  $k = \text{key}$  (ключ, куда мы смотрим),  $v = \text{value}$  (значение, что мы видим),  $q = \text{query}$  (запрос, откуда мы смотрим). Таким образом, для каждого слова будет считаться три вектора с помощью вектора весов:  $q_j = W_q x_j$ ,  $k_j = W_k x_j$ ,  $v_j = W_v x_j$ . Важность  $x_i$  слова для обновления  $x_j$  слова мы

будем считать благодаря скалярному произведению  $q_j$  на  $k_i$ . Далее мы рассчитываем веса по формуле:

$$W_{ij} = \frac{\exp\left(\frac{\langle q_j, k_i \rangle}{\sqrt{d}}\right)}{\sum_{p=1}^n \exp\left(\frac{\langle q_j, k_p \rangle}{\sqrt{d}}\right)}$$

где  $d$  – размерность векторов,  $n$  – число слов входной последовательности.

После этого новое представление  $x_j$  мы считаем, как:

$$z_j = \sum_{p=1}^n W_{pj} v_p$$

Модификация self-attention – это Multi-head attention (МНА) (рис. 3), где для каждого слова мы пересчитываем его представление несколько раз с разными весами. МНА позволяет модели совместно воспринимать информацию из разных представлений подпространства в разных положениях

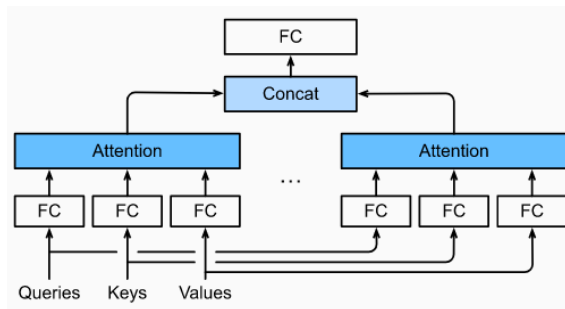


Рис. 3. МНА, где несколько голов объединены, затем линейно преобразованы.

Данная архитектура лежит в основе популярных сетей, таких как Bert (состоящий только из блоков энкодера) и GPT (состоящий только из блоков декодера), которые были использованы в нашем исследовании.

## 4. РЕЗУЛЬТАТЫ И ОБСУЖДЕНИЯ

Рассматриваем «Geo Reviews Dataset 2023» от Яндекса – более 500 000 отзывов организаций в России, собранных за 2023 год. Ценный ресурс для исследований в области анализа тональности и оценки организаций.

Основные атрибуты включают:

- Адрес организации (address)
- Название организации (name\_ru)
- Список рубрик (rubrics)



- Оценка пользователя от 0 до 5 (rating)
- Текст отзыва (text)

При анализе данных было решено переопределить метки классов для достижения более сбалансированного состояния. Исходные пять категорий оценок (от 1 до 5) были объединены с целью упрощения задачи анализа тональности отзывов и обучения моделей.

- *Негативные отзывы:*
  - Оценка 1: сильно негативный отзыв;
  - Оценка 2: негативный отзыв.
- *Нейтральные отзывы:*
  - Оценка 3: нейтральный отзыв.
- *Позитивные отзывы:*
  - Оценка 4: очень позитивный отзыв;
  - Оценка 5: сильно позитивный отзыв.

Приведем часть данных в виде таблицы 1.

Таблица 1

### Данные из набора Geo Reviews Dataset

	address	name_ru	rating	rubrics	text
0	Московская область, Электросталь, проспект Ленина, 29	Продукты Ермалино	5.0	Магазин продуктов; Продукты глубокой заморозки;	Замечательная сеть магазинов в общем, хороший ассортимент, цены приемлемые, а главное качество на высоте!!! ...
...	...	...	...	...	...
...	...	...	...	...	...
500 112	Краснодар, Прикубанский внутригородской округ, микрорайон имени Петра Метальникова, улица Петра Метальникова, 26	LimeFit	1.0	Фитнес-клуб	Не знаю смутят ли кого-то данные правила, но я была удивлена: хочешь, чтобы твой шкаф замыкался – купи замочек.

Слияние оценок в три категории обеспечило более гармоничное распределение между классами и позволило уменьшить несбалансированных классов в данных. В итоговом датасете представлено 117779 строк данных.

Качество решения задачи классификации оценивалось с помощью F1 меры. Формула для взвешенной F1-меры ( $F1_{\text{weighted}}$ ) в многоклассовой классификации имеет вид:

$$F1_{\text{weighted}} = \frac{\sum_i w_i F1_i}{\sum_i w_i},$$

где:

- $F1_{\text{weighted}}$  – взвешенная F1-мера,
  - $F1_i$  – F1-мера для класса  $i$ ,
  - $w_i$  – вес класса  $i$ , рассчитанный как доля объектов класса  $i$  от общего числа объектов.
- Качество решения задачи так же оценивалось с помощью матрицы ошибок.



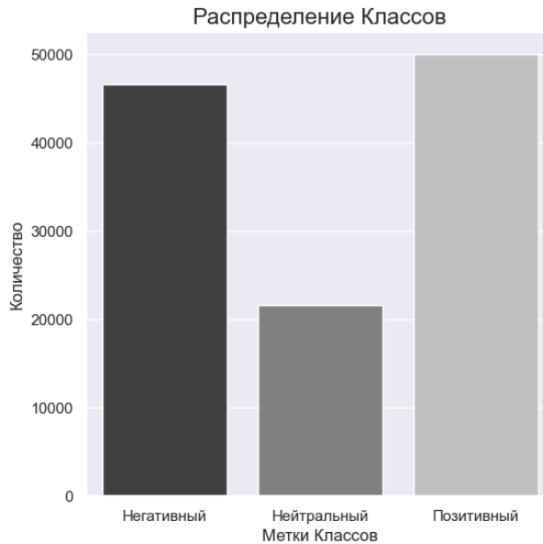


Рис. 4. Распределение меток классов

Таблица 2

### Матрица ошибок

Истинный класс		a=0	a=1	a=2
	y=0	$Y_{00}$	$Y_{01}$	$Y_{02}$
	y=1	$Y_{10}$	$Y_{11}$	$Y_{12}$
	y=2	$Y_{21}$	$Y_{22}$	$Y_{23}$
Предсказанный класс				

В таблице 2 первый индекс означает истинный класс, а второй предсказанный, таким образом правильно предсказанные классы располагаются по диагонали матрицы.

#### *Применение классических методов машинного обучения*

При решении поставленной задачи обратимся сначала к фундаментальным алгоритмам классификации используем логистическую регрессию, CatBoost, SVM и мультиномиальный наивный Байес для классификации текстов. Применяем метод TF-IDF для векторизации данных.

#### *Логистическая регрессия*

В ходе нашего исследования использовался GridSearchCV из sklearn.model\_selection для подбора параметров. Наилучшие результаты достигнуты с параметрами: lr\_C = 0.1, multi\_class='ovr', max\_iter=500, class\_weight='balanced'. Это привело к F1-мере 0.78 и следующей матрице ошибок:

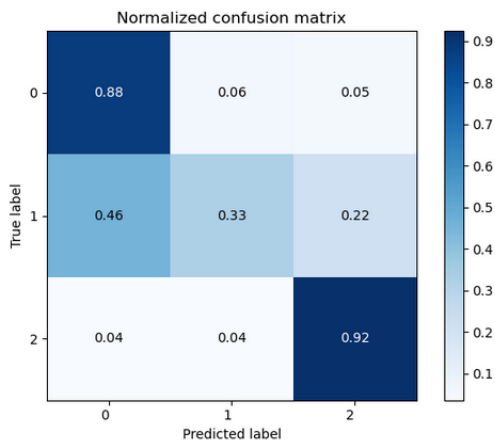


Рис. 5. Матрица ошибок для модели логистической регрессии

### Метод опорных векторов

В модели мы использовали метод TF-IDF и дополнительные признаки. С помощью GridSearchCV подобрали оптимальные гиперпараметры: `penalty = l2`, `class_weight = balanced`, `max_iter = 1000`, `multi_class='ovr'`. Это привело к F1-мере 0.77 и следующей матрице ошибок:

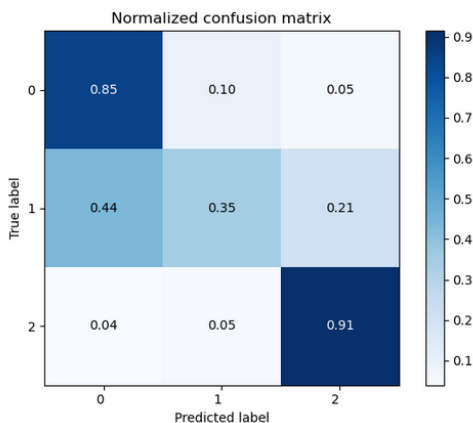


Рис 6. матрица ошибок для модели SVM

### Градиентный Бустинг (CatBoostClassifier)

Были использованы следующие гиперпараметры модели: `learning_rate = 0.1`, `depth = 10`, `iterations = 1000`, и `l2_leaf_reg = 5`. Это привело к F1-мере 0.76 и следующей матрице ошибок:

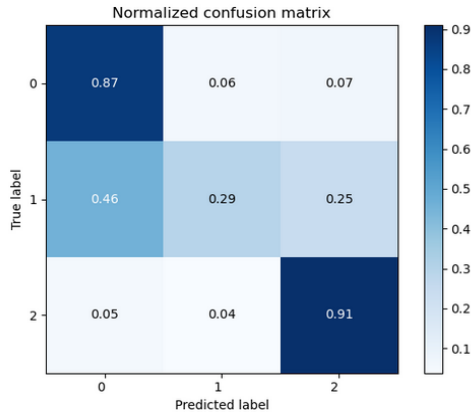


Рис. 7. Матрица ошибок для модели CatBoostClassifier

### Мультиномиальный наивный Байес

Модель мультиномиального наивного Байеса была запущена с исходными параметрами:  $\alpha = 0.1$ ,  $\text{fit\_prior} = \text{True}$ . В результате этих настроек удалось достичь F1-меры в 0.75, а сформирована матрица ошибок в следующем виде:

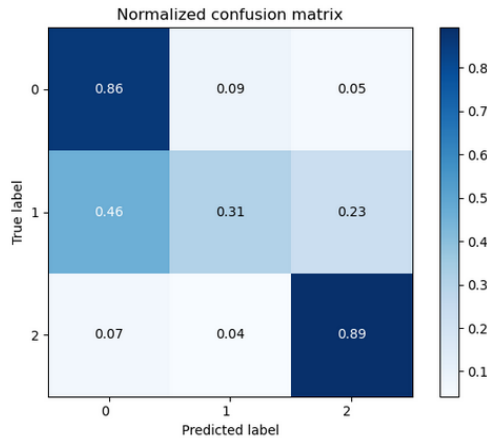


Рис. 8. Матрица ошибок модели мультиномиального наивного Байеса

### Применение методов глубокого обучения

#### Сверточные нейронные сети(CNN)

CNN обучалась с помощью оптимизатора AdamW,  $\text{lr} = 1e-4$ ,  $\text{batch\_size} = 512$ . Использовались Word2Vec эмбединги. Это привело к точности с F1-мерой 0.75 и соответствующей матрице ошибок:

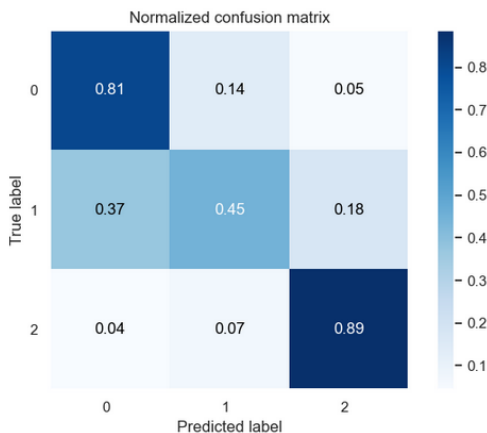


Рис. 9 Матрица ошибок модели CNN

### Рекуррентная нейронная сеть (LSTM)

LSTM была оптимизирована с AdamW, lr = 1e-3. Достигнута точность F1-меры 0.79, сформирована матрица ошибок для подробного обзора результатов модели:

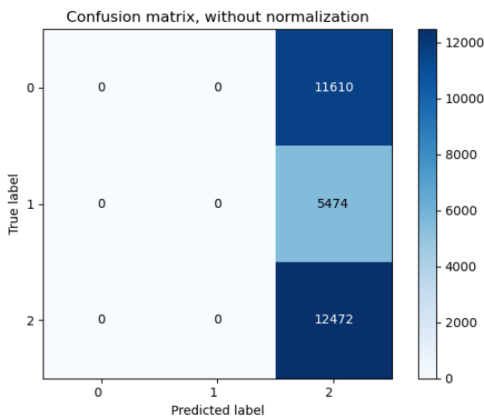


Рис. 10. Матрица ошибок LSTM

### Трансформеры

Использовали три варианта модели BERT: базовая версия от DeepPavlov с 12 слоями, gubert-tiny2 с тремя слоями и была предпринята попытка сократить архитектуру до одного слоя и провести обучение на уменьшенной модели. Все архитектуры обучались с применением оптимизатора AdamW, lr = 5e-5. Базовая BERT показала переобучение с низкой F1-мерой 0.26, указывая на необходимость корректировок для более устойчивых результатов:

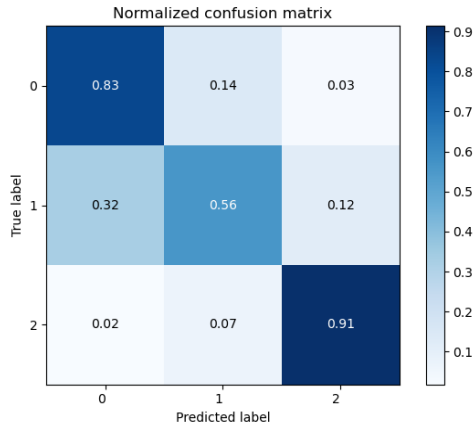


Рис. 11. Матрица ошибок BERT

Модель `gubert-tiny2` продемонстрировала выдающуюся производительность, достигнув значения F1-меры на уровне 0.83. В результате этого успешного обучения была сформирована матрица ошибок:

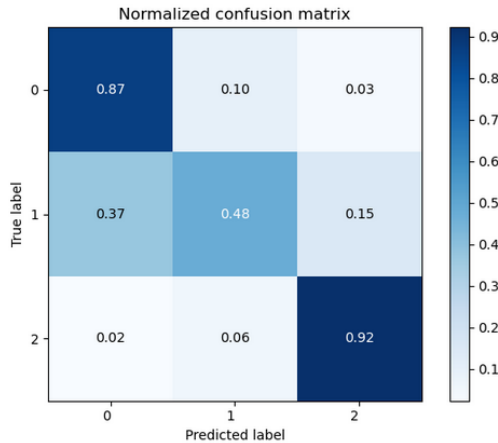


Рис. 12. Матрица ошибок `gubert-tiny2` (не измененный)

Модель `gubert-tiny2` с одним слоем проявила впечатляющую производительность с F1-мерой, достигшей значения 0.81. Этот результат подчеркивает эффективность уменьшенной архитектуры в сравнении с более глубокими моделями (см. рис. 13).

Для дополнительного анализа использовалась модель `gugpt3small` от Сбербанка с двумя слоями и оптимизатором `SophiaG` [20],  $\text{lr} = 8e-6$ . Достигнута F1-мера 0.79, сформирована матрица ошибок:

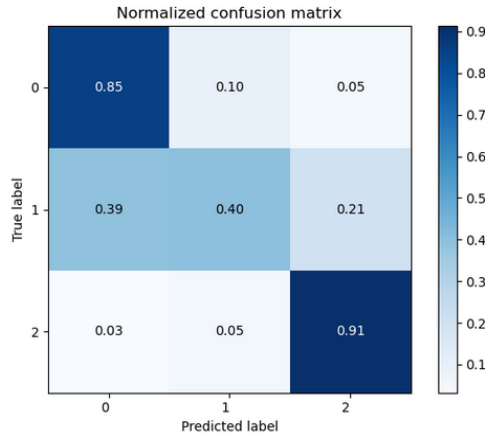


Рис. 14. Матрица ошибок rubpt3small с двумя слоями

Применим алгоритм LIME для интерпретации результатов модели rubert-tiny2 с наивысшей точностью. Этот шаг поможет понять влияние факторов на решения модели, повышая интерпретируемость результатов.

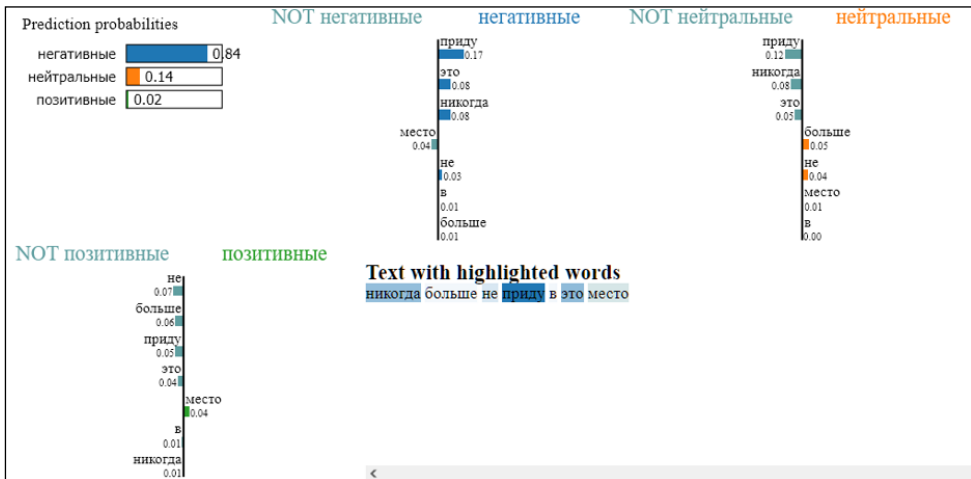


Рис. 15. Интерпретация результатов с помощью LIME

На рис. 15 можно увидеть благодаря весам каких слов данный текст был отмечен как негативный.

## 5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Сравним эффективность моделей глубокого обучения с традиционными методами при решении задачи семантического анализа.

Таблица 3

Название модели	F1-мера	Время, в минутах
SVM+Tfidf	0.77	< 1
Logis+Tfidf	0.78	< 1
Catboost+Tfidf	0.76	3.5
NaiveBayes+Tfidf	0.75	< 1
CNN+word2vec	0.75	22
LSTM	0.80	2
ruBert_Base	0.26	300
rubert-tiny2	<b>0.83</b>	60
rubert-tiny2_one layer	0.81	10
ruGPT3small	0.79	4

Лучшие результаты среди классических методов показала логистическая регрессия: высокое качество прогнозирования и быстрая производительность.

Исследование подтверждает превосходство модели на основе BERT по качеству в сравнении с другими методами обучения. Однако, обучение этой модели требует времени. Уменьшение числа слоев энкодера может ускорить работу без существенной потери качества.

В дальнейших исследованиях в области семантического анализа текста рекомендуется уделить внимание получению эмбедингов с использованием трансформера BERT и их последующему применению в сочетании с рекуррентными нейронными сетями, которые продемонстрировали достаточно высокое качество по сравнению с другими методами машинного и глубокого обучения.

### *Литература*

1. Anjomshoaa H., Snagui Moharer R., Shirazi M. The effectiveness of training based on neuro-linguistic programming and cognitive-behavioral approach on students' anxiety, depression, and stress // International Journal of Pediatrics. 2021. Vol. 9. P. 14856–14866. DOI: 10.22038/IJP.2021.57871.4539
2. Begum A.J., Paulraj I.J.M., Banu S.H. (2022). Neuro-linguistic programming (NLP) is a promising communicative English language teaching technique // Sch Int J Linguist Lit. Vol. 5. P. 100–104. DOI:10.36348/sijll.2022.v05i03.004
3. Corcoran, C.M., Mittal, V.A., Bearden, C.E., E. Gur, R., Hitzzenko, K., Bilgrami, Z., Savic, A., Cecchi, G.A., Wolff, P. Language as a biomarker for psychosis: a natural language processing approach // Schizophr. 2020. Vol. 226. P. 158–166. DOI: 10.1016/j.schres.2020.04.032
4. Chengyi Z., Brian Z.H., Andranik A.A., Beth C., Natural Language Processing to Identify Pulmonary Nodules and Extract Nodule Characteristics from Radiology Reports // Chest. 2021. Vol. 160. № 4. P. 1902–1914. DOI: 10.1016/j.chest.2021.05.048



5. Medhat W, Hassan A, Korashy H. Sentiment analysis algorithms and applications: a survey // *Ain Shams Engineering Journal*. 2014. Vol. 5. № 1. P. 1093–1113. DOI: 10.1016/j.asej.2014.04.011
6. Onan A. Sentiment analysis on product reviews based on weighted word embeddings and deep neural networks // *Concurrency Comput. Pract.* 2020. Vol. 33. P. 814–833. DOI: 10.1002/cpe.5909
7. Karthik R.V., Ganapathy S. A fuzzy recommendation system for predicting customers' interests using sentiment analysis and ontology in e-commerce // *Applied Soft Computing*. 2021. Vol. 108. DOI:10.1016/j.asoc.2021.107396
8. Bose R., Dey R.K., Roy S., Sarddar D. Sentiment analysis on online product reviews // *Information and Communication Technology for Sustainable Development*. 2020. Vol.993 P. 559–569. DOI:10.1007/978-981-13-7166-0\_56
9. Mai L, Le B Joint sentence and aspect-level sentiment analysis of product comments // *Annals of Operations Research*. 2021. Vol. 300. № 2. P. 493–513. DOI: 10.1007/s10479-020-03534-7
10. Zhang Y., Du J., Ma X., Wen H., Fortino G. Aspect-based sentiment analysis for user reviews // *Cognitive Computation*. 2021. Vol. 13. № 5. P. 1114–1127. DOI: 10.1007/s12559-021-09855-4
11. Zellig S.H. Distributional Structure // *Word*. 2015 Vol. 10. № 2. P. 146–162. DOI: 10.1080/00437956.1954.11659520
12. Li Y., Yang T. Word Embedding for Understanding Natural Language: A Survey. In: Srinivasan S. (eds) *Guide to Big Data Applications*. Studies in Big Data. 2017. Vol 26. DOI: 10.1007/978-3-319-53817-4\_4
13. Sparck K.J. A statistical interpretation of term specificity and its application in retrieval // *Journal of Documentation*. 1972. Vol. 28 № 1. P. 11–21. DOI: 10.1108/eb026526
14. Mikolov T., Chen K., Corrado G., Dean J. Efficient Estimation of Word Representations in Vector Space // *arXiv preprint arXiv: 1301.3781*.2013
15. Mikolov T., Quoc V. Le, Sutskever I. Exploiting Similarities among Languages for Machine Translation // *arXiv preprint arXiv: 1309.4168v1*.2013
16. Dorogush A.V., Ershov V., Gulin A. CatBoost: gradient boosting with categorical features support // *Proceedings of the 32nd International Conference on Neural Information Processing Systems*. 2018. P. 6639–6649
17. LeCun Y., Boser B., Denker J.S., Henderson D., Howard R.E., Hubbard W., Jackel L.D. Back-propagation Applied to Handwritten Zip Code Recognition. // *Neural Computation*. 1989. Vol. 1. № 4. P. 541–551. DOI: 10.1162/neco.1989.1.4.541
18. Hochreiter, S., Schmidhuber, J. Long short-term memory // *Neural Computation*. 1997. Vol. 9. № 8. P. 1735–1780. DOI: 10.1162/neco.1997.9.8.1735
19. Vaswani A., Shazeer N., Parmar N., J. Uszkoreit, L. Jones, A. Gomez, A. Kaiser, I. Polosukhin. *Advances in neural information processing systems*. 2017. P. 5998–6008
20. Liu H., Li Z., Hall D., Liang P., Ma T. Sophia: A Scalable Stochastic Second-order Optimizer for Language Model Pre-training/ *arXiv preprint arXiv: 2305.14342*. 2023. URL: <https://arxiv.org/abs/2305.14342>





# Semantic Analysis of Reviews About Organizations Using Machine Learning Methods

***Evgeniy N. Platonov\****

Moscow Aviation Institute (National Research University) Moscow, Russia

ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-8502-1350>

e-mail: [en.platonov@gmail.com](mailto:en.platonov@gmail.com)

***Irina R. Martynova \*\****

Moscow Aviation Institute (National Research University) Moscow, Russia

ORCID: <https://orcid.org/0009-0007-3140-2490>

e-mail: [irina.mart.r@gmail.com](mailto:irina.mart.r@gmail.com)

Semantic analysis of organizational reviews is a key tool for assessing customer satisfaction levels. Business entities should regularly conduct analysis and emotional sentiment investigation to delve deeper into the data and gain a more comprehensive understanding of their operations, including through the use of machine learning methods. Presently, deep learning-based methods are garnering increased attention due to their high efficiency. In this study, we will focus on sentiment analysis tasks. To perform sentiment analysis, we will employ machine learning methods, including various approaches to text vectorization, deep learning models, and natural language processing (NLP) algorithms.

**Keywords:** natural language processing, classification task, gradient boosting, recurrent neural networks, convolutional neural networks, BERT, GPT.

## **For citation:**

Platonov E.N., Martynova I.R. Semantic Analysis of Reviews About Organizations Using Machine Learning Methods. *Modelirovanie i analiz dannykh = Modelling and Data Analysis*, 2024. Vol. 14, no. 1, pp. 7–26. DOI: <https://doi.org/10.17759/mda.2024140101> (In Russ., abstr. in Engl.).

## **References**

1. Anjomshoaa H., Snagui Moharer R., Shirazi M. The effectiveness of training based on neuro-linguistic programming and cognitive-behavioral approach on students' anxiety, depression, and stress // *International Journal of Pediatrics*. 2021. Vol. 9. P. 14856–14866. DOI: [10.22038/IJP.2021.57871.4539](https://doi.org/10.22038/IJP.2021.57871.4539)

\***Evgeniy N. Platonov**, PhD (Physics and Mathematics), Assistant Professor, Moscow Aviation Institute (National Research University), Moscow, Russia, ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-8502-1350>, e-mail: [en.platonov@gmail.com](mailto:en.platonov@gmail.com)

\*\***Irina R. Martynova**, Student of the Institute of Information Technologies and Applied Mathematics, Moscow Aviation Institute (National Research University), Moscow, Russia, <https://orcid.org/0009-0007-3140-2490>, e-mail: [irina.mart.r@gmail.com](mailto:irina.mart.r@gmail.com)



2. Begum A.J., Paulraj I. J. M., Banu S.H. (2022). Neuro-linguistic programming (NLP) is a promising communicative English language teaching technique // *Sch Int J Linguist Lit*. Vol. 5. P. 100–104. DOI:10.36348/sijll.2022.v05i03.004
3. Corcoran, C.M., Mittal, V.A., Bearden, C.E., E. Gur, R., Hitczenko, K., Bilgrami, Z., Savic, A., Cecchi, G.A., Wolff, P. Language as a biomarker for psychosis: a natural language processing approach // *Schizophr*. 2020. Vol. 226. P. 158–166. DOI: 10.1016/j.schres.2020.04.032
4. Chengyi Z., Brian Z.H., Andranik A.A., Beth C., Natural Language Processing to Identify Pulmonary Nodules and Extract Nodule Characteristics from Radiology Reports // *Chest*. 2021. Vol. 160. № 4. P. 1902–1914. DOI: 10.1016/j.chest.2021.05.048
5. Medhat W, Hassan A, Korashy H. Sentiment analysis algorithms and applications: a survey // *Ain Shams Engineering Journal*. 2014. Vol. 5. № 1. P. 1093–1113. DOI: 10.1016/j.asej.2014.04.011
6. Onan A. Sentiment analysis on product reviews based on weighted word embeddings and deep neural networks // *Concurrency Comput. Pract.* 2020. Vol. 33. P. 814–833. DOI: 10.1002/cpe.5909
7. Karthik R.V., Ganapathy S. A fuzzy recommendation system for predicting customers' interests using sentiment analysis and ontology in e-commerce // *Applied Soft Computing*. 2021. Vol. 108. DOI:10.1016/j.asoc.2021.107396
8. Bose R., Dey R.K., Roy S., Sarddar D. Sentiment analysis on online product reviews // *Information and Communication Technology for Sustainable Development*. 2020. Vol.993 P. 559–569. DOI:10.1007/978-981-13-7166-0\_56
9. Mai L, Le B Joint sentence and aspect-level sentiment analysis of product comments // *Annals of Operations Research*. 2021. Vol. 300. № 2. P. 493–513. DOI: 10.1007/s10479-020-03534-7
10. Zhang Y., Du J., Ma X., Wen H., Fortino G. Aspect-based sentiment analysis for user reviews // *Cognitive Computation*. 2021. Vol. 13. № 5. P. 1114–1127. DOI: 10.1007/s12559-021-09855-4
11. Zellig S.H. Distributional Structure // *Word*. 2015 Vol. 10. № 2. P. 146–162. DOI: 10.1080/00437956.1954.11659520
12. Li Y., Yang T. Word Embedding for Understanding Natural Language: A Survey. In: Srinivasan S. (eds) *Guide to Big Data Applications*. Studies in Big Data. 2017. Vol 26. DOI: 10.1007/978-3-319-53817-4\_4
13. Sparck K.J. A statistical interpretation of term specificity and its application in retrieval // *Journal of Documentation*. 1972. Vol. 28 № 1. P. 11–21. DOI: 10.1108/eb026526
14. Mikolov T., Chen K., Corrado G., Dean J. Efficient Estimation of Word Representations in Vector Space // *arXiv preprint arXiv: 1301.3781*.2013
15. Mikolov T., Quoc V. Le, Sutskever I. Exploiting Similarities among Languages for Machine Translation // *arXiv preprint arXiv: 1309.4168v1*.2013
16. Dorogush A.V., Ershov V., Gulin A. CatBoost: gradient boosting with categorical features support // *Proceedings of the 32nd International Conference on Neural Information Processing Systems*. 2018. P. 6639–6649
17. LeCun Y., Boser B., Denker J.S., Henderson D., Howard R.E., Hubbard W., Jackel L.D. Back-propagation Applied to Handwritten Zip Code Recognition. // *Neural Computation*. 1989. Vol. 1. № 4. P. 541–551. DOI: 10.1162/neco.1989.1.4.541
18. Hochreiter, S., Schmidhuber, J. Long short-term memory // *Neural Computation*. 1997. Vol. 9. № 8. P. 1735–1780. DOI: 10.1162/neco.1997.9.8.1735
19. Vaswani A., Shazeer N., Parmar N., J. Uszkoreit, L. Jones, A. Gomez, A. Kaiser, I. Polosukhin. Advances in neural information processing systems. 2017. P. 5998–6008
20. Liu H., Li Z., Hall D., Liang P., Ma T. Sophia: A Scalable Stochastic Second-order Optimizer for Language Model Pre-training/ *arXiv preprint arXiv: 2305.14342*. 2023. URL: <https://arxiv.org/abs/2305.14342>

Получена 26.02.2024

Принята в печать 04.03.2024

Received 26.02.2024

Accepted 04.03.2024

## **Извлечение научно-технических фактов из отраслевых документов на основе методов семантико-синтаксического и концептуального анализа**

***Кан А.В.\****

ФГБУ «НИЦ «Институт имени Н.Е. Жуковского»  
г. Москва, Российская Федерация  
ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-9410-406X>  
e-mail: [kanav@nrczh.ru](mailto:kanav@nrczh.ru)

***Козловская Я.Д.\*\****

Московский авиационный институт (МАИ)  
г. Москва, Российская Федерация  
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-1780-5687>  
e-mail: [yana\\_kozlovskaja@mail.ru](mailto:yana_kozlovskaja@mail.ru)

***Токолова А.А.\*\*\****

Московский авиационный институт (МАИ)  
г. Москва, Российская Федерация  
e-mail: [tokolovaa@gmail.com](mailto:tokolovaa@gmail.com)

Извлечение научно-технических фактов является трудной задачей с точки зрения корректности получаемой информации. Предлагаемая модель выделения фактов основывается на четких представлениях о смысловой структуре текста, выраженной в виде иерархии синтаксических конструкций единиц смысла, что позволяет выявить межфразовые связи в контактно расположенных предложениях. В качестве смысловых единиц используются отдельные слова, словосочетания, присущие конкретной предметной области, и образующие её понятийный состав. Для обработки исходного текста используются процедуры фразеологического, концептуального и семантико-синтаксического анализа текстов.

**Ключевые слова:** извлечение фактов, семантико-синтаксический анализ, концептуальный анализ, фразеологический анализ, смысловая структура, единица смысла.

**Для цитаты:**

*Кан А.В., Козловская Я.Д., Токолова А.А.* Извлечение научно-технических фактов из отраслевых документов на основе методов семантико-синтаксического и концептуального анализа // Моделирование и анализ данных. 2024. Том 14. № 1. С. 27–40.  
DOI: <https://doi.org/10.17759/mda.2024140102>



**\*Кан Анна Владимировна**, кандидат технических наук, доцент МАИ, начальник аналитического отдела ФГБУ «НИЦ «Институт имени Н.Е. Жуковского», ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-9410-406X>, e-mail: [kanav@nrczh.ru](mailto:kanav@nrczh.ru)

**\*\*Козловская Яна Дмитриевна**, студент магистратуры, ФГБОУ ВО Московский авиационный институт (МАИ), ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-1780-5687>, e-mail: [yana\\_kozlovskai@mail.ru](mailto:yana_kozlovskai@mail.ru)

**\*\*\*Токолова Алина Александровна**, студент магистратуры, институт «Компьютерные науки и прикладная математика» Московский авиационный институт (МАИ), г. Москва, Российская Федерация, e-mail: [tokolovaa@gmail.com](mailto:tokolovaa@gmail.com)

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Научные публикации уже давно стали основным источником и способом распространения научно-технических открытий. Согласно отчету [1], с 2018 года ежегодное количество научных публикаций, в том числе опросов, тезисов и обзоров, выросло на 22,4% и за 2022 год достигло значения свыше 5,4 миллионов. Такой объем информации качественно затрудняет ручной поиск релевантных сведений и фактов для их дальнейшей обработки.

Научно-технические факты представляют особый интерес для пользователя и под этим термином понимается событие, понятие или явление. Для корректного выделения фактов из отраслевой документации используются методы извлечения фактологической информации (ИФИ), среди которых семантико-синтаксический, фразеологический и концептуальный анализ текстов. Выделение наименований понятий (НП) основывается на вычислении меры смысловой значимости, а смысловая структура текста представляется в виде предикатно-актантной структуры (ПАС), получаемой методами семантико-синтаксического и концептуального анализа.

## 2. ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ ФРАЗЕОЛОГИЧЕСКОГО КОНЦЕПТУАЛЬНОГО АНАЛИЗА ТЕКСТОВ

Фразеологический концептуальный анализ [2] используется для установления единиц смысла предложения, которые и формируют смысловое содержание текста.

Основные положения концепции фразеологического концептуального анализа текстов:

- Смысловое содержание текстов выражается с помощью единиц смысла.
- Понятие – самая устойчивая единица смысла.
- Объекты предложения обладают особыми признаками, выражающимися через предикатно-актантную структуру (ПАС) и набором отношений с другими объектами.
- Сверхфразовые единства формируются из предложений и представляются в виде последовательностей предложений (связного текста).

Предикатно-актантная структура (ПАС) – представляет предложения в виде понятий-предикатов, устанавливающих связи между объектами, и в виде понятий-актантов, содержащих признаки объектов. ПАС обеспечивает автоматический перевод текстов с естественных языков на формализованные и наоборот.

### 3. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЗНАЧИМЫХ НАИМЕНОВАНИЙ ПОНЯТИЙ В ТЕКСТЕ

Значимые наименования понятий [3,4] выделяются методами статистического, синтаксического и концептуального анализа текстов. Сложность этого процесса заключается в фиксировании границ наименований понятий, несущих ключевую смысловую нагрузку.

Семантические методы позволяют с помощью эталонных словарей идентифицировать значимые слова и словосочетания определенной предметной области.

Статистические методы позволяют определить значимые понятия путем присвоения объектам текста весовых коэффициентов на основе частотного анализа встречаемости в конкретном документе и во всем корпусе документов.

Синтаксические методы позволяют определить, какую синтаксическую роль играют значимые слова и словосочетания, определяя их синтаксическую роль в предложении, как субъект, предикат или объект.

Смысловая значимость слов в контексте документа оценивается статистической мерой  $TF \cdot IDF$  [5].

$$TF(\text{concept}, \text{Text}) = \frac{l_{\text{concept}}}{\sum_k l_k} - \text{частота слова в документе,}$$

где  $l_{\text{concept}}$  – число вхождений наименования понятия *concept* в документ;  
 $\sum_k l_k$  – общее число наименований понятий в данном документе.

$$IDF(\text{concept}, M) = \log \frac{|M|}{|\{Text_n \in M \mid \text{concept} \in Text_n\}|}$$

$IDF(\text{concept}, M)$  – обратная частота документа, т.е. инверсия частоты, с которой наименование понятия встречается в корпусе текстов, каждому слово соответствует одно значение IDF, где  $|M|$  – число документов в корпусе;  
 $|\{Text_n \in M \mid \text{concept} \in Text_n\}|$  – число документов из массива документов  $M$ , в которых встречается понятие *concept* (когда  $l_{\text{concept}} \neq 0$ ).

Эта статистическая мера увеличивает значение слова пропорционально частоте его появления в тексте, однако, уменьшает это же значение при появлении слова в большом количестве документов.



## 4. МОДЕЛЬ ВЫЯВЛЕНИЯ ФАКТОВ В КОЛЛЕКЦИИ ТЕКСТОВ

Факт *Fact* состоит из контактно расположенных предложений текста и содержится во фрагменте текста. Таким образом, факт можно представить в виде некоторой последовательности предложений:

$$Fact = (Sent_u, Sent_{u+1}, \dots, Sent_t),$$

где  $Sent_u, Sent_{u+1}, \dots, Sent_t$  – последовательность предложений факта;

$u$  – первое предложение факта;

$t$  – последнее предложение факта.

Предложение факта *Sent* представляет собой кортеж элементов факта:

$$Sent = el_1, el_2, \dots, el_i,$$

где  $el_i$  – элемент факта,

$i$  – количество элементов факта.

Элементом текста *el* является слово или знак препинания:

$$GPS\ el = \{w, pm\},$$

где  $w$  – слово;

$pm$  – знак препинания.

Каждый элемент текста *el* обладает грамматическими и синтаксическими признаками:

$$GSP(el) = (GP, SP),$$

где *GP* – грамматические признаки;

*SP* – синтаксические признаки.

Термином «понятие» определяется некоторый социально значимый мыслительный образ, представляемый в виде отдельного слова или в виде устойчивого фразеологического словосочетания. Понятие *concept* можно представить математически в виде одного элемента факта или в виде совокупности нескольких элементов факта:

$$concept = \sum \left\{ el_j \right\}_{j=1}^{V\text{-счетное}}.$$

Каждое понятие *concept* имеет унифицированную и нормализованную формы, получаемые функциями унификации и нормализации:

$Unif : concept \rightarrow concept^{un}$  – функция унификации,

$Norm : concept \rightarrow concept^{nf}$  – функция нормализации,

где  $concept^{un}$  – унифицированная форма понятия;

$concept^{nf}$  – нормализованная форма понятия.

Смысл предложения факта *MF* выражается через его предикатно-актантную структуру (систему элементарных смысловых триад):

$$MF = \{PSO_1, PSO_2, \dots, PSO_e\},$$

где  $e$  – количество элементарных смысловых триад в предложении.

Элементарная смысловая триада представляется в виде кортежа субъекта  $S$ , предиката  $P$  и объекта  $O$ :

$$PSO = S, P, O,$$

где  $P$  – смысловая связь между субъектом и объектом (предикат);

$S$  – главное слово или словосочетание элементарного высказывания (субъект);

$O$  – зависимое слово или словосочетание элементарного высказывания (объект).

Полное описание факта [5] представляется в виде совокупности предикатно-актантных структур предложений факта:

$$FullFact = \sum \{MF_v\}_{v=1}^{V\text{-счетное}}, FullFact \in Fact.$$

## 5. ПРОЦЕСС ИЗВЛЕЧЕНИЯ НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИХ ФАКТОВ НА ОСНОВЕ СИНТАКСИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ТЕКСТА

Реализованная синтаксическая модель текста на основе системы обобщенных синтагм, которые выражают форму единицы смысла и состоят из сочетания символов обобщенных грамматических классов слов, входящих в состав словосочетаний эталонного словаря, позволяет анализировать его структуру, извлекать понятийный состав и определять смысловые отношения. Эта модель также помогает извлекать ключевые синтаксические конструкции предложения и классифицировать их элементы. Значимые именованные сущности регистрируются и обрабатываются в соответствии с их синтаксической ролью. Затем эти элементы унифицируются в соответствии с требованиями системы.

Алгоритм автоматического выявления и формализации фактов в текстах:

Шаг 1. Разделить исходный текст на предложения и выполнить морфологический анализ предложений.

Шаг 2. Определить именные и глагольные словосочетания и установить их синтаксическую роль в предложении при помощи упрощенного семантико-синтаксического анализа.

Шаг 3. Составить частотный словарь слов и словосочетаний, определить какие из этих слов и словосочетаний являются значимыми для данного текста.

Шаг 4. Присвоить уникальные идентификаторы каждому словосочетанию согласно словарю унифицированных формализованных представлений наименований понятий (УФПНП) и сопоставить их исходные формы с унифицированными формами представления, указав все их местоположения в тексте (номера предложений).

Шаг 5. Определить номера предложений, содержащих значимые слова и словосочетания, используя словарь указателей связей предложений (УСП).



Шаг 6. Определить связи между предложениями, содержащими ключевые понятия, и их окружением. Установить границы описания фактов в тексте, используя разметку текста по указателям смысловых связей и обобщенным наименованиям понятий.

Шаг 7. Присвоить каждому текстовому описанию фактов идентификационный номер, содержащий порядковый номер события, код и тип документа.

Шаг 8. Определить главные и второстепенные члены предложения, границы словосочетаний, построить дерево зависимостей предложения, построить ПАС и сформировать «скелет» предложения, используя информацию, полученную на шаге 2.

Шаг 9. Определить обобщенную синтагму и построить формализованное представление для каждого словосочетания.

Шаг 10. Соотнести полученные методом концептуального анализа словосочетания со словосочетаниями, полученными путем синтаксического анализа.

Шаг 11. Произвести нормализацию.

Шаг 12. Расчленив описание каждого факта на составные элементы – формализованное представление элементов ПАС, «скелет» предложения с указанием номеров словосочетаний в эталонном концептуальном словаре (ЭКС).

Шаг 13. Выполнить генерацию формализованных представлений предложений факта в обобщенное формализованное представление его смысловой структуры.

Шаг 14. Произвести преобразование обобщенного формализованного представления в его машинную форму.

Основным отличием предлагаемой модели от существующих заключается в том, что в рамках этой модели смысловое представление текста выражается в виде иерархии синтаксических конструкций единиц смысла.

Описания конкретных фактов в тексте могут отображаться его контактно расположенной последовательностью предложений, связанных межфразовыми связями [6]. Рассмотрим в качестве такого примера текст, представленный в таблице 1.

Таблица 1

### Фрагмент текста

*Стратегический бомбардировщик “B -52” более полувека стоит на вооружении ВВС США. В настоящее время продажа за пределами США боинга “B-52” запрещена, так как его летные характеристики многократно превосходят зарубежные аналоги. Самолеты бомбардировщики “Б-52” были введены в строй с 1955 года. Всего было построено 728 бомбардировщиков. По проекту каждый из этих самолетов несет на борту до 51 единицы боеприпасов.*

Разобьем исходный текст на предложения и присвоим каждому идентификационный индекс, состоящий из порядкового номера события, номера предложения в нем, источника информации и даты публикации (см. табл. 2).



Таблица 2

**Перенумерованные предложения с идентификационными индексами**

1. *Стратегический бомбардировщик “В -52” более полувека стоит на вооружении ВВС США. – 458496\_1*
2. *В настоящее время продажа за пределами США боинга “В-52” запрещена, так как его летные характеристики многократно превосходят зарубежные аналоги. – 458496\_2*
3. *Самолеты бомбардировщики “Б-52” были введены в строй с 1955 года. – 458496\_3*
4. *Всего было построено 728 бомбардировщиков. – 458496\_4*
5. *По проекту каждый из этих самолетов несет на борту до 51 единицы боеприпасов. – 458496\_5*

В приведенном фрагменте текста межфразовая связь между предложением № 4 и предложением № 5 обусловлена местоименной анафорой «*их этих*», связь между предложениями № 1, № 2 № 3 и № 4 обусловлена синонимичными конструкциями «*Стратегический бомбардировщик – самолет бомбардировщик*». Наличие межфразовых связей является необходимым условием выделения описания конкретного факта в тексте [7]. Дополнительным условием, предоставленным в таблице 3, является смысловая связь (родовидовые и синонимичные отношения) между частью наименований понятий этого фрагмента, находящимися в разных предложениях (в скобках указаны номера предложений).

Таблица 3

**Смысловая связь между частью наименований понятий фрагмента, находящихся в разных предложениях**

*стратегический бомбардировщик “В -52” (№ 1) – самолеты бомбардировщики “Б-52” (№ 3) – бомбардировщиков (№ 4)*

*стратегический бомбардировщик “В -52” (№ 1) – боинга “В-52” (№ 2) – самолеты бомбардировщики “Б-52” (№ 3)*

В рамках разработанной синтаксической модели возможно осуществить автоматическое преобразование исходного текста в его формализованную синтаксическую структуру, аналогичное приведенной выше структуре. В процессе такого преобразования для получения унифицированного представления элементов ПАС необходимо дополнительно выполнить нормализацию форм слов наименований понятий и их унификацию по словарю УФПНП. Результат такой операции приведен в таблице 4.

Таблица 4

**Унифицированные формы представления наименований понятий**

Наименование понятия	Унифицированная форма представления
стратегический бомбардировщик	самолет
боинг	самолет



Наименование понятия	Унифицированная форма представления
ВВС США	войско
боеприпасы	оружие
вооружение	оружие
США	страна

В таблице 5 указывается идентификатор факта и приводится его исходная текстовая форма, указывается состав ПАС (в мнемонике грамматических классов слов), унифицированный «скелет», идентификатор факта, номер предложения; приводится формализованное представление ПАС предложения в сокращенной форме в виде символов обобщенных синтагм и в виде унифицированных форм главных слов ПАС; приводится формализованное представления «скелета» (SkIRus) предложений факта (в сокращенном виде – только главные слова, в полном виде эти элементы представлены номерами элементов словаря ЭКС); приводится формализованное представление предложений (SenRus) в виде последовательности нормальных слов предложения [7].

Таблица 5

### Результаты семантико-синтаксического и концептуального анализа предложений описания факта, приведенного в таблице 1

Исходное предложение № 1	
<i>Стратегический бомбардировщик “В -52” более полувека стоит на вооружении ВВС США.</i>	
<b>Формализованное описание элементов ПАС предложения</b> $PSO=\{V, N, N\}=\{\text{стоять; бомбардировщик; вооружение}\}$	
<b>Формализованное представление элементов ПАС предложений</b>	
<i>Predicate (P)</i>	$лА = \text{стоять} \# лА = \text{стоять}$
<i>Subject (S)</i>	$FA = \text{бомбардировщик} \# FA = \text{бомбардировщик}$
<i>Object (O)</i>	$ЁК = \text{вооружение} \# ЁК = \text{вооружение}$
<b>Формализованное представления ПАС предложений (PSORus)</b>	
$PSO = лАFAЁК = \text{стоять; бомбардировщик; вооружение} \# лАFAЁК$	
<b>Формализованное представления «скелета» предложений (SkIRus)</b>	
$N \# N \# NVFN = FA \# \# @A9A \# \# YAlAыAЁКьAьA = \text{бомбардировщик “В -52” полувек стоять на вооружение ВВС США}$	
<b>Формализованное представления предложений (SenRus)</b>	
$PiFA \# \# @A9A \# \# cAYAlAыAЁКьAьA = \text{стратегический бомбардировщик “В -52” более полувек стоять на вооружение ВВС США}$	
Исходное предложение № 2	
<i>В настоящее время продажа за пределами США боинга “В-52” запрещена, так как его летные характеристики многократно превосходят зарубежные аналоги.</i>	
<b>Формализованное описание элементов ПАС предложения</b> $PSO=\{N, N, V, N, V, N\}=\{\text{продажа; боинг; запрещен; превосходит; аналог}\}$	
<b>Формализованное представление элементов ПАС предложений</b>	
<i>Predicate (P)</i>	$aA = \text{запрещен} \# aA = \text{запрещен}$ $Юр = \text{превосходит} \# Юр = \text{превосходит}$



<b>Subject (S)</b>	$uB = \text{продажа} \# uB = \text{продажа}$
	$vB = \text{характеристика} \# vB = \text{характеристика}$
<b>Object (O)</b>	$FA = \text{боинг} \# FA = \text{боинг}$
	$FA = \text{аналог} \# FA = \text{аналог}$
<b>Формализованное представления ПАС предложений (PSORus)</b>	
$PSO\_1 = uBFAaA = \text{продажа; боинг; запрещен} \# uBFAaA$	
$PSO\_2 = vBЮpFA = \text{характеристика; превосходит; аналог} \# vBЮpFA$	
<b>Формализованное представления «скелета» предложений (SkIRus)</b>	
$FNNFN \# N \# K, NVN = \text{ыАГтvHRWbTKxиИ, АТежА} = \text{в время продажа за предел боинг}$ $\text{запрещен, характеристика превосходить аналог}$	
<b>Формализованное представления предложений (SenRus)</b>	
$\text{ыАПiИмиВьААСьАFA} \# \text{9А} \# \text{аА, сАсАяАНТvБсАлАНТFA} = \text{в настоящий время}$ $\text{_продажа за пределами США боинг } \# \text{B-2} \# \text{запрещен, так как его летный}$ $\text{_характеристика многократно превосходить зарубежный аналог}$	
<b>Исходное предложение № 3</b>	
Самолеты бомбардировщики "Б-52" были введены в строй с 1955 года.	
<b>Формализованное описание элементов ПАС предложения</b>	
$PSO = \{V, N, N\} = \{\text{введен; самолет; строй}\}$	
<b>Формализованное представление элементов ПАС предложений</b>	
<b>Predicate (P)</b>	$aA = \text{введен} \# aA = \text{введен}$
<b>Subject (S)</b>	$AA = \text{самолет} \# AA = \text{самолет}$
<b>Object (O)</b>	$Dx = \text{строй} \# Dx = \text{строй}$
<b>Формализованное представления ПАС предложений (PSORus)</b>	
$PSO = aAAADx = \text{введен; самолет; строй} \# aAAADx$	
<b>Формализованное представления «скелета» предложений (SkIRus)</b>	
$N \# N \# LKFNNFN = eW \# \text{A9A} \# \text{ЯААыADxиA9} = \text{самолет "Б-52" был введен в строй с 1955 год}$	
<b>Формализованное представления предложений (SenRus)</b>	
$AAFA \# \text{9А} \# \text{ЯААыADxиA9АНА} = \text{самолет бомбардировщик "Б-52" был введен}$ $\text{в строй с 1955 год}$	
<b>Исходное предложение № 4</b>	
Всего было построено 728 бомбардировщиков.	
<b>Формализованное описание элементов ПАС предложения</b>	
$PO = \{V, N\} = \{\text{построен; бомбардировщик}\}$	
<b>Формализованное представление элементов ПАС предложений</b>	
<b>Predicate (P)</b>	$aA = \text{построен} \# aA = \text{построен}$
<b>Subject (S)</b>	$FA = \text{бомбардировщик} \# FA = \text{бомбардировщик}$
<b>Формализованное представления ПАС предложений (PSORus)</b>	
$PO = aAFA = \text{построен; самолет} \# aAFA$	
<b>Формализованное представления «скелета» предложений (SkIRus)</b>	
$LKN = \text{был построен бомбардировщик}$	
<b>Формализованное представления предложений (SenRus)</b>	
$ЧМЯАА9АFA = \text{всего был построен 728 бомбардировщик}$	
<b>Исходное предложение № 5</b>	
По проекту каждый из этих самолетов несет на борту до 51 единицы боеприпасов.	



<b>Формализованное описание элементов ПАС предложения</b> $PSO=\{V, N, N\}=\{\text{несет}; \text{самолет}; \text{боеприпас}\}$	
<b>Формализованное представление элементов ПАС предложений</b>	
<b>Predicate (P)</b>	$\text{БУ} = \text{несет} \# \text{БУ} = \text{несет}$
<b>Subject (S)</b>	$\text{АА} = \text{самолет} \# \text{АА} = \text{самолет}$
<b>Object (O)</b>	$\text{АА} = \text{боеприпас} \# \text{АА} = \text{боеприпас}$
<b>Формализованное представления ПАС предложений (PSORus)</b>	
$PSO = \text{БУАААА} = \text{несет}; \text{самолет}; \text{боеприпас} \# \text{БУАААА}$	
<b>Формализованное представления «скелета» предложений (SkIRus)</b>	
$\text{FN FN VFNFN} = \text{по\_проект\_из\_этот\_нести\_на\_борт\_до\_51\_единиц}$	
<b>Формализованное представления предложений (SenRus)</b>	
$\text{xААААНТфАФАААБУыАНАфА9АВВАА} = \text{по\_проект\_каждый\_из\_этот\_самолет}$ $\text{несет\_на\_борт\_до\_51\_единица\_боеприпас}$	

Результатом работы алгоритма является формализованное представление предложений, обобщающее смысловое содержания фактологической информации. Для генерации формализованного представления обобщенного смыслового содержания факта выделялись унифицированные представления элементов ПАС предложений. Результаты такого представления приведены в таблице 6 в виде формализованного и индексного представления элементов ПАС факта. Каждый элемент ПАС сопровождается его весовым коэффициентом, индексом синтаксической роли, номером словосочетания в словаре ЭКС и уникальным идентификатором факта.

Таблица 6. Формализованное и индексное представление элементов ПАС факта текста № 387473. В этих представлениях номер события был заменен на его уникальный идентификационный номер (ID=008154)

<b>Формализованное представление элементов ПАС факта</b>
$PSO=\{V, N, N\} \rightarrow$ $P=\{\text{стоять}_{064\_065785}, \text{запрещен}_{049\_087631}, \text{превосходит}_{057\_075324},$ $\text{введен}_{047\_087631}, \text{построен}_{049\_098713}, \text{несет}_{058\_075692}\};$ $S=\{\text{бомбардировщик}_{025\_034758}, \text{продажа}_{039\_062584}, \text{характеристика}_{039\_07234},$ $\text{самолет}_{029\_046273}\}; \text{O}=\{\text{вооружение}_{038\_086759}, \text{аналог}_{020\_015638},$ $\text{строй}_{029\_063348}\}$
<b>Индексное представление элементов ПАС факта</b>
$\text{стоять}_{\{064\_065785\_P\_008154\}}, \text{запрещен}_{\{049\_087631\_P\_008154\}},$ $\text{превосходит}_{\{057\_075324\_P\_008154\}}, \text{введен}_{\{047\_087631\_P\_008154\}},$ $\text{построен}_{\{049\_098713\_P\_008154\}}, \text{несет}_{\{058\_075692\_P\_008154\}},$ $\text{бомбардировщик}_{\{025\_034758\_S\_008154\}}, \text{продажа}_{\{039\_062584\_S\_008154\}},$ $\text{характеристика}_{\{039\_07234\_S\_008154\}}, \text{самолет}_{\{029\_046273\_S\_008154\}},$ $\text{вооружение}_{\{038\_086759\_O\_008154\}}, \text{аналог}_{\{020\_015638\_O\_008154\}}, \text{строй}_{\{029\_063348\_P\_008154\}}$

Таким образом, как видно из таблицы 5 и таблицы 6, основная задача формализации смыслового представления описания факта заключается в генерации совокупности унифицированных представлений ПАС. Полученная совокупность формализованных представлений ПАС, «скелета» и предложения позволяет не только обеспечить возможность поиска по любому элементу их формализованного описания, но и обеспечивает возможность последовательного перехода от каждого нижестоящего элемента формализованного описания к вышестоящему, а также возможность перехода в обратном порядке. Такое представление смысла предложений обеспечивает реализацию всего спектра семантических операций над смысловым содержанием факта.

Полученное формализованное представление обобщенного смыслового содержания факта позволяет производить поиск и сопоставление идентичных или близких по смысловому содержанию фактов, а также обеспечивает возможность их классификации по различным основаниям: по их содержанию, по именам субъектов или объектов фактов или по тональности отношений между ними и др.

## 6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В статье описано решение задачи автоматического извлечения фактов из научно-технологических документов на основе методов их семантико-синтаксического и концептуального анализа.

Представленная модель алгоритма автоматического извлечения фактов решает проблему формализации и унификации смыслового содержания фактов. Результатами работы этого алгоритма является представление смысловой структуры фактов, полученных из исходных корпусов текста, в виде совокупности формализованных представлений ПАС, обеспечивающих возможность поиска по любому элементу их формализованного описания. Такое представление смысла предложений обеспечивает реализацию всего спектра семантических операций над смысловым содержанием факта, в том числе классификации и сопоставления, что дает возможность выполнять проверку корректности извлеченной информации.

### *Литература*

1. *Curcic D.* Number of Academic Papers Published Per Year // Wordsrated URL: [https://wordsrated.com/number-of-academic-papers-published-per-year/#:~: text=As%20of%202022%2C%20over%205.14,5.03%20million%20papers%20were%20published](https://wordsrated.com/number-of-academic-papers-published-per-year/#:~:text=As%20of%202022%2C%20over%205.14,5.03%20million%20papers%20were%20published.). (дата обращения: 09.10.2023).
2. *Белоногов Г.Г., Калинин Ю.П., Хорошилов А.А.* Компьютерная лингвистика и перспективные информационные технологии. Теория и практика построения систем автоматической обработки текстовой информации. – М.: Изд-во Русский мир, 2004.
3. *Хорошилов Ал-др А., Мусабаев Р.Р., Козловская Я.Д., Никитин Ю.В., Хорошилов А.А.* Автоматическое выявление и классификация информационных событий в текстах СМИ // Научно-техническая информация. Серия 2: Информационные процессы и системы. 2020. № 7. С. 27–38. DOI: 10.36535/0548-0027-2020-07-4
4. *Хорошилов Ал-др. А., Никитин Ю.В., Хорошилов Ал-ей. А., Будзко В.И.* Автоматическое создание формализованного представления смыслового содержания неструктурированных



текстовых сообщений СМИ и социальных сетей // Системы высокой доступности, № 3, том.10, 2014, С. 36–51.

5. Кан А.В., Козловская Я.Д., Кадушкин Н.А., Хорошилов Ал-р А. Автоматическая кластеризация документов СМИ на основе анализа их смыслового содержания // Моделирование и анализ данных. 2020. Том 10. № 3. С. 24–38. DOI: <https://doi.org/10.17759/mda.2020100302>
6. Богатырев М.Ю. Извлечение фактов из текстов естественного языка с применением концептуальных графовых моделей // Известия ТулГУ. Технические науки. – 2016. – № 7. – Ч. 1.
7. Хорошилов Ал-др А., Козловская Я.Д., Мусабаев Р.Р., Красовицкий А.М., Хорошилов Ал-ей А. Определение тональности сообщений СМИ методом их концептуального анализа // Моделирование и анализ данных. 2019. № 4. DOI: [10.17759/mda.2019090405](https://doi.org/10.17759/mda.2019090405)



# Extracting Scientific and Technical Facts from Industry Documents Based on Methods of Their Semantic-syntactic and Conceptual Analysis

**Anna V. Kan\***

FSBI “National Research Center” Institute named after N.E. Zhukovsky”

Moscow, Russian Federation

ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-9410-406X>

e-mail: [kanav@nrczh.ru](mailto:kanav@nrczh.ru)

**Yana D. Kozlovskaya\*\***

Moscow Aviation Institute (MAI), Moscow, Russian Federation

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-1780-5687>

e-mail: [yana\\_kozlovskaja@mail.ru](mailto:yana_kozlovskaja@mail.ru)

**Alina A. Tokolova\*\*\***

Moscow Aviation Institute (MAI), Moscow, Russian Federation

e-mail: [tokolovaa@gmail.com](mailto:tokolovaa@gmail.com)

Extraction of scientific and technical facts is a difficult task in terms of correctness of the obtained information. The proposed fact extraction model is based on clear ideas about the semantic structure of the text, expressed as a hierarchy of syntactic constructions of meaning units, which allows identifying interphrase relations in contacted sentences. Individual words, word combinations inherent to a particular subject area and forming its conceptual composition are used as meaning units. The procedures of phraseological, conceptual and semantic-syntactic analysis of texts are used to process the source text.

**Keywords:** fact extraction, semantic-syntactic analysis, semantic-syntactic analysis, conceptual analysis, semantic triad.

## For citation:

Kan A.V., Kozlovskaya Y.D., Tokolova A.A. Extracting Scientific and Technical Facts from Industry Documents Based on Methods of Their Semantic-syntactic and Conceptual Analysis. *Modelirovanie i analiz dannykh = Modelling and Data Analysis*, 2024. Vol. 14, no. 1, pp. 27–40. DOI: <https://doi.org/10.17759/mda.2024140102> (In Russ., abstr. in Engl.).

\***Anna V. Kan**, Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, Moscow Aviation Institute (MAI), Head of the Analytical Department, Federal State Budgetary Institution “National Research Center” Institute named after N.E. Zhukovsky”, e-mail: [kanav@nrczh.ru](mailto:kanav@nrczh.ru)

\*\***Yana D. Kozlovskaya**, master’s student, Moscow Aviation Institute (National Research University) (MAI), Moscow, Russia, ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-1780-5687>, e-mail: [yana\\_kozlovskaja@mail.ru](mailto:yana_kozlovskaja@mail.ru)

\*\*\***Alina A. Tokolova**, master’s student, Institute of Computer Science and Applied Mathematics Moscow Aviation Institute (National Research University) (MAI), Moscow, Russia, e-mail: [tokolovaa@gmail.com](mailto:tokolovaa@gmail.com)



### *References*

1. Curcic D. Number of Academic Papers Published Per Year // Wordsrated URL: <https://wordrated.com/number-of-academic-papers-published-per-year/#:~:text=As%20of%202022%2C%20over%205.14,5.03%20million%20papers%20were%20published> (Accessed: 09.10.2023).
2. Belonogov G.G., Kalinin Y.P., Khoroshilov A.A. Computer linguistics and perspective information technologies. Theory and practice of building systems of automatic processing of text information. – Moscow: Izd-vo Russky Mir, 2004.
3. Khoroshilov AI-Dr. A., Musabaev R.R., Kozlovskaya Y.D., Nikitin Y.V., Khoroshilov A.A. Automatic detection and classification of information events in mass media texts// Scientific and Technical Information. Series 2: Information processes and systems. 2020. № 7. С. 27–38. DOI: 10.36535/0548-0027-2020-07-4
4. Khoroshilov AI-Dr. A., Nikitin Y.V., Khoroshilov AI-ey. A., Budzko V.I. Automatic creation of formalized representation of semantic content of unstructured text messages of mass media and social networks // Systems of High Availability, No.3, Vol.10, 2014, pp. 36–51.
5. Kan A.V., Kozlovskaya Y.D., Kadushkin N.A., Khoroshilov AI-r A. Automatic clustering of media documents based on the analysis of their semantic content // Modeling and Data Analysis. 2020. Vol. 10. No. 3. С. 24–38. DOI: <https://doi.org/10.17759/mda.2020100302>
6. Bogatyrev, M. Yu. Fact extraction from natural language texts using conceptual graph models // Izvestiya TulSU. Technical Sciences. –2016. – № 7. – Vol. 1.
7. Khoroshilov AI-Dr. A., Kozlovskaya Ya.D., Musabaev R.R., Krasovitsky A.M., Khoroshilov AI-ey A. Determination of the tone of media messages by their conceptual analysis method // Modeling and Data Analysis. 2019. № 4. DOI: 10.17759/mda.2019090405

Получена 04.03.2024

Принята в печать 18.03.2024

Received 04.03.2024

Accepted 18.03.2024



УДК 004.932.2

## Применение свёрточных нейронных сетей в задаче устранения теней с фотографий

*Алексейчук А.С.\**

Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет) (МАИ), г. Москва, Российская Федерация  
ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-4167-8347>  
e-mail: alexejchuk@gmail.com

*Мукин Ю.Д.\*\**

Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет) (МАИ), г. Москва, Российская Федерация  
ORCID: <https://orcid.org/0009-0003-6804-2039>  
e-mail: yurimukind@gmail.com

В статье предлагается метод удаления теней на фотографиях при помощи методов глубокого обучения. Предложенный метод состоит из нескольких этапов: разделение изображения на прямоугольные фрагменты размером 32x32 пикселя, локализация теней на каждом фрагменте, восстановление цвета затененных объектов и обратное объединение фрагментов в целое изображение. Локализация теней рассматривается как задача семантической сегментации, для ее решения разработана и обучена нейронная сеть архитектуры «энкодер-декодер». Для восстановления цвета объектов на выявленных затененных участках используется еще одна нейронная сеть на основе архитектуры CDNet. Приводятся примеры обработки изображений с помощью разработанного метода, в том числе изображений с беспилотного летательного аппарата, продемонстрировано высокое качество восстановления затененных областей.

**Ключевые слова:** машинное зрение, глубокое обучение, обработка изображений, свёрточные нейронные сети, локализация теней, семантическая сегментация.

**Для цитаты:**

*Алексейчук А.С., Мукин Ю.Д.* Применение свёрточных нейронных сетей в задаче устранения теней с фотографий // Моделирование и анализ данных. 2024. Том 14. № 1. С. 41–51. DOI: <https://doi.org/10.17759/mda.2024140103>

\**Алексейчук Андрей Сергеевич*, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры «Математическая кибернетика», Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет) (МАИ), г. Москва, Российская Федерация, доцент кафедры «Цифровое образование», Московский государственный психолого-педагогический



университет (ФГБОУ ВО МГППУ), г. Москва, Российская Федерация, ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-4167-8347>, e-mail: [alexejchuk@gmail.com](mailto:alexejchuk@gmail.com)

**\*\*Мукин Юрий Дмитриевич**, студент, Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет) (МАИ), г. Москва, Российская Федерация, ORCID: <https://orcid.org/0009-0003-6804-2039>, e-mail: [yurimukind@gmail.com](mailto:yurimukind@gmail.com)

## 1. ВВЕДЕНИЕ

В современном мире все более широкое распространение получают различные беспилотные летательные аппараты. Получаемые с них данные могут быть использованы для решения самых разных задач, однако эти данные подвержены быстрому устареванию из-за изменения угла падения солнечных лучей и варьирования цветовой температуры. Если изменение цветовой температуры не является значимой проблемой, так как может быть нивелировано при помощи стандартных методов обработки изображения, то изменение угла падения солнечных лучей может существенно повлиять на качество решения задачи [4]. Это связано с тем, что при изменении освещения также меняется насыщенность и форма теней, что снижает точность работы многих алгоритмов обнаружения объектов, а также препятствует работе некоторых алгоритмов выделения границ.

## 2. ПОСТАНОВКА И МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ

В данной статье рассмотрен алгоритм устранения теней, использующий в качестве входных данных изображения в формате RGB, способный локализовать затененные области и устранить или минимизировать эффект затенения.

Алгоритм можно разбить на два основных шага: локализация теней и удаление теней. Удаление теней состоит в восстановлении исходной цветовой информации на затененных участках. Оба эти шага могут быть выполнены при помощи свёрточных нейронных сетей.

Из-за большого объёма данных, которые содержат изображения, полученные с современных камер, и вычислительной сложности свёрточных нейронных сетей, обработка изображений высокого разрешения в исходном виде становится чрезвычайно ресурсозатратной задачей, а также существенно ограничивает список систем, на которых возможно применение итоговой модели. Существует два подхода решения данной проблемы: разделить изображение на части (плитки, «тайлы») меньшего размера (применить тайлинг) либо произвести масштабирование изображения. Оба подхода имеют свои плюсы и минусы, которые накладывают ограничения на спектр задач, в которых они применяются.

При применении масштабирования сохраняется геометрия объектов на изображении, но при этом теряется часть информации (могут быть утеряны мелкие детали и искажены переходные цвета), что снижает точность локализации теней.

В свою очередь, применение тайлинга не приводит к потере пространственной информации, но неудачный выбор размера плитки может привести к тому, что каждый

отдельный тайл не будет содержать достаточное количество признаков для выявления границ теней, что может значительно понизить итоговое качество работы модели, нацеленной на классификацию объектов. Проблема слишком малого размера плитки стоит особенно остро при работе с исходными изображениями высокого разрешения, что актуально для кадров, полученных с современных беспилотных летательных аппаратов. Например, на рис. 1 показано целое изображение и его фрагмент, не содержащий теней, но и не содержащий признаков, позволяющих однозначно это определить.

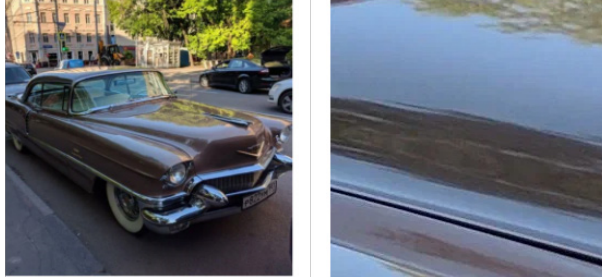


Рис. 1. Пример изображения и одной из плиток 256 x 256 пикселей

Поскольку в данной работе первоочередную роль играет обнаружение и устранение теней, что является искажениями цветового характера, было принято решение использовать тайлинг. Для обучения сетей был взят набор данных ISTD\_DATASET, представленный в статье [1].

### 3. ЛОКАЛИЗАЦИЯ ТЕНЕЙ

Задача локализации теней состоит в бинарной классификации каждого пикселя изображения (1 – «пиксель затенён»; 0 – «пиксель не затенён»). На основе этой классификации вычисляется маска тени, которая является бинарным изображением, то есть содержит только значения 0 и 1 (рис. 2). Таким образом, построение маски тени можно рассматривать как задачу семантической сегментации.

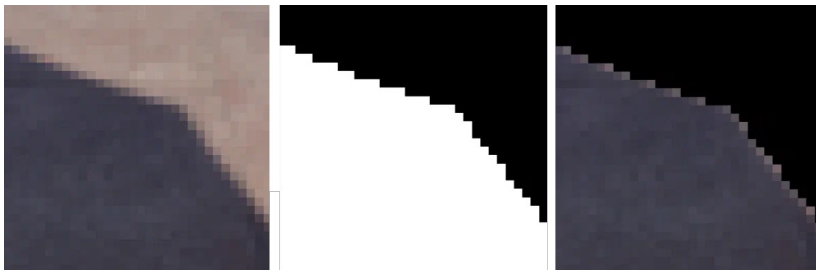


Рис. 2. Исходное изображение с тенью (слева), маска тени (посередине), наложение маски на изображение (справа)



Архитектура предлагаемой нейронной сети для локализации теней изображена на рисунке 3. Она представляет собой свёрточную нейронную сеть, состоящую из двух основных блоков – энкодера и декодера.

Энкодер содержит 6 свёрточных слоев связанных функцией активации  $ReLU(x) = \max(0, x)$ , а также вспомогательные слои BatchNorm2d и MaxPool2d, которые минимизируют внутренний ковариантный сдвиг и выделяют максимальные значения в окне заданного размера для каждого канала.

Декодер состоит из 7 слоев свёртки с дробным шагом, которые позволяют увеличить размер каждого отдельного канала за счет уменьшения количества каналов, и слоев нормализации. На последнем слое применяется функция активации  $\sigma(x) = \frac{1}{1 + e^{-x}}$ , что гарантирует попадание итогового значения в диапазон  $[0, 1]$ .

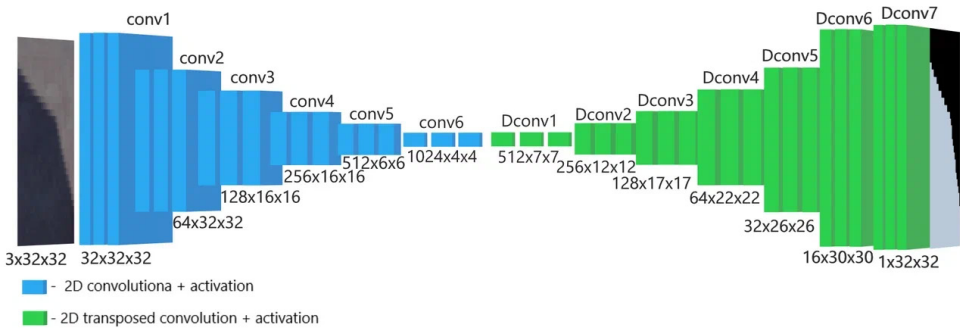


Рис. 3. Свёрточная нейронная сеть, состоящая из энкодера и декодера

В качестве функции потерь в этой модели используется категориальная кросс-энтропия:

$$l(x, y) = -\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \sum_{c=1}^C w_c \log \frac{\exp(x_{n,c})}{\sum_{i=1}^C \exp(x_{n,i})} y_{n,c},$$

где  $x_{n,i}$  – выходные данные последнего слоя модели с сигмоидной функцией активации (тензор вероятностей того, что  $i$ -й пиксель является затененным),  $y_{n,c}$  – истинная разметка (реальные классы пикселей),  $w_c$  – веса классов, по умолчанию инициализированные единицами,  $C$  – количество классов,  $N$  – размерность мини-пакета.

При помощи оптимизатора Adam с параметром скорости обучения  $lr = 0,0001$  было выполнено 25 эпох обучения модели. На графике на рис. 4 отображена эволюция функции потерь и метрики DICE. DICE, известный также как коэффициент Сёрнсена, представляет собой критерий качества, используемый в области компьютерного зрения для измерения сходства между двумя разметками изображений. Он основан на ошибках классификации первого и второго рода и может быть рассчитан по формуле:

$$DICE = \frac{2TP}{2TP + FN + FP},$$

где  $TP$  – количество истинно положительных результатов (классифицирован как 1, является 1),  $FN$  – количество ложноотрицательных результатов (классифицирован как 0, является 1),  $FP$  – количество ложноположительных результатов (классифицирован как 1, является 0).

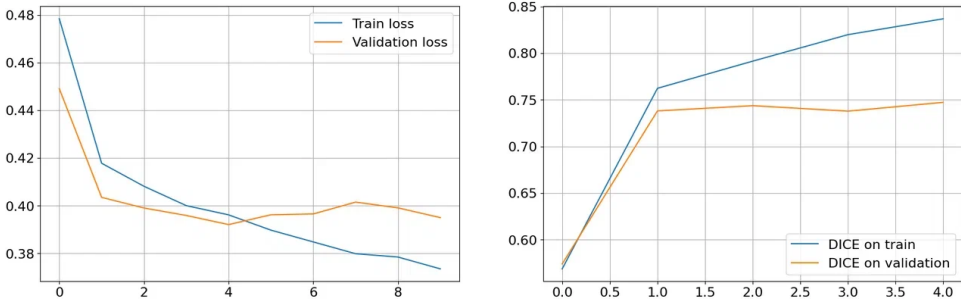


Рис. 4. Эволюция кросс-энтропии и критерия DICE на тестовой и обучающей выборках

По графикам видно, что модель явно испытывает переобучение, однако метрика DICE на тестовой выборке достаточно высока – около 75%. На рис. 5 приведен пример работы модели на данных из тестовой выборки.

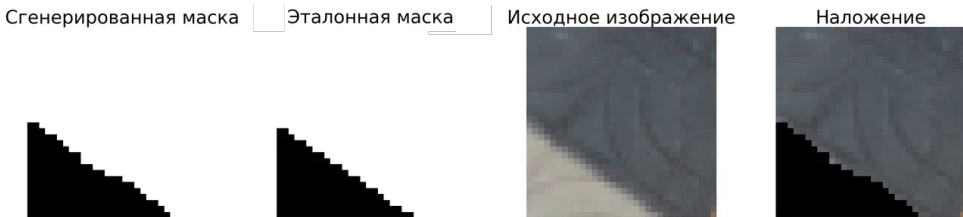


Рис. 5. Пример работы модели на тестовых данных

## 4. УДАЛЕНИЕ ТЕНЕЙ

Процесс удаления теней представляет собой восстановление оригинального цвета деталей затененных участков изображения. Для восстановления цвета используется архитектура CDNet, предложенная в работе [3]. Данная сеть состоит из классических свёрточных слоев и свёрточных слоев с дробным шагом. CDNet образована двумя и четырьмя скрытыми слоями соответственно (рис. 6). Входной слой получает обрабатываемое изображение в формате RGB, а выходной – генерирует изображение в формате RGB той же размерности, но со скорректированными значениями цветовых каналов.

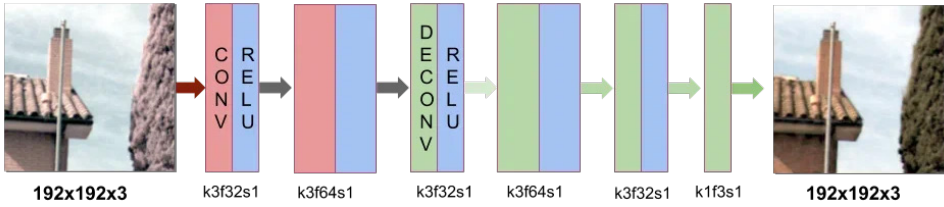


Рис. 6. Исходная архитектура CDNet

В качестве функции ошибки используется расстояние между цветами эталонного и обработанного изображений, которое можно рассчитать по формуле:

$$d = \sqrt{(R_{\text{обп}} - R_{\text{исх}})^2 + (G_{\text{обп}} - G_{\text{исх}})^2 + (B_{\text{обп}} - B_{\text{исх}})^2}.$$

После 25 эпох обучения, выполненных при помощи оптимизатора Adam с параметром скорости обучения  $lr = 0.0001$ , были получены следующие значения функции ошибки (рис. 7).

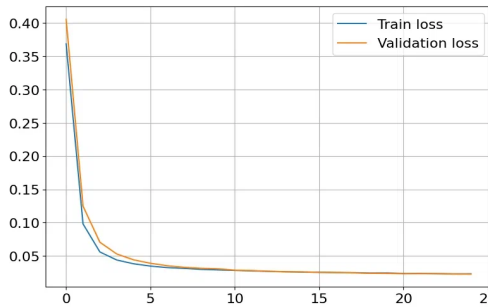


Рис. 7. Эволюция функции ошибки на тестовой и обучающей выборках

На тестовой и обучающей выборках было достигнуто почти идентичное значение функции ошибки, что свидетельствует о низкой степени переобучения, и без значительных архитектурных изменений добиться заметного улучшения невозможно. На рис. 8 приведен пример восстановления цвета в затененной области одного тайла изображения. Видно почти полное совпадение цветов в обработанной и эталонной областях.

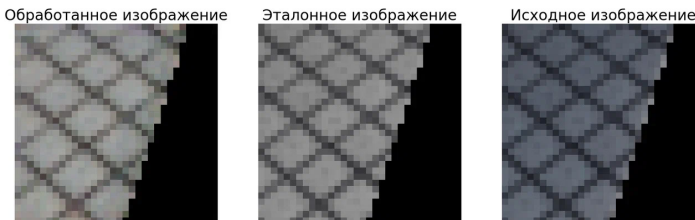


Рис. 8. Пример восстановления цветов

## 5. ОБЪЕДИНЕНИЕ МОДЕЛЕЙ

Для выполнения поставленной задачи необходимо объединить результаты работы обеих моделей, а также собрать разобранное на плитки изображение обратно в целое. Таким образом, для удаления теней необходимо выполнить следующие шаги: 1 – разделить изображение на плитки, 2 – сгенерировать маску для каждой плитки с помощью нейросетевой модели семантической сегментации, 3 – объединить каждую плитку со своей маской, 4 – восстановить цвет с помощью нейросетевой модели восстановления цвета, 5 – скомбинировать исходные плитки с плитками после удаления тени, 6 – объединить плитки в целое изображение.

Для применения маски и объединения исходного и восстановленного изображений использованы следующие функции:

$$\text{apply\_mask}(R_i, G_i, B_i, M_i) = \begin{cases} R_i, G_i, B_i, & \text{если } M_i = 1, \\ 0, 0, 0, & \text{если } M_i = 0; \end{cases}$$

$$\text{combine\_images}(R_i, G_i, B_i, \hat{R}_i, \hat{G}_i, \hat{B}_i, M_i) = \begin{cases} R_i, G_i, B_i, & \text{если } M_i = 0, \\ \hat{R}_i, \hat{G}_i, \hat{B}_i, & \text{если } M_i = 1, \end{cases}$$

где  $R_i, G_i, B_i$  – значения каналов  $i$ -го пикселя исходного изображения,  $\hat{R}_i, \hat{G}_i, \hat{B}_i$  – значения каналов  $i$ -го пикселя восстановленного изображения,  $M_i$  – значение маски этого пикселя.

На рис. 9 приведены примеры работы описанного алгоритма, включая промежуточные маски теней.

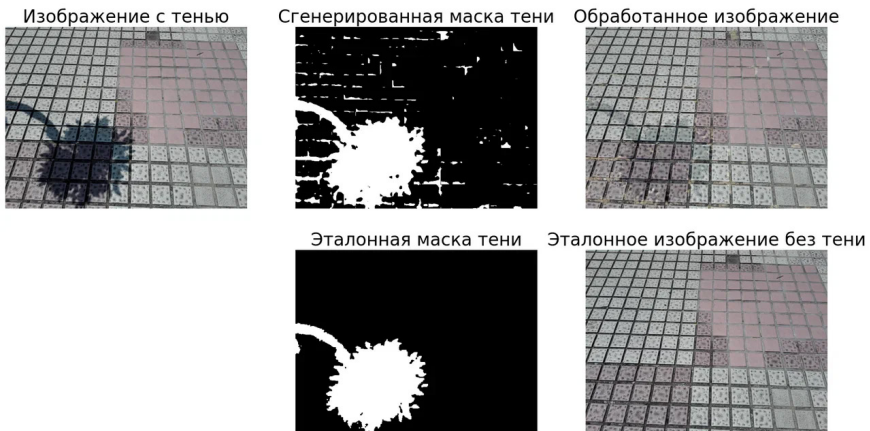


Рис. 9. Результат работы алгоритма на данных из тестовой выборки

На рис. 10 приведен пример обработки изображения, полученного с БПЛА. Видно высокое качество восстановления цвета на затененных высокими зданиями участках.



Рис. 10. Результат работы алгоритма на изображении с БПЛА

## 6. ВЫВОДЫ

Предложенный в данной работе алгоритм позволяет эффективно обнаруживать и удалять тени с изображений. Применение нейросетевого подхода позволяет не накладывать дополнительные ограничения по углу съемки и перспективе на исходные изображения, что даёт возможность использовать его не только для обработки снимков с БПЛА и спутников, но и с наземных аппаратов. Благодаря использованию относительно легких архитектур данный алгоритм может быть выполнен на широком спектре устройств и, теоретически, может значительно улучшить качество работы многих моделей глубокого обучения, предназначенных для распознавания образов, которые, в том числе, используются в автопилотах.

Однако с относительной простотой используемых моделей связаны и некоторые проблемы алгоритма. Детектор теней при классификации пикселей основывается на относительной яркости конкретной зоны, из-за чего могут возникать псевдо-тени, которые на самом деле являются просто более темными участками. К сожалению, полностью избежать этой проблемы не представляется возможным, поэтому для улучшения результатов можно совершенствовать модель восстановления цвета. Её доработка может включать расширение обучающей выборки, архитектурные улучшения и замену функции потерь на такую, которая учитывала бы неравномерность вклада в конечную яркость трёх базовых цветов.

В заключение можно отметить, что нейросетевые алгоритмы играют ключевую роль в разработке инновационных методов обработки изображений. Эффективность нейросетевого подхода к удалению теней подчеркивается его способностью к автоматическому извлечению и адаптации к контекстуальным особенностям изображения. Такой алгоритм не только значительно повышает качество конечного результата, но и обеспечивает устойчивую и точную обработку в широком спектре условий.

### *Литература*

1. Zhang X., Zhao Y., Gu C., Lu C., Zhu S. SpA-Former: An Effective and lightweight Transformer for image shadow removal // International Joint Conference on Neural Networks (IJCNN). 2023. P. 1–8.





2. *Simonyan K., Zisserman A.* Very Deep Convolutional Networks for Large-Scale Image Recognition // 3rd International Conference on Learning Representations, ICLR 2015, San Diego, CA, USA. 2015. Conference Track Proceedings.
3. *Soria X., Sappa A., Hammoud R.* Wide-Band Color Imagery Restoration for RGB-NIR Single Sensor Images // Sensors (Basel, Switzerland). 2018. Vol.18. № 7. P. 2059.
4. *Кузьмин С.А.* Устранение влияния теней на точность выделения объектов в видеопоследовательностях // Журнал Радиоэлектроники [Электронный журнал]. № 5. 2012. URL: [jre.cplire.ru/jre/may12/2/text.html](http://jre.cplire.ru/jre/may12/2/text.html) (дата обращения 01.02.2024).



# Application of Convolutional Neural Networks in the Problem of Removing Shadows from Photographs

**Andrei S. Alekseychuk\***

Moscow Aviation Institute (MAI), Moscow, Russia

ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-4167-8347>

e-mail: [alexejchuk@gmail.com](mailto:alexejchuk@gmail.com)

**Yuriy D. Mukin\*\***

Moscow Aviation Institute (MAI), Moscow, Russia

ORCID: <https://orcid.org/0009-0003-6804-2039>

e-mail: [yurimukind@gmail.com](mailto:yurimukind@gmail.com)

The article proposes a method for removing shadows from photographs using deep learning methods. The proposed method consists of several stages: dividing the image into rectangular fragments of 32x32 pixels, localizing shadows on each fragment, restoring the color of shadowed objects, and combining the fragments back into a whole image. Shadow localization is considered as a semantic segmentation problem; to solve it, a neural network of encoder-decoder architecture has been developed and trained. To restore the color of objects in identified shaded areas, another neural network based on the CDNet architecture is used. Examples of image processing using the developed method are given, including images from a drone, and the high quality of restoration of shaded areas is demonstrated.

**Keywords:** computer vision, deep learning, image processing, convolutional neural networks, shadow localization, semantic segmentation.

## For citation:

Alekseychuk A.S., Mukin Yu. D. Application of Convolutional Neural Networks in the Problem of Removing Shadows from Photographs. *Modelirovanie i analiz dannykh = Modelling and Data Analysis*, 2024. Vol. 14, no. 1, pp. 41–51. DOI: <https://doi.org/10.17759/mda.2024140103> (In Russ., abstr. in Engl.).

## References

1. Zhang X., Zhao Y., Gu C., Lu C., Zhu S. SpA-Former: An Effective and lightweight Transformer for image shadow removal // International Joint Conference on Neural Networks (IJCNN). 2023. P. 1–8.

\***Andrei S. Alekseychuk**, PhD (physics and mathematics), Associate Professor, Moscow Aviation Institute (National Research University) (MAI), Moscow, Russia, Associate Professor of the Department of Digital Education, Moscow State Psychological and Pedagogical University, Moscow, Russia, ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-4167-8347>, e-mail: [alexejchuk@gmail.com](mailto:alexejchuk@gmail.com)

\*\***Yuriy D. Mukin**, student, Moscow Aviation Institute (National Research University) (MAI), Moscow, Russia, ORCID: <https://orcid.org/0009-0003-6804-2039>, e-mail: [yurimukind@gmail.com](mailto:yurimukind@gmail.com)



2. Simonyan K., Zisserman A. Very Deep Convolutional Networks for Large-Scale Image Recognition // 3rd International Conference on Learning Representations, ICLR 2015, San Diego, CA, USA. 2015. Conference Track Proceedings.
3. Soria X., Sappa A., Hammoud R. Wide-Band Color Imagery Restoration for RGB-NIR Single Sensor Images // Sensors (Basel, Switzerland). 2018. Vol.18. № 7. P. 2059.
4. Kuzmin C.A. Ustranenie vliyaniya tenej na tochnost vydeleniya obyektov v videoposledovatel'nostyah [Eliminating the influence of shadows on the accuracy of object selection in video sequences] // Zhurnal Radioelektroniki=Radioelectronics Journal [Online journal]. № 5. 2012. Available at: [jre.cplire.ru/jre/may12/2/text.html](http://jre.cplire.ru/jre/may12/2/text.html) (Accessed: 01.02.2024). (In Russ.).

Получена 27.02.2024

Принята в печать 12.03.2024

Received 27.02.2024

Accepted 12.03.2024

УДК 159.9.075

## **Применение корреляционного анализа для определения рассогласования показателей для двух разных выборок: сопоставление интеллектуального и личностного развития детей младшего школьного возраста, исследуемых с интервалом в 10 лет**

***Артеменков С.Л.\****

Московский государственный психолого-педагогический университет (ФГБОУ ВО МГППУ), г. Москва, Российская Федерация  
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-1619-2209>  
e-mail: slart@inbox.ru

***Жукова Е.С.\*\****

Федеральный научный центр психологических и междисциплинарных исследований» (ФНЦ ПМИ), г. Москва, Российская Федерация  
ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-7546-908X>  
e-mail: JoukovaEC@yandex.ru

***Богоявленская Д.Б.\*\*\****

Федеральный научный центр психологических и междисциплинарных исследований» (ФНЦ ПМИ), г. Москва, Российская Федерация  
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-6766-2047>  
e-mail: mpo-120@mail.ru

Корреляционный анализ, который активно используется в психологических исследованиях для выявления взаимосвязи между психологическими параметрами, теряет свой смысл в случае, когда сравниваемые выборки различны. Вместе с тем изучение возможных связей психологических показателей между выборками может иметь некоторый смысл в частных случаях. Цель работы: показать возможности и предложить технологию применения корреляционного анализа для определения согласования показателей для двух разных выборок на примере долговременного (ретроспективного и современного) исследования интеллектуальных и личностных характеристик развития школьников 2 класса общей школы с разницей в возрасте 10 лет. Для корреляционного анализа использовались оценки интеллектуального развития по уровню работы в методике «Звери в цирке» метода «Креативное поле» (Богоявленская, 1971) и интеллекта по тесту «Стандартные прогрессивные матрицы» Дж. Равена. Для осуществления возможности полноценного корреляционного анализа общих показателей разных выборок в работе была

предложена техника предварительной привязки между собой двух разных выборок одинакового размера путем их согласования по одной из общих выборочных переменных. Эту привязку можно осуществлять по разным переменным с учетом их достаточно плавного изменения близкого к линейному в обеих выборках. Пример применения данной технологии для исследования основных характеристик интеллектуального и личностного развития современных детей младшего школьного возраста показал, что полученные новые результаты позволяют уточнить общие выводы проведенного ранее долговременного исследования по сравнению (этих же) показателей в двух разных выборках одинакового размера.

**Ключевые слова:** корреляционный анализ, изменение с течением времени, ретроспективное исследование, современное исследование, интеллектуальное развитие, младший школьный возраст.

**Для цитаты:**

Артеменков С.Л., Жукова Е.С., Богоявленская Д.Б. Применение корреляционного анализа для определения рассогласования показателей для двух разных выборок: сопоставление интеллектуального и личностного развития детей младшего школьного возраста, исследуемых с интервалом в 10 лет // Моделирование и анализ данных. 2024. Том 14. № 1. С. 52–66. DOI: <https://doi.org/10.17759/mda.2024140104>

\***Артеменков Сергей Львович**, кандидат технических наук, профессор, Заведующий кафедрой прикладной информатики и мультимедийных технологий, руководитель центра информационных технологий для психологических исследований факультета информационных технологий, ФГБОУ ВО «Московский государственный психолого-педагогический университет» (ФГБОУ ВО МГППУ), Москва, Россия, ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-1619-2209>, e-mail: slart@inbox.ru

\*\***Жукова Елена Сергеевна**, кандидат психологических наук, Федеральный научный центр психологических и междисциплинарных исследований» (ФНЦ ПМИ), Москва, Россия, ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-7546-908X>, e-mail: JoukovaEC@yandex.ru

\*\*\***Богоявленская Диана Борисовна**, доктор психологических наук, профессор, руководитель, Центр междисциплинарных исследований творчества и одаренности, ФГБНУ «Психологический институт Российской Академии образования» (ФГБНУ ПИ РАО), профессор, кафедра психологической антропологии, Институт детства, ФГБОУ ВО «Московский педагогический государственный университет» (ФГБОУ ВО МПГУ), Москва, Россия, ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-6766-2047>, e-mail: mpo-120@mail.ru

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Изучение изменений особенностей становления психологических характеристик в разные временные эпохи предполагает необходимость использования разных выборок испытуемых. В этом случае для определения связей между психологическими характеристиками разных временных срезов не удастся применить корреляционный анализ, который обычно активно используется в психологических исследованиях для выявления



взаимосвязи между психологическими переменными [13, 14], поскольку характер полученных связей может отражать индивидуальные особенности конкретной выборки.

Когда выборки различны (даже если они равны по численности испытуемых), корреляционный анализ между одинаковыми показателями этих двух разных выборок не имеет смысла, поскольку без привязки к одним и тем же испытуемым результирующие корреляции будут самыми разными и очень часто близкими к нулю. Они будут случайным образом зависеть от перемешивания последовательности значений одинаковых показателей в разных группах.

Вместе с тем в отдельных случаях можно предложить вариант, когда при сравнении показателей разных выборок одинакового размера можно применить корреляционный анализ. Предлагаемый способ включает выбор определенного показателя  $K$  в двух группах 1 и 2 ( $K_1$  и  $K_2$ ), который имеет тенденцию к плавному и близкому линейному изменению (нарастанию или убыванию) в обеих группах. В этом случае испытуемых в этих группах можно выстроить в примерно одинаковом порядке по величинам  $K_1$  и  $K_2$  и тем самым осуществить привязку и согласование двух групп между собой. При этом по величинам показателей групп ( $K_1$  и  $K_2$ ) устанавливаются отношения эквивалентности между людьми в разных выборках относительно величины показателя  $K$ . Соответственно корреляция между  $K_1$  и  $K_2$  в этом случае должна быть близка к 1.

Установление предложенной выше привязки может далее иметь значение для выявления и анализа корреляций между другими показателями, измеренными для обеих выборок. В частности, для тех показателей, которые имеют сходную природу с  $K$  можно проверить их сходство для разных выборок, а также выявить возможные рассогласования в возможных зависимостях других показателей для обеих выборок. Таким образом, в случае предлагаемой взаимной привязки двух выборок, дальнейший корреляционный анализ между этими разными выборками может получить некоторый смысл для того, чтобы выявить изменения других измеренных характеристик во времени.

Целью настоящей работы является показать возможность и предложить технологию применения корреляционного анализа при необходимости определения рассогласования показателей для двух разных выборок, в частности, для случая исследования длительных изменений во времени интеллектуальных и личностных характеристик развития детей.

В качестве примеров, когда предлагаемая технология могла быть нужна, можно упомянуть исследования особенностей развития современных младших школьников через сопоставление характеристик их развития, полученных в рамках двух временных срезов с промежутком во времени в 10 лет [19] и 20 лет [9]. Выбор для исследования интеллектуальных и личностных характеристик развития детей 2 класса младшей школы был обоснован определенным уровнем адаптации ребенка к школьному обучению при сохранении относительной новизны его деятельности. Сдвинутые по времени измерения были проведены в рамках одного образовательного учреждения г. Москвы, что обеспечило относительно идентичные условия педагогического и образовательного процесса этих групп. В описании далее настоящего исследования мы опираемся на работу [19].

## 2. МЕТОДЫ

Исследование особенностей интеллектуального и личностного развития детей проводилось с помощью методики «Звери в цирке» метода «Креативное поле» Д.Б. Богоявленской [6, 7] и теста «Стандартные прогрессивные матрицы» Дж. Равена. Личностное развитие, в частности, особенности мотивационно-потребностной сферы, оценивалось в рамках метода «Креативное поле». Этот метод представляет собой новый тип деятельности, который характеризуется присутствием скрытого слоя, обеспечивающего возможности для испытуемого проведения дальнейшего анализа имеющегося материала без ограничений, и самостоятельного выбора необходимости продвижения в дальнейшем исследовании. Метод предполагает знакомство с новой для ребенка деятельностью, что реализуется в обязательном проведении обучающего эксперимента. Это позволяет фиксировать различия в процессе овладения деятельностью и оценивать интеллектуальные способности ребенка по уровню обучаемости. В основном эксперименте оценивался уровень интеллекта, включая регуляторный компонент, и способность к развитию деятельности по собственной инициативе. В частности, с использованием данного метода ранее были проведены работы по исследованию одаренности, креативности, интеллектуального и личностного развития школьников [8, 12, 15, 18, 19].

С помощью теста «Стандартные прогрессивные матрицы» Дж. Равена определялся невербальный интеллект школьников. Известно, что этот тест отличается устойчивостью к культурным различиям и во многом занимает центральное место в сравнении различных тестов на интеллект [16]. Первые три серии теста представляют собой ряд постепенно усложняющихся заданий, которые необходимо сопоставить с помощью анализа предложенной матрицы и вариантов решения.

## 3. ИСПЫТУЕМЫЕ

Выборка составила 100 человек: 50 учащихся в 2013 году (выборка № 1) и 50 учащихся в 2022–2023 годах (выборка № 2), которые представляли собой стандартные классы общеобразовательной школы. Средний возраст выборки № 1 составил 8 лет, выборки № 2 – 8,5 лет. Обе выборки состояли из 28 девочек и 22 мальчиков, что составляет 56% против 44 %. Средний возраст мальчиков для 1 выборки – 8 лет, для 2 выборки – 8 лет 4 мес. Средний возраст девочек для 1 выборки – 8 лет, для второй выборки – 8 лет 6 месяцев. Выборки исследовались в рамках одного учебного учреждения и одинаковых школьных программ.

## 4. ПРОЦЕДУРЫ

В методике «Звери в цирке» были выделены следующие показатели. К интеллектуальным показателям относились: «Количество Ошибок в Обучающем Эксперименте Креативного Поля (КО ОБЭКП)», «Время Решения основной задачи в Основном Эксперименте Креативного Поля (ВР ОсЭКП)». Показатель «КО ОБЭКП» представлял собой



количество ошибок, допущенных испытуемым в процессе овладения деятельностью в эксперименте. Лучшим результатом считалось отсутствие ошибок, худшим – максимальное по группе количество ошибок. Показатель «ВР ОсЭЖП» отражал собственно интеллектуальный уровень ребенка, способность принять условия задачи и найти ее решение. Лучшим результатом считалось решение основной задачи за наименьшее время, худшим результатом – отсутствие решения.

В качестве регуляторного показателя рассматривалась «сенсомоторная координация», легко выделяемая в детском варианте методики в рамках метода «Креативное поле». Здесь оценивался характер линии, точность проведения траектории через углы клеток экспериментального поля.

К личностным показателям относилась способность к развитию деятельности по собственной инициативе. Здесь оценивался интерес и познавательная мотивация, которая реализовывалась в развитии деятельности по собственной инициативе.

Тест «Стандартные прогрессивные матрицы» Дж. Равена, как было отмечено ранее, определял уровень интеллектуального развития. Он является наиболее используемым и информативным невербальным тестом [10, 11]. С группами проводились серии А, В, С.

Для обработки полученных данных в работе [19] применялись методы описательной статистики, U – критерий Вилкоксона – Манна-Уитни и корреляционный анализ каждой из выборок отдельно. Расчеты проводились с использованием языка программирования R. Условные обозначения измеренных показателей приведены в таблице 1 ниже с учетом дополнительных обозначений R5, E5, T5, B5, S5.

Таблица 1

### Условные обозначения исследуемых показателей

Выборка	Показатель по тесту Равена (RS)	Количество ошибок в «Креативном поле» (NE CFTE)	Время решения задачи в «Креативном поле» (TS CFME)	Способность к развитию деятельности по инициативе субъекта (IS)	Сенсомоторная координация (SC)
№ 1 2013 г.	R3	E3	T3	B3	S3
№ 2 2022–2023 гг.	R4 R5	E4 E5	T4 T5	B4 B5	S4 S5

## 5. РЕЗУЛЬТАТЫ

Результаты описательной статистики экспериментальных данных, статистического анализа с применением U – критерия Вилкоксона – Манна-Уитни и корреляционный анализ по Спирмену для каждой их выборок отдельно приведены в работе [19]. Полученные результаты показали, что у современных второклассников уровень интеллектуального развития снижается по сравнению с подобной возрастной группой 10 лет назад. Овладение новой деятельностью в «Креативном поле» и уровень интеллекта по тесту Равена показывают снижение средних значений обучаемости и интеллекта



у современных школьников. У современной выборки также увеличивается время решения основной задачи. Вместе с тем уровень сенсомоторной координации в современной выборке отличается положительной тенденцией. В личностном развитии современной выборки наблюдалось снижение проявлений способности к развитию деятельности по собственной инициативе, и современные дети чаще демонстрировали стимульно-продуктивную стратегию в деятельности.

Поскольку размеры выборок одинаковы, то формально можно провести корреляционный анализ между всеми десятью измеренными переменными. Как показывает таблица 2 ниже, корреляции переменных RS, NE CFTE, TS CFME, IS, SC между выборками в этом случае очень малы и незначимы на уровне  $p = 0,05$  и ниже. При этом в связи с наличием абсолютно разных случайно составленных выборок рассмотрение межвыборочных корреляций не имеет никакого смысла даже при условии, что какие-то из них были бы достаточно велики.

Таблица 2

**Корреляции Спирмена между всеми показателями  
исследования 1 и 2 выборок без осуществления привязки выборок**

Показатели	R4	E4	T4	B4	S4
R3	-0,09	0,06	0,19	-0,28	0,26
E3	0,03	0,13	-0,16	0,13	-0,20
T3	-0,05	0,09	-0,09	0,05	-0,07
B3	-0,09	-0,04	0,18	-0,14	0,00
S3	0,14	0,04	0,06	-0,06	-0,20

В соответствии с заявленной целью осуществим далее привязку 1 и 2 выборки по одному из показателей. Для этого среди пяти показателей для каждой из выборок удобно выбрать такой, который характеризуется наиболее плавным и достаточно большим изменением в выборке. Возьмем, в частности, переменные интеллекта RS, которые в исследовании отвечают за отдельный тест. Для осуществления привязки показателей пересортируем матрицу значений показателя второй выборки R4 таким образом, чтобы сопоставить в двух выборках людей с относительно равными градациями изменения величин их интеллектов в пределах каждого из диапазонов изменения R3 и R4. Для удобства описания обозначим полученные показатели новой второй выборки символами: R5, E5, T5, B5, S5. Необходимо отметить, что новые условные обозначения отнюдь не являются новыми переменными и  $R5 = R4$ ;  $E5 = E4$ ;  $T5 = T4$ ;  $B5 = B4$ ;  $S5 = S4$ . Разными для них будут только корреляции между выборками, т.е. в сравнении со соотношениями с R3, E3, T3, D3, S3. Корреляции внутри каждой из выборок не зависят от проведенной пересортировки и приведены в работе [19]. Следует, однако, отметить, что, как можно увидеть ниже в сетевом анализе, частные корреляции меняют значения всех корреляций.

Можно видеть, что диаграмма рассеяния показателей R5 от R3 получила почти линейный характер (см. рисунок 1), т.е. корреляция между этими показателями



в результате будет очень близкой к 1. Результаты полного корреляционного анализа между показателями RS, NE CFTE, TS CFME, IS, SC для двух привязанных выборок показаны в таблице 3 ниже. Действительно, в таблице 3 видно, что корреляция между R3 и R5 теперь равна 0,98 ( $p = 0,001$ ), в то время как корреляция между R3 и R4 была равна  $-0,09$ . Кроме того, ряд других корреляций показателей между разными выборками стали хотя и небольшими, но значимыми. В частности, R5 теперь естественным образом коррелирует со всеми остальными показателями первой выборки примерно также как это делает показатель R3. Имеется еще ряд других хотя и слабо значимых межвыборочных корреляций, которые теперь можно пытаться обсуждать. Выборки теперь можно сравнивать между собой по интеллекту RS и другим параметрам.

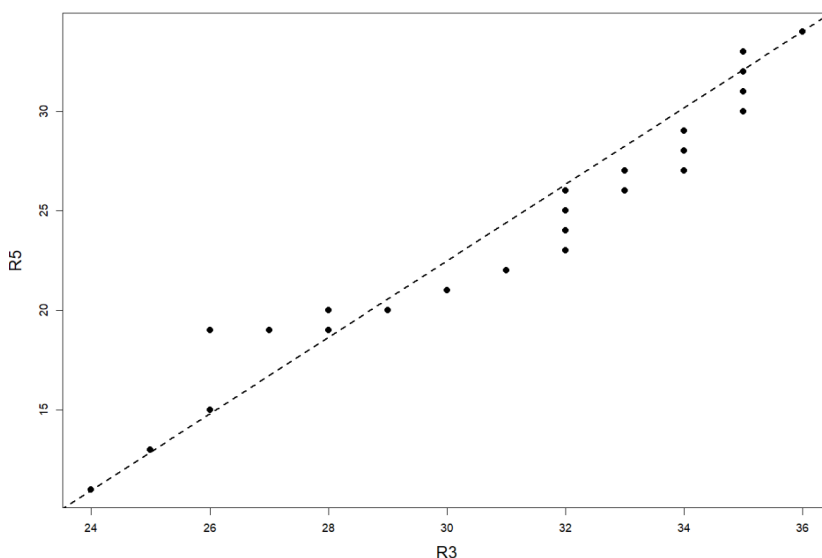


Рис. 1. Диаграмма рассеяния для показателей R5 и R3

Таблица 3

**Корреляции Спирмена между показателями исследования 1 и 2 выборок после осуществления привязки выборок по величине интеллекта испытуемых**

Показатели	R5	E5	T5	B5	S5
R3	0,98***	-0,40**	-0,33*	0,24	-0,29*
E3	-0,66***	0,13	0,19	-0,18	0,11
T3	-0,39**	-0,02	0,13	0,05	-0,11
B3	0,61***	-0,22	-0,02	0,12	-0,13
S3	-0,41**	0,04	0,15	-0,28*	0,09

Примечание: \*\*\* $p=0,001$ , \*\*  $p=0,01$ , \* $p=0,05$ .

Способность к развитию деятельности по собственной инициативе (B3 и B5) включает интеллектуальный и мотивационный компоненты в их единстве [5]. Сопоставляя две разные выборки, мы можем говорить о снижении проявлений развития деятельности по собственной инициативе во 2 выборке, что может быть результатом как снижение познавательной мотивации, так и снижение интеллекта, а также влияние обоих компонентов. Это подтверждается тем, что R3 значимо коррелирует с B3 ( $r = 0,57^{***}$ ), тогда как значимой корреляции R4 и B4 ( $r = 0,20$ ) не наблюдается. Привязывая R4 = R5 к R3, получаем значимую корреляцию R5 и B3 ( $r = 0,61^{***}$ ), в то время как корреляция R3 и B5 = B4 остается незначимой ( $r = 0,24$ ).

Таким образом, путем привязки выборок по одному параметру мы можем установить особенности становления способности к развитию деятельности по инициативе субъекта у детей младшего школьного возраста в рамках современного и ретроспективного исследования. Аналогичную привязку можно делать и по другим показателям, если они достаточно линейно и относительно плавно изменяются в соответствующих выборках, равных по количеству испытуемых. Предложенный способ не заменяет других методов сравнения выборок и, на наш взгляд, может помочь в получении большей полноты выводов корреляционного анализа в случае разных по составу выборок с одинаковыми типами измерений.

После выполнения привязки попробуем применить к переменным исследования методы построения сетей частных переменных [2, 3, 4], возникших в области машинного обучения и анализа сложных систем [1, 17]. На рисунке 2 ниже показана сеть частных корреляций glasso для показателей 1 и 2 выборки до осуществления привязки выборок по величине интеллекта испытуемых.

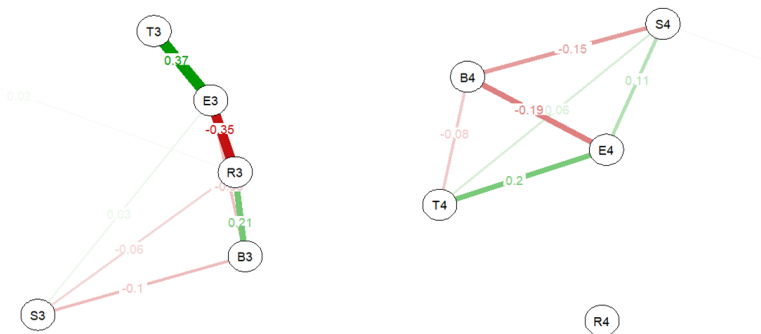


Рис. 2. Сеть частных корреляций glasso для показателей 1 и 2 выборки до осуществления привязки выборок по величине интеллекта испытуемых (гиперпараметр  $\gamma = 0,25$ )

Можно видеть, что группа 5-ти показателей первой выборки R3, B3, E3, T3, S3 полностью отделена от этих же показателей второй выборки. При этом для первой выборки имеется достаточно четкие однородные связи между четырьмя показателями



R3, B3, E3, T3, а показатель S3 в существенной мере отделен и плохо связан с первыми четырьмя показателями. Для второй выборки имеет место другая ситуация. Компактную группу взаимосвязей составляют показатели B4, E4, T4, S4, а показатель R4 отделен и никак не связан со своей группой. Далее абсолютная связь между B4 и E4 явно больше таковой для B3 и E3 (которая плохо видна на рисунке 2). Между B3 и T3 связь вообще отсутствует, в то время как отрицательная связь между B4 и T4 имеется. Эти особенности в целом отчасти отмечены и обсуждены в работе [19].

На рисунке 3 представлена сеть частных корреляций glasso для показателей 1 и 2 выборки после осуществления привязки выборок по величине интеллекта испытуемых. В силу (отмеченного ранее) отсутствия связи между R4 и остальными переменными второй выборки, в данном случае также имеется отсутствие связей между R5 и остальными показателями второй выборки.

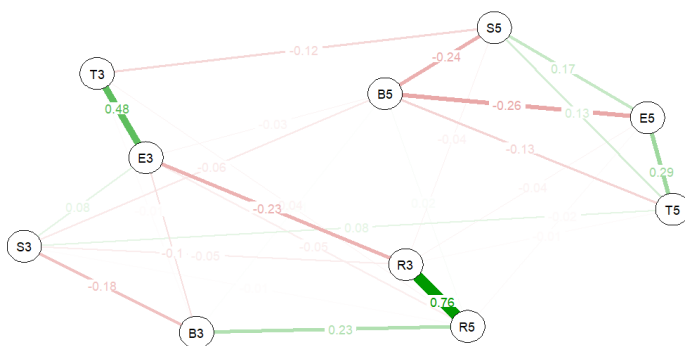


Рис. 3. Сеть частных корреляций glasso для показателей 1 и 2 выборки после осуществления привязки выборок по величине интеллекта испытуемых (гиперпараметр  $\gamma = 0,45$ )

Поскольку теперь на рисунке 3 показатели R5 и R3 оказываются сильно объединенными, то связь между ними велика и пара этих показателей соотнесена с показателями первой выборки B3 и E3, а через них и с T3 и S3 в целом таким же образом, как это было показано на рисунке 2. При этом величина связи между R3 и E3 уменьшилась, что, по-видимому, определяется влиянием узла R5. Теперь в сети имеются также другие связи и связи между группами факторов 1 и 2 выборки. Но величина этих связей весьма мала. Можно заметить, что после осуществления привязки второй выборки количество связей в сети стало больше при том, что величина гиперпараметра  $\gamma$  также стала больше (а большая величина  $\gamma$  способствует уменьшению количества выявленных реальных связей в общей сети частных корреляций [3, 4]). Можно видеть, что даже привязка во второй выборке интеллекта по Равену – R4 к этому же показателю в первой выборке R3, где R3 связан с показателями по методу «Креативное поле» не приводит к тому, что теперь общая пара показателей R3-R5 оказывается как-либо связанной с другими показателями E5, T5, B5, S5.



Полученные в эксперименте результаты позволяют подтвердить выводы о сравнении выборок между собой [19]. В современной выборке сложнее происходит овладение новой деятельностью и несколько медленнее проходит решение основной задачи в эксперименте. Тест Равена также показывает снижение средних значений интеллекта у современных школьников. В силу снижения познавательной мотивации в современной выборке наблюдается «отрыв» показателя интеллекта по тесту Равена от интеллектуальных показателей эксперимента «Креативное поле», т.е. эти показатели перестают быть связанными. При этом, уровень сенсомоторной координации детей SC не только сильно не отличается от сверстников 10 лет назад, но даже становится чуть лучше связанным с другими показателями, измеренными по методу «Креативное поле».

В 1 выборке параметр Время решения задачи в «Креативном поле» – T3 не влияет на проявление способности к развитию деятельности – B3, т.е. вне зависимости от скорости и легкости решения основной задачи познавательная мотивация этих детей сохраняется на протяжении всего эксперимента. Тогда как в современной выборке в сети частных корреляций наблюдается отрицательная связь параметр времени решения задачи T4 – T5 и способности к развитию деятельности B4 – B5, что говорит о том, что дети, быстро решившие задачу, проявляют познавательную мотивацию, тогда как дети, медленно решающие основную задачу, работают в эксперименте на стимульно-продуктивном уровне, то есть не отличаются познавательной мотивацией. При этом после привязки абсолютная величина связи T5-B5 больше, чем T4-B4, т.е. осуществленное преобразование данных делает наличие связи более выраженным, что также верно и для ряда других частных корреляций.

Следует отметить, что отрицательное значение связей между показателями метода «Креативного поля» в данном случае обосновано инверсией данных показателя IS (что обеспечивает его положительную корреляцию с интеллектом RS) и при проведении стандартной интерпретации должно быть заменено на положительное. Это значит, что во 2 выборке проявление способности к развитию деятельности по собственной инициативе IS оказывается более тесно связано с легкостью овладения этой деятельностью в процессе обучения (NE CFTE) и скоростью решения первой задачи (TS CFTE), т.е. на эвристики выходят только дети, легко и быстро продвигающиеся в задаче. При этом в 1 выборке, с ее большей представленностью одаренных детей, проявление познавательной активности наблюдалось при разных значениях интеллекта (при обязательном условии овладения деятельностью) и при разных скоростных характеристиках интеллекта в условиях Креативного поля как метода фиксирующего, но неограничивающего время решения.

Иными словами, 2 выборка характеризуется снижением познавательной мотивации, что может и не иметь снижения интеллекта в конкретном случае. При отсутствии высоких значений по интеллекту дети, успешно овладевшие деятельностью во 2 выборке, не проявляют интереса к ее инициативному развитию: выполнение требований является основным мотивом взаимодействия. Отчуждение интеллекта от личностных смыслов познания возможно является результатом информационной насыщенности среды, ее регламентации как временной, так и содержательной или другими социальными и педагогическими факторами [19].



## 6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Для осуществления возможности полноценного корреляционного анализа общих показателей разных выборок в работе предложена технология привязки между собой двух разных выборок одинакового размера путем их согласования по одной из общих выборочных переменных. Эту привязку можно осуществлять по разным переменным с учетом их достаточно плавного градационного изменения в обеих выборках.

Приведенный пример применения данной технологии для данных исследования основных характеристик интеллектуального и личностного развития современных детей младшего школьного возраста показал, что полученные новые результаты позволяют отчасти уточнить общие выводы конкретного исследования [19], направленного на сопоставление интеллектуального и личностного развития детей 2 класса младшей школы с разницей в возрасте 10 лет. Предложенная технология представляет интерес, в частности, для корреляционного анализа долговременных изменений, что возможно сделать только при анализе результатов разных выборок.

### *Литература*

1. Артеменков С.Л. Аспекты моделирования и особые свойства сложных систем // *Моделирование и анализ данных*. 2016. № 1. С. 47–59. doi:10.17759/mda.04
2. Артеменков С.Л. Сетевое моделирование психологических конструктов // *Моделирование и анализ данных*. 2017. № 1. С. 9–28.
3. Артеменков С.Л. Проблемы построения и анализа упорядоченных сетей частных корреляций в психологических исследованиях // *Моделирование и анализ данных*. 2021. Том 11. № 3. С. 36–56. doi:10.17759/mda.2021110303
4. Артеменков С.Л. Упорядоченные сети частных корреляций в психологических исследованиях // *Моделирование и анализ данных*. 2021. Том 11. № 2. С. 31–50. doi:10.17759/mda.2021110202
5. Артеменков С.Л., Богоявленская Д.Б., Жукова Е.С. Интеллектуальная и мотивационная компоненты в лонгитюдном исследовании одаренности // *Проблемы современного образования*, 2021. № 1. С. 47–61. DOI: 10.31862/2218-8711-2021-1-47-61
6. Богоявленская Д.Б. Метод исследования интеллектуальной активности // *Вопросы психологии*. 1971. № 1. С. 144–146, ISSN: 0042–8841
7. Богоявленская Д.Б. *Психология творческих способностей* / Психологический ин-т РАО. Самара: Федоров, 2009. 414 с. ISBN 978-5-393-00288-6
8. Богоявленская Д.Б., Артеменков С.Л., Жукова Е.С. Лонгитюдное исследование становления одаренности // *Экспериментальная психология*. 2021. № 3. С. 122–137.
9. Богоявленская Д.Б., Жукова Е.С., Артеменков С.Л. Характеристики познавательной деятельности детей старшего дошкольного возраста в разные временные эпохи. *Мир психологии*. 2023. № 2, 190–197. DOI: 10.51944/20738528\_2023\_2\_190
10. Вучичевич Б. Возрастные и индивидуальные различия в интеллектуальном развитии младших школьников при выполнении заданий СПМ [Электронный ресурс] // *Психолого-педагогические исследования*. 2022. 14(1). С. 95–110. DOI: 10.17759/psyedu.2022140107
11. Давыдова Ю.А., Птуха М.В. Индивидуальные особенности невербального интеллекта у младших школьников // *Вестник КРСУ*. 2013. 13(3). 94–98.
12. Жукова Е.С., Артеменков С.Л., Богоявленская Д.Б. Исследование интеллектуальной активности в младшем школьном и подростковом возрасте // *Моделирование и анализ данных*. 2019. № 1. С. 11–29.



13. *Марковские модели в задачах диагностики и прогнозирования: Учебное пособие* / Под ред. Л.С. Куравского. Издание второе, дополненное. М.: Изд-во МГППУ, 2017. 204 с. URL: <https://psychlib.ru/inc/absid.php?absid=356006>.
14. Митина О.В. *Математические методы в психологии: Практикум* / О.В. Митина. М.: Аспект Пресс, 2009. 238 с.
15. Bogoyavlenskaya D., Joukova E., Artemenkov S. Longitudinal Study Of The Creative Abilities // *The European Proceedings of Social & Behavioural Sciences (EpSBS)*. 2018. № 14, P. 125–131. DOI: <https://dx.doi.org/10.15405/epsbs.2018.11.02.14>.
16. Carpenter PA, Just MA, Shell P: What one intelligence test measures: a theoretical account of the processing in the Raven Progressive Matrices Test. *Psychological Review*. 1990. 97. 404–431. DOI: 10.1037/0033-295X.97.3.404.
17. Epskamp S., Fried E.I. A tutorial on regularized partial correlation networks. *Psychological Methods*. 2018. 23(4), 617–634. <https://doi.org/10.1037/met0000167>
18. Joukova, E.S., Artemenkov, S.L., Bogoyavlenskaya, D.B. The Formation of Giftedness and Intelligence at School Age. *New Ideas in Child and Educational Psychology*. 2022. 1–2(2), 80–92. DOI: 10.11621/nicep.2022.0205. <https://nicepj.ru/articles/article/1853/>
19. Joukova E.S., Bogoyavlenskaya D.B., Artemenkov S.L. The Main Characteristics of the Intellectual and Personal Development of Today’s Primary Schoolchildren. *New Ideas in Child and Educational Psychology*. 2023. 1–2(4), 48–67. DOI: 10.11621/nicep.2023.0403



# **Application of Correlation Analysis to Determine the Discrepancy Between Indicators for Two Different Samples: Comparison of the Intellectual and Personal Development of Children of Primary School Age, Studied with an Interval of 10 Years**

***Sergei L. Artemenkov\****

Moscow State University of Psychology and Education (MSUPE)

Moscow, Russia

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-1619-2209>

e-mail: slart@inbox.ru

***Elena S. Joukova\*\****

Federal Scientific Center for Psychological and Interdisciplinary Research

Moscow, Russia

ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-7546-908X>

e-mail: JoukovaEC@yandex.ru

***Diana B. Bogoyavlenskaya\*\*\****

Federal Scientific Center for Psychological and Interdisciplinary Research

Moscow, Russia

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-6766-2047>

e-mail: mpo-120@mail.ru

Correlation analysis, which is actively used in psychological research to identify the relationship between psychological parameters, loses its meaning when the samples being compared are different. At the same time, studying possible connections of psychological indicators between samples may have some meaning in special cases. Purpose of the work: to show the possibilities and propose a technology for using correlation analysis to determine the agreement of indicators for two different samples using the example of a long-term (retrospective and modern) study of the intellectual and personal characteristics of the development of schoolchildren in the 2nd grade of a general school with an age difference of 10 years. For correlation analysis, we used assessments of intellectual development according to the level of work in the “Beasts in the Circus” method of the “Creative Field” method (Bogoyavlenskaya, 1971) and intelligence according to the “Standard Progressive Matrices” test by J. Raven. To implement the possibility of a full correlation analysis of general indicators of different samples, the work proposed a technique for preliminary linking two different samples of the same size to each other by matching them on one of the common sample variables. This binding can be carried out for different variables, taking into account their fairly smooth change close to linear in both samples. An example of the use of this technology to study the main characteristics of the intellectual and personal development of modern children of primary school age showed that the new





results obtained make it possible to clarify the general conclusions of a previously conducted long-term study comparing (the same) indicators in two different samples of the same size.

**Keywords:** correlation analysis, change over time, retrospective study, modern research, intellectual development, primary school age.

**For citation:**

Artemenkov S.L., Joukova E.S., Bogoyavlenskaya D.B. Application of Correlation Analysis to Determine the Discrepancy Between Indicators for Two Different Samples: Comparison of the Intellectual and Personal Development of Children of Primary School Age, Studied with an Interval of 10 Years. *Modelirovanie i analiz dannykh = Modelling and Data Analysis*, 2024. Vol. 14, no. 1, pp. 52–66. DOI: <https://doi.org/10.17759/mda.2024140104> (In Russ., abstr. in Engl.).

\***Sergei L. Artemenkov**, PhD in Engineering, Professor, Head of the Department of Applied Informatics and Multimedia Technologies, Head of the Center of Information Technologies for Psychological Research of the Faculty of Information Technologies, Moscow State University of Psychology and Education (MSUPE), Moscow, Russia, ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-1619-2209>, e-mail: [slart@inbox.ru](mailto:slart@inbox.ru)

\*\***Elena S. Joukova**, PhD in Psychology, Federal Scientific Center for Psychological and Interdisciplinary Research, Moscow, Russia, ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-7546-908X>, e-mail: [JoukovaEC@yandex.ru](mailto:JoukovaEC@yandex.ru)

\*\*\***Diana B. Bogoyavlenskaya**, Doctor of Psychology, Professor, Head of the Center for Interdisciplinary Studies of Creativity and Giftedness, Psychological Institute of Russian Academy of Education, Professor, Department of Psychological Anthropology, Institute of Childhood, Moscow State Pedagogical University, Moscow, Russia, ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-6766-2047>, e-mail: [mpo-120@mail.ru](mailto:mpo-120@mail.ru)

**References**

1. Artemenkov S.L. The Aspects of Modelling and Specific Characteristics of Complex Systems. *Modelirovanie i analiz dannykh = Modelling and Data Analysis*, 2016, no. 1. pp. 47–59. doi:10.17759/mda.04. (In Russ., abstr. in Engl.).
2. Artemenkov S.L. Network modeling of psychological constructs. *Modelirovanie i analiz dannykh = Modelling and Data Analysis*, 2017, no. 1. pp. 9–28. (In Russ., abstr. in Engl.).
3. Artemenkov S.L. The Issues of Construction and Analysis of Ordered Partial Correlation Networks in Psychological Research. *Modelirovanie i analiz dannykh = Modelling and Data Analysis*, 2021. Vol. 11, no. 3, pp. 36–56. DOI: 10.17759/mda.2021110303. (In Russ., abstr. in Engl.)
4. Artemenkov S.L. Ordered Partial Correlation Networks in Psychological Research. *Modelirovanie i analiz dannykh = Modelling and Data Analysis*, 2021. Vol. 11, no. 2, pp. 31–50. DOI: 10.17759/mda.2021110202. (In Russ., abstr. in Engl.)
5. Artemenkov S.L., Bogoyavleyskaya D.B., Joukova E.S. Intellectual and Motivational Components in the Longitudinal Study of Giftedness. *Problemy sovremennogo obrazovaniya = Problems of modern education*, 2021. 1. 47–61. DOI: 10.31862/2218-8711-2021-1-47-61 (In Russ., abstr. in Engl.)
6. Bogoyavleyskaya D.B. Method for studying intellectual activity. *Voprosy psichologii = Psychology issues*, 1971. 1. 144–146. ISSN: 0042–8841
7. Bogoyavleyskaya D.B. *Psihologiya tvorcheskih sposobnostej / Psihologicheskij in-t RAO*. Samara: Fedorov, 2009. 414 p. ISBN 978-5-393-00288-6



8. *Bogoyavlenskaya D.B., Artemenkov S.L., Joukova E.S.* Longitudinal Study on the Development of Giftedness. *Eksperimental'naâ psihologiâ = Experimental Psychology (Russia)*, 2021. Vol. 14, no. 3, pp. 122–137. DOI: 10.17759/exppsy.2021140309. (In Russ., abstr. in Engl.)
9. *Bogoyavlenskaya D.B., Joukova E.S., Artemenkov S.L.* Characteristics of the Cognitive Activity of Children of Senior Preschool Age in Different Time Periods. *Mir psihologii = World of Psychology*, 2023, 2, 190–197. DOI: 10.51944/20738528\_2023\_2\_190
10. *Vuchichevich B.* Vozrastnye i individual'nye razlichiya v intellektual'nom razvitii mladshih shkol'nikov pri vypolnenii zadaniy SPM [Elektronnyj resurs]. *Psihologo-pedagogicheskie issledovaniya*. 2022. 14(1), 95–110. DOI: 10.17759/psyedu.2022140107
11. *Davydova YU.A., Ptuha M.V.* Individual'nye osobennosti neverbal'nogo intellekta u mladshih shkol'nikov. *Vestnik KRSU*. 2013. 13(3). 94–98.
12. *Joukova E.S., Artemenkov S.L., Bogoyavlenskaya D.B.* Study of intellectual activity in primary school and adolescence. *Modelirovanie i analiz dannikh = Modelling and Data Analysis*, 2019. 1. 11–29. (In Russ., abstr. in Engl.)
13. *Markovskie modeli v zadachah diagnostiki i prognozirovaniya: Uchebnoe posobie / Pod red. L.S. Kuravskogo.* Izdanie vtoroje, dopolnennoe. M.: Izd-vo MGPPU, 2017. 204 p. URL: <https://psychlib.ru/inc/absid.php?absid=356006>.
14. *Mitina O.V.* Matematicheskie metody v psihologii: Praktikum / O.V. Mitina. M.: Aspekt Press, 2009. 238 с.
15. *Bogoyavlenskaya D., Joukova E., Artemenkov S.* Longitudinal Study Of The Creative Abilities // *The European Proceedings of Social & Behavioural Sciences (EpSBS)*. 2018. № 14, pp. 125–131. DOI: <https://dx.doi.org/10.15405/epsbs.2018.11.02.14>.
16. *Carpenter PA, Just MA, Shell P.* What one intelligence test measures: a theoretical account of the processing in the Raven Progressive Matrices Test. *Psychological Review*. 1990. 97. 404–431. DOI: 10.1037/0033-295X.97.3.404.
17. *Epskamp S., Fried E.I.* A tutorial on regularized partial correlation networks. *Psychological Methods*. 2018. 23(4), 617–634. <https://doi.org/10.1037/met0000167>
18. *Joukova, E.S., Artemenkov, S.L., Bogoyavlenskaya, D.B.* The Formation of Giftedness and Intelligence at School Age. *New Ideas in Child and Educational Psychology*. 2022. 1–2(2), 80–92. doi: 10.11621/nicep.2022.0205. <https://nicepj.ru/articles/article/1853/>
19. *Joukova E.S., Bogoyavlenskaya D.B., Artemenkov S.L.* The Main Characteristics of the Intellectual and Personal Development of Today's Primary Schoolchildren. *New Ideas in Child and Educational Psychology*. 2023. 1–2(4), 48–67. DOI: 10.11621/nicep.2023.0403

Получена 14.02.2024

Принята в печать 28.02.2024

Received 14.02.2024

Accepted 28.02.2024

## The Role of Parasocial Relationships in Digital Learning: an Exploratory Case Study

***Kseniia S. Kharitonova\****

University of Houston, Houston, TX, USA  
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-3579-9815>  
e-mail: [kskharit@cougarnet.uh.edu](mailto:kskharit@cougarnet.uh.edu)

***Marina A. Zhukova\*\****

Sirius University of Science and Technology, Federal territory “Sirius”, Russia  
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-3069-570X>  
e-mail: [zhukova.ma@talantiuspeh.ru](mailto:zhukova.ma@talantiuspeh.ru)

***Iliia V. Markov\*\*\****

University of Houston, Houston, TX, USA  
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-1639-7968>  
e-mail: [imarkov@cougarnet.uh.edu](mailto:imarkov@cougarnet.uh.edu)

***Melissa B. Razo\*\*\*\****

University of Houston, Houston, TX, USA  
e-mail: [melissabethrazo@gmail.com](mailto:melissabethrazo@gmail.com)

***Katelynn Le\*\*\*\*\****

University of Texas at San Antonio, San Antonio, TX, USA  
ORCID: <https://orcid.org/0009-0002-0537-5699>  
e-mail: [Katelynnle00@gmail.com](mailto:Katelynnle00@gmail.com)

***Syed Ayaz\*\*\*\*\****

University of Houston, Houston, TX, USA  
e-mail: [shahzeb98@gmail.com](mailto:shahzeb98@gmail.com)

***Joshua Ogbomo\*\*\*\*\****

University of Houston, Houston, TX, USA  
e-mail: [joshuaogbomo@gmail.com](mailto:joshuaogbomo@gmail.com)

***Jessica L. Garcia\*\*\*\*\****

University of Houston, Houston, TX, USA  
ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-1905-3658>  
e-mail: [jessica.garcia@times.uh.edu](mailto:jessica.garcia@times.uh.edu)

***Hechmi Kilani\*\*\*\*\****

University of Houston, Houston, TX, USA  
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-2424-2165>  
e-mail: [Hechmi.kilani@times.uh.edu](mailto:Hechmi.kilani@times.uh.edu)



**Elena L. Grigorenko\*\*\*\*\***

Sirius University of Science and Technology, Federal territory “Sirius”, Russia

Moscow State University of Psychology and Education, Moscow, Russia

University of Houston, Houston, TX, USA

Baylor College of Medicine, Houston, TX, USA

Yale University, New Haven, CT, USA

ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-9646-4181>

e-mail: [Elena.grigorenko@times.uh.edu](mailto:Elena.grigorenko@times.uh.edu)

Social media has become integral to education and learning because it provides a platform for access to information and resources beyond traditional classroom settings, enabling students to expand their knowledge and skills in a more interactive and personalized manner. The relationships that are formed with on-screen characters or personas (parasocial relationships) can improve understanding of the material and engagement with media content. The current study aimed to investigate the impact of parasocial relationships on a child’s learning ability and test performance. The experiment, conducted as an exploratory case study with a typically developing 10-year-old child, included a parasocial condition with prior exposure to personal TikTok content of some educational video creators and other creators presented as novel (control); control conditions were further split into visible and non-visible video presenters. Performance was assessed using tests specialized by the subject and knowledge category, and an interview on the parasocial relationship was administered. The findings demonstrate that performance correlated with the presenter ratings obtained through the interview and not with the amount of previous exposure to the content created by the presenter.

**Keywords:** parasocial relationship, parasocial interaction, education, learning, TikTok.

**For citation:**

Kharitonova K.S., Zhukova M.A., Markov I.V., Razo M.B., Le K., Ayaz S., Ogbomo J., Garcia J.L., Kilani H., Grigorenko E.L. The Role of Parasocial Relationships in Digital Learning: an Exploratory Case Study. *Modelirovanie i analiz dannykh = Modelling and Data Analysis*, 2024. Vol. 14, no. 1, pp. 67–88. DOI: <https://doi.org/10.17759/mda.2024140105> (In Engl., abstr. in Russ.).

**Funding.** The preparation of this manuscript was supported by funding from the Institutes of Education Sciences through award R305A160402 (PI: Elena L. Grigorenko). Grantees undertaking such projects are encouraged to freely express their professional judgment. This article, therefore, does not necessarily represent the position or policies of the IES, and no official endorsement should be inferred.

\***Kseniia K. Kharitonova**, Graduate Research Assistant, Genetic and Neurobehavioral Systems: Interdisciplinary Studies, University of Houston, Houston, TX, USA, ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-3579-9815>, e-mail: [kskharit@cougarnet.uh.edu](mailto:kskharit@cougarnet.uh.edu)



\*\***Marina A. Zhukova**, PhD in Psychology, Senior Research Fellow; Center for Cognitive Sciences, Sirius University of Science and Technology, Federal territory “Sirius”, Russia, ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-3069-570X>, e-mail: [zhukova.ma@talantiuspeh.ru](mailto:zhukova.ma@talantiuspeh.ru)

\*\*\***Iliia V. Markov**, Graduate Research Assistant, Genetic and Neurobehavioral Systems: Interdisciplinary Studies, University of Houston, Houston, TX, USA, ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-1639-7968>, e-mail: [imarkov@cougarnet.uh.edu](mailto:imarkov@cougarnet.uh.edu)

\*\*\*\***Melissa B. Razo**, University of Houston, Houston, USA, e-mail: [melissabethrazo@gmail.com](mailto:melissabethrazo@gmail.com)

\*\*\*\*\***Katelynn Le**, Graduate Student, University of Texas at San Antonio, San Antonio, TX, USA, ORCID: <https://orcid.org/0009-0002-0537-5699>, e-mail: [Katelynnttle00@gmail.com](mailto:Katelynnttle00@gmail.com)

\*\*\*\*\***Syed Ayaz**, University of Houston, Houston, USA, e-mail: [shahzeb98@gmail.com](mailto:shahzeb98@gmail.com)

\*\*\*\*\***Joshua Ogbomo**, University of Houston, Houston, USA, e-mail: [joshuaogbomo@gmail.com](mailto:joshuaogbomo@gmail.com)

\*\*\*\*\***Jessica L. Garcia**, Graduate Research Assistant, Genetic and Neurobehavioral Systems: Interdisciplinary Studies, University of Houston, Houston, TX, USA, ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-1905-3658>, e-mail: [jessica.garcia@times.uh.edu](mailto:jessica.garcia@times.uh.edu)

\*\*\*\*\***Hechmi Kilani**, Graduate Research Assistant, Genetic and Neurobehavioral Systems: Interdisciplinary Studies, University of Houston, Houston, TX, USA, ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-2424-2165>, e-mail: [hechmi.kilani@times.uh.edu](mailto:hechmi.kilani@times.uh.edu)

\*\*\*\*\***Elena L. Grigorenko**, PhD, Scientific director, Center for Cognitive Sciences, Sirius University of Science and Technology, Federal territory “Sirius”, Russia; Leading scientist, Moscow State University of Psychology and Education, Moscow, Russia; Hugh Roy and Lillie Cranz Cullen Distinguished Professor of Psychology, University of Houston, Houston, TX, USA; Professor, Baylor College of Medicine, Houston, TX, USA; Professor, Yale University, New Haven, CT, USA, ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-9646-4181>, e-mail: [elena.grigorenko@times.uh.edu](mailto:elena.grigorenko@times.uh.edu)

## 1. INTRODUCTION

Human beings often relate to onscreen media characters and form a one-sided relationship. The terms “parasocial relationship” (PSR) and “parasocial interaction” (PSI) were coined in the 1950s by Donald Horton and Richard Wohl to characterize this phenomenon. A striking example of the PSR was described by Horton and Wohl (1956): in the 1950s, performance of a radio persona resulted in thousands of love letters being sent to the radio studio. It was characterized as “symptomatic of fundamental social needs in human beings that had been brought to life by these new media” (Giles, 2010, p. 445).

PSR is defined as the “emotionally tinged, one-sided relationships individuals establish with onscreen characters” (Horton & Wohl, 1956). PSI, in its turn, is defined as “the interaction, characteristically, one-sided mediated form of social interaction between the audience and media characters, non-dialectical, controlled by the performer, and not susceptible to mutual development” (Horton & Wohl, 1956). The relationship is classified as PSR and not PSI when the interaction of media persona happens repeatedly (Horton & Wohl, 1956). PSR occurs over time which leads to a long-term relationship between the viewer and the media character (Liebers & Schramm, 2019). There is no clear cut-off point in defining how many interactions it takes to form a PSR. PSR entails a generalized emotional and cognitive



involvement with the character that can take place outside the context of any particular media exposure (Klimmt et al., 2006). PSI, on the contrary, restricts itself by only taking place during media reception between the audience and media character. PSR transcends this and can lead to long-term relationships between the media character and the audience (Liebers & Schramm, 2019).

Most studies concerning parasocial phenomena do not draw a clear distinction between the two concepts, using the terms PSI and PSR somewhat ambiguously and sometimes interchangeably (Dibble, Hartmann & Rosaen, 2016). This conflation is not only conceptual but also methodological, leading to some assessments of PSI/PSR evaluating the parasocial phenomenon in general and not making a clear distinction between the two concepts (e.g., PSI-Scale in Rubin et al., 1985) and others addressing only a single facet of the parasocial phenomenon (Hartmann & Goldhoorn, 2011). In the present article, we follow the distinction initially made by Horton and Wahl and further researched in the above-mentioned studies.

PSR can be found of numerous contrasting types, from friendship and romantic relationships to extreme worshiping or even negative relationships (Hartmann, 2017). Viewers who are exposed to any media character can develop generalized emotions and can be cognitively involved with that media character (Klimmt et al., 2006). PSR can create powerful emotional responses (Levy, 1979). If the relationship is already built, viewers can experience emotions similar to a real-life breakup (Eyal & Cohen, 2006). The most common way to assess PSR is the use of a Parasocial Interaction Scale (Rubin et al., 1985), which provides an indicator of viewers' relationship with the on-screen character (Tukachinsky, 2010). The PSI scale includes "theoretical constructs other than PSR, such as perceived realism, affinity, and identification" (Tukachinsky, 2010, p. 76).

Studies conducted on PSI/PSR focus on self-report evaluations, determining attractive features of media figures and classifications of PSI/PSR types. PSI is understood by many as a process that leads to PSR emergence and progression, and this is why most of the studies in this field focus initially on PSI. A number of studies on PSI have reported gender differences (Gleason et al., 2017; Tolbert & Drogos, 2019) in the choice of the media figure, imagined roles for those figures, and attractive traits. A certain role in PSI is played by social media engagement with personae (Bond, 2016; Tolbert & Drogos, 2019; Vonderohe, 2016). Attempts were made to determine the components of PSR, such as attachment, character personification, social realism (Brunick et al., 2016), and humanlike needs (Richards & Calvert, 2016), or explore possible mechanisms of PSR formation, such as relational maintenance through the investment model of interpersonal relationships (Eyal & Dailey, 2012).

Although one of the defining characteristics of PSR is the lack of reciprocity, multiple studies show that PSR affects various aspects of human life, such as media users' voting decisions (Centeno, 2010), political views (Wen & Cui, 2014), trust (Sherman-Morris, 2005) and even donation behavior (Lee et al., 2010). It was found that PSI/PSR can have a negative impact, including reduced self-esteem due to unrealistic body image (Eyal & Te'eni-Harari, 2013), media addiction (Grant et al., 1991), or unhealthy celebrity worship (McCutcheon et al., 2003). However, positive effects of engaging in PSI/PSR have also been discovered. Namely, PSI/PSR may yield or strengthen a sense of belonging (Derrick et al., 2009)



and aid those who experience fear of rejection (Derrick et al., 2019) or loneliness (Greenwood & Long, 2009).

Parents play an important role in PSR development of their children, and their perspective can be instrumental in understanding the phenomenon or, conversely, can illustrate a difference between parents' and children's perceptions. One of the topics being investigated from the perspective of the parent is PSR breakups. One study that included 2–8 y/o children found that boys were more likely than girls to have a favorite character of the opposite gender at a younger age. As boys and girls aged, they shifted towards favorite characters with more masculine/feminine traits, respectively, and the most commonly cited reasons for parasocial breakup were child maturation, the influence of other media characters, and habituation to the character (Bond & Calvert, 2014b). A different study states that 51% of children experienced PSR breakups (Aguilar et al., 2019) while also confirming the gender stereotyping of favorite characters. Parents' perspectives are also utilized in the creation of models and measures of PSR, such as in the study by Bond and Calvert (ibid). Parents of children ( $\leq 8$  y/o) completed an online questionnaire to measure their child's PSR along three dimensions: character personification, social realism, and attachment. The measure was then utilized as the endogenous variable in a path model predicting parental perceptions. The results suggest that parent encouragement ( $\beta = .16, p < .05$ ) and engagement with a replica of the character ( $\beta = .65, p < .001$ ) are directly related to the strength of parents' perceptions of PSR, while repeated media exposure is indirectly related to PSR through active interactions with the character (such as talking to a character and mimicking their movements;  $\beta = .21, p < .05$ ;  $\beta = .2, p < .05$  (Bond & Calvert, 2014a).

Because PSR and PSI can augment understanding of media content and enhance users' engagement with it (Liebers & Schramm, 2019), the research into the outcomes of these interactions presents pedagogical value. Studies of multimedia learning that focus on university students found that the frontal bodily addressing style with eye contact leads to stronger PSI, and the professional dress style can be beneficial for cognitive load reduction and parasocial process enhancement (Beege et al., 2019). Although an instructor is advised against using multiple social cues simultaneously if PSI is supplemented by visual learning materials (Pi et al., 2021), gestures significantly affect retention performance, and deictic gestures, in particular, enhance attention toward the lecturer (Beege et al., 2020).

Due to the oversaturation of technology, it is inevitable that children will learn via social media and interactive programs. Previous case studies on digital learning showed that emotions play an important role and specifically, confusion and attentiveness can predict gains in device proficiency (Zhukova et al., 2020). Similar results were obtained in a study by Khalaf and colleagues (2022) when they evaluated the effects of bouts of mind-wandering as a child played various digital game-based learning applications (apps) by examining the length of relevant affective and behavioral states, iPad manipulations, and social interaction. Results demonstrated that negative emotions (boredom, distraction, confusion) if coupled with displays of attentiveness and persistence, led to positive mind-wandering and positive learning outcomes, but coupled with frustration, same displays led to the opposite effect (Khalaf et al., 2022).



PSR/PSI may also influence the learning process. Several studies report PSI/PSR leading to an increase in performance on mathematical tasks. In one study, 21-month-old toddlers learned the seriation sequencing task better from a video when a more socially meaningful character demonstrated the task (Lauricella et al., 2011). In a similar study, personalized interactive media characters were found to increase toddlers' learning of seriation skills, while toddlers with stronger PSR learn the most content from video demonstrations by the characters (Howard Gola et al., 2013). Further research into this topic utilized personalized interactive media characters and found that toddlers learned significantly more from the personalized character. Children in the personalized condition also increased in parasocial, nurturing behaviors directed at the character during play sessions, and these scores were linked to better seriation performance (Calvert et al., 2014). One explanation of the above-described increase in performance may be that familiarity with an onscreen character may also decrease the working memory load, thereby enabling toddlers to focus on processing the task being portrayed in the video (Lauricella et al., 2011).

Total daily entertainment screen use time in 8- to 12-year-olds went up from 4 hours 36 minutes in 2015 to 5 hours 33 minutes in 2021 (Rideout et al., 2022), which indicates a strong likelihood that they will develop PSR with online personalities. While research highlights that children develop PSR while viewing media content, limited research was conducted on the interaction between PSR and learning outcomes. Additionally, limited accounts that are available to date utilize quasi-experimental correlational designs, leaving the question regarding the impact of PSI and PSR on learning open. The current study aimed to address this gap in the literature. By conducting a case study of a typically developing child, we aimed to investigate the impact of PSI and PSR on learning outcomes by looking at concept comprehension, memory retention, and ability to apply learned strategies. We hypothesized that the child's learning process and outcomes would be enhanced by developing a PSR with an educator whose lessons are presented on a social media.

## 2. METHODS

**Participant.** The case subject, Ryan, is a typically developing 10-year-old Caucasian male. He began his formal education in an English-speaking preschool at the age of 18 months; he also was the subject of two case studies at the age of 28 months (Khalaf et al., 2022; Zhukova et al., 2020).

**Study Design.** As there is a dearth of literature on the subject of parasocial relationship in learning, exploratory case-study approach was adapted for the present study to create a blueprint of a comprehensive investigation of parasocial effect on learning and to be scaled up to larger populations. TikTok was used as the study video platform. The choice was guided by the popularity of the platform among adolescents (Xu et al., 2019). The platform includes a wide variety of content presented in short videos (usually under 30 seconds long). Studies have provided evidence that users may be motivated to use TikTok to make social connections, communicate, and as an entertaining and informational medium (Omar & Dequan, 2020). We believe these characteristics make TikTok a likely platform to be chosen





for presenting educational content to school-aged children. Additionally, TikTok is used to post both entertaining and educational videos by the same presenters. The use of TikTok enabled us to present the participant with educational video content and entertaining, “personal” content created by the same educators to facilitate the formation of PSRs. Personal videos that were presented in the parasocial condition were devoid of educational content. In the control condition, the participant only watched educational videos. For example, one of Mrs. Kelly’s personal videos showed a reenactment of a scene from the movie *Toy Story*. It contained no educational content and simply showed her announcing “Andy’s coming” to the students, followed by several scenes of students lying in random positions as the toys in the movie did when Andy arrived.

Ryan viewed videos posted on TikTok by various educators. We did not contact the content creators as the content that was used for the study is openly available. Ryan was exposed to personal and educational videos of two presenters in the parasocial condition to facilitate the formation of PSR and to only educational videos of three other presenters in two control conditions: control visible (presenter clearly visible in the material) and control non-visible (presenter is anonymous). We selected accounts presenting science and math lessons as these subject areas allowed us to test the learning component objectively by coding the child’s answers as correct or incorrect. Additionally, our choice of specific creators was guided by the availability of personal and educational videos in the accounts.

For the science portion, we used two presenters from the SciShow channel (SciShow, n.d.): Savannah Geary (parasocial) and Alexis Dahl (control). Ryan watched 15 personal videos by Savannah Geary prior to starting with the educational content. The math channels used for the study included three presenters, two of whom were visible on the screen: (the\_mrskelly (n.d.), presented by Mrs. Kelly (parasocial), tabwesley (n.d.), presented by Tabatha Wesley (control visible), and the third only included the teacher’s voice (mathologist (n.d.), presented by an anonymous math teacher (control non-visible)) (Table 1). Most of the content presented in the videos was slightly above Ryan’s grade level to ensure novelty.

After viewing the videos of the presenters in the parasocial condition, Ryan was shown the educational videos for all five presenters and then tested on the material presented in the videos to determine how well he had learned it. The difficulty level of the videos was determined based on the grade level that matched the educational concepts; however, given that the materials were not experimentally created but sourced from the videos posted on TikTok, the investigators were limited by the available content. The presented educational material was reviewed by at least two investigators to ensure comparable difficulty levels across presenters. In case of disagreements, the consensus was reached through discussions among the members of the research team. After the testing, Ryan was interviewed by a researcher using questions intended to determine his subjective feelings toward the presenters. We hypothesized that the formation of a PSR with a presenter would enhance Ryan’s ability to learn from that presenter, and this would be evidenced by higher scores on tests that contained the material those presenters had taught.

The study was approved by the Institutional Review Board of the University of Houston, project identification code 16512–02 (Last renewal was received on February 8th, 2023, protocol is valid through February 7th, 2024).



**Procedure.** Over the course of three days, Ryan was shown a set of five personal videos by Savannah Geary (science teacher) and Mrs. Kelly (math teacher). Two researchers were virtually present during the viewing. Ryan was given the TikTok links to the videos by the researchers and allowed to watch them without further instruction at his own pace. Next, Ryan was invited to the lab for the experimental part of the study. Before presenting Ryan with the educational TikTok videos, three standardized tests were administered to assess his knowledge of math, science, and English (to ensure he was able to communicate in this language) and his cognitive ability.

After this, Ryan was shown a set of five science videos per educator presented by a familiar educator (Savannah Geary) and a novel educator (Alexis Dahl). Ryan was instructed to watch the videos and take notes about their content that he could later use during the test. The order of videos was randomized between the familiar and unfamiliar educators. Topics covered in the videos were the environment, nature, and animals. Although the topics presented by different educators were not identical, they were of a comparable difficulty level. The exact match of topics was constrained by ecological validity of the study. The video materials were produced and posted by professional educators, making the study reflective of real-life experiences of someone who might create a parasocial bond with a TikTok educator. After viewing the videos, a test and interview were conducted.

Table 1

**The overview of the educational and personal content included in the study**

	Brief description	Subject	Educational videos	Personal videos	N
Savannah Geary (Channel SciShow)	A female teacher explaining curious scientific facts (e.g., animals, environment) with the aid of pictures and video materials in the background. One of the presenters for the educational channel SciShow.	Science	n = 5	✓	15
Alexis Dahl (Channel SciShow)	A female presenter describing curious scientific facts (e.g., space, animals, environment) with the aid of animations and static images on the screen. One of the presenters for the educational channel SciShow.	Science	n = 5		
Mrs. Kelly (Channel the_mrskelly)	A female teacher demonstrating simple multiplication and fraction strategies on a white board with background music.	Math	n = 3	✓	15
Tabatha Wesley (wesleytabata)	A female teacher writing mathematical expressions (e.g., isolating variables, computing percentages) on a whiteboard with on-screen comments and background music.	Math	n = 3		
Math teacher (Channel mathologist)	A disembodied voice of a teacher explaining mathematical strategies verbally (multiplication, percentages), while they're demonstrated on a screen or a sheet of paper.	Math	n = 3		



After completing the science section of the study, the same procedure was repeated for the math educators. In this section, Ryan viewed three videos on the same concept by familiar (Mrs. Kelly) and non-familiar educators (Tabatha Wesley, Mathologist). The concepts introduced in the videos included percentages, dividing fractions, and isolating the variable. Each presenter demonstrated the same concept using slightly different strategies to solve problems. While watching the videos, Ryan was encouraged to take notes. After watching each video, he was given one replication question to control the level of understanding. After watching all the videos (n=9), Ryan was administered a test containing application problems for the learned concepts. After the testing, a final interview was conducted to evaluate the parasocial component of interactions with the presenters.

**Assessments.** Standardized tests were used to measure Ryan's cognitive ability as well as his knowledge and skills in several academic subject areas.

#### *Cognitive Processing Abilities*

The Kaufman Assessment Battery for Children 2nd edition (KABC-II) – This test is used to assess the cognitive ability of children between the ages of 3 and 18 and is designed to give an accurate measurement regardless of the child's language and culture of origin. It determines whether the child is below, above, or of average ability for their age.

#### *Academic Performance*

The Kaufman Test of Educational Achievement 3rd edition (KTEA-3; Kaufman & Kaufman, 2014). This test assesses reading comprehension, oral and written language ability, and fluency and skill in mathematics. This test gave us a baseline score for Ryan's math ability and an assurance that he could fully understand the oral and written materials used for the study.

The Woodcock-Johnson Tests of Achievement IV (WJ IV; Schrank et al., 2014) – Consisting of subject subtests, this assessment gives a measure of knowledge within the subject area tested. Ryan was tested in science, social studies, and humanities to give us a baseline score for his skill in the subject matter covered during the science portion of the experiment.

The science and math tests were designed to determine the conceptual knowledge accumulated by the participant by watching the educational videos. The post-science and math interviews sought to assess Ryan's perception of the effectiveness of the educators in explaining the material.

#### *Science section*

The science test consisted of 29 questions, including multiple choice and free response questions, drawn from the content shown in the videos. Multiple choice answers with 4 answer options were graded on a binary scale of 0 (incorrect answer) – 1 (correct answer). Free response questions were answered verbally; they were graded on a scale from 0 to 2 according to the coding rubric, which allowed for partial credit if the response was correct but incomplete.

#### *Math section*

The math test consisted of 27 free-response application questions drawn from the content shown in the videos. The answers to these questions were graded on a scale of 0 (incorrect answer) – 1 (correct answer). The participant was allowed to use any method of his choice to solve the problem.



### *Follow-up Interview*

An interview was conducted in which the participant was asked to report his interest, prior knowledge, and understanding of the presented concepts. He was asked to rate educators and rank how helpful he found the strategies in each video and how much he liked the presentation in each video.

The PSR interview was the final stage of the in-person testing and was used to assess the participant's attitudes toward the educators. In the interview, Ryan was asked 12 main questions, some of which also contained one or more follow-up questions, such as 'Why' to a yes/no question. The questions were of three different forms: (1) yes/no questions regarding his experiences with the presenters, e.g., "Did you feel like any of the teachers talked directly to you?"; (2) open-answer questions, e.g., "If you could describe Mrs. Kelly in a couple of words, how would you be able to describe her?"; and (3) rating scale questions of 0–10, with 10 being the highest, regarding specific characteristics of the presenters, e.g., "On a scale of 0–10, how interesting was [presenter]?" The interview questionnaire was based on a study that discovered several characteristics of PSIs that contribute to a child's formation of a PSR with a media personality (Bond & Calvert, 2014a).

## **3. RESULTS. FORMAL ASSESSMENTS**

### *Cognitive Processing Abilities*

The Kaufman Assessment Battery for Children-2nd Edition (KABC-II) was utilized to assess Ryan's cognitive processing abilities. On the Mental Processing Index (MPI), which provides an estimation of mental processing without a focus on language abilities and word knowledge, Ryan obtained a standard score of 97, which falls within the Average range of functioning.

### *Academic Performance*

KTEA-3 assessment yielded the following results: on measures of spelling and decoding ability, Ryan's performance fell in the Below Average range of ability. On measures of math problem-solving skills, sight word reading, and reading comprehension, Ryan performed in the Average range. On measures of reading fluency, Ryan's score fell within the High Average range of functioning.

Subtests from the Woodcock-Johnson Tests of Achievement IV (WJ IV) were also administered to assess Ryan's knowledge in the content areas of science, social studies, and humanities. His performance in these areas was equivalent to a child in the first grade, second grade, and kindergarten, respectively.

### *Overall performance and effect of presenter type*

The data was analyzed using fixed effects multiple linear regression model, including multiple predictor variables such as subject, question category, presenter, and parasocial scores. In regards to the subject, Ryan was significantly more successful in science questions than in math questions,  $z = 2.653$ ,  $p = 0.008$ .



No significant differences were found between the control and parasocial conditions in the science subject, with most correct answers being associated with the parasocial condition. In the math subject, there were significant differences between the control non-visible and parasocial conditions ( $z = 2.973$ ,  $p = 0.003$ ). Ryan's performance on problems associated with the parasocial condition was slightly lower than what was noted for the control visible condition, but the difference was not statistically significant ( $z = -0.237$ ,  $p = 0.8130$ ).

When asked to rate presenters based on how “interesting,” “informational,” and “cool” they are, Ryan considered the presenter for the control non-visible condition in math to be the top presenter for that subject, according to the cumulative score across all three evaluation categories. In science, the presenter with the highest cumulative score was in the parasocial condition. His perception of presenters' characteristics aligned with the percentage of correct answers given to the questions for each condition: Ryan answered 71.11% of questions for control non-visible in math and 73.33% for the parasocial condition in science correctly (Figure 1).

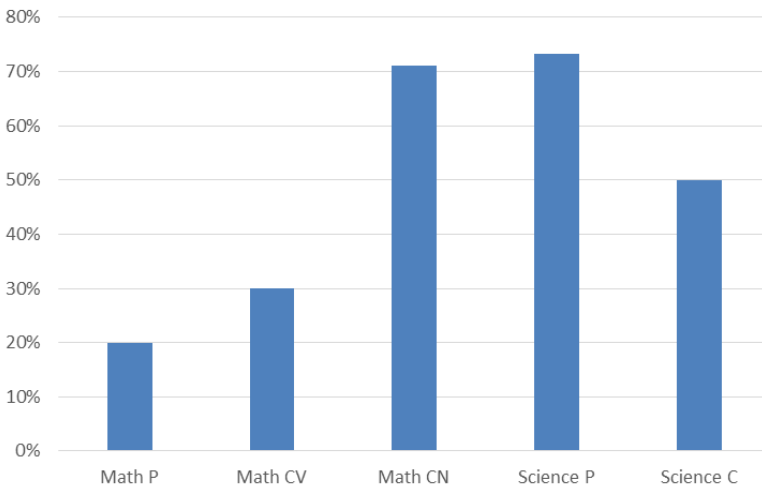


Figure 1. Percentage of correct answers per condition  
(P – parasocial, C – control, CN – control non-visible CV – control visible)

### Math performance

In math, subject categories were not significantly different in predicting the correctness of the responses. However, Ryan was not able to answer any questions in Isolating the Variable. His performance in Dividing Fractions and Percentages was comparable.

Most of the strategies offered in the videos were rated to be either “a bit helpful” or “very helpful.” Ryan rated video presentations and strategies in the control visible condition the lowest and also happened to perform low on the tasks that were based on these videos (30% of correct answers). The presenter in the control non-visible condition got the highest scores on helpfulness and engagement. Ryan answered corresponding questions better (71.11%



of questions were answered correctly), which demonstrated an alignment between Ryan's performance and his appreciation for the videos.

#### *Science performance*

Among science questions, no significant differences were found in terms of the percentage of correct answers across categories. Most of the correct answers were found in the Animals/Environment category, then Evolution and Anatomy, with the lowest number of correct answers found in the Space category.

During the parasocial interview, Ryan indicated that he knew nothing about the topics covered in the videos for this subject. While Ryan rated both conditions (control and parasocial) equally on engagement and understanding criteria, the parasocial condition was associated with a higher percentage of correct answers (73.33% in the parasocial condition and 50% in the control condition), although the difference was not statistically significant ( $z = -1.176$ ,  $p = 0.239$ ).

## 4. DISCUSSION

The goal of the current study was to examine whether the existence of the PSR increases a child's ability to learn from educators and strengthens his performance on the corresponding tests. Because PSRs can affect a person's behavior (e.g., voting decisions; Centeno, 2010), it was our hypothesis that a PSR formed by a child with an educator via an online medium might facilitate a child's ability to learn. A qualitative assay was conducted after the experiment to evaluate Ryan's attitude to educators and their content: how interesting, engaging, and clear the information presented in the videos was for him.

While we hypothesized that the child's learning process and outcomes would be enhanced by developing a PSR with an educator, the results from the multiple regression model did not align with this hypothesis. The current literature regarding PSRs developed between children and on-screen presenters suggests that a child is more capable of learning and applying new information from presenters with whom they have formed this type of attachment (Lauricella et al., 2011; Howard Gola et al., 2013; Calvert et al., 2014). The findings of our case study did not entirely support this. Ryan's efficiency within subject areas was not uniformly slanted towards the parasocial condition: while being the condition with the correct answers in science, in math, it was associated with the lowest score within the subject area. This may be explained by the fact that it remains uncertain whether or not a PSR was formed with a presenter, as there is not a clear cut-off point in defining how many PSIs it takes to form a PSR. Even if a PSR was established, it might not have influenced the outcome. Instead, other factors contributing to performance might have had a deciding influence on the outcome, e.g., increased cognitive load from the presence of a social component to the presentation.

More specifically, toddlers tested on the association between math learning and PSRs displayed increased learning in a condition where they were able to develop a PSR with the math teacher. It was thought that such an association reduced cognitive load and allowed the toddlers to focus on the academic material (Lauricella et al., 2011). In Ryan's case, he achieved the highest math score in the control non-visible condition, the condition



in which Ryan had not been previously exposed to personal videos with the presenter, and the teacher was not even visible on the screen, although Ryan could hear his voice. This may be the condition that reduced cognitive load the most, allowing him to focus on the academic material being presented.

As for science, Ryan received the highest score under the condition in which he was expected to develop a PSR with the presenter. The discrepancy between the science and math results may be connected to Ryan's knowledge of the subject domains prior to the experiment. While Ryan achieved an average score on math problem-solving skills, he received a score equivalent to the first-grade level in science content. Our testing with Ryan occurred in the summer between his fourth and fifth-grade years of school, indicating that he was below his grade level in his scientific knowledge. In this case, it may be that the PSR developed with the science presenter is what allowed Ryan to engage with the science material and by extension, to learn it well enough to achieve a higher score on the test.

The findings were unexpected and suggested that Ryan mostly succeeded on problems that were explained by the presenters whose delivery he liked the most, regardless of whether or not an opportunity to develop PSR was present. Ryan's performance did not correlate with the presenters he was exposed to the most, suggesting that PSRs might not be a deciding factor for success in learning. This correlation does not imply causation as we cannot definitively say whether most likable presenters did help him achieve higher scores or if Ryan's assessment of presenters was a reflection of his frustration caused by the corresponding questions.

The findings of this study have to be seen in light of some limitations that can be addressed in further research. The primary limitation to the generalization of these results is that the volume of data and sample size are restricted due to the nature of the current study. External validity can be strengthened by replicating the experiment across wider populations and diversifying subject areas. The open-source materials on the topic that were available did not allow for an equal number of control conditions for both subjects. If the volume of suitable educational material keeps increasing, it will be possible to equalize the conditions of the current study, adding a control non-visible condition for the science subject.

A limitation of utilizing TikTok is that the duration of the videos—approximately 30 seconds per video—could have presented a confounding variable, as Ryan potentially did not have enough time to form a concrete PSR or learn a new concept if the topic was novel to him. As it was mentioned above, there is no general agreement on how many interactions it takes to form a PSR. Consequently, Ryan's PSR with a presenter could be weaker than if he was exposed to more of their content over an extended period of time.

The tasks differed based on the subject, being mostly multiple-choice or open-ended questions for science, but presented in the form of problems for the math subject domain. Misalignment of task presentation and effort required to solve between the two forms of assessment might have affected Ryan's performance.

The measures utilized in qualitative analysis can be improved to avoid converging variables as a result of similar ratings for most of the presenters. The findings of the present study may be used to inform future PSR experiments while standardizing a set of conditions, measures, and video materials for both subjects, as well as collecting a larger volume of data



and using videos of greater length to emphasize the effect of the PSR with the presenter. We encourage building on the present study foundation to establish a large-scale investigation of parasocial effects on learning. Developing a measure and a scale to evaluate PSI and PSR formation would be an important milestone for the field, as it will allow us to more confidently state the existence of PSR in any particular case. Future research into PSR in the context of educational content is paramount due to the widespread adoption of online educational techniques in recent years. PSR as a phenomenon is ever present, and its influence on learning needs to be accounted for in educational program design.

### *References*

1. Aguiar N.R., Richards M.N., Bond B.J., Putnam M.M., & Calvert S.L. Children's parasocial breakups with media characters from the perspective of the parent. *Imagination, Cognition and Personality*, 2019. Vol. 38, no. 3, pp. 193–220. DOI: 10.1177/0276236618809902
2. Beege M., Nebel S., Schneider S. & Rey G.D. Social entities in educational videos: Combining the effects of addressing and professionalism. *Computers in Human Behavior*, 2019. Vol. 93, pp. 40–52. DOI: 10.1016/J.CHB.2018.11.051
3. Beege M., Ninaus M., Schneider S., Nebel S., Schlemmel J., Weidenmüller J., Moeller K., & Rey G.D. Investigating the effects of beat and deictic gestures of a lecturer in educational videos. *Computers & Education*, 2020. Vol. 156, pp. 1–14. DOI:10.1016/J.COMPEDU.2020.103955
4. Bond B.J. Following your “friend”: Social media and the strength of adolescents' parasocial relationships with media personae. *Cyberpsychology, Behavior, and Social Networking*, 2016. Vol. 19, no. 11, pp. 656–660.
5. Bond B.J., & Calvert S.L. A model and measure of US parents' perceptions of young children's parasocial relationships. *Journal of Children and Media*, 2014. Vol. 8, no. 3, pp. 286–304. DOI: 10.1080/17482798.2014.890948
6. Bond B.J., & Calvert S.L. Parasocial breakup among young children in the United States. *Journal of Children and Media*, 2014. Vol. 8, no. 4, pp. 474–490. DOI: 10.1080/17482798.2014.953559
7. Brunick K.L., Putnam M.M., McGarry L.E., Richards M.N., & Calvert S.L. Children's future parasocial relationships with media characters: The age of intelligent characters. *Journal of Children and Media*, 2014. Vol. 10, no. 2, pp. 181–190. DOI: 10.1080/17482798.2015.1127839
8. Calvert S.L., Richards M.N., & Kent C.C. Personalized interactive characters for toddlers' learning of seriation from a video presentation. *Journal of Applied Developmental Psychology*, 2014. Vol 35, no. 3, pp. 148–155. DOI: 10.1016/J.APPDEV.2014.03.004
9. Centeno D.D.G. Celebri-fication in Philippine Politics: Exploring the Relationship Between Celebrity Endorser's Parasociability and the Public's Voting Behavior. *Social Science Diliman*, 2010. Vol. 6, no. 1, pp. 66–85.
10. Council on Communications and Media. Media use in school-aged children and adolescents. *Pediatrics*, 2016. Vol. 138, no. 5, pp. 1–6. DOI: 10.1542/PEDS.2016-2592
11. Derrick J.L., Gabriel S., & Hugenberg K. Social surrogacy: How favored television programs provide the experience of belonging. *Journal of Experimental Social Psychology*, 2009. Vol. 45, no. 2, pp. 352–362. DOI: 10.1016/J.JESP.2008.12.003
12. Derrick J.L., Keefer L.A., & Troisi J.D. Who needs friends? Personality as a predictor of social surrogate use. *Personality and Individual Differences*, 2019. Vol. 138, pp. 349–354. DOI: 10.1016/J.PAID.2018.10.028
13. Dibble J.L., Hartmann T., & Rosaen S.F. Parasocial interaction and parasocial relationship: Conceptual clarification and a critical assessment of measures. *Human Communication Research*, 2016. Vol. 42, no. 1, pp. 21–44. DOI: 10.1111/HCRE.12063





14. Eyal K., & Cohen J. When good friends say goodbye: A parasocial breakup study. *Journal of Broadcasting & Electronic Media*, 2006. Vol. 50, no. 3, pp. 502–523. DOI: 10.1207/S15506878JOBEM5003\_9
15. Eyal K., & Dailey R.M. Examining relational maintenance in parasocial relationships. *Mass Communication and Society*, 2012. Vol. 15, no. 5, pp. 758–781. DOI: 10.1080/15205436.2011.616276
16. Eyal K., & Te'eni-Harari T. Explaining the relationship between media exposure and early adolescents' body image perceptions. *Journal of Media Psychology – Theories, Methods, and Applications*, 2013. Vol. 25, pp. 129–141.
17. Giles D. Parasocial Relationships. In J. Eder, F. Jannidis & R. Schneider (Ed.), *Characters in Fictional Worlds: Understanding Imaginary Beings in Literature, Film, and Other Media*, 2010. pp. 442–458. Berlin, New York: De Gruyter.
18. Gleason T., Theran S., & Newberg E. Parasocial Interactions and Relationships in Early Adolescence, *Frontiers in Psychology*, 2017. Vol. 8 DOI: 10.3389/FPSYG.2017.00255
19. Grant A.E., Guthrie K.K., & Ball-Rokeach S.J. Television shopping: A media system dependency perspective. *Communication Research*, 1991. Vol. 18, no. 6, pp. 773–798. DOI: 10.1177/009365091018006004
20. Greenwood D.N., & Long C.R. Psychological predictors of media involvement: Solitude experiences and the need to belong. *Communication Research*, 2009. Vol. 36, no. 5, pp. 637–654. DOI: 10.1177/0093650209338906
21. Hartmann, T. Parasocial interaction, parasocial relationships, and well-being. In L. Reinecke & M.B. Oliver (Eds.), *The Routledge handbook of media use and well-being: International perspectives on theory and research on positive media effects*, 2017. Routledge/Taylor & Francis Group, pp. 131–144.
22. Horton D., & Richard Wohl R. Mass communication and parasocial interaction: Observations on intimacy at a distance. *Psychiatry*, 1956. Vol. 19, no. 3, pp. 215–229. DOI:10.1080/00332747.1956.11023049
23. Howard Gola A.A., Richards M.N., Lauricella A.R., & Calvert S.L. Building meaningful parasocial relationships between toddlers and media characters to teach early mathematical skills. *Media Psychology*, 2013. Vol. 16, no. 4, pp. 390–411. DOI: 10.1080/15213269.2013.783774
24. Kaufman A.S., & Kaufman N.L. *Kaufman Test of Educational Achievement, Third Edition*, 2014. Bloomington, MN: NCS Pearson
25. Khalaf S., Kilani H., Razo M.B., & Grigorenko E.L. Bored, Distracted, and Confused: Emotions That Promote Creativity and Learning in a 28-Month-Old Child Using an iPad. *Journal of Intelligence*, 2022. Vol. 10, no. 4, pp. 118. DOI: 10.3390/JINTELLIGENCE10040118
26. Klimmt C., Hartmann T., & Schramm H. Parasocial interactions and relationships. In J. Bryant & P. Vorderer (Eds.), *Psychology of entertainment*, 2006. Lawrence Erlbaum Associates Publishers, pp. 291–313.
27. Lauricella A.R., Gola A.A. H., & Calvert S.L. Toddlers' learning from socially meaningful video characters. *Media Psychology*, 2011. Vol. 14, no. 2, pp. 216–232. DOI: 10.1080/15213269.2011.573465
28. Lee B.K., Park H.S., Choi M.-I., & Kim C.S. Promoting Organ Donation Through an Entertainment – Education TV Program in Korea: Open Your Eyes. *Asia Pacific Journal of Public Health*, 2010. Vol. 22, no. 1, pp. 89–97.
29. Levy M.R. Watching TV news as para-social interaction. *Journal of Broadcasting & Electronic Media*, 1979. Vol. 23, no. 1, pp. 69–80. DOI: 10.1080/08838157909363919
30. Liebers N., & Schramm H. Parasocial interactions and relationships with media characters—An inventory of 60 years of research. *Communication Research Trends*, 2019. Vol. 38, no. 2, pp. 4–31.
31. Math Teacher [@mathologist]. (n.d.). [TikTok profile]. TikTok. Retrieved November 7, 2022, from <https://www.tiktok.com/@mathologist>



32. McCutcheon L.E., Ashe D.D., Houran J., & Maltby J. A cognitive profile of individuals who tend to worship celebrities. *The Journal of Psychology*, 2003. Vol. 137, no. 4, pp. 309–322. DOI: 10.1080/00223980309600616
33. Mrs. Kelly [@the\_mrskelly]. (n.d.). [TikTok profile]. TikTok. Retrieved November 7, 2022, from [https://www.tiktok.com/@the\\_mrskelly](https://www.tiktok.com/@the_mrskelly)
34. Mrs. Tab Wesley [@tabwesley]. (n.d.). [TikTok profile]. TikTok. Retrieved November 7, 2022, from <https://www.tiktok.com/@tabwesley>
35. Omar B., & Dequan W. Watch, share or create: The influence of personality traits and user motivation on TikTok mobile video usage. *International Journal of Interactive Mobile Technologies (IJIM)*, 2020. Vol. 14, no. 4, pp. 121–137. DOI: 10.3991/IJIM.V14I04.12429
36. Pi Z., Zhang Y., Zhu F., Chen L., Guo X., & Yang J. The mutual influence of an instructor’s eye gaze and facial expression in video lectures. *Interactive Learning Environments*, 2021. Vol. 31, no. 6, pp. 3664–3681. DOI: 10.1080/10494820.2021.1940213
37. Richards M.N., & Calvert S.L. Parent versus child report of young children’s parasocial relationships in the United States. *Journal of Children and Media*, 2016. Vol. 10, no. 4, pp. 462–480. DOI: 10.1080/17482798.2016.1157502
38. Rideout V., Peebles A., Mann S., & Robb M.B. *Common Sense census: Media use by tweens and teens*, 2022. San Francisco, CA: Common Sense.
39. Rubin A.M., Perse E.M., & Powell R.A. Loneliness, parasocial interaction, and local television news viewing. *Human communication research*, 1985. Vol. 12, no. 2, pp. 155–180. DOI: 10.1111/J.1468-2958.1985.TB00071.X
40. Schrank F.A., McGrew K.S., & Mather N. *Woodcock-Johnson Tests of Cognitive Abilities*, Fourth Edition. 2014 Rolling Meadows, IL: Riverside Publishing.
41. SciShow [@scishow]. (n.d.). [TikTok profile]. TikTok. Retrieved November 7, 2022, from <https://www.tiktok.com/@scishow>
42. Sherman-Morris K. Tornadoes, television and trust – A closer look at the influence of the local weathercaster during severe weather. *Global Environmental Change Part B: Environmental Hazards*, 2005. Vol. 6, no. 4, pp. 201–210. DOI: 10.1016/J.HAZARDS.2006.10.002
43. Tolbert A.N., & Drogos K.L. Tweens’ wishful identification and parasocial relationships with YouTubers. *Frontiers in Psychology*, 2019. Vol. 10, 2781. DOI: 10.3389/FPSYG.2019.02781
44. Tukachinsky R.H. Para-romantic love and para-friendships: Development and assessment of a multiple-parasocial relationships scale. *American Journal of Media Psychology*, 2010. Vol. 3, no. 1/2, pp. 73–94.
45. Vonderohe B.M. Twitter’s role in the disclosure of parasocial relationships. *UW-L Journal of Undergraduate Research*, 2016. Vol. 19, pp. 1–15.
46. Wen N., & Cui D. Effects of celebrity involvement on young people’s political and civic engagement. *Chinese Journal of Communication*, 2014. Vol. 7, no. 4, pp. 409–428. DOI: 10.1080/17544750.2014.953964
47. Xu L., Yan X., & Zhang Z. Research on the causes of the “Tik Tok” app becoming popular and the existing problems. *Journal of advanced management science*, 2019. Vol. 7, no. 2. DOI: 10.18178/JOAMS.7.2.59-63
48. Zhukova M., Kilani H., Garcia J.L., Tan M., Parell P.D., Hein S., & Grigorenko E.L. How Do Toddlers Experience Digital Media? A Case Study of a 28-Month Old Child Learning to Use iPad. *Modelling and Data Analysis*, 2020. Vol. 10, no. 3 pp. 5–23. <https://doi.org/10.17759/MDA.2020100301>



## Парасоциальные отношения в цифровом обучении: анализ экспериментального случая

### ***Харитонов К.С.\****

Хьюстонский университет, г. Хьюстон, США  
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-3579-9815>  
e-mail: kskharit@cougarnet.uh.edu

### ***Жукова М.А.\*\****

Научно-технологический университет «Сириус»  
Федеральная территория «Сириус»  
г. Москва, Российская Федерация  
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-3069-570X>  
e-mail: zhukova.ma@talantiuspeh.ru

### ***Марков И.В.\*\*\****

Хьюстонский университет, г. Хьюстон, США  
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-1639-7968>  
e-mail: imarkov@cougarnet.uh.edu

### ***Разо М.Б.\*\*\*\****

Хьюстонский университет, г. Хьюстон, США  
e-mail: melissabethrazo@gmail.com

### ***Кейтлинн Ле\*\*\*\*\****

Техасский университет в Сан-Антонио, г. Сан-Антонио, США  
ORCID: <https://orcid.org/0009-0002-0537-5699>  
e-mail: Katelynntle00@gmail.com

### ***Саид Аяз\*\*\*\*\****

Хьюстонский университет, г. Хьюстон, США  
e-mail: shahzeb98@gmail.com

### ***Джошуа Огбомо\*\*\*\*\****

Хьюстонский университет, г. Хьюстон, США  
e-mail: joshuaogbomo@gmail.com

### ***Гарсия Д.Л.\*\*\*\*\****

Хьюстонский университет, г. Хьюстон, США  
ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-1905-3658>  
e-mail: jessica.garcia@times.uh.edu

### ***Хеми Килани\*\*\*\*\****

Хьюстонский университет, г. Хьюстон, США  
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-2424-2165>  
e-mail: Hechmi.kilani@times.uh.edu



**Григоренко Е.Л. \*\*\*\*\***

Хьюстонский университет, г. Хьюстон, США

ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-9646-4181>

e-mail: [Elena.grigorenko@times.uh.edu](mailto:Elena.grigorenko@times.uh.edu)

Социальные сети стали неотъемлемой частью образования и обучения, поскольку они предоставляют платформу для доступа к информации и ресурсам за пределами традиционного обучающего контекста, позволяя обучающимся расширять свои знания и навыки более интерактивным и персонализированным способом. Отношения, которые формируются с персонажами или персонами на экране (парасоциальные отношения), могут улучшить понимание материала и взаимодействие с медийным контентом. Цель текущего исследования заключалась в изучении влияния парасоциальных отношений на усвоение учебного материала. Анализ случая типично развивающегося 10-летнего ребенка включал в себя (1) экспериментальное условие с формированием парасоциальных отношений с помощью предварительного ознакомления с персонализированными видео образовательных Tik-Tok блогеров и (2) контрольное условие, в рамках которого участник не смотрел такие видео. Видео содержали академический контент, связанный с двумя дисциплинами: математикой и естественными науками. Контрольное условие было дополнительно разделено на два типа видео: с ведущим в кадре или только с закадровым голосом. Качество усвоения материала оценивалось с помощью тестов, специализированных по предмету и категории знаний; формирование парасоциальных отношений было проанализировано при помощи интервью. Исследование показало, что результаты тестов коррелировали с парасоциальными рейтингами блогеров, а не с объемом взаимодействия с личными видео блогеров.

**Ключевые слова:** парасоциальные отношения, парасоциальное взаимодействие, образование, обучение, TikTok.

#### **Для цитаты:**

Харитонова К.С., Жукова М.А., Марков И.В., Разо М.Б., Ле К., Аяз С., Огбомо Д., Гарсия Д.Л., Килани Х., Григоренко Е.Л. Организационная модель психосоциального сопровождения замещающей семьи // Моделирование и анализ данных. 2024. Том 14. № 1. С. 67–88. DOI: <https://doi.org/10.17759/mda.2024140105>

**Финансирование.** Подготовка данной статьи была поддержана Институтом педагогических наук (Institutes of Education Sciences) R305A160402 (ведущий исследователь: Елена Л. Григоренко). Грантополучателям, осуществляющим такие проекты, рекомендуется свободно выражать свое профессиональное мнение. Таким образом, статья не обязательно отражает позицию или политику IES.

**\*Ксения Сергеевна Харитоновна**, Ассистент-исследователь Лаборатории междисциплинарных исследований генетики и нейроповеденческих систем; Хьюстонский университет, г. Хьюстон, Техас, США, ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-3579-9815>, e-mail: [kskharit@cougarnet.uh.edu](mailto:kskharit@cougarnet.uh.edu)



**\*\*Марина Андреевна Жукова**, Кандидат психологических наук, Старший научный сотрудник; Научный центр когнитивных исследований, Научно-технологический университет «Сириус», Федеральная территория «Сириус», г. Москва, Россия, ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-3069-570X>, e-mail: [zhukova.ma@talantiuspeh.ru](mailto:zhukova.ma@talantiuspeh.ru)

**\*\*\*Илья Васильевич Марков**, Ассистент-исследователь Лаборатории междисциплинарных исследований генетики и нейроповеденческих систем; Хьюстонский университет, г. Хьюстон, Техас, США, ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-1639-7968>, e-mail: [imarkov@cougarnet.uh.edu](mailto:imarkov@cougarnet.uh.edu)

**\*\*\*\*Мелисса Бет Рazo**, Хьюстонский университет, Хьюстон, г. Техас, США, e-mail: [melissabethrazo@gmail.com](mailto:melissabethrazo@gmail.com)

**\*\*\*\*\*Кейтлинн Ле**, студент магистратуры, Техасский университет в Сан-Антонио, г. Сан-Антонио, США, ORCID: <https://orcid.org/0009-0002-0537-5699>, e-mail: [Katelynntle00@gmail.com](mailto:Katelynntle00@gmail.com)

**\*\*\*\*\*Саид Аяз**, Хьюстонский университет, Хьюстон, г. Техас, США, e-mail: [shahzeb98@gmail.com](mailto:shahzeb98@gmail.com)

**\*\*\*\*\*Джошуа Огбомo**, Хьюстонский университет, г. Хьюстон, США, e-mail: [joshuaogbomo@gmail.com](mailto:joshuaogbomo@gmail.com)

**\*\*\*\*\*Джессика ЛиЭнн Гарсия**, Ассистент-исследователь Лаборатории междисциплинарных исследований генетики и нейроповеденческих систем; Хьюстонский университет, г. Хьюстон, США, ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-1905-3658>, e-mail: [jessica.garcia@times.uh.edu](mailto:jessica.garcia@times.uh.edu)

**\*\*\*\*\*Хешми Килани**, Ассистент-исследователь Лаборатории междисциплинарных исследований генетики и нейроповеденческих систем; Хьюстонский университет, Хьюстон, Техас, США, ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-2424-2165>, e-mail: [hechmi.kilani@times.uh.edu](mailto:hechmi.kilani@times.uh.edu)

**\*\*\*\*\*Елена Леонидовна Григоренко**, доктор психологических наук, научный руководитель, Научный Центр Когнитивных Исследований, НТУ Сириус, Россия; ведущий научный сотрудник, Московский Государственный Психолого-Педагогический Университет, г. Москва, Россия; заслуженный профессор психологии Хью Рой и Лилли Кранц Каллен, Хьюстонский университет, Хьюстон, Техас, США; профессор, Медицинский колледж Бейлора, г. Хьюстон, Техас, США; профессор, Йельский университет, г. Нью-Хейвен, Коннектикут, США, ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-9646-4181>, e-mail: [elena.grigorenko@times.uh.edu](mailto:elena.grigorenko@times.uh.edu)

### *Литература*

1. Aguiar N.R., Richards M.N., Bond B.J., Putnam M.M., & Calvert S.L. Children's parasocial breakups with media characters from the perspective of the parent. *Imagination, Cognition and Personality*, 2019. Vol. 38, no. 3, pp. 193–220. DOI: 10.1177/0276236618809902
2. Beege M., Nebel S., Schneider S. & Rey G.D. Social entities in educational videos: Combining the effects of addressing and professionalism. *Computers in Human Behavior*, 2019. Vol. 93, pp. 40–52. DOI: 10.1016/J.CHB.2018.11.051
3. Beege M., Ninaus M., Schneider S., Nebel S., Schlemmel J., Weidenmüller J., Moeller K., & Rey G.D. Investigating the effects of beat and deictic gestures of a lecturer in educational videos. *Computers & Education*, 2020. Vol. 156, pp. 1–14. DOI:10.1016/J.COMPEDU.2020.103955
4. Bond B.J. Following your “friend”: Social media and the strength of adolescents' parasocial relationships with media personae. *Cyberpsychology, Behavior, and Social Networking*, 2016. Vol. 19, no. 11, pp. 656–660.
5. Bond B.J., & Calvert S.L. A model and measure of US parents' perceptions of young children's parasocial relationships. *Journal of Children and Media*, 2014. Vol. 8, no. 3, pp. 286–304. DOI: 10.1080/17482798.2014.890948



6. Bond B.J., & Calvert S.L. Parasocial breakup among young children in the United States. *Journal of Children and Media*, 2014. Vol. 8, no. 4, pp. 474–490. DOI: 10.1080/17482798.2014.953559
7. Brunick K.L., Putnam M.M., McGarry L.E., Richards M.N., & Calvert S.L. Children’s future parasocial relationships with media characters: The age of intelligent characters. *Journal of Children and Media*, 2014. Vol. 10, no. 2, pp. 181–190. DOI: 10.1080/17482798.2015.1127839
8. Calvert S.L., Richards M.N., & Kent C.C. Personalized interactive characters for toddlers’ learning of seriation from a video presentation. *Journal of Applied Developmental Psychology*, 2014. Vol 35, no. 3, pp. 148–155. DOI: 10.1016/J.APPDEV.2014.03.004
9. Centeno D.D.G. Celebification in Philippine Politics: Exploring the Relationship Between Celebrity Endorser’s Parasociability and the Public’s Voting Behavior. *Social Science Diliman*, 2010. Vol. 6, no. 1, pp. 66–85.
10. Council on Communications and Media. Media use in school-aged children and adolescents. *Pediatrics*, 2016. Vol. 138, no. 5, pp. 1–6. DOI: 10.1542/PEDS.2016-2592
11. Derrick J.L., Gabriel S., & Hugenberg K. Social surrogacy: How favored television programs provide the experience of belonging. *Journal of Experimental Social Psychology*, 2009. Vol. 45, no. 2, pp. 352–362. DOI: 10.1016/J.JESP.2008.12.003
12. Derrick J.L., Keefer L.A., & Troisi J.D. Who needs friends? Personality as a predictor of social surrogate use. *Personality and Individual Differences*, 2019. Vol. 138, pp. 349–354. DOI: 10.1016/J.PAID.2018.10.028
13. Dibble J.L., Hartmann T., & Rosaen S.F. Parasocial interaction and parasocial relationship: Conceptual clarification and a critical assessment of measures. *Human Communication Research*, 2016. Vol. 42, no. 1, pp. 21–44. DOI: 10.1111/HCRE.12063
14. Eyal K., & Cohen J. When good friends say goodbye: A parasocial breakup study. *Journal of Broadcasting & Electronic Media*, 2006. Vol. 50, no. 3, pp. 502–523. DOI: 10.1207/S15506878JOBEM5003\_9
15. Eyal K., & Dailey R.M. Examining relational maintenance in parasocial relationships. *Mass Communication and Society*, 2012. Vol. 15, no. 5, pp. 758–781. DOI: 10.1080/15205436.2011.616276
16. Eyal K., & Te’eni-Harari T. Explaining the relationship between media exposure and early adolescents’ body image perceptions. *Journal of Media Psychology – Theories, Methods, and Applications*, 2013. Vol. 25, pp. 129–141.
17. Giles D. Parasocial Relationships. In J. Eder, F. Jannidis & R. Schneider (Ed.), *Characters in Fictional Worlds: Understanding Imaginary Beings in Literature, Film, and Other Media*, 2010. pp. 442–458. Berlin, New York: De Gruyter.
18. Gleason T., Theran S., & Newberg E. Parasocial Interactions and Relationships in Early Adolescence, *Frontiers In Psychology*, 2017. Vol. 8 DOI: 10.3389/FPSYG.2017.00255
19. Grant A.E., Guthrie K.K., & Ball-Rokeach S.J. Television shopping: A media system dependency perspective. *Communication Research*, 1991. Vol. 18, no. 6, pp. 773–798. DOI: 10.1177/009365091018006004
20. Greenwood D.N., & Long C.R. Psychological predictors of media involvement: Solitude experiences and the need to belong. *Communication Research*, 2009. Vol. 36, no. 5, pp. 637–654. DOI: 10.1177/0093650209338906
21. Hartmann, T. Parasocial interaction, parasocial relationships, and well-being. In L. Reinecke & M.B. Oliver (Eds.), *The Routledge handbook of media use and well-being: International perspectives on theory and research on positive media effects*, 2017. Routledge/Taylor & Francis Group, pp. 131–144.
22. Horton D., & Richard Wohl R. Mass communication and parasocial interaction: Observations on intimacy at a distance. *Psychiatry*, 1956. Vol. 19, no. 3, pp. 215–229. DOI:10.1080/00332747.1956.11023049



23. Howard Gola A.A., Richards M.N., Lauricella A.R., & Calvert S.L. Building meaningful parasocial relationships between toddlers and media characters to teach early mathematical skills. *Media Psychology*, 2013. Vol. 16, no. 4, pp. 390–411. DOI: 10.1080/15213269.2013.783774
24. Kaufman A.S., & Kaufman N.L. *Kaufman Test of Educational Achievement, Third Edition*, 2014. Bloomington, MN: NCS Pearson
25. Khalaf S., Kilani H., Razo M.B., & Grigorenko E.L. Bored, Distracted, and Confused: Emotions That Promote Creativity and Learning in a 28-Month-Old Child Using an iPad. *Journal of Intelligence*, 2022. Vol. 10, no. 4, pp. 118. DOI: 10.3390/JINTELLIGENCE10040118
26. Klimmt C., Hartmann T., & Schramm H. Parasocial interactions and relationships. In J. Bryant & P. Vorderer (Eds.), *Psychology of entertainment*, 2006. Lawrence Erlbaum Associates Publishers, pp. 291–313.
27. Lauricella A.R., Gola A.A. H., & Calvert S.L. Toddlers' learning from socially meaningful video characters. *Media Psychology*, 2011. Vol. 14, no. 2, pp. 216–232. DOI: 10.1080/15213269.2011.573465
28. Lee B.K., Park H.S., Choi M.-I., & Kim C.S. Promoting Organ Donation Through an Entertainment – Education TV Program in Korea: Open Your Eyes. *Asia Pacific Journal of Public Health*, 2010. Vol. 22, no. 1, pp. 89–97.
29. Levy M.R. Watching TV news as para-social interaction. *Journal of Broadcasting & Electronic Media*, 1979. Vol. 23, no. 1, pp. 69–80. DOI: 10.1080/08838157909363919
30. Liebers N., & Schramm H. Parasocial interactions and relationships with media characters—An inventory of 60 years of research. *Communication Research Trends*, 2019. Vol. 38, no. 2, pp. 4–31.
31. Math Teacher [@mathologist]. (n.d.). [TikTok profile]. TikTok. Retrieved November 7, 2022, from <https://www.tiktok.com/@mathologist>
32. McCutcheon L.E., Ashe D.D., Houran J., & Maltby J. A cognitive profile of individuals who tend to worship celebrities. *The Journal of Psychology*, 2003. Vol. 137, no. 4, pp. 309–322. DOI: 10.1080/00223980309600616
33. Mrs. Kelly [@the\_mrskelly]. (n.d.). [TikTok profile]. TikTok. Retrieved November 7, 2022, from [https://www.tiktok.com/@the\\_mrskelly](https://www.tiktok.com/@the_mrskelly)
34. Mrs. Tab Wesley [@tabwesley]. (n.d.). [TikTok profile]. TikTok. Retrieved November 7, 2022, from <https://www.tiktok.com/@tabwesley>
35. Omar B., & Dequan W. Watch, share or create: The influence of personality traits and user motivation on TikTok mobile video usage. *International Journal of Interactive Mobile Technologies (IJIM)*, 2020. Vol. 14, no. 4, pp. 121–137. DOI: 10.3991/IJIM.V14I04.12429
36. Pi Z., Zhang Y., Zhu F., Chen L., Guo X., & Yang J. The mutual influence of an instructor's eye gaze and facial expression in video lectures. *Interactive Learning Environments*, 2021. Vol. 31, no. 6, pp. 3664–3681. DOI: 10.1080/10494820.2021.1940213
37. Richards M.N., & Calvert S.L. Parent versus child report of young children's parasocial relationships in the United States. *Journal of Children and Media*, 2016. Vol. 10, no. 4, pp. 462–480. DOI: 10.1080/17482798.2016.1157502
38. Rideout V., Peebles A., Mann S., & Robb M.B. *Common Sense census: Media use by tweens and teens*, 2022. San Francisco, CA: Common Sense.
39. Rubin A.M., Perse E.M., & Powell R.A. Loneliness, parasocial interaction, and local television news viewing. *Human communication research*, 1985. Vol. 12, no. 2, pp. 155–180. DOI: 10.1111/J.1468-2958.1985.TB00071.X
40. Schrank F.A., McGrew K.S., & Mather N. *Woodcock-Johnson Tests of Cognitive Abilities, Fourth Edition*. 2014 Rolling Meadows, IL: Riverside Publishing.
41. SciShow [@scishow]. (n.d.). [TikTok profile]. TikTok. Retrieved November 7, 2022, from <https://www.tiktok.com/@scishow>



42. Sherman-Morris K. Tornadoes, television and trust – A closer look at the influence of the local weathercaster during severe weather. *Global Environmental Change Part B: Environmental Hazards*, 2005. Vol. 6, no. 4, pp. 201–210. DOI: 10.1016/J.HAZARDS.2006.10.002
43. Tolbert A.N., & Drogos K.L. Tweens’ wishful identification and parasocial relationships with YouTubers. *Frontiers in Psychology*, 2019. Vol. 10, 2781. DOI: 10.3389/FPSYG.2019.02781
44. Tukachinsky R.H. Para-romantic love and para-friendships: Development and assessment of a multiple-parasocial relationships scale. *American Journal of Media Psychology*, 2010. Vol. 3, no. 1/2, pp. 73–94.
45. Vonderohe B.M. Twitter’s role in the disclosure of parasocial relationships. *UW-L Journal of Undergraduate Research*, 2016. Vol. 19, pp. 1–15.
46. Wen N., & Cui D. Effects of celebrity involvement on young people’s political and civic engagement. *Chinese Journal of Communication*, 2014. Vol. 7, no. 4, pp. 409–428. DOI: 10.1080/17544750.2014.953964
47. Xu L., Yan X., & Zhang Z. Research on the causes of the “Tik Tok” app becoming popular and the existing problems. *Journal of advanced management science*, 2019. Vol. 7, no. 2. DOI: 10.18178/JOAMS.7.2.59-63
48. Zhukova M., Kilani H., Garcia J.L., Tan M., Parell P.D., Hein S., & Grigorenko E.L. How Do Toddlers Experience Digital Media? A Case Study of a 28-Month Old Child Learning to Use iPad. *Modelling and Data Analysis*, 2020. Vol. 10, no. 3 pp. 5–23. <https://doi.org/10.17759/MDA.2020100301>

Получена 01.03.2024

Принята в печать 15.03.2024

Received 01.03.2024

Accepted 15.03.2024



УДК 519.711.3

## Моделирование деятельности экипажей при пилотировании воздушных судов

**Орищенко В.А.\***

Московский государственный психолого-педагогический университет  
(ФГБОУ ВО МГППУ), г. Москва, Российская Федерация  
ORCID: <https://orcid.org/0009-0003-6696-5147>  
e-mail: [vitalyorischenko@gmail.com](mailto:vitalyorischenko@gmail.com)

**Грешников И.И.\*\***

Государственный научно-исследовательский институт авиационных систем  
(ФАУ ГосНИИАС), г. Москва, Российская Федерация  
Московский государственный психолого-педагогический университет  
(ФГБОУ ВО МГППУ), г. Москва, Российская Федерация  
ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-5474-3094>  
e-mail: [iigreshnikov@2100.gosniias.ru](mailto:iigreshnikov@2100.gosniias.ru)

Рассматривается представление деятельности экипажа при пилотировании воздушного судна с помощью марковских цепей, включая моделирование в штатных и внештатных ситуациях с учетом опыта экипажа. Предложен способ оценки уровня опытности пилотов с использованием нейронной сети и алгоритм оптимизации матриц вероятностей переходов между состояниями модели. Приведены примеры моделирования для внештатной ситуации, демонстрирующие влияние уровня опытности пилота на итоговый результат.

**Ключевые слова:** имитационное моделирование, модель полета, марковские цепи, нейронная сеть.

**Для цитаты:**

*Орищенко В.А., Грешников И.И.* Моделирование деятельности экипажей при пилотировании воздушных судов. Моделирование и анализ данных. 2024. Том 14. № 1. С. 89–102. DOI: <https://doi.org/10.17759/mda.2024140106>

\***Орищенко Виталий Алексеевич**, студент, Московский государственный психолого-педагогический университет (ФГБОУ ВО МГППУ), г. Москва, Российская Федерация, ORCID: <https://orcid.org/0009-0003-6696-5147>, e-mail: [vitalyorischenko@gmail.com](mailto:vitalyorischenko@gmail.com)

\*\***Грешников Иван Игоревич**, кандидат технических наук, начальник сектора, Государственный научно-исследовательский институт авиационных систем (ФАУ ГосНИИАС), г. Москва, Российская Федерация; аспирант МГППУ (ФГБОУ ВО МГППУ), г. Москва, Российская Федерация, ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-5474-3094>, e-mail: [iigreshnikov@2100.gosniias.ru](mailto:iigreshnikov@2100.gosniias.ru)



## 1. ВВЕДЕНИЕ

В процессе проектирования кабины экипажа воздушного судна повышенное внимание уделяется компоновке информационно-управляющего поля кабины (ИУП). Расположение компонентов ИУП кабины воздушного судна (ВС) и удобство считывания с них информации могут сыграть ключевую роль при пилотировании в критической лётной ситуации. Однако, учитывая имеющиеся данные о реальных полетах, невозможно учесть все латентные факторы, способствующие корректной деятельности пилотов. Имитационное моделирование поведения пилотов во время полетов является одним из удобных и доступных средств поиска оптимальных решений, связанных с построением ИУП.

При моделировании поведения пилотов целесообразно рассматривать конкретные ситуации, возникающие на борту ВС. Эти лётные ситуации могут быть инициированы независимо друг от друга, множество их экземпляров формирует результат выполнения данного полета.

Моделирование деятельности экипажа даёт возможность визуализировать его поведение во время полёта, включая взаимодействие с органами управления. Например, при вводе определённых данных, характеризующих лётный состав, можно в режиме реального времени наблюдать за тем, как пилот заданного уровня подготовки выполняет необходимые инструкции Руководств по лётной эксплуатации (РЛЭ), профессионально оценивая качество выполняемых действий, их своевременность и последовательность. На основании полученных оценок могут быть выявлены необходимые изменения в компоновке органов управления и интерфейсах штатных систем.

Математическая модель деятельности пилота согласно предписаниям РЛЭ может применяться для создания «виртуальных» пилотов, обеспечивающих выполнение предписаний РЛЭ ВС, оценки эффективности взаимодействия пилотов с различными вариантами информационно-управляющего поля кабины с целью принятия наилучших технических решений (включая валидацию перспективных кабин и комплексов бортового оборудования), а также для имитации деятельности пилотов/экипажей с различными уровнями профессиональной подготовки и различными психофизиологическими состояниями с целью выявления наилучших технических решений по формированию ИУП кабины ВС.

## 2. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ ПИЛОТА

Деятельность пилота согласно предписаниям РЛЭ представляется марковскими процессами с дискретными состояниями и дискретным временем (марковскими цепями). В первую очередь, это обусловлено сложностью предметной области: реальный процесс пилотирования ВС находится под влиянием большого количества внешних и внутренних факторов, которые определяют поведение рассматриваемой системы. Характерная особенность марковских процессов, обусловленная влиянием



только текущего состояния системы на ее будущее поведение, позволяет упростить модель без потери ее эффективности, избегая хранения значительного объема данных об истории прохождения состояний.

Учитывая высокий темп появления событий внутри кабины экипажа во время полета (особенно при возникновении внештатных ситуаций) и необходимость оперативной реакции на них в режиме реального времени, применяется дискретная временная шкала. Полёт ВС делится на этапы, которым соответствуют различные сценарии. Сценарии представляют собой штатные и внештатные ситуации, поведение при возникновении которых регламентировано РЛЭ. Поскольку моделируется процедура выполнения (или невыполнения) пилотом регламентных инструкций, каждое из возможных состояний модели соответствует определённому шагу инструкции из РЛЭ.

Ошибки при выполнении инструкций выделяются в отдельные состояния модели. Перейдя в состояние ошибки, пилот обычно имеет возможность исправить ее, поэтому между состояниями, представляющими ошибки, и траекторией корректного выполнения инструкций имеются возможности переходов. Конечные ошибки, которые не позволяют модели положительно завершить сценарий, выделены в отдельные состояния.

Ниже представлена общая структура марковской цепи, представляющая процедуру выполнения инструкций при возникновении штатной или внештатной ситуации (рис. 1).

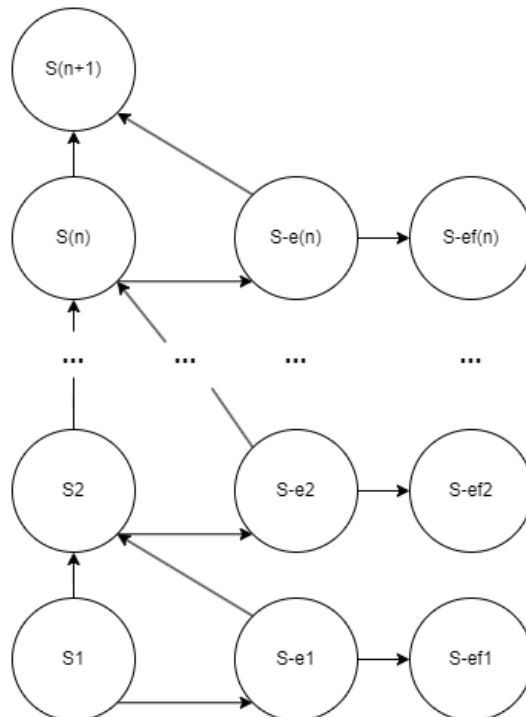


Рис. 1. Марковская цепь для моделирования поведения пилота



Данная модель представлена для сценария с  $n$  шагами. Состояния от  $S_1$  до  $S_n$  представляют предусмотренную РЛЭ деятельность пилота.

Состояние  $S_{n+1}$  является конечным состоянием модели, соответствующим корректному завершению сценария.

Состояния от  $S-e_1$  до  $S-e_n$  представляют ошибочные действия пилота.

Состояния от  $S-ef_1$  до  $S-ef_n$  представляют конечные ошибочные состояния, когда сценарий или не завершён корректно и была допущена критическая ошибка, или целевое действие не было выполнено в течение приемлемого времени.

Вероятностная динамика переходов между состояниями представляется матричным уравнением:

$$p(t+1) = S_k p(t),$$

где  $t$  – дискретное время;  $0 \leq t \leq T; t, T \in \mathbf{N}$ ;  $T$  – конечный момент времени;  $\mathbf{N}$  – множество натуральных чисел;  $m$  – общее количество состояний цепи Маркова; вектор  $p(t) = (p_0(t), \dots, p_m(t))^T$  – представляет вероятности пребывания в состояниях цепи в момент времени  $t$ ;  $S_k = s_{ij,k}$  – стохастическая матрица вероятностей переходов между состояниями цепи Маркова порядка  $m$ , в которой  $s_{ij,k}$  – вероятность перехода из состояния  $j$  в состояние  $i$  для группы пилотов, имеющей уровень подготовки  $k$ .

Идентификация матриц вероятностей переходов между состояниями  $S_k$  выполняется по эмпирическим данным для каждой рассматриваемой группы пилотов отдельно. Для этого по результатам наблюдений для матрицы  $S_k$  рассчитываются выборочные оценки её грубого начального приближения  $S_{k,0}$  и предельного стационарного распределения вероятностей  $p^*$ , определяемого решением следующего уравнения:

$$p^* = S_k p^*,$$

после чего, используя оценку предельного стационарного распределения  $p^*$ , проводится уточнение начального приближения  $S_{k,0}$  [11].

Компоненты процедуры, формирующей математическое представление деятельности пилота согласно предписаниям РЛЭ, представлены на рис. 2.

Для реализации различных вариантов поведения пилота, соответствующих различным уровням профессиональной подготовки, разработан алгоритм оценки опытности пилота воздушного судна, с помощью которого рассчитываются элементы матрицы вероятностей переходов.

Этот алгоритм основан на использовании предобученного персептрона (рис. 3), который получает на вход данные о пилоте, включая его возраст, общий налёт в часах, налёт на данном воздушном судне. На выход нейронной сети поступает значение коэффициента опытности пилота в диапазоне от 0 до 1, где 0 – случай наименее опытного пилота (начинающий кадет), 1 – случай наиболее опытного пилота (имеющего более 10000 часов полёта).

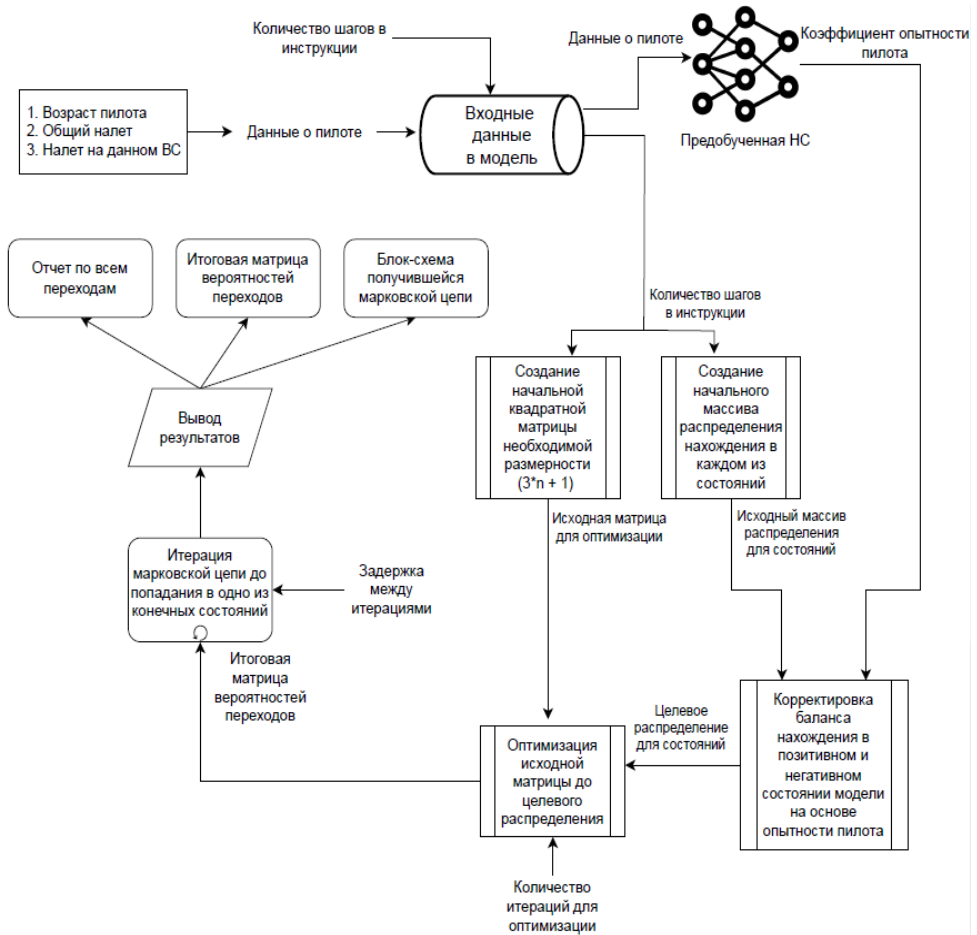


Рис. 2. Компоненты процедуры, формирующей математическое представление деятельности пилота согласно предписаниям РЛЭ

Перцептрон имеет 3 слоя (один – входной из 64 нейронов, один скрытый слой из 32 нейронов, один выходной слой с 1 нейроном). Данная сеть обучается на ограниченном наборе данных.

Матрицы вероятностей переходов между состояниями при различных психофизиологических состояниях экипажа и уровнях его профессиональной подготовки формируются, используя массивы времён пребывания в состояниях модели.

Исходный массив с временем нахождения для каждого состояния разделяется на две части: для положительных и отрицательных состояний модели (под положительными понимаются состояния, в которых корректно выполняются все инструкции сценария, под отрицательными – состояния промежуточных и конечных ошибок, предусмотренные моделью).

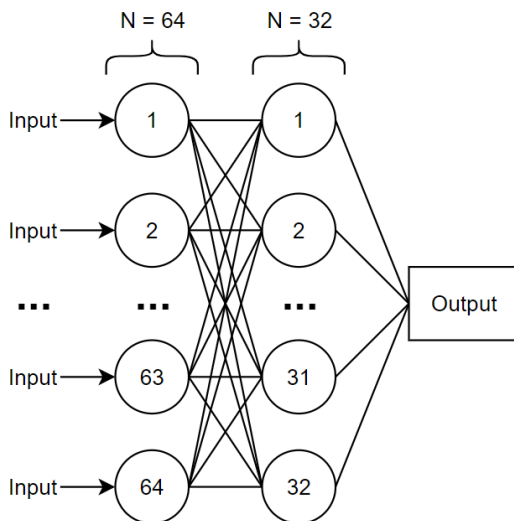


Рис. 3. Структура связей между элементами персептрона для получения коэффициента опыта пилота

В зависимости от коэффициента опыта пилота происходит вычисление целевого коэффициента пропорции суммы первого массива ко второму (нахождения в благоприятных и отрицательных состояниях):

$$C = 0.5 + 0.2 \times Q,$$

где  $Q$  – коэффициент опыта пилота, полученный из модели НС,  $C$  – коэффициент пропорции времени нахождения в положительных состояниях.

Полученный коэффициент отношения времён нахождения в положительных и отрицательных состояниях может принимать значение в диапазоне  $[0.5, 0.7]$ . Смещение значения этого коэффициента даже на одну сотую вносит существенный вклад в формирование итоговой матрицы вероятностей переходов.

После нахождения сумм для каждого из полученных массивов, содержащих информацию о нахождении в благоприятных и неблагоприятных состояниях модели, массивы нормируются. Результат представляет собой распределение выборочных оценок вероятностей нахождения в каждом из состояний модели, полученное на основе информации об опыте пилота.

Полученное распределение используется при оптимизации матрицы вероятностей переходов специальным алгоритмом, который итерационно преобразует первоначальную выборочную оценку матрицы вероятностей переходов так, чтобы приблизить определяемое этой матрицей стационарное распределение вероятностей пребывания в состояниях к указанному выше выборочному распределению [11].



После получения итоговой матрицы вероятностей переходов проводится обход марковской цепи, при котором фиксируются все переходы за каждую итерацию. Полученный результат представляет одну инициализацию выбранного сценария для пилота определенного уровня подготовки. Данные сценарии могут быть объединены в процесс целого полета.

### 3. ПРИМЕР ИМИТАЦИОННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ДЛЯ СЦЕНАРИЯ С ОТКАЗОМ ДВИГАТЕЛЯ

В качестве примера использован сценарий с отказом одного из двигателей во время полета самолёта МС-21–300. Пилотирование ВС в случае данного сценария представлено в форме бизнес-процесса в нотации BPMN 2.0 (рис. 4).

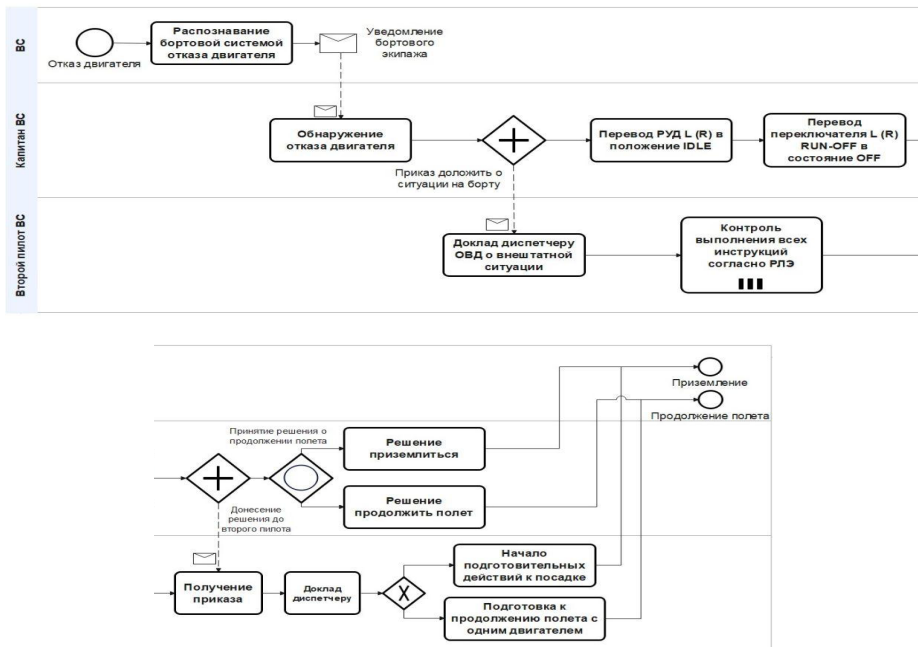


Рис. 4. Схема бизнес-процесса для сценария “Отказ двигателя” в нотации BPMN 2.0.

Данный сценарий предполагает собой три целевых действия от пилотирующего экипажа: перевод РУД в положение IDLE, перевод переключателя RUN-OFF в состояние OFF, принятия правильного решения о продолжении полета.

На основании данных трех действия построена модель марковской цепи для данного сценария (рис. 5).

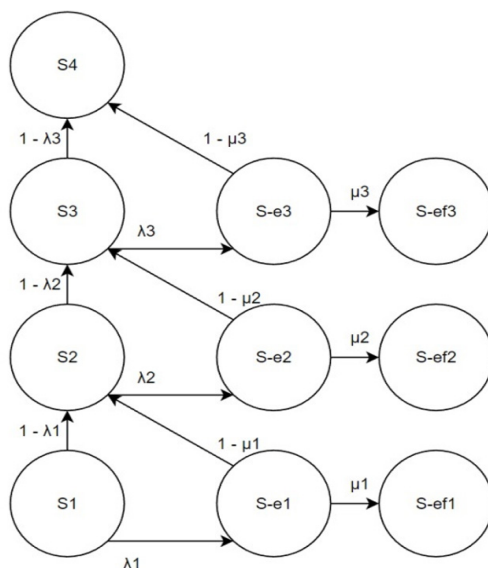


Рис. 5. Марковская модель для сценария “Отказ двигателя”

Для данного процесса была построена начальная матрица вероятностей переходов, с которой и происходят оптимизационные итерации (рис. 6). Фиолетовым цветом отмечены нежелательные конечные состояния модели (которые означают безуспешное завершение сценария). Желтым отмечено единственное конечное состояние модели, переход в которое означает успешное выполнение инструкций экипажем.

	S1	S2	S3	S4	S-e1	S-e2	S-e3	S-ef1	S-ef2	S-ef3
S1	0.1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
S2	0.6	0.1	0	0	0.5	0	0	0	0	0
S3	0	0.6	0.1	0	0	0.5	0	0	0	0
S4	0	0	0.6	1	0	0	0.5	0	0	0
S-e1	0.3	0	0	0	0.1	0	0	0	0	0
S-e2	0	0.3	0	0	0	0.1	0	0	0	0
S-e3	0	0	0.3	0	0	0	0.1	0	0	0
S-ef1	0	0	0	0	0.4	0	0	1	0	0
S-ef2	0	0	0	0	0	0.4	0	0	1	0
S-ef3	0	0	0	0	0	0	0.4	0	0	1

Рис. 6. Начальная матрица вероятностей переходов





Определённые элементы матрицы вероятностей переходов могут быть равны нулю или единице. Оптимизируются лишь те переходы, у которых вероятности лежат в диапазоне (0, 1).

Для проверки эффективности работы алгоритма получения итоговой матрицы вероятностей переходов с учетом опытности пилота воздушного судна выведем в рамках рассматриваемого сценария и сравним матрицы для пилота-новичка и опытного пилота.

Для неопытного пилота будет использовать следующие входные данные (возраст – 23 года, общий налет – 200 часов, налет на данном типе ВС – 0 часов). Нейронная сеть выдала результат, приближенный к нулю. В таком случае получилась следующая матрица вероятностей переходов (рис. 7):

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0,955404	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0,001308	0,900509	0	0	0,069663	0	0	0	0	0
2	0	0,005116	0,793994	0	0	0,115702	0	0	0	0
3	0	0	0,01353	1	0	0	0,159229	0	0	0
4	0,043289	0	0	0	0,921441	0	0	0	0	0
5	0	0,094376	0	0	0	0,876018	0	0	0	0
6	0	0	0,192476	0	0	0	0,785642	0	0	0
7	0	0	0	0	0,008896	0	0	1	0	0
8	0	0	0	0	0	0,008281	0	0	1	0
9	0	0	0	0	0	0	0,055129	0	0	1

Рис. 7. Матрица вероятностей переходов для неопытного пилота

Как можно заметить по матрице – вероятности переходов в желательные состояния (например, из 0 в 1 или из 1 в 2) значительно ниже, чем в нежелательные (например, из 0 в 4 или из 1 в 5).

Рассмотрим теперь пример с наиболее опытным пилотом. В качестве входных возьмем следующие данные (возраст – 55 лет, общий налет – 15000 часов, налет на данном типе ВС – 5000 часов). НС выдал результат – единица. В результате получилась следующая матрица (рис. 8):

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0,958922	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0,037567	0,913843	0	0	0,963966	0	0	0	0	0
2	0	0,082811	0,850683	0	0	0,984096	0	0	0	0
3	0	0	0,134827	1	0	0	0,805973	0	0	0
4	0,003511	0	0	0	0,036034	0	0	0	0	0
5	0	0,003346	0	0	0	0,015904	0	0	0	0
6	0	0	0,01449	0	0	0	0,034648	0	0	0
7	0	0	0	0	7,83E-11	0	0	1	0	0
8	0	0	0	0	0	7,35E-11	0	0	1	0
9	0	0	0	0	0	0	0,159379	0	0	1

Рис. 8. Вычисленная матрица вероятностей переходов для опытного пилота



В данном случае получился существенно другой результат, что свидетельствует о том, что расчеты выполнены корректно. Однако, учитывая необходимую точность и чувствительность полученной системы, необходимо проводить дальнейшую калибровку всех коэффициентов внутри ПО, чтобы повысить точность модели.

Алгоритм успешно тестировался до сценариев, включающих **до 33 шагов** в инструкции (получается матрица вероятностей переходов размера 100x100). С другой стороны, если акцентировать внимание на возможные сценарии из РЛЭ, среднее количество шагов обычно **не превышает 15**. В таком случае механизм работает эффективно как по времени, так и по результату.

На рисунках 9–10 для сценария с отказом двигателя представлены марковские процессы, иллюстрирующие переходы между состояниями в демонстрационных вариантах поведения. Числа у стрелок показывают последовательности переходов между состояниями, включая переходы из состояний в самих себя. Очевидно, что в случае менее опытного пилота совершается значительно больше ошибок, и процесс обхода состояний включает значительно большее число шагов.

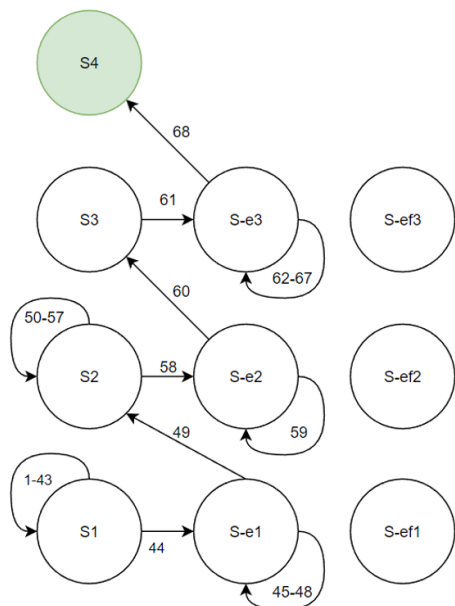


Рис. 9. Поведение при отказе двигателя в случае неопытного пилота: пример

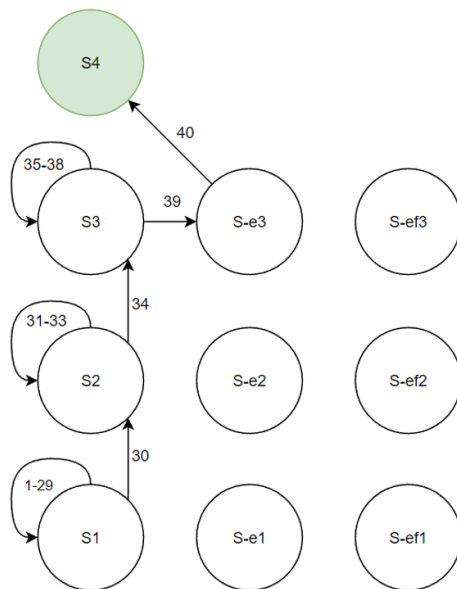


Рис. 10. Поведение при отказе двигателя в случае опытного пилота: пример



## 4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

1. Разработана математическая модель деятельности пилота согласно предписаниям РЛЭ и программные средства для моделирования этой деятельности, построенные на её основе.
2. Математическая модель деятельности пилота согласно предписаниям РЛЭ применяется для решения следующих задач:
  - создание «виртуальных» пилотов, обеспечивающих выполнение предписаний РЛЭ ВС;
  - оценки эффективности взаимодействия пилотов с различными вариантами информационно-управляющего поля кабины с целью принятия наилучших технических решений (включая валидацию перспективных кабин и комплексов бортового оборудования);
  - имитация деятельности пилотов/экипажей с различными уровнями профессиональной подготовки и различными психофизиологическими состояниями с целью выявления наилучших технических решений по формированию информационно-управляющего поля кабины воздушного судна.
3. Математическая модель деятельности пилота согласно предписаниям РЛЭ представляется как марковский процесс с дискретными состояниями и дискретным временем. Полёт ВС делится на этапы, имеющие различные сценарии их выполнения. Сценарии представляют собой штатные и внештатные ситуации, поведение при возникновении которых регламентировано в РЛЭ. Каждое из возможных состояний марковского процесса соответствует определённому шагу выполнения инструкций РЛЭ.
4. Ошибки при выполнении инструкций выделяются в отдельные состояния модели. Перейдя в состояние ошибки, пилот, как правило, имеет возможность исправить её, поэтому допускаются переходы между состояниями, представляющими ошибки, и траекторией корректного выполнения инструкций РЛЭ. Конечные ошибки, не позволяющие положительно завершить сценарий, выделены в отдельные состояния.
5. Математическая модель деятельности пилота согласно предписаниям РЛЭ обеспечивает имитационное моделирование поведения пилотов во время полетов в терминах предписаний РЛЭ.
6. Рассмотренный подход может применяться при моделировании деятельности пилота как для отдельно взятых фрагментов полета, так и для полета в целом, позволяя оценивать поведение пилотов с различным уровнем профессиональной подготовки и опыта в рамках одного сценария.

### *Литература*

1. *Lancaster P., Tismenetsky M.* The Theory of Matrices: With Applications. Elsevier, 1985. 570 pp.
2. *Wilkinson J.H.*, The Algebraic Eigenvalue Problem (Clarendon Press, Oxford, 1988).
3. *Cramer H.*, Mathematical Methods of Statistics. Princeton University Press, 1999. 575 pp.



4. Амосов Г.Г. “О марковских возмущениях группы унитарных операторов, ассоциированной со случайным процессом со стационарными приращениями”, Теория вероятн. и ее примен., 49:1 (2004), 145–155; Theory Probab. Appl., 49:1 (2005), 123–132
5. Грешников И.И., Куравский Л.С., Юрьев Г.А. Принципы построения программно-аппаратного комплекса для интеллектуальной поддержки экипажа и оценки уровня его подготовки // Моделирование и анализ данных. 2021. Том 11. № 2. С. 5–30. DOI: 10.17759/mda.2021110201
6. Parlett B.N., The Symmetric Eigenvalue Problem. Prentice-Hall, 1980. 348 pp.
7. Куравский Л.С., Юрьев Г.А., Златомрежев В.И., Юрьева Н.Е. Оценка действий экипажа воздушного судна на основе модели рисков человеческого фактора // Экспериментальная психология. 2020. Том 13. № 2. С. 153–181. DOI: 10.17759/exrpsy.2020130211
8. Марковские модели в задачах диагностики и прогнозирования: Учеб. пособие. / Под ред. Л.С. Куравского. – 2-е изд., доп. – М.: Изд-во МГППУ, 2017. – 203 с.: ил. – ISBN 978-5-94051-168-7.
9. G.G. Amosov. On Markovian Cocycle Perturbations in Classical and Quantum Probability. Int. J. Math. & Math. Sci., 2003 (54), 3443–3467 (2003).
10. Куравский Л.С., Юрьев Г.А. Марковские модели адаптивного тестирования // Моделирование и анализ данных. 2011. Том 1. № 1. С. 28–40.
11. Kuravsky L.S., Greshnikov I.I., Kozyrev A.D., Kosachevsky S.G., Frolova L.I., Zakharcheva A.A. “A mathematical model for representing the related operator professional activities and its relevant diagnostic assessment based on the quantum representations”, Lobachevskii J. Math., 45 (6), (2024) (в печати).



## Modelling of Pilot Activities when Piloting Aircraft

**Vitaly A. Orishchenko \***

Moscow State University of Psychology and Education (MSUPE), Moscow, Russia

ORCID: <https://orcid.org/0009-0003-6696-5147>

e-mail: [vitalyorischenko@gmail.com](mailto:vitalyorischenko@gmail.com)

**Ivan I. Greshnikov \*\***

State Research Institute of Aviation Systems (GosNIIAS), Moscow, Russia

Moscow State University of Psychology and Education (MSUPE), Moscow, Russia

ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-5474-3094>

e-mail: [iigreshnikov@2100.gosniias.ru](mailto:iigreshnikov@2100.gosniias.ru)

The paper considers the representation of crew activities when piloting an aircraft using Markov chains, including modeling in regular and emergency situations, considering the experience of the crew. A method for assessing the level of pilot experience using a neural network and an algorithm for optimizing the probability matrices of transitions between model states are presented. Examples of modeling for an emergency situation are given, demonstrating the influence of the pilot's level of experience on the result.

**Keywords:** simulation modeling, flight model, Markov chains, neural network.

### For citation:

Orishchenko V.A., Greshnikov I.I. Modelling of Pilot Activities when Piloting Aircraft. *Modelirovanie i analiz dannykh = Modelling and Data Analysis*, 2024. Vol. 14, no. 1, pp. 89–102. DOI: <https://doi.org/10.17759/mda.2024140106> (In Russ., abstr. in Engl.).

### References

1. Lancaster P., Tismenetsky M. The Theory of Matrices: With Applications. Elsevier, 1985. 570 pp.
2. Wilkinson J.H., The Algebraic Eigenvalue Problem (Clarendon Press, Oxford, 1988).
3. Cramer H., Mathematical Methods of Statistics. Princeton University Press, 1999. 575 pp.
4. Amosov G.G., "On Markovian Perturbations of the Group of Unitary Operators Associated with a Stochastic Process with Stationary Increments," *Theory Prob. Appl.* 49, 123–132 (2005).
5. Greshnikov I.I., Kuravsky L.S., Yuryev G.A. (2021). Principles of constructing a software and hardware complex for intellectual support of the crew and assessment of its training level.

\***Vitaly A. Orishchenko**, Student, Moscow State University of Psychology and Education (MSUPE), Moscow, Russia, ORCID: <https://orcid.org/0009-0003-6696-5147>, e-mail: [vitalyorischenko@gmail.com](mailto:vitalyorischenko@gmail.com)

\*\***Ivan I. Greshnikov**, PhD (Technical Sciences), Head of Sector, State Research Institute of Aviation Systems (GosNIIAS), Moscow, Russia; Graduate Student, Moscow State University of Psychology and Education (MSUPE), Moscow, Russia, ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-5474-3094>, e-mail: [iigreshnikov@2100.gosniias.ru](mailto:iigreshnikov@2100.gosniias.ru)



Modelirovanie i analiz dannykh = Modelling and Data Analysis, 11(2), 5–30. <https://doi.org/10.17759/mda.2021110201> (In Russ.)

6. Parlett B.N., *The Symmetric Eigenvalue Problem*. Prentice-Hall, 1980. 348 pp.
7. Kuravsky L.S., Yuryev G.A., Zlatomrezhev V.I., Yuryeva N.E. Assessing the Aircraft Crew Actions with the Aid of a Human Factor Risk Model. *Ekspperimental'nayapsikhologiya = Experimental Psychology (Russia)*, 2020. Vol. 13, No. 2, pp. 153–181. DOI: <https://doi.org/10.17759/exppsy.2020130211>.
8. *Markovskie modeli v zadachakh diagnostiki i prognozirovaniya: Ucheb. posobie / Pod red. L.S. Kuravskogo. – 2-e izd., dop. – M.: Izd-vo MGPPU, 2017. – 197 p.*
9. G.G. Amosov. On Markovian Cocycle Perturbations in Classical and Quantum Probability. *Int. J. Math. & Math. Sci.*, 2003 (54), 3443–3467 (2003).
10. Kuravsky L.S., Yuriev G.A. Adaptive testing as a Markovian process: models and their identification. – *Neurocomputers: Development and Application*, No. 2, 2011, pp. 21–29 (in Russian).
11. Kuravsky L.S., Greshnikov I.I., Kozyrev A.D., Kosachevsky S.G., Frolova L.I., Zakharcheva A.A. “A mathematical model for representing the related operator professional activities and its relevant diagnostic assessment based on the quantum representations”, *Lobachevskii J. Math.*, 45 (6), (2024) (in print).

Получена 18.03.2024

Принята в печать 22.03.2024

Received 18.03.2024

Accepted 22.03.2024

## ◇◇◇◇◇◇◇◇ МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ ◇◇◇◇◇◇◇◇

УДК 517.8

### **Приложение биоинспирированных алгоритмов глобальной оптимизации в задаче подбора коэффициентов модели усталостной деградации жесткости композиционного материала**

***Пантелеев А.В.*** \*

Московский авиационный институт  
(национальный исследовательский университет) (МАИ)  
г. Москва, Российская Федерация  
ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-2493-3617>  
e-mail: [avpanteleev@inbox.ru](mailto:avpanteleev@inbox.ru)

***Турбин Н.В.*** \*\*

Московский авиационный институт  
(национальный исследовательский университет) (МАИ)  
г. Москва, Российская Федерация  
ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-8887-4586>  
e-mail: [nikturbin@gmail.com](mailto:nikturbin@gmail.com)

***Надоров И.С.*** \*\*\*

Московский авиационный институт  
(национальный исследовательский университет) (МАИ)  
г. Москва, Российская Федерация  
ORCID: <https://orcid.org/0009-0008-2085-2987>  
e-mail: [nnadorovivan@gmail.com](mailto:nnadorovivan@gmail.com)

Рассматривается задача нахождения усталостных характеристик материала по результатам испытаний композиционного материала. Исходными данными являются свойства материала, параметры нагрузки и таблично заданная зависимость модуля упругости от количества выполненных испытаний. Сформирована дифференциальная математическая модель, описывающая изменение модуля упругости с ростом числа испытаний. Ее параметры находятся с помощью аппроксимации скорости изменения модуля упругости по формулам численного дифференцирования различного порядка и решения задачи параметрической идентификации. Коэффициенты модели определяются



в результате использования метода, имитирующего поведение стаи мотыльков, относящегося к биоинспирированным алгоритмам глобальной оптимизации. Приведено решение поставленной задачи для конкретного композиционного материала.

**Ключевые слова:** композиционный материал, модель деградации жесткости, биоинспирированный алгоритм, методы численного дифференцирования и интегрирования.

**Для цитаты:**

*Пантелеев А.В., Турбин Н.В., Надоров И.С.* Приложение биоинспирированных алгоритмов глобальной оптимизации в задаче подбора коэффициентов модели усталостной деградации жесткости композиционного материала // Моделирование и анализ данных. 2024. Том 14. № 1. С. 103–120. DOI: <https://doi.org/10.17759/mda.2024140107>

**\*Пантелеев Андрей Владимирович**, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой математической кибернетики института «Компьютерные науки и прикладная математика» Московского авиационного института (Национального исследовательского университета) (МАИ), г. Москва, Российская Федерация, ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-2493-3617>, e-mail: [avpanteleev@inbox.ru](mailto:avpanteleev@inbox.ru)

**\*\*\*Турбин Николай Васильевич**, ведущий инженер института «Авиационная техника» Московского авиационного института (Национального исследовательского университета) (МАИ), г. Москва, Российская Федерация, ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-8887-4586>, e-mail: [nikturbin@gmail.com](mailto:nikturbin@gmail.com)

**\*\*\*Надоров Иван Сергеевич**, студент бакалавриата института «Компьютерные науки и прикладная математика» Московского авиационного института (Национального исследовательского университета) (МАИ), г. Москва, Российская Федерация, ORCID: <https://orcid.org/0009-0008-2085-2987>, e-mail: [nnadorovivan@gmail.com](mailto:nnadorovivan@gmail.com)

## 1. ВВЕДЕНИЕ

При обработке результатов испытаний композитных материалов важно определить их характерные параметры с целью дальнейшего прогнозирования их поведения под действием определенных нагрузок. Одной из возможных моделей деградации жесткости является дифференциальная модель, предложенная в [1]. Она позволяет описать три основных этапа деградации жесткости: первоначальную потерю жесткости, распространение повреждений, достижение критического уровня повреждаемости, приводящее к разрушению материала. Основной проблемой является нахождение параметров модели, характеризующих каждый из этапов и поведение образца материала в целом. В статье предложен алгоритм нахождения параметров на основе численных методов аппроксимации скорости деградации жесткости и параметрической оптимизации [2].





## 2. ФОРМИРОВАНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ УСТАЛОСТНОЙ ДЕГРАДАЦИИ ЖЕСТКОСТИ

Будем использовать следующие основные обозначения.

Количество циклов  $[n]$ , один цикл: исходное состояние  $\rightarrow$  напряженное состояние (растяжение)  $\rightarrow$  исходное состояние,  $n \in \{0, \dots, N\}$ , где  $N$  – общее число выполненных испытаний.

Напряжение  $[\sigma, \text{Мпа}]$  – физическая величина, характеризующая действие внутренних сил упругости в деформированном твердом теле  $[\text{Мпа}]$ .

Прочность на растяжение  $[X_T, \text{Мпа}]$  – физическая величина, характеризующая напряжение, при котором происходит разрушение образца  $[\text{Мпа}]$ .

Модуль упругости  $[E, \text{Мпа}]$  – характеризует способность материала сопротивляться деформации под действием напряжений.

Повреждаемость  $[D]$  – величина, характеризующая падение модуля упругости  $(E)$  образца.

Текущее значение повреждаемости связано с текущим значением модуля упругости:

$$D(n) = 1 - \frac{E(n)}{E_0}, \quad (1)$$

где  $E(n)$  – текущий модуль упругости, характеризующий способность материала сопротивляться растяжению/сжатию при упругой деформации после циклической нагрузки;  $E_0$  – исходный модуль упругости – константа, характеризующая способность материала сопротивляться деформации под действием напряжений;  $n$  – порядковый номер цикла нагружения (0–100.000). Поскольку  $E(n) \in [0, E_0]$ , то повреждаемость  $D(n) \in [0, 1]$ .

Если известно значение повреждаемости, то текущий модуль упругости находится по формуле, следующей из (1):

$$E(n) = E_0 [1 - D(n)]. \quad (2)$$

Индекс усталостного разрушения  $(\Sigma)$  – переменная величина – величина, характеризующая усталостное состояние образца:

$$\Sigma(n) = \frac{\sigma}{[1 - D(n)] X_T}. \quad (3)$$

В [1] предложена дифференциальная модель величины скорости роста повреждаемости образца:

$$\frac{dD(n)}{dn} = c_1 \Sigma(n) \exp \left[ -\frac{c_2 D(n)}{\sqrt{\Sigma(n)}} \right] + c_3 D(n) \Sigma^2(n) [1 + \exp \{c_5 [\Sigma(n) - c_4]\}], \quad (4)$$

с начальным условием  $D(0) = 0$ .



С учетом (3) уравнение (4) можно переписать в форме

$$\begin{aligned} \frac{dD(n)}{dn} = c_1 \frac{\sigma}{[1-D(n)] X_T} \exp \left[ -\frac{c_2 D(n)}{\sqrt{\frac{\sigma}{[1-D(n)] X_T}}} \right] + c_3 D(n) \left[ \frac{\sigma}{[1-D(n)] X_T} \right]^2 + \\ + c_3 D(n) \left[ \frac{\sigma}{[1-D(n)] X_T} \right]^2 \exp \left\{ c_5 \left[ \frac{\sigma}{[1-D(n)] X_T} - c_4 \right] \right\}, \end{aligned} \quad (5)$$

где  $c_1, \dots, c_5$  – коэффициенты, характеризующие усталостные характеристики материала.

Введем обозначения  $\hat{E}(n) = \frac{E(n)}{E_0}$ ,  $\beta = \frac{X_T}{\sigma}$ . Поскольку из уравнения (1) следует  $D(n) = 1 - \frac{E(n)}{E_0} = 1 - \hat{E}(n)$ , то  $\frac{dD(n)}{dn} = -\frac{d\hat{E}(n)}{dn}$ . Тогда получаем дифференциальное уравнение, эквивалентное (5), в форме

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{E}(n)}{dn} = -\frac{1}{\beta \hat{E}(n)} \left( c_1 \exp \left[ -c_2 (1 - \hat{E}(n)) \sqrt{\beta \hat{E}(n)} \right] + \right. \\ \left. + c_3 \frac{1 - \hat{E}(n)}{\beta \hat{E}(n)} \left[ 1 + \exp \left\{ c_5 \left[ \frac{1}{\beta \hat{E}(n)} - c_4 \right] \right\} \right] \right), \end{aligned} \quad (6)$$

Поскольку  $E(0) = E_0$ , то начальное условие для уравнения (6) имеет вид

$$\hat{E}(0) = 1 \quad (7)$$

В [1] выделены типовые этапы изменения модуля упругости в зависимости от числа выполненных испытаний.

*Первый этап.* Инициирование повреждений (уменьшение относительного модуля упругости  $\frac{E(n)}{E_0}$  на  $(2 \div 5)\%$ ).

*Второй этап.* Распространение повреждений (дальнейшее уменьшение относительного модуля упругости  $\frac{E(n)}{E_0}$  еще на  $(1 \div 5)\%$ ).

*Третий этап.* Достижение критического уровня повреждаемости, приводящее к разрушению материала.

Коэффициент  $c_1$  характеризует скорость роста в режиме инициирования повреждений (на первом этапе), т.е. резкое начальное снижение кривой уменьшения модуля упругости. Коэффициент  $c_2$  должен быть достаточно большим по величине, чтобы первое слагаемое по величине достаточно быстро убывало с ростом повреждаемости.



Коэффициент  $c_3$  характеризует скорость роста в режиме распространения повреждений, т.е. когда происходит постепенное уменьшение модуля упругости. Коэффициенты  $c_4, c_5$  характеризуют этап взрывного роста повреждаемости на третьем этапе.

Требуется найти коэффициенты  $c_1, \dots, c_5$  усталостных характеристик материала по графику  $E(n)$  изменения жесткости композиционного материала.

### 3. АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ПОДБОРА КОЭФФИЦИЕНТОВ МОДЕЛИ УСТАЛОСТНОЙ ДЕГРАДАЦИИ ЖЕСТКОСТИ КОМПОЗИЦИОННОГО МАТЕРИАЛА

Шаг 1. Зависимость  $E_{\text{exp}}(n)$  задана таблицей при  $n \in \{0, \dots, N\}$ .

Шаг 2. Получить таблицу для  $\hat{E}(n) = \frac{E_{\text{exp}}(n)}{E_0}$ .

Шаг 3. По таблице  $\hat{E}(n)$  составить таблицу  $\frac{d\hat{E}(n)}{dn}$ . Применить формулы численного дифференцирования (двухточечный и трехточечный шаблоны) [2, 3].

**Замечание.** Для функции  $f(x)$ , заданной на отрезке  $[a, b]$ , зададим узлы  $x_i \in [a, b], i = 0, 1, \dots, n-1$ , определяемые шагами  $h_{i+1} = x_{i+1} - x_i$ ; значения функции в узлах  $f_i = f(x_i), i = 0, 1, \dots, n-1$ . В общем случае  $h_{i+1} = \text{var}$ , т.е. имеется неравномерная сетка. В частном случае шаг может быть постоянным  $h_{i+1} = h = \text{const}$  (равномерная сетка).

На двухточечном шаблоне  $\mathcal{O}_{2,i} = (x_i, x_{i+1})$  формулы для вычисления первой производной имеют одинаковый вид в левой и правой точках шаблона:

$$f'_{i,v} = f'_{i+1,v} = \frac{f_{i+1} - f_i}{h_{i+1}} \text{ (первый порядок точности).}$$

На трехточечном шаблоне  $\mathcal{O}_{3,i} = (x_{i-1}, x_i, x_{i+1})$  формулы для вычисления первой производной имеют вид:

– в левой крайней точке шаблона:

$$f'_{i-1,c} = \frac{1}{2h} (-3f_{i-1} + 4f_i - f_{i+1}) \text{ (второй порядок точности),}$$

$$f'_{i-1,v} = \frac{1}{H_i^{i+1}} \left[ -(2 + \delta_{i+1})f_{i-1} + \frac{(1 + \delta_{i+1})^2}{\delta_{i+1}} f_i - \frac{f_{i+1}}{\delta_{i+1}} \right];$$

– в центральной точке шаблона

$$f'_{i,c} = \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2h} \text{ (второй порядок точности),}$$



$$f'_{i,v} = \frac{1}{H_i^{i+1}} \left[ -\delta_{i+1} f_{i-1} + \frac{\delta_{i+1}^2 - 1}{\delta_{i+1}} f_i + \frac{f_{i+1}}{\delta_{i+1}} \right];$$

– в правой крайней точке шаблона

$$f'_{i+1,c} = \frac{1}{2h} (f_{i-1} - 4f_i + 3f_{i+1}) \text{ (второй порядок точности),}$$

$$f'_{i+1,v} = \frac{1}{H_i^{i+1}} \left[ \delta_{i+1} f_{i-1} - \frac{(1 + \delta_{i+1})^2}{\delta_{i+1}} f_i + \frac{2 + \delta_{i+1}}{\delta_{i+1}} f_{i+1} \right],$$

где  $H_i^{i+1} = h_i + h_{i+1}$ ,  $\delta_{i+1} = \frac{h_{i+1}}{h_i}$ .

Шаг 4. Найти коэффициенты  $c_1, \dots, c_5$  из условия

$$\sum_{n \in \{0, \dots, N\}} \left\{ \frac{d\hat{E}(n)}{dn} + \frac{1}{\beta \hat{E}(n)} \left( c_1 \exp \left[ -c_2 (1 - \hat{E}(n)) \sqrt{\beta \hat{E}(n)} \right] + c_3 \frac{1 - \hat{E}(n)}{\beta \hat{E}(n)} \left[ 1 + \exp \left\{ c_5 \left[ \frac{1}{\beta \hat{E}(n)} - c_4 \right] \right\} \right] \right) \right\}^2 \rightarrow \min_{c_i \in [c_{i,\min}, c_{i,\max}], i=1, \dots, 5} \quad (8)$$

применяя метаэвристические алгоритмы оптимизации (метод, имитирующий поведение стаи мотыльков (Moth-flame optimization, MFO) [4], метод Luus-Jaakola [5]). Метод MFO относится к классу биоинспирированных алгоритмов глобальной оптимизации, хорошо зарекомендовавших себя при решении разнообразных задач параметрической оптимизации сложных технических систем [6].

#### Замечания.

1. При вычислении значения суммы возможно применение различных весовых коэффициентов, отражающих сравнительную важность обработки результатов, полученных на каждом из этапов. Весовые коэффициенты могут задаваться в соответствии с ранее выделенными тремя этапами. Также возможно использование линейных законов изменения весовых коэффициентов в рамках каждого из этапов.
2. Исходя из назначения последнего слагаемого в правой части дифференциального уравнения можно сформировать априорные оценки множества возможных значений коэффициента  $\tilde{n}_4$ :

$$\frac{1}{\beta} \leq \tilde{n}_4 \leq \frac{1}{\beta \hat{E}_{\min}},$$

где  $\hat{E}_{\min}$  – минимальное значение  $\hat{E}(n)$  из таблицы экспериментальных данных.

Шаг 5. Найти численное решение  $\hat{E}_{\text{exp}}(n)$  дифференциального уравнения (6) с начальным условием (7) с целью верификации полученных результатов.

**Замечание.** Для дифференциального уравнения в форме



$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), y(x_0) = y_0$$

можно применить следующие методы [2, 3]:

– явный метод Эйлера:

$$y_{i+1} = y_i + h_{i+1}f(x_i, y_i) \text{ (первый порядок точности);}$$

– метод Эйлера–Коши:

$$y_{i+1} = y_{i-1} + 2hf_i \text{ (второй порядок точности),}$$

где  $f_i = f(x_i, y_i)$ . Для начала работы метода требуются две разгонные точки  $(x_0, y_0), (x_1, y_1)$ , первая определяется начальным условием, а вторая явным методом Эйлера;

– методы Адамса–Бэшфорта:

А.  $y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}(3f_i - f_{i-1})$  (второй порядок точности),

Б.  $y_{i+1} = y_i + \frac{h}{12}(23f_i - 16f_{i-1} + 5f_{i-2})$  (третий порядок точности),

В.  $y_{i+1} = y_i + \frac{h}{24}(55f_i - 59f_{i-1} + 37f_{i-2} - 9f_{i-3})$  (четвертый порядок точности).

Для начала работы требуется знать 2, 3, 4 разгонные точки соответственно;

– двухшаговая явная схема Эйлера второго порядка на нерегулярном шаблоне

$$y_{i+1} = y_i(1 - \delta_{i+1}^2) + \delta_{i+1}^2 y_{i-1} + H_i^{i+1} \delta_{i+1} f(x_i, y_i),$$

где  $H_i^{i+1} = h_i + h_{i+1}$ ,  $\delta_{i+1} = \frac{h_{i+1}}{h_i}$ ,  $h_{i+1} = x_{i+1} - x_i$ . При  $\delta_{i+1} = 1$  схема совпадает с методом Эйлера–Коши;

– обобщенная на нерегулярный шаблон схема Адамса–Бэшфорта:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h_{i+1}^2}{2} \left( \frac{H_{2i}^{i+1}}{I_{i+1}^{i+1}} f_i - \frac{1}{h_i} f_{i-1} \right),$$

где  $I_{i+1}^{i+1} = h_i h_{i+1}$ ,  $H_{2i}^{i+1} = 2h_i + h_{i+1}$ . При  $\delta_{i+1} = 1$  схема совпадает с методом Адамса–Бэшфорта второго порядка:  $y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}(3f_i - f_{i-1})$ .

Шаг 6. Найти оценки близости результатов эксперимента и результатов моделирования эксперимента:

А.  $\Delta_1 = \max_{n \in \{0, \dots, N\}} \left| \frac{\hat{E}_{\text{exp}}(n) - \hat{E}(n)}{\hat{E}_{\text{exp}}(n)} \right|;$

Б.  $\Delta_2 = \sqrt{\sum_{n \in \{0, \dots, N\}} \left[ \frac{\hat{E}_{\text{exp}}(n) - \hat{E}(n)}{\hat{E}_{\text{exp}}(n)} \right]^2}.$



Шаг 7. Анализ результатов. Если оценки близости не удовлетворяют требованиям, то:

- увеличить точность метода численного дифференцирования в п. 3;
- увеличить требуемую точность или заменить метод оптимизации в п. 5;
- изменить весовые коэффициенты в критерии (8), используемом в п. 4.

В следующем разделе рассмотрен пример реализации алгоритма для заданного композиционного материала.

#### 4. ПРИМЕР ПОДБОРА КОЭФФИЦИЕНТОВ МОДЕЛИ УСТАЛОСТНОЙ ДЕГРАДАЦИИ ЖЕСТКОСТИ КОМПОЗИЦИОННОГО МАТЕРИАЛА

1,2. Заданы характерные свойства исследуемого материала: изначальная жесткость  $E_0 = 37000$  МПа, напряжение разрушения  $X_r = 463$  [МПа], действующее напряжение цикла  $\sigma = 273,17$  [МПа] [7].

В табл. 1 приведены результаты испытаний, отражающие изменение значений модуля упругости (и относительного модуля упругости). Данные приведены с различными интервалами между выполненными экспериментами.

Таблица 1

$E(n)$	$n$	$\hat{E}(n)$
<b>Этап 1</b>		
370000	0	1
32098.827903	500	0.867536
31250.670889	1000	0.844613
30696.495568	1500	0.829635
30271.219731	2000	0.818141
29919.902018	2500	0.808646
29617.032116	3000	0.80046
29348.549667	3500	0.793204
29105.829317	4000	0.786644
28883.174228	4500	0.780626
28676.612009	5000	0.775044
<b>Этап 2</b>		
27094.187153	10000	0.732275
25904.635581	15000	0.700125
24862.254787	20000	0.671953
23874.709336	25000	0.645262
22886.545431	30000	0.618555
21848.867572	35000	0.59051



$E(n)$	$n$	$\hat{E}(n)$
20700.577682	40000	0.559475
19337.878021	45000	0.522645
17515.574054	50000	0.473394
<b>Этап 3</b>		
17042.850175	51000	0.460618
16507.020909	52000	0.446136
15882.707839	53000	0.429262
15124.627626	54000	0.408774
14137.958377	55000	0.382107
12654.423126	56000	0.342011
8461.092332	57000	0.228678

3. Аппроксимация производной  $\frac{d\hat{E}(n)}{dn}$ . Воспользуемся методами численного дифференцирования разного порядка точности, а далее проведем их сравнение. Основной вычислительной проблемой является использование разного шага между полученной информацией о результатах испытаний на всех трех этапах процесса разрушения. Проведен анализ использования формул численного дифференцирования на основе двухточечного и трехточечного шаблонов с постоянным и переменным шагами между узлами. В начале процесса используются формулы в левой точке шаблона, а в конце – в правой. В двух точках, отделяющих первый этап от второго и второй от третьего, использованы, как односторонние формулы, так и формулы для центральной точки шаблона с применением линейной интерполяции на множестве с большим шагом.

*Вариант 1.* В табл. 2 приведены результаты применения формулы первого порядка точности (двухточечный шаблон):  $f'_{i,v} = f'_{i+1,v} = \frac{f_{i+1} - f_i}{h_{i+1}}$ .

*Вариант 2.* В табл. 2 приведены результаты применения формулы второго порядка точности (в центральной точке трёхточечного шаблона, на границе изменения шага – в левой крайней точке шаблона):  $f'_{i,c} = \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2h}$ , на границе  $f'_{i-1,c} = \frac{1}{2h}(-3f_{i-1} + 4f_i - f_{i+1})$ . При  $n = 0$  расчеты выполняются в левой точке шаблона, при  $n = 57000$  в правой точке шаблона.

*Вариант 3.* Применяются формулы второго порядка точности (в центральной точке трёхточечного шаблона, на границе изменения шага – в правой крайней точке шаблона):  $f'_{i,c} = \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2h}$ , на границе  $f'_{i+1,c} = \frac{1}{2h}(f_{i-1} - 4f_i + 3f_{i+1})$ . При  $n = 0$  расчеты выполняются в левой точке шаблона, при  $n = 57000$  в правой точке шаблона.



*Вариант 4.* В табл. 3 приведены результаты применения формулы второго порядка точности (в центральной точке трёхточечного шаблона, на границе изменения шага – в центральной точке с переменным шагом):

$$f'_{i,c} = \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2h}, \text{ на границе } f'_{i,v} = \frac{1}{H_i^{i+1}} \left[ -\delta_{i+1} f_{i-1} + \frac{\delta_{i+1}^2 - 1}{\delta_{i+1}} f_i + \frac{f_{i+1}}{\delta_{i+1}} \right].$$

При  $n = 0$  вычисления производятся в левой точке шаблона, при  $n = 57000$  в правой точке шаблона.

*Вариант 5.* В табл. 3 приведены результаты применения формулы второго порядка точности (в центральной точке трёхточечного шаблона, на границе изменения шага с линейной интерполяцией в сторону большей величины шага, при  $n = 0$  в левой точке шаблона, при  $n = 57000$  в правой точке шаблона):  $f'_{i,c} = \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2h}$ .

Значения производной  $\frac{d\hat{E}(n)}{dn}$

Таблица 2

$\frac{d\hat{E}(n)}{dn}$ (вариант 1)	$n$	$\frac{d\hat{E}(n)}{dn}$ (вариант 2)
<b>Этап 1</b>		
-0.000264928	0	-0.000397392
-4.5846000000001E-05	500	-0.000155387
-2.9955999999999E-05	1000	-3.7901E-05
-2.2988E-05	1500	-2.6471999999999E-05
-1.8990000000001E-05	2000	-2.0989E-05
-1.6372000000001E-05	2500	-1.7681000000001E-05
-1.4511999999999E-05	3000	-1.5442E-05
-1.312E-05	3500	-1.3815999999999E-05
-1.2035999999999E-05	4000	-1.2578E-05
-1.1164000000002E-05	4500	-1.1600000000001E-05
-8.5537999999999E-06	5000	-9.6156999999999E-06
<b>Этап 2</b>		
-6.43E-06	10000	-7.4919E-06
-5.6343999999999E-06	15000	-6.0322E-06
-5.3382E-06	20000	-5.4863E-06
-5.3414000000001E-06	25000	-5.3398000000001E-06
-5.609E-06	30000	-5.4752E-06
-6.2070000000001E-06	35000	-5.908E-06
-7.3659999999998E-06	40000	-6.7865E-06
-9.8502000000001E-06	45000	-8.6081E-06
-1.2776E-05	50000	-1.1923E-05





$\frac{d\hat{E}(n)}{dn}$ (вариант 1)	$n$	$\frac{d\hat{E}(n)}{dn}$ (вариант 2)
<b>Этап 3</b>		
-1.44820000000001E-05	51000	-1.3629E-05
-1.6874E-05	52000	-1.5678E-05
-2.0488E-05	53000	-1.8681E-05
-2.66670000000001E-05	54000	-2.35775E-05
-4.0096E-05	55000	-3.33815E-05
-0.000113333	56000	-7.67145E-05
-0.000113333	57000	-0.0001499515

Для вариантов 1 и 2 графики изменения значений производной  $\frac{d\hat{E}(n)}{dn}$  (синий) на фоне графика  $\hat{E}(n)$  (красный) представлены на рис. 1 и 2. Здесь и далее показаны абсолютные значения производной (знак производной везде отрицателен), умноженные на 10000. На оси абсцисс везде отложены значения переменной  $n$  на заданном отрезке  $[0, 57000]$ .

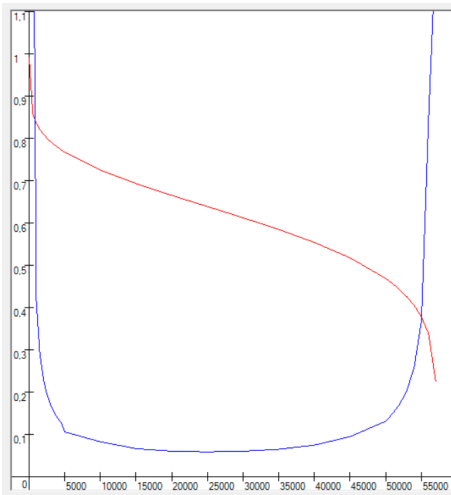


Рис. 1

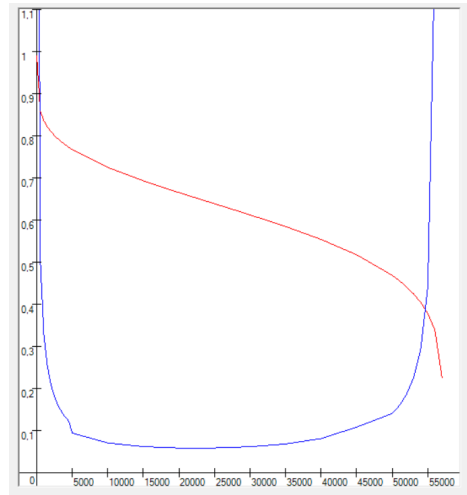


Рис. 2

К недостаткам варианта 1 следует отнести неравномерный переход от первого этапа ко второму и от второго к третьему. Для варианта 2 при переходе от первого этапа ко второму заметен неравномерный участок, при переходе от второго этапа к третьему плавность в целом достигается. При реализации варианта 3 имеется негладкий переход от второго этапа к третьему.



Таблица 3

$\frac{d\hat{E}(n)}{dn}$ (вариант 4)	$n$	$\frac{d\hat{E}(n)}{dn}$ (вариант 5)
<b>Этап 1</b>		
-0,000397392	0	-0,000397392
-0,000155387	500	-0,000155387
-3,7901E-05	1000	-3,7901E-05
-2,647199999999999E-05	1500	-2,647199999999999E-05
-2,0989E-05	2000	-2,0989E-05
-1,76810000000001E-05	2500	-1,76810000000001E-05
-1,5442E-05	3000	-1,5442E-05
-1,381599999999999E-05	3500	-1,381599999999999E-05
-1,2578E-05	4000	-1,2578E-05
-1,16000000000001E-05	4500	-1,16000000000001E-05
-1,09267090909091E-05	5000	-9,85890000000011E-06
<b>Этап 2</b>		
-7,4919E-06	10000	-7,4919E-06
-6,0322E-06	15000	-6,0322E-06
-5,4863E-06	20000	-5,4863E-06
-5,33980000000001E-06	25000	-5,33980000000001E-06
-5,4752E-06	30000	-5,4752E-06
-5,908E-06	35000	-5,908E-06
-6,7865E-06	40000	-6,7865E-06
-8,6081E-06	45000	-8,6081E-06
-1,22883666666666E-05	50000	-1,13131E-05
<b>Этап 3</b>		
-1,3629E-05	51000	-1,3629E-05
-1,5678E-05	52000	-1,5678E-05
-1,8681E-05	53000	-1,8681E-05
-2,35775E-05	54000	-2,35775E-05
-3,33815E-05	55000	-3,33815E-05
-7,67145E-05	56000	-7,67145E-05
-0,0001499515	57000	-0,0001499515

Для вариантов 4 и 5 графики изменения значений производной  $\frac{d\hat{E}(n)}{dn}$  (синий) на фоне графика  $\hat{E}(n)$  (красный) представлены на рис. 3 и 4. Как следует из рис. 3, переходы между этапами практически не видимы, что свидетельствует о приемлемости полученного результата. На рис. 4 видно, что переходы между этапами недостаточно гладкие. Применение линейной интерполяции в точках перехода между этапами не дает значительного выигрыша в точности.

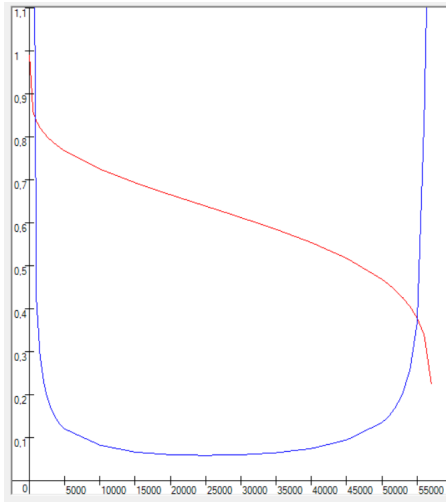


Рис. 3

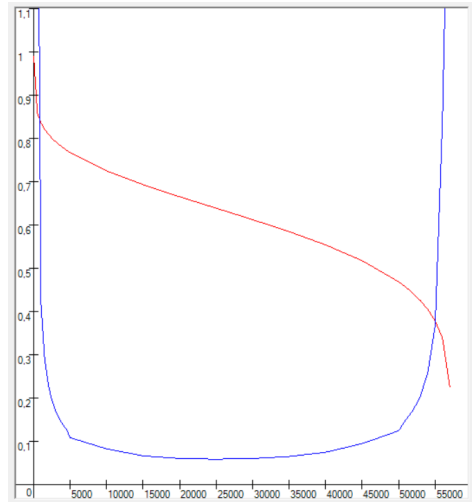


Рис. 4

Приведем результаты сравнения графиков изменения производной, вычисленной по формулам первого и второго порядков точности

На рис. 5 изображены результаты варианта 1 (синий) и варианта 4 (зелёный). Сравнение указывает на преимущество применения формул второго порядка.

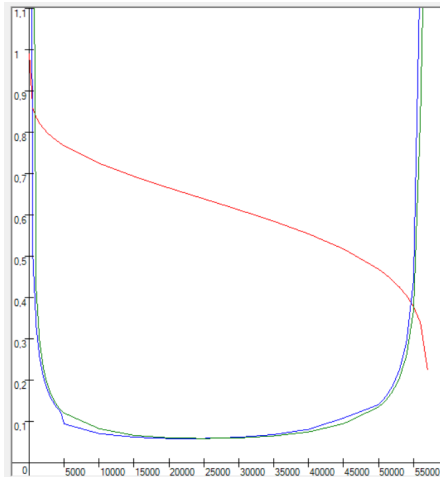


Рис. 5.

4. Нахождение коэффициентов  $c_1, \dots, c_5$  из условия минимума критерия (8). Для решения задачи минимизации использовался метод, имитирующий поведение стаи мотыльков (MFO) [5]. Затем с целью уточнения полученных результатов



применялся метод Luus–Jaakola [4]. Метод Лууса всегда применялся с параметрами  $R = 100$ ,  $\gamma = 0.8$ ,  $\eta = 0.9$ ,  $P = 100$ ,  $ITER = 100$ ,  $\varepsilon_1 = 10^{-5}$ ,  $\varepsilon_2 = 10^{-5}$ , а в качестве начальной точки выбирался результат метода MFO. Вычислительные эксперименты показали, что точность аппроксимации производной во всех рассмотренных случаях падает в центральной зоне графика (второй этап), важной для прогнозирования момента разрушения. Поэтому предложена модификация критерия (8) с учетом введения весовых коэффициентов с целью отражения роста требований к точности аппроксимации на втором и начале третьего этапах:

$$\sum_{n \in \{0, \dots, N\}} \alpha_n \left\{ \frac{d\hat{E}(n)}{dn} + \frac{1}{\beta\hat{E}(n)} \left( c_1 \exp \left[ -c_2 (1 - \hat{E}(n)) \sqrt{\beta\hat{E}(n)} \right] + c_3 \frac{1 - \hat{E}(n)}{\beta\hat{E}(n)} \left[ 1 + \exp \left\{ c_5 \left[ \frac{1}{\beta\hat{E}(n)} - c_4 \right] \right\} \right] \right) \right\}^2, \quad (9)$$

где  $\alpha_n = 1$ ,  $n = 1 : 4500$ ,  $\alpha_n = 100$ ,  $n = 5000 : 30000$ ,  $\alpha_n = 1000$ ,  $n = 35000 : 55000$ ,  $\alpha_n = 1$ ,  $n = 56000 : 57000$ . Заметим, что введение линейного закона изменения весов не привело к улучшению точности приближения производной.

Исходные данные соответствуют варианту 4 (второй порядок точности).

- A. Параметры MFO:  $Np = 1000$ ,  $s = 1$ ,  $T = 500000$ ,  $\tau = 500$ , время счета 3 минуты,  $c_i \in [0, 100]$ ,  $i = 1, 2, 3, 5$ ;  $c_4 \in [0, 4]$  (рис. 6).
- B. Параметры метода MFO:  $Np = 2000$ ,  $s = 1$ ,  $T = 500000$ ,  $\tau = 300$ , время счета 6 минут,  $c_i \in [0, 100]$ ,  $i = 1, 2, 3, 5$ ;  $c_4 \in [0, 4]$  (рис. 7).

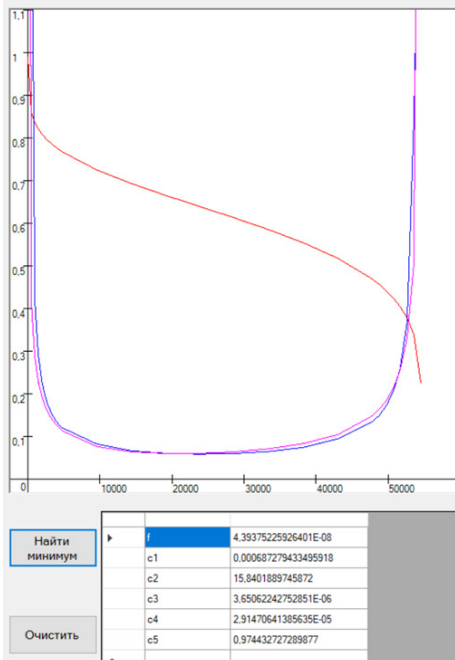


Рис. 6

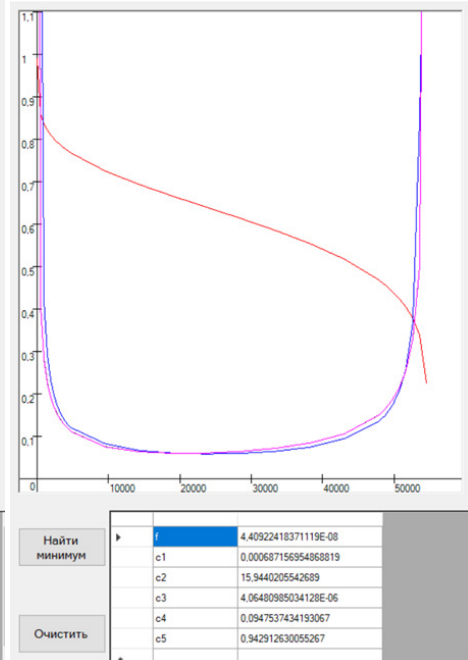


Рис. 7

Анализ приведенных результатов свидетельствует об эффективности предложенного подхода, поскольку точность аппроксимации производной можно считать приемлемой.

5. Рассмотрим проблему получения численного решения  $\hat{E}_{\text{exp}}(n)$  дифференциального уравнения (6) с начальным условием (7). Для оценки погрешности вычисляется сумма квадратов разностей исходного и приближённого модуля упругости.

Для коэффициентов, полученных в таблице на рис. 7, на рис. 8 изображен результат применения метода Эйлера с шагом  $h=1$ , величина погрешности: 0.0361. Результат применения метода Эйлера–Коши показан на рис. 9, величина погрешности составляет 0.0283.

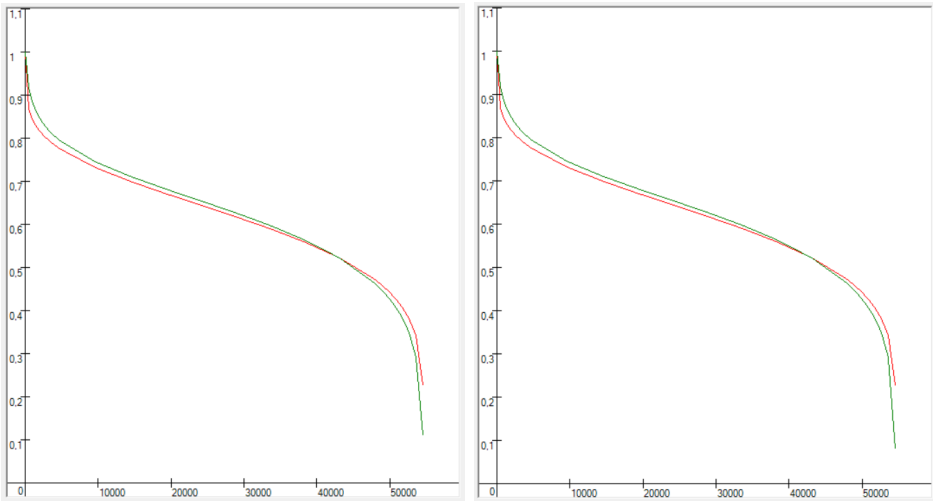


Рис. 8 Рис. 9

Величина погрешности применения метода Адамса 2 порядка составляет: 0.0506, а метода Адамса 4 порядка составляет: 0.0356. Решения аналогичны изображенным на рис. 8 и 9.

## 5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В статье сформулированы техническая и математическая постановки задачи подбора коэффициентов модели усталостной деградации жесткости композиционного материала. Предложен алгоритм подбора коэффициентов модели усталостной деградации жесткости композиционного материала на основе численного нахождения производной относительного модуля упругости и параметрической аппроксимации полученной зависимости. Для решения задачи аппроксимации применены два метаэвристических алгоритма глобальной минимизации: метод, имитирующий поведение



стаи мотыльков, и метод Лууса. Полученный результат проверен при помощи непосредственного интегрирования дифференциального уравнения, описывающего процесс усталостной деградации жесткости композиционного материала. Полученные результаты для тестового композиционного материала подтвердили применимость и достаточную точность предложенной методики.

### *Литература*

1. *Van Paeregeem W.* Development and finite element implementation of a damage model for fatigue of fibre-reinforced polymers. Ghent University Architectural and Engineering Press, 2002.
2. *Пантелеев А.В., Кудрявцева И.А.* Численные методы. Практикум. – М.: ИНФРА-М, 2017.
3. *Киреев В.И., Пантелеев А.В.* Численные методы в примерах и задачах. – СПб.: Изд-во Лань, 2015.
4. *Mirjalili S.* Moth-flame optimization algorithm: A novel nature-inspired heuristic paradigm// Knowledge-Based Systems. 2015. Vol. 89. P. 228–249. <https://doi.org/10.1016/i.knosys2015.07.006>.
5. *Пантелеев А.В., Скавинская Д.В.* Метаэвристические стратегии и алгоритмы глобальной оптимизации. – М.: Факториал, 2023.
6. *Пантелеев А.В., Каранэ М.М.С.* Мультиагентные и биоинспирированные методы оптимизации технических систем. – М.: Изд-во Доброе слово и Ко, 2024.
7. *Whitworth H.A.* A stiffness degradation model for composite laminates under fatigue loading // Composite Structures. 1997. Vol. 40. No. 2, P. 95–101. [https://doi.org/10.1016/S0263-8223\(97\)00142-6](https://doi.org/10.1016/S0263-8223(97)00142-6).



# Application of Bio-Inspired Global Optimization Algorithms in the Problem of Selecting Coefficients for a Model of Fatigue Degradation of the Stiffness of a Composite Material

**Andrei V. Panteleev\***

Moscow Aviation Institute (National Research University) (MAI), Moscow, Russia  
ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-2493-3617>  
e-mail: [avpanteleev@inbox.ru](mailto:avpanteleev@inbox.ru)

**Nikolay V. Turbin\*\***

Moscow Aviation Institute (National Research University) (MAI), Moscow, Russia  
ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-8887-4586>  
e-mail: [nikturbin@gmail.com](mailto:nikturbin@gmail.com)

**Ivan S. Nadorov\*\*\***

Moscow Aviation Institute (National Research University) (MAI), Moscow, Russia  
ORCID: <https://orcid.org/0009-0008-2085-2987>  
e-mail: [nnadorovivan@gmail.com](mailto:nnadorovivan@gmail.com)

The problem of finding the fatigue characteristics of a material based on the test results of a composite material is considered. The initial data are the properties of the material, load parameters and the tabulated dependence of the elastic modulus on the number of tests performed. A differential mathematical model has been formed that describes the change in the elastic modulus with increasing number of loading cycles. Its parameters are found by approximating the rate of change of the elastic modulus using numerical differentiation formulas of various orders and solving the parametric identification problem. The model coefficients are determined by using a method that simulates the behavior of a swarm of moths, related to bio-inspired global optimization algorithms. A solution to the problem for a specific composite material is given.

**Keywords:** composite material, stiffness degradation model, bio-inspired algorithm, methods of numerical differentiation and integration.

## For citation:

Panteleev A.V., Turbin N.V., Nadorov I.S. Application of Bio-Inspired Global Optimization Algorithms in the Problem of Selecting Coefficients for a Model of Fatigue Degradation of the Stiffness of a Composite Material. *Modelirovanie i analiz dannykh = Modelling and Data Analysis*, 2024. Vol. 14, no. 1, pp. 103–120. DOI: <https://doi.org/10.17759/mda.2024140107> (In Russ., abstr. in Engl.).

\***Andrei V. Panteleev**, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Head of the Department of Mathematics and Cybernetics, Institute “Computer Science and Applied Mathematics”, Moscow



Aviation Institute (National Research University) (MAI), Moscow, Russia, ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-2493-361>, e-mail: [avpanteleev@inbox.ru](mailto:avpanteleev@inbox.ru)

**\*\*Nikilay V. Turbin**, Leading engineer of the Institute “Aviation Engineering”, Moscow Aviation Institute (National Research University) (MAI), Moscow, Russian Federation, ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-8887-4586>, e-mail: [nikturbin@gmail.com](mailto:nikturbin@gmail.com)

**\*\*\*Ivan S. Nadorov**, Bachelor’s Degree Student of the Institute “Computer Science and Applied Mathematics”, Moscow Aviation Institute (National Research University) (MAI), Moscow, Russia, ORCID: <https://orcid.org/0009-0008-2085-2987>, e-mail: [nnadorovivan@gmail.com](mailto:nnadorovivan@gmail.com)

### **References**

1. Van Paeppegem W. Development and finite element implementation of a damage model for fatigue of fibre–reinforced polymers. Ghent University Architectural and Engineering Press, 2002.
2. Panteleev A.V., Kudryavtseva I.A. Numerical methods. Workshop. – M.: INFRA–M, 2017. – 512 p. (In Russ.).
3. Kireev V.I., Panteleev A.V. Numerical methods in examples and problems. – St. Petersburg: Lan Publishing House, 2015.– 448 p. (In Russ.).
4. Mirjalili S. Moth–flame optimization algorithm: A novel nature–inspired heuristic paradigm // Knowledge–Based Systems. 2015. Vol. 89. P. 228–249. <https://doi.org/10.1016/i.knosys2015.07.006>.
5. Panteleev A.V., Skavinskaya D.V. Metaheuristic strategies and algorithms of global optimization. *Factorial*, 2023.– 564 p. (In Russ.).
6. Panteleev A.V., Karane M.M.S. Multi–agent and bio–inspired optimization methods for optimizing technical systems. – M.: Dobroe slovo & Co, 2024.– 336 p. (In Russ.).
7. Whitworth H.A. A stiffness degradation model for composite laminates under fatigue loading // *Composite Structures*. 1997. Vol. 40. No. 2, P. 95–101. [https://doi.org/10.1016/S0263-8223\(97\)00142-6](https://doi.org/10.1016/S0263-8223(97)00142-6).

Получена 20.02.2024

Принята в печать 06.03.2024

Received 20.02.2024

Accepted 06.03.2024



УДК 519.862.6

## Решение оптимизационной задачи оценивания моделей полносвязной линейной регрессии

**Базилевский М.П. \***

Иркутский государственный университет путей сообщения  
(ФГБОУ ВО ИрГУПС), г. Иркутск, Российская Федерация  
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-3253-5697>  
e-mail: [mik2178@yandex.ru](mailto:mik2178@yandex.ru)

Статья посвящена проблеме оценивания моделей полносвязной линейной регрессии методом максимального правдоподобия. Ранее для этого был разработан специальный численный метод, основанный на решении нелинейной системы методом простых итераций. При этом не исследовались вопросы выбора начальных приближений и выполнения достаточных условий сходимости. В данной статье предложен новый способ решения оптимизационной задачи оценивания полносвязных регрессий, схожий с методом оценивания ортогональных регрессий. Доказано, что при равных дисперсиях ошибок взаимосвязанных переменных оценки  $b$ -параметров полносвязной регрессии равны компонентам собственного вектора, соответствующего наименьшему собственному числу обратной ковариационной матрицы. А если отношения дисперсий ошибок переменных равны отношениям дисперсий переменных, то оценки  $b$ -параметров равны компонентам собственного вектора, соответствующего наименьшему собственному числу обратной корреляционной матрицы, умноженным на конкретные отношения среднеквадратических отклонений переменных. Проведен численный эксперимент, подтверждающий корректность разработанного математического аппарата. Предложенный способ решения оптимизационной задачи оценивания полносвязных регрессий может эффективно применяться при решении задач построения множественно-полносвязных линейных регрессий.

**Ключевые слова:** модель полносвязной линейной регрессии, метод максимального правдоподобия, численный метод, оптимизация, ортогональная регрессия, корреляционная матрица, собственный вектор, собственное значение.

### Для цитаты:

*Базилевский М.П.* Решение оптимизационной задачи оценивания моделей полносвязной линейной регрессии // Моделирование и анализ данных. 2024. Том 14. № 1. С. 121–134. DOI: <https://doi.org/10.17759/mda.2024140108>



\***Базилевский Михаил Павлович**, кандидат технических наук, доцент кафедры математики, Иркутский государственный университет путей сообщения (ФГБОУ ВО ИРГУПС), г. Иркутск, Российская Федерация, ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-3253-5697>, e-mail: [mik2178@yandex.ru](mailto:mik2178@yandex.ru)

## 1. ВВЕДЕНИЕ

В регрессионном анализе [1] простейшей принято считать модель множественной линейной регрессии:

$$y_i = \alpha_0 + \sum_{j=1}^m \alpha_j x_{ij} + \varepsilon_i, \quad i = \overline{1, n}, \quad (1)$$

где  $y_i, i = \overline{1, n}$  – значения зависимой (объясняемой) переменной  $y$ , содержащие ошибки  $\varepsilon_i, i = \overline{1, n}$ ;  $x_{ij}, i = \overline{1, n}, j = \overline{1, m}$  – значения  $m$  независимых (объясняющих) переменных, не содержащие ошибок;  $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_m$  – неизвестные параметры;  $n$  – объем выборки.

Технология оценивания и построения линейных регрессий (1) на сегодняшний день в высшей степени развита и подробно описана в многочисленной литературе [1–3]. Но значения независимых переменных даже при использовании современных технических средств также часто оказываются не вполне правильно измеренными. Поэтому возникает задача оценивания моделей с ошибками и в объясняющих переменных. В зарубежной литературе такие модели известны как «errors-in-variables models» (EIV-модели) или «measurement error models». Обзоры методов их оценивания можно найти в работах [4, 5].

Среди EIV-моделей высокое прикладное значение имеет регрессия Деминга [6], содержащая всего две переменных  $y$  и  $x$ , которая в клинических лабораториях служит прекрасным инструментом для численного сопоставления новых измерительных методов с существующими (см., например, [7,8]). Описание методов оценивания EIV-моделей с несколькими переменными можно найти в работе [9]. Такие модели имеют следующую спецификацию:

$$y_i = y_i^* + \varepsilon_i^{(y)}, \quad i = \overline{1, n}, \quad (2)$$

$$x_{ij} = x_{ij}^* + \varepsilon_i^{(x_j)}, \quad i = \overline{1, n}, \quad j = \overline{1, m}, \quad (3)$$

$$y_i^* = a_1 x_{i1}^* + a_2 x_{i2}^* + \dots + a_m x_{im}^*, \quad i = \overline{1, n}, \quad (4)$$

где  $y_i^*, x_{i1}^*, \dots, x_{im}^*, i = \overline{1, n}$  – неизвестные истинные значения переменных;  $\varepsilon_i^{(y)}, \varepsilon_i^{(x_1)}, \dots, \varepsilon_i^{(x_m)}, i = \overline{1, n}$  – случайные ошибки переменных;  $a_1, \dots, a_m$  – неизвестные параметры. Если дисперсии ошибок переменных одинаковы, то задача оценивания модели (2) – (4) состоит в минимизации суммы квадратов расстояний от точек выборки до плоскости. Такая регрессия была названа ортогональной [9]. Её оценивание осуществляется по следующему алгоритму.

Все наблюдения объединяются в одну матрицу  $U$ . В ней осуществляется центрирование всех столбцов.

Для матрицы  $U^T U$  находятся характеристические векторы и числа.

Выбирается минимальное характеристическое число и соответствующий минимальный характеристический вектор.

Как отмечено в [10], первой работой, в которой была рассмотрена ортогональная регрессия, была работа К. Пирсона [11].

Существуют и другие известные методы оценивания EIV-моделей (2) – (4) при равных дисперсиях ошибок переменных, например, метод наименьших полных квадратов (Total Least Squares, TLS), предложенный в [12].

В работах [13, 14] автором была предложена модель полносвязной линейной регрессии (МПЛР), обобщающая регрессию Деминга. В МПЛР все истинные переменные связаны между собой линейными функциональными зависимостями:

$$x_{ij}^* = a_j + b_j x_{im}^*, \quad i = \overline{1, n}, \quad j = \overline{1, m-1}, \quad (5)$$

где  $a_j, b_j, j = \overline{1, m-1}$  – неизвестные параметры.

Совокупность уравнений (3) и (5) представляет собой МПЛР.

Для приближенного оценивания МПЛР (3), (5) с помощью минимизации сумм квадратов ошибок в [14, 15] был предложен специальный численный метод, основанный на решении системы нелинейных уравнений методом простых итераций. При этом не исследовались проблемы, связанные с выбором начального приближения и выполнением достаточного признака сходимости метода. Поэтому в некоторых случаях он не обеспечивает требуемую точность, а может и вовсе расходиться.

Целью данной работы является разработка на основе метода Пирсона для ортогональной регрессии (2) – (4) метода решения оптимизационной задачи оценивания неизвестных параметров МПЛР (3), (5).

## 2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть в МПЛР (3), (5)  $\varepsilon_i^{(x_j)} \sim N\left(0, \sigma_{\varepsilon^{(x_j)}}^2\right)$ ,  $i = \overline{1, n}$ ,  $j = \overline{1, m}$ , т.е. ошибки имеют нормальные законы распределения с нулевыми математическими ожиданиями и постоянными дисперсиями. В [16] показано, что нахождение оценок МПЛР методом максимального правдоподобия требует решения следующей оптимизационной задачи:

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{m-1} \lambda_j (x_{ij} - a_j - b_j x_{im}^*)^2 + \sum_{i=1}^n (x_{im} - x_{im}^*)^2 \rightarrow \min, \quad (6)$$

где  $\lambda_j = \frac{\sigma_{\varepsilon^{(x_m)}}^2}{\sigma_{\varepsilon^{(x_j)}}^2}$ ,  $j = \overline{1, m-1}$  – отношения дисперсий ошибок переменных.

Применение необходимых условий экстремума функции (6) приводит к нелинейной системе [17]:

$$b_p \cdot D_{x_m^*} = K_{x_p x_m^*}, \quad p = \overline{1, m-1}, \quad (7)$$



где,  $D_{x_m}^* = \left( D_{x_m} + \sum_{j=1}^{m-1} \lambda_j^2 b_j^2 D_{x_j} + 2 \sum_{j_1=1}^{m-2} \sum_{j_2=j_1+1}^{m-1} \lambda_{j_1} \lambda_{j_2} b_{j_1} b_{j_2} K_{x_{j_1} x_{j_2}} + 2 \sum_{j=1}^{m-1} \lambda_j b_j K_{x_j x_m} \right) \left( 1 + \sum_{j=1}^{m-1} \lambda_j b_j^2 \right)^{-2}$   
 $K_{x_p x_m}^* = \left( 1 + \sum_{j=1}^{m-1} \lambda_j b_j^2 \right)^{-1} \left( \sum_{j=1}^{m-1} \lambda_j b_j K_{x_j x_p} + K_{x_m x_p} \right)$ , символом  $D$  обозначены дисперсии переменных,  $K$  – ковариации.

Для нахождения решения нелинейной системы (7), при котором функция (6) достигает глобального минимума, в [15] был предложен специальный численный метод. К сожалению, при решении некоторых прикладных задач этот метод не обеспечивал сходимость.

В [15] для оценки общего качества аппроксимации МПЛР предложен аддитивный коэффициент детерминации:

$$R_{\text{add}}^2 = \sum_{j=1}^m R_{x_j}^2,$$

где  $R_{x_j}^2$  – коэффициент детерминации для взаимосвязанной переменной  $x_j$ .

И в [15] показано, что оптимизационная задача  $R_{\text{add}}^2 \rightarrow \max$ , эквивалентна задаче (6) при условиях

$$\lambda_j = \frac{D_{x_m}}{D_{x_j}}, \quad j = \overline{1, m-1}. \quad (8)$$

Решение задачи (6) при условиях (8) имеет высокое прикладное значение, поскольку на её основе строятся множественно-полносвязные линейные регрессии [18]. Поэтому была поставлена следующая задача: для оценивания МПЛР (3), (5) разработать на основе метода Пирсона для ортогональной регрессии метод решения оптимизационной задачи (6) в условиях (8).

### 3. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ

Введем ковариационную матрицу  $V$  и корреляционную матрицу  $R_{xx}$ :

$$V = \begin{pmatrix} D_{x_1} & K_{x_1 x_2} & \dots & K_{x_1 x_m} \\ K_{x_1 x_2} & D_{x_2} & \dots & K_{x_2 x_m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ K_{x_1 x_m} & K_{x_2 x_m} & \dots & D_{x_m} \end{pmatrix}, \quad R_{xx} = \begin{pmatrix} 1 & r_{x_1 x_2} & \dots & r_{x_1 x_m} \\ r_{x_1 x_2} & 1 & \dots & r_{x_2 x_m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_{x_1 x_m} & r_{x_2 x_m} & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Введем нормированные (стандартизованные) переменные, значения которых находятся по формулам:

$$x_{i1}^* = \frac{x_{i1} - \bar{x}_1}{\sigma_{x_1}}, \dots, x_{im}^* = \frac{x_{im} - \bar{x}_m}{\sigma_{x_m}},$$



где  $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_m$  – средние значения переменных;

$\sigma_{x_1}, \dots, \sigma_{x_m}$  – среднеквадратические отклонения переменных;

$x_1^*, \dots, x_m^*$  – стандартизованные переменные, для которых среднее значение равно 0, а среднеквадратическое отклонение равно 1.

**Теорема.** Если МПЛР (3), (5) оценивается по критерию (6), то вектор оптимальных оценок её параметров  $(b_1 \dots b_{m-1} 1)$ :

- при  $\lambda_j = 1, j = \overline{1, m-1}$ , равен собственному вектору  $(\tilde{b}_1 \dots \tilde{b}_{m-1} 1)$ , соответствующему наименьшему собственному числу матрицы  $V^{-1}$ ;
- при условиях (8), равен вектору  $\left( \tilde{\beta}_1 \frac{\sigma_{x_1}}{\sigma_{x_m}} \dots \tilde{\beta}_{m-1} \frac{\sigma_{x_{m-1}}}{\sigma_{x_m}} 1 \right)$ , где  $(\tilde{\beta}_1 \dots \tilde{\beta}_{m-1} 1)$  – собственный вектор, соответствующий наименьшему собственному числу матрицы  $R_{xx}^{-1}$ .

*Доказательство.*

В работе [17] установлено, из нелинейной системы (7) вытекают соотношения

$$\lambda_p = \frac{\Delta_p}{b_p \cdot \Delta_m}, \quad p = \overline{1, m-1}, \quad (9)$$

где  $\Delta_j$  – определитель, полученный из определителя матрицы  $V$  путем замены в нём  $j$ -го столбца на столбец  $(b_1 \dots b_{m-1} 1)^T$ .

Составим систему с неизвестными  $z_1, z_2, \dots, z_m$ :

$$\begin{pmatrix} D_{x_1} & K_{x_1x_2} & \dots & K_{x_1x_m} \\ K_{x_1x_2} & D_{x_2} & \dots & K_{x_2x_m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ K_{x_1x_m} & K_{x_2x_m} & \dots & D_{x_m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \dots \\ z_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \dots \\ b_{m-1} \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (10)$$

Пусть  $z_1 = \chi \cdot \lambda_1 b_1, z_2 = \chi \cdot \lambda_2 b_2, \dots, z_{m-1} = \chi \cdot \lambda_{m-1} b_{m-1}, z_m = \chi$ , где  $\chi$  – отличное от нуля неизвестное число.

Тогда система (10) примет вид:

$$\begin{pmatrix} D_{x_1} & K_{x_1x_2} & \dots & K_{x_1x_m} \\ K_{x_1x_2} & D_{x_2} & \dots & K_{x_2x_m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ K_{x_1x_m} & K_{x_2x_m} & \dots & D_{x_m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi \cdot \lambda_1 b_1 \\ \dots \\ \chi \cdot \lambda_{m-1} b_{m-1} \\ \chi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \dots \\ b_{m-1} \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (11)$$

Запишем для системы (11) формулы Крамера:

$$\chi \cdot \lambda_1 b_1 = \frac{\Delta_1}{|V|}, \dots, \chi \cdot \lambda_{m-1} b_{m-1} = \frac{\Delta_{m-1}}{|V|}, \chi = \frac{\Delta_m}{|V|}. \quad (12)$$



Обозначим любое решение системы (11)  $\chi = \tilde{\chi}$ ,  $b_j = \tilde{b}_j$ ,  $j = \overline{1, m-1}$ . Тогда формулы (12) примут вид:

$$\tilde{\chi} \cdot \lambda_1 \tilde{b}_1 = \frac{\Delta_1}{|V|}, \dots, \tilde{\chi} \cdot \lambda_{m-1} \tilde{b}_{m-1} = \frac{\Delta_{m-1}}{|V|}, \tilde{\chi} = \frac{\Delta_m}{|V|}.$$

Поделив первые  $(m-1)$  уравнений на последнее, получим

$$\lambda_1 \tilde{b}_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta_m}, \dots, \lambda_{m-1} \tilde{b}_{m-1} = \frac{\Delta_{m-1}}{\Delta_m},$$

т.е. все решения системы (11) также являются решениями систем (7) и (9). Далее будем искать решения системы (11).

Домножим выражение (11) на  $V^{-1}$  слева, учитывая, что  $|V| \neq 0$ . Получим

$$\begin{pmatrix} D_{x_1} & K_{x_1 x_2} & \dots & K_{x_1 x_m} \\ K_{x_1 x_2} & D_{x_2} & \dots & K_{x_2 x_m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ K_{x_1 x_m} & K_{x_2 x_m} & \dots & D_{x_m} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} b_1 \\ \dots \\ b_{m-1} \\ 1 \end{pmatrix} = \chi \begin{pmatrix} \lambda_1 b_1 \\ \dots \\ \lambda_{m-1} b_{m-1} \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (13)$$

Выражение (13) означает, что матрица линейного оператора  $V^{-1}$  преобразует вектор  $(b_1 \dots b_{m-1} 1)^T$  в вектор  $\chi (\lambda_1 b_1 \dots \lambda_{m-1} b_{m-1} 1)^T$ .

Если  $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_{m-1} = 1$  (дисперсии ошибок одинаковы), то выражение (13) принимает вид:

$$\begin{pmatrix} D_{x_1} & K_{x_1 x_2} & \dots & K_{x_1 x_m} \\ K_{x_1 x_2} & D_{x_2} & \dots & K_{x_2 x_m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ K_{x_1 x_m} & K_{x_2 x_m} & \dots & D_{x_m} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} b_1 \\ \dots \\ b_{m-1} \\ 1 \end{pmatrix} = \chi \begin{pmatrix} b_1 \\ \dots \\ b_{m-1} \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (14)$$

Из (14) следует, что при  $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_{m-1} = 1$  вектор  $(b_1 \dots b_{m-1} 1)^T$  – собственный вектор матрицы  $V^{-1}$ , а  $\chi$  – соответствующее ему собственное значение.

Матрица  $V^{-1}$  может иметь до  $m$  собственных значений. Определим, какое из них обеспечивает глобальный минимум задачи (6).

Известно, что, с одной стороны, коэффициенты детерминации взаимосвязанных

переменных находятся по формулам  $R_{x_j}^2 = 1 - \frac{\sum_{i=1}^n \varepsilon_i^{(x_j)}}{D_{x_j}}$ ,  $j = \overline{1, m}$ . Тогда задачу (6) можно представить в виде

$$\sum_{j=1}^{m-1} \lambda_j D_{x_j} (1 - R_{x_j}^2) + D_{x_m} (1 - R_{x_m}^2) \rightarrow \min,$$

что равносильно следующей постановке:

$$\sum_{j=1}^{m-1} \lambda_j D_{x_j} R_{x_j}^2 + D_{x_m} R_{x_m}^2 \rightarrow \max . \quad (15)$$

С другой стороны, коэффициенты детерминации взаимосвязанных переменных можно найти по формулам  $R_{x_j}^2 = \frac{K^2_{x_j x_m^*}}{D_{x_j} D_{x_m^*}}$ ,  $j = \overline{1, m}$ , или, с использованием (7), по формулам

$$R_{x_j}^2 = \frac{b_j^2 D_{x_m^*}}{D_{x_j}}, \quad j = \overline{1, m-1}, \quad R_{x_m}^2 = \frac{D_{x_m^*}}{D_{x_m}} . \quad (16)$$

Подставляя (16) в (15), получим:

$$D_{x_m^*} \left( 1 + \sum_{j=1}^{m-1} \lambda_j b_j^2 \right) \rightarrow \max . \quad (17)$$

В [17] установлено, что  $D_{x_m^*} = \left( 1 + \sum_{j=1}^{m-1} \lambda_j b_j^2 \right)^{-1} \cdot \frac{|V|}{\Delta_m}$ . Тогда задача (17) примет вид  $\frac{|V|}{\Delta_m} \rightarrow \max$ . Как следует из (12),  $\chi = \frac{\Delta_m}{|V|}$ , поэтому задаче (17) равносильна задача

$$\chi^{-1} \rightarrow \max . \quad (18)$$

Выражение (18) означает, что в точке глобального минимума функции (6) величина  $\chi$  должна принимать наименьшее значение. Поэтому при  $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_{m-1} = 1$  нужно выбрать тот собственный вектор матрицы  $V^{-1}$ , который соответствует наименьшему собственному значению  $\chi$ .

Вторая часть теоремы доказывается аналогично. Для этого запишем МПЛР (3), (5) в стандартизованном виде [19]

$$x_{ij}^* = x_{ij}^{**} + \varepsilon_i^{(x_j^*)}, \quad i = \overline{1, n}, \quad j = \overline{1, m}, \quad (19)$$

$$x_{ij}^{**} = \beta_j x_{im}^{**}, \quad i = \overline{1, n}, \quad j = \overline{1, m-1}, \quad (20)$$

где  $x_{i1}^*, \dots, x_{im}^*$ ,  $i = \overline{1, n}$  – неизвестные истинные значения стандартизованных переменных;  $\beta_1, \dots, \beta_{m-1}$  – стандартизованные коэффициенты (бета-коэффициенты);  $\varepsilon_i^{(x_j^*)}$ ,  $i = \overline{1, n}$ ,  $j = \overline{1, m}$  – случайные ошибки переменных.

Тогда нахождение оценок МПЛР (19), (20) методом максимального правдоподобия требует решения следующей оптимизационной задачи:

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{m-1} \lambda_j \cdot (x_{ij}^* - \beta_j x_{im}^{**})^2 + \sum_{i=1}^n (x_{im}^* - x_{im}^{**})^2 \rightarrow \min , \quad (21)$$



где  $\lambda_j^* = \frac{\sigma_{\varepsilon(x_m)}^2}{\sigma_{\varepsilon(x_j)}^2}$ ,  $j = \overline{1, m-1}$ . Причем, поскольку  $\sigma_{\varepsilon(x_j)}^2 = \sigma_{\varepsilon(x_j)}^2 / D_{x_j}$ ,  $j = \overline{1, m}$ , то имеют

место следующие соотношения:

$$\lambda_j^* = \frac{\sigma_{\varepsilon(x_m)}^2}{\sigma_{\varepsilon(x_j)}^2} = \frac{\sigma_{\varepsilon(x_m)}^2}{\sigma_{\varepsilon(x_j)}^2} \cdot \frac{D_{x_j}}{D_{x_m}} = \lambda_j \cdot \frac{D_{x_j}}{D_{x_m}}, \quad j = \overline{1, m}. \quad (22)$$

Для задачи (21) система (13) имеет вид

$$\begin{pmatrix} 1 & r_{x_1x_2} & \dots & r_{x_1x_m} \\ r_{x_1x_2} & 1 & \dots & r_{x_2x_m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_{x_1x_m} & r_{x_2x_m} & \dots & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \dots \\ \beta_{m-1} \\ 1 \end{pmatrix} = \chi \begin{pmatrix} \lambda_1^* \beta_1 \\ \dots \\ \lambda_{m-1}^* \beta_{m-1} \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (23)$$

Из (23) следует, что при  $\lambda_1^* = \lambda_2^* = \dots = \lambda_{m-1}^* = 1$  вектор  $(\beta_1 \dots \beta_{m-1} 1)^T$  – собственный вектор матрицы  $R_{xx}^{-1}$ , а  $\chi$  – соответствующее ему собственное значение. Аналогично, глобальный минимум функции (21) обеспечивает наименьшее собственное значение.

Из соотношений (22) следует, что задачи поиска глобальных минимумов функции (21) для МПЛР (19), (20) при  $\lambda_1^* = \lambda_2^* = \dots = \lambda_{m-1}^* = 1$  и функции (6) для МПЛР (3), (5) при условиях (8) эквивалентны.

Оценки МПЛР (3), (5) связаны с оценками МПЛР (19), (20) соотношениями  $b_j = \beta_j \frac{\sigma_{x_j}}{\sigma_{x_m}}$ ,  $j = \overline{1, m-1}$ . С помощью этих формул, зная собственный вектор матрицы  $R_{xx}^{-1}$ , соответствующий наименьшему собственному значению, находятся оценки МПЛР (3), (5) в условиях (8).

*Теорема доказана.*

Алгоритмы поиска собственных значений и собственных векторов симметричных матриц широко известны (см., например, [20]).

## 4. ЧИСЛЕННЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ

Для демонстрации справедливости доказанной теоремы на практике была взята задача оценивания МПЛР, решенная в работе [17] при условиях (8). В качестве взаимосвязанных переменных выступают:  $x_j$  – население в трудоспособном возрасте (%),  $x_2$  – численность рабочей силы (тыс. человек),  $x_3$  – численность пенсионеров (тыс. человек). Ковариационная и корреляционная матрицы для этих переменных имеют вид:



$$V = \begin{pmatrix} 9,096 & 121,234 & -93,284 \\ 121,234 & 2403,759 & -1451,256 \\ -93,284 & -1451,256 & 1176,521 \end{pmatrix}, R_{xx} = \begin{pmatrix} 1 & 0,8198 & -0,9017 \\ 0,8198 & 1 & -0,8629 \\ -0,9017 & -0,8629 & 1 \end{pmatrix}.$$

Сначала оптимизационная задача (6) решалась с помощью предложенного в работе [15] численного метода. Для этого был разработан специальный скрипт на языке `hansl` эконометрического пакета `Gretl`. В качестве начальных приближений для параметров  $b_1$  и  $b_2$  МПЛР были взяты МНК-оценки парных регрессий  $x_1$  от  $x_3$  и  $x_2$  от  $x_3$ :

$$b_1^0 = -0,079288, b_2^0 = -1,233514.$$

Точность сходимости была установлена 0,0000001.

В результате численного оценивания МПЛР при условиях  $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$  за 7 итераций были получены оценки

$$\tilde{b}_1 = -0,082087, \tilde{b}_2 = -1,508027,$$

а при условиях (8)  $\lambda_1 = 129,3403, \lambda_2 = 0,4894$  за 31 итерацию – оценки

$$\tilde{b}_1 = -0,08653069, \tilde{b}_2 = -1,38485469.$$

Затем решение оптимизационной задачи (6) осуществлялось предложенным в данной статье методом. Обратная матрица для матрицы  $V$  имеет вид:

$$V^{-1} = \begin{pmatrix} 0,6105 & -0,0061 & 0,0408 \\ -0,0061 & 0,0016 & 0,0015 \\ 0,0408 & 0,0016 & 0,0060 \end{pmatrix}.$$

Для этой матрицы были найдены следующие собственные числа и соответствующие им собственные векторы:

- для числа  $\chi_1 = 0,000296$  вектор  $(-0,082087 \quad -1,508027 \quad 1)^T$ ;
- для числа  $\chi_2 = 0,00465$  вектор  $(-0,060655 \quad 0,66642 \quad 1)^T$ ;
- для числа  $\chi_3 = 0,61331$  вектор  $(14,875743 \quad -0,14662 \quad 1)^T$ .

Тогда при  $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$  оптимальные оценки параметров  $b_1$  и  $b_2$  МПЛР равны компонентам собственного вектора, соответствующего наименьшему собственному числу  $\chi_1 = 0,000296$  матрицы  $V^{-1}$ , т.е.  $\tilde{b}_1 = -0,082087, \tilde{b}_2 = -1,508027$ .

Обратная матрица для матрицы  $R_{xx}$  имеет вид:

$$R_{xx}^{-1} = \begin{pmatrix} 5,5533 & -0,9073 & 4,2246 \\ -0,9073 & 4,0656 & 2,6903 \\ 4,2246 & 2,6903 & 7,1312 \end{pmatrix}.$$



Найденные для этой матрицы собственные числа и соответствующие им собственные векторы оказались следующими:

- для числа  $\chi_1 = 0,367176$  вектор  $(-0,984094 \quad -0,968857 \quad 1)^T$ ;
- для числа  $\chi_2 = 5,389291$  вектор  $(-3,028804 \quad 4,108581 \quad 1)^T$ ;
- для числа  $\chi_3 = 10,993702$  вектор  $(0,727665 \quad 0,293035 \quad 1)^T$ .

Наименьшее собственное число  $\chi_1 = 0,367176$ , поэтому оптимальные оценки параметров  $\beta_1$  и  $\beta_2$  равны компонентам соответствующего собственного вектора матрицы  $R_{xx}^{-1}$ , т.е.  $\tilde{\beta}_1 = -0,984094$ ,  $\tilde{\beta}_2 = -0,968857$ . Тогда оптимальные оценки параметров  $b_1$  и  $b_2$  МПЛР при условиях (8)  $\lambda_1 = 129,3403$ ,  $\lambda_2 = 0,4894$  находятся по формулам:

$$\tilde{b}_1 = \tilde{\beta}_1 \frac{\sigma_{x_1}}{\sigma_{x_3}} = -0,08653,$$

$$\tilde{b}_2 = \tilde{\beta}_2 \frac{\sigma_{x_2}}{\sigma_{x_3}} = -1,38485.$$

Как видно, решения оптимизационной задачи (6) оценивания МПЛР (3), (5) разработанным ранее численным методом и решения предложенным в данной статье методом совпадают.

## 5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе найдено решение оптимизационной задачи оценивания МПЛР (3), (5) по критерию (6). Доказано, что при  $\lambda_j = 1$ ,  $j = 1, m-1$ , оценки параметров  $b_1$ ,  $b_2$ , ...,  $b_{m-1}$  равны компонентам собственного вектора, соответствующего наименьшему собственному числу матрицы  $V^{-1}$ , а при условиях (8) – компонентам собственного вектора, соответствующего наименьшему собственному числу матрицы  $R_{xx}^{-1}$ , умноженным на числа  $\frac{\sigma_{x_j}}{\sigma_{x_m}}$ ,  $j = 1, m-1$ . Корректность доказанной теоремы продемонстрирована на ранее решенном примере оценивания МПЛР методом простых итераций. Новым способом были получены те же самые оценки. Достоинство нового способа решения задачи оценивания МПЛР состоит в том, что нет необходимости в выборе начального приближения и в проверке выполнения достаточного признака сходимости численного метода. К тому же на сегодняшний день существуют эффективные алгоритмы поиска собственных значений и собственных векторов симметричных матриц. К недостатку можно отнести то, что новый метод справедлив только тогда, когда определители матриц  $V$  и  $R_{xx}$  отличны от нуля, т.е. при отсутствии полной коллинеарности между взаимосвязанными переменными.

### Литература

1. *Montgomery D.C., Peck E.A., Vining G.G.* Introduction to linear regression analysis. John Wiley & Sons, 2021.



2. *Тырсин А.Н.* Алгоритмы спуска по узловым прямым в задаче оценивания регрессионных уравнений методом наименьших модулей // Заводская лаборатория. Диагностика материалов. 2021. Т. 87. № 5. С. 68–75.
3. *Liu Z., Yang Y.* Least absolute deviations estimation for uncertain regression with imprecise observations // Fuzzy Optimization and Decision Making. 2020. Vol. 19. P. 33–52.
4. *Кендалл М., Стьюарт А.* Статистические выводы и связи. М.: Наука, 1973. 899 с.
5. *Gillard J.* An overview of linear structural models in errors in variables regression // REVSTAT: Statistical Journal. 2010. Vol. 8. № 1. P. 57–80. DOI: 10.57805/revstat.v8i1.90
6. *Deming W.E.* Statistical adjustment of data. New York, Wiley, 2011. 288 p.
7. *Wickremsinhe E., et al.* Standard venipuncture vs a capillary blood collection device for the prospective determination of abnormal liver chemistry // The Journal of Applied Laboratory Medicine. 2023. Vol. 8. № 3. P. 535–550. DOI: 10.1093/jalm/jfac127
8. *Tantisaranon P., Dumkengkachornwong K., Hnoonual A.* Influence of reduced centrifugation time on clinical chemistry analytes and literature review // Turkish Journal of Biochemistry. 2023. Vol. 48. № 4. P. 376–387. DOI: 10.1515/tjb-2022-0211
9. *Демиденко Е.З.* Линейная и нелинейная регрессии. М.: Финансы и статистика, 1981. 304 с.
10. *Ломов А.А.* Идентифицируемость и вариационные оценки параметров дискретных стационарных линейных динамических систем: дис. ... д-ра физ.-мат. наук: 05.13.01. Новосибирск, 2011. 356 с.
11. *Pearson K.* On lines and planes of closet fit to systems of points in space // Phil. Mag. 1901. Vol. 6. № 2. P. 559–572.
12. *Golub G.H., Van Loan C.F.* An analysis of the total least squares problem // SIAM Journal on Numerical Analysis. 1980. Vol. 17. № 6. P. 883–893.
13. *Базилевский М.П.* Исследование двухфакторной модели полностью связанной линейной регрессии // Моделирование, оптимизация и информационные технологии. 2019. Т. 7. № 2 (25). С. 80–96.
14. *Базилевский М.П.* Методы построения регрессионных моделей с ошибками во всех переменных. Иркутск: ИрГУПС, 2019. 208 с.
15. *Базилевский М.П.* Метод выпрямления искаженных из-за мультиколлинеарности коэффициентов в регрессионных моделях // Информатика и её применения. 2021. Т. 15. № 2. С. 60–65. DOI:10.14357/19922264210209
16. *Базилевский М.П.* Интерпретация оценок параметров моделей полностью связанной линейной регрессии // International Journal of Open Information Technologies. 2023. Т. 11. № 10. С. 21–25.
17. *Базилевский М.П.* Идентификация областей возможных оценок параметров моделей полностью связанной линейной регрессии // Моделирование и анализ данных. 2023. Т. 13. № 3. С. 52–65. DOI:10.17759/mda.2023130304
18. *Базилевский М.П.* Математическое моделирование с помощью множественно-полностью связанных линейных регрессий // System Analysis & Mathematical Modeling. 2023. Т. 5. № 4. С. 457–475.
19. *Фёрстер Э., Рёнц Б.* Методы корреляционного и регрессионного анализа. М.: Финансы и статистика, 1983. 303 с.
20. *Имомов А.* Алгоритмы методов Крылова и Данилевского для собственных значений и векторов матриц // PEDAGOG. 2023. Т. 6. № 2. С. 104–111.



## Solving an Optimization Problem for Estimating Fully Connected Linear Regression Models

**Mikhail P. Bazilevskiy\***

Irkutsk State Transport University (ISTU), Irkutsk, Russia

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-3253-5697>

e-mail: [mik2178@yandex.ru](mailto:mik2178@yandex.ru)

This article is devoted to the problem of estimating fully connected linear regression models using the maximum likelihood method. Previously, a special numerical method was developed for this purpose, based on solving a nonlinear system using the method of simple iterations. At the same time, the issues of choosing initial approximations and fulfilling sufficient conditions for convergence were not studied. This article proposes a new method for solving the optimization problem of estimating fully connected regressions, similar to the method of estimating orthogonal regressions. It has been proven that, with equal error variances of interconnected variables, estimates of b-parameters of fully connected regression are equal to the components of the eigenvector corresponding to the smallest eigenvalue of the inverse covariance matrix. And if the ratios of the error variances of the variables are equal to the ratios of the variances of the variables, then the b-parameter estimates are equal to the components of the eigenvector corresponding to the smallest eigenvalue of the inverse correlation matrix, multiplied by the specific ratios of the standard deviations of the variables. A numerical experiment was carried out to confirm the correctness of the developed mathematical apparatus. The proposed method for solving the optimization problem of estimating fully connected regressions can be effectively used when solving problems of constructing multiple fully connected linear regressions.

**Keywords:** fully connected linear regression model, maximum likelihood estimation, numerical method, optimization, orthogonal regression, correlation matrix, eigenvector, eigenvalue.

### For citation:

Bazilevskiy M.P. Solving an Optimization Problem for Estimating Fully Connected Linear Regression Models. *Modelirovanie i analiz dannykh = Modelling and Data Analysis*, 2024. Vol. 14, no. 1, pp. 121–134. DOI: <https://doi.org/10.17759/mda.2024140108> (In Russ., abstr. in Engl.).

\***Mikhail P. Bazilevskiy**, PhD (Engineering), Associate Professor, Department of Mathematics, Irkutsk State Transport University (ISTU), Irkutsk, Russia, ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-3253-5697>, e-mail: [mik2178@yandex.ru](mailto:mik2178@yandex.ru)

## References

1. Montgomery D.C., Peck E.A., Vining G.G. *Introduction to linear regression analysis*. John Wiley & Sons, 2021.
2. Tyrsin A.N. Algoritmy spuska po uzlovykh pryamym v zadache otsenivaniya regressiionnykh uravneniy metodom naimen'shikh moduley [Algorithms for descent along nodal straight lines in the problem of estimating regression equations using the least absolute deviations method], *Industrial Laboratory. Diagnostics of Materials*, 2021, vol. 87, no. 5, pp. 68–75.
3. Liu Z., Yang Y. Least absolute deviations estimation for uncertain regression with imprecise observations, *Fuzzy Optimization and Decision Making*, 2020, vol. 19, pp. 33–52.
4. Kendall M., St'yuart A. *Statisticheskie vyvody i svyazi* [Statistical findings and connections]. Moscow, Science, 1973. 899 p.
5. Gillard J. An overview of linear structural models in errors in variables regression, *REVSTAT: Statistical Journal*, 2010, vol. 8, no. 1, pp. 57–80. DOI: 10.57805/revstat.v8i1.90
6. Deming W.E. *Statistical adjustment of data*. New York, Wiley, 2011. 288 p.
7. Wickremsinhe E., et al. Standard venipuncture vs a capillary blood collection device for the prospective determination of abnormal liver chemistry, *The Journal of Applied Laboratory Medicine*, 2023, vol. 8, no. 3, pp. 535–550. DOI: 10.1093/jalm/jfac127
8. Tantisaranon P., Dumkengkachornwong K., Hnoonual A. Influence of reduced centrifugation time on clinical chemistry analytes and literature review, *Turkish Journal of Biochemistry*, 2023, vol. 48, no. 4, pp. 376–387. DOI: 10.1515/tjb-2022-0211
9. Demidenko E.Z. *Lineynaya i nelineynaya regressii* [Linear and nonlinear regressions]. Moscow, Finansy i statistika, 1981. 304 p.
10. Lomov A.A. *Identifitsiruemost' i variatsionnye otsenki parametrov diskretnykh statsionarnykh lineynykh dinamicheskikh sistem* [Identifiability and variational estimates of parameters of discrete stationary linear dynamic systems]. Novosibirsk, 2011. 356 p.
11. Pearson K. On lines and planes of closet fit to systems of points in space, *Phil. Mag*, 1901, vol. 6, no. 2, pp. 559–572.
12. Golub G.H., Van Loan C.F. An analysis of the total least squares problem, *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 1980, vol. 17, no. 6, pp. 883–893.
13. Bazilevskiy M.P. Issledovanie dvukhfaktornoy modeli polnosvyaznoy lineynoy regressii [Investigation of a two-factor fully connected linear regression model], *Modeling, Optimization and Information Technology*, 2019, vol. 7, no. 2 (25), pp. 80–96.
14. Bazilevskiy M.P. *Metody postroeniya regressiionnykh modeley s oshibkami vo vsekh peremennykh* [Methods for constructing errors-in-variables regression models]. Irkutsk, IrGUPS, 2019. 208 p.
15. Bazilevskiy M.P. Metod vypryamleniya iskazhennykh iz-za mul'tikollinearnosti koeffitsientov v regressiionnykh modelyakh [Method of straightening distorted due to multicollinearity coefficients in regression models], *Informatics and Applications*, 2021, vol. 15, no. 2, pp. 60–65. DOI:10.14357/19922264210209
16. Bazilevskiy M.P. Interpretatsiya otsenok parametrov modeley polnosvyaznoy lineynoy regressii [Interpretation of Parameter Estimates for Fully Connected Linear Regression Models], *International Journal of Open Information Technologies*, 2023, vol. 11, no. 10, pp. 21–25.
17. Bazilevskiy M.P. Identifikatsiya oblastey vozmozhnykh otsenok parametrov modeley polnosvyaznoy lineynoy regressii [Identification of possible estimates areas for parameters of fully connected linear regression models], *Modeling and Data Analysis*, 2023, vol. 13, no. 3, pp. 52–65. DOI:10.17759/mda.2023130304
18. Bazilevskiy M.P. Matematicheskoe modelirovanie s pomoshch'yu mnozhestvenno-polnosvyaznykh lineynykh regressii [Mathematical modeling using multiple and fully-connected linear regressions], *System Analysis & Mathematical Modeling*, 2023, vol. 5, no. 4, pp. 457–475.



19. Ferster E., Rents B. *Metody korrelyatsionnogo i regressionnogo analiza* [Methods of correlation and regression analysis]. Moscow, Finansy i statistika, 1983. 303 p.
20. Imomov A. Algoritmy metodov Krylova i Danilevskogo dlya sobstvennykh znacheniy i vektorov matrits [Algorithms of Krylov and Danilevsky methods for eigenvalues and matrix vectors], *PEDAGOG*, 2023, vol. 6, no. 2, pp. 104–111.

Получена 15.01.2024

Принята в печать 30.01.2024

Received 15.01.2024

Accepted 30.01.2024

УДК 519.853, 517.977.58

## Приближенный синтез оптимальных детерминированных систем управления с неполной обратной связью на основе достаточных условий $\varepsilon$ -оптимальности

**Пантелеев А.В.\***

Московский авиационный институт  
(национальный исследовательский университет)  
г. Москва, Российская Федерация  
ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-2493-3617>  
e-mail: [avpanteleev@inbox.ru](mailto:avpanteleev@inbox.ru)

**Каранэ М.М.С.\*\***

Московский авиационный институт  
(национальный исследовательский университет)  
г. Москва, Российская Федерация  
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-8019-8613>  
e-mail: [mm\\_karane@mail.ru](mailto:mm_karane@mail.ru)

Рассматривается задача оптимального управления детерминированными динамическими системами в условиях отсутствия информации о части координат вектора состояния. Сформулированы и доказаны достаточные условия  $\varepsilon$ -оптимальности на основе принципа расширения. Предложен алгоритм нахождения априорной оценки близости синтезированного закона управления с неполной обратной связью к оптимальному на заданном множестве начальных состояний. Приведено решение модельного примера.

**Ключевые слова:** достаточные условия оптимальности, оптимальная синтезирующая функция, мультиагентный алгоритм, вычисление априорной оценки.

Для цитаты:

Пантелеев А.В., Каранэ М.М.С. Приближенный синтез оптимальных детерминированных систем управления с неполной обратной связью на основе достаточных условий  $\varepsilon$ -оптимальности // Моделирование и анализ данных. 2024. Том 14. № 1. С. 135–154.  
DOI: <https://doi.org/10.17759/mda.2024140109>

\*Пантелеев Андрей Владимирович, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой математической кибернетики института «Компьютерные науки и прикладная



математика» Московского авиационного института (Национального исследовательского университета), г. Москва, Российская Федерация, ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-2493-3617>, e-mail: [avpanteleev@inbox.ru](mailto:avpanteleev@inbox.ru)

**\*\*Каранэ Мария Магдалина Сергеевна**, аспирант кафедры математической кибернетики института «Компьютерные науки и прикладная математика» Московского авиационного института (Национального исследовательского университета), г. Москва, Российская Федерация, ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-8019-8613>, e-mail: [mm\\_karane@mail.ru](mailto:mm_karane@mail.ru)

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Решение задач оптимального управления детерминированными системами, поведение которых описывается обыкновенными дифференциальными уравнениями, как правило, связано с нахождением программного управления или управления с полной обратной связью по вектору состояния. Методы поиска программного управления связаны с применением принципа максимума Л.С. Понтрягина и численных методов решения двухточечных краевых задач, применением итерационных процедур на основе использования первой и второй вариации функционала, с нахождением наилучших параметров разложений по элементам базисных систем при помощи методов оптимизации [1–8]. Поиск оптимального управления с полной обратной связью связан с определением решений уравнения Беллмана [9–14]. Отдельно следует выделить группу численных методов, основанных на применении принципа расширения и достаточных условий оптимальности [9–13]. Методы решения задач синтеза управления с неполной обратной связью, когда информация обо всех координатах вектора состояния недоступна, еще недостаточно развиты. В [15] приведены достаточные условия оптимальности управления с неполной обратной связью и соотношения для его определения. В данной статье предлагается численный алгоритм решения, основанный на применении ортогональных разложений [8], априорных оценок близости найденного алгоритма управления к оптимальному и мультиагентных алгоритмов глобальной оптимизации. Сформулированы и доказаны достаточные условия  $\varepsilon$ -оптимальности искомого управления, получена формула для вычисления априорной оценки. Данная работа развивает исследования применимости таких оценок, начатые в работах [9–12] и продолженные в [16, 17].

## 2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть поведение модели объекта управления описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x(t), u(t)), \quad x(t_0) = x_0, \quad (1)$$

где  $x$  – вектор состояния системы,  $x = (x^1, x^2)^T \in R^n$ ,  $x^1 = (x_1, \dots, x_m)^T$ ,  $x^2 = (x_{m+1}, \dots, x_n)^T$ ,  $0 \leq m \leq n$  (предположим, что о компонентах вектора  $x^1 \in R^m$  известна текущая информация, а о компонентах вектора  $x^2 \in R^{n-m}$  она отсутствует);



$u$  – вектор управления,  $u \in U \subseteq R^q$ ,  $U$  – некоторое заданное множество;  $t$  – время,  $t \in T' = [t_0, t_f] = T \cup \{t_0\} \cup \{t_f\}$ ,  $T'$  – промежуток времени функционирования системы, моменты времени  $t_0$  и  $t_f$  заданы,  $T = (t_0, t_f)$ ; внешние воздействия на объект управления отсутствуют,  $f(t, x, u): T' \times R^n \times U \rightarrow R^n$  – непрерывно дифференцируемая функция.

Обозначим:  $B = R^n, B_1 = R^m, B_2 = R^{n-m}$ ;  $Q = (t_0, t_f) \times R^n$ ,  $Q' = [t_0, t_f] \times R^n$ .

Начальные условия  $x(t_0) = x_0$  заданы множеством  $\Omega \subseteq R^n$ , размерность которого равна  $m$ , т.е.

$$x(t_0) \in \Omega = \left\{ x \mid x^2 = y_0(x^1), x^1 \in R^m = B_1 \right\}, \quad (2)$$

где  $y_{0j}(x^1)$ ,  $j = m+1, \dots, n$ , – заданные непрерывно дифференцируемые функции. При  $m = 0$  множество  $\Omega$  является точкой, а при  $m = n$  совпадает с множеством  $R^n$ . Условия на вектор состояния на правом конце промежутка времени  $T'$  не заданы.

Предполагается, что при управлении используется информация только о времени  $t$  и о компонентах вектора  $x^1$ , т.е. управление  $u(t)$ , применяемое в каждый момент времени  $t \in T'$ , имеет вид управления  $u(t) = \mathbf{u}(t, x^1(t))$  с неполной обратной связью по вектору состояния (рис. 1).

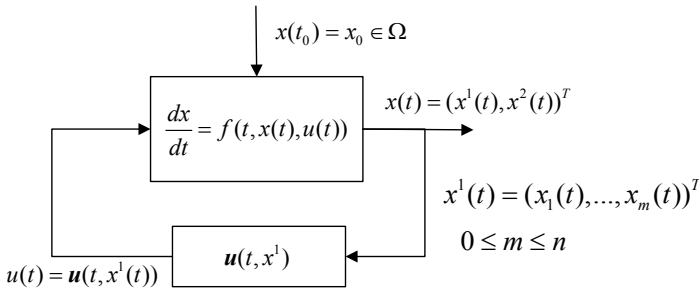


Рис. 1

Множество допустимых управлений  $U_m$  с неполной обратной связью образуют функции  $\mathbf{u}(t, x^1): T' \times B_1 \rightarrow U$  такие, что функции  $f_i(t, x, \mathbf{u}(t, x^1))$ ,  $i = 1, \dots, n$ , определены на  $Q'$ , непрерывны вместе с частными производными по  $x$ , кусочно-непрерывны по  $t$ . При этом управление  $u(t) = \mathbf{u}(t, x^1(t))$  кусочно-непрерывно по  $t$ , а в точках разрыва значение управления определяется как предел справа.

Определим множество допустимых элементов  $D(t_0, x_0)$  как множество пар  $d = (x(t), u(t))$ , удовлетворяющих уравнению (1) с начальным условием (2) почти всюду на  $T'$ , где  $\forall t \in T' x(t) \in R^n, u(t) \in U$ , функции  $x(t)$  непрерывны и кусочно-дифференцируемы, а  $u(t)$  кусочно-непрерывны.

На множестве  $D(t_0, x_0)$  определим функционал качества управления

$$I(d) = \int_{t_0}^{t_f} f^0(t, x(t), u(t)) dt + F(x(t_f)), \quad (3)$$



где  $f^0(t, x, u)$ ,  $F(x)$  – заданные непрерывно дифференцируемые функции.

Требуется найти такую функцию  $\mathbf{u}^*(t, x^1) \in U_m$ , что

$$I(d^*) = \min_{d \in D(t_0, x_0)} I(d) \quad \forall x_0 \in \Omega, \quad (4)$$

где  $d^* = (x^*(t), u^*(t) = \mathbf{u}^*(t, x^{1*}(t)))$ .

Функция  $\mathbf{u}^*(t, x^1) \in U_m$  называется оптимальной синтезирующей функцией на множестве  $\Omega$ . Для каждого начального условия из множества  $\Omega$  она порождает оптимальную пару, т.е. оптимальную траекторию  $x^*(t)$  и оптимальное программное управление  $u^*(t)$ . Предполагается, что минимум в (4) и функция  $\mathbf{u}^*(t, x^1)$  существуют.

Подчеркнем, что число используемых в управлении координат вектора состояния совпадает с размерностью множества начальных состояний  $\Omega$ . При  $m = 0$  множество  $\Omega$  является точкой  $x_0$ , для которой ищется оптимальное программное управление  $u^*(t)$ , а при  $m = n$  множество  $\Omega$  совпадает с  $n$ -мерным евклидовым пространством и ищется оптимальное управление с полной обратной связью по вектору состояния  $\mathbf{u}^*(t, x)$ .

Рассмотрим проблему поиска приближенного решения задачи (4).

Требуется найти такую функцию  $\mathbf{u}^\varepsilon(t, x^1) \in U_m$ , что

$$|I(d^\varepsilon) - I(d^*)| \leq \varepsilon \quad \forall x_0 \in \Omega, \quad (5)$$

где  $d^* = (x^*(t), u^*(t) = \mathbf{u}^*(t, x^{1*}(t)))$ ,  $d^\varepsilon = (x^\varepsilon(t), u^\varepsilon(t) = \mathbf{u}^\varepsilon(t, x^{1\varepsilon}(t)))$ ,  $I(d^*) = \min_{d \in D(t_0, x_0)} I(d)$ ,  $\varepsilon$  – малое положительное число. Функция  $\mathbf{u}^\varepsilon(t, x^1)$  называется  $\varepsilon$ -оптимальной синтезирующей функцией на множестве  $\Omega$ .

### 3. ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ $\varepsilon$ -ОПТИМАЛЬНОСТИ

Поведение траекторий уравнения (1), исходящих из множества  $\Omega$ , предлагается описывать с помощью вектор-функции  $y(t, x^1): T' \times B_1 \rightarrow B_2$ , удовлетворяющей системе уравнений:

$$\frac{\partial y_j(t, x^1)}{\partial t} = - \sum_{i=1}^m \frac{\partial y_j(t, x^1)}{\partial x_i} f_i(t, x^1, y(t, x^1), \mathbf{u}(t, x^1)) + f_j(t, x^1, y(t, x^1), \mathbf{u}(t, x^1)), \quad (6)$$

$$y_j(t_0, x^1) = y_{0j}(x^1), \quad (7)$$

где  $j = m+1, \dots, n$ .

Уравнениями характеристик этой системы являются уравнения для координат вектора состояния, образующие (1):

$$\dot{x}_i(t) = f_i(t, x^1(t), y(t), \mathbf{u}(t, x^1(t))), \quad i = 1, \dots, m, \quad x^1(t_0) = x_0^1 \in B_1,$$

$$\dot{y}_j(t) = f_j(t, x^1(t), y(t), \mathbf{u}(t, x^1(t))), \quad j = m+1, \dots, n, \quad y(t_0) = y_0(x_0^1).$$

Решение системы (6),(7) устанавливает связь:  $x^2 = y(t, x^1) \quad \forall (t, x^1) \in T' \times B_1$ . Предполагается, что размерность множества, описываемого соотношением  $x^2 = y(t, x^1)$ , равна  $m \quad \forall t \in T'$ . Для получения траекторий, исходящих из множества  $\Omega$ , требуется решить систему (6),(7) при известном управлении  $u(t, x^1)$ , а затем систему

$$\dot{x}_i(t) = f_i(t, x^1(t), y(t, x^1(t)), u(t, x^1(t))), \quad i = 1, \dots, m, \quad \forall x^1(t_0) = x_0^1 \in B_1,$$

Если значения координат вектора  $x^1(t)$  в момент  $t \in T'$  известны, то можно найти значения координат вектора состояния  $x$ :  $x(t) = (x^1(t), x^2(t) = y(t, x^1(t)))^T$ .

Пусть известны управления  $u^*(t, x^1)$  и  $u^e(t, x^1)$ , удовлетворяющие условиям (4) и (5) соответственно. Тогда для произвольного заданного начального состояния  $x_0 \in \Omega$  с помощью описанной процедуры (при замене  $u(t, x^1)$  на  $u^*(t, x^1)$  и  $u^e(t, x^1)$ ) могут быть найдены пары

$$d^* = (x^*(t), u^*(t) = u^*(t, x^{1*}(t))) \in \mathbf{D}(t_0, x_0),$$

$$d^e = (x^e(t), u^e(t) = u^e(t, x^{1e}(t))) \in \mathbf{D}(t_0, x_0).$$

Введем в рассмотрение множество функций  $\varphi(t, x): T' \times B \rightarrow R$ , непрерывно дифференцируемых всюду, за исключением конечного числа сечений  $T' \times B$  при фиксированных  $t$ , и конструкции [9–11]:

$$R(t, x, u) = \frac{\partial \varphi(t, x)}{\partial t} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial \varphi(t, x)}{\partial x_i} \cdot f_i(t, x, u) - f^0(t, x, u), \quad (8)$$

$$G(t_f, x) = \varphi(t_f, x) + F(x).$$

Приведем сначала формулировку известных достаточных условий оптимальности.

Предположим, что существует множество  $\Phi$  функций  $\varphi(t, x)$ , для которых конструкции (8) достигают экстремальных значений:

$$r(t) = \max_{x^2 \in B_2} \max_{u \in U} R(t, x, u) \quad \forall (t, x^1) \in T \times B_1, \quad (9)$$

$$g = \min_{x^2 \in B_2} G(t_f, x) \quad \forall x^1 \in B_1, \quad (10)$$

где  $r(t)$  – кусочно-непрерывная функция на множестве  $T$ .

Пусть имеются управление  $u^*(t, x^1) \in U_m$  и соответствующее решение  $y^*(t, x^1)$  системы (6), (7).

**Теорема 1** (достаточные условия оптимальности в задаче (4) [15]). *Если существует такая функция  $\varphi(t, x) \in \Phi$ , что:*

1)  $R(t, x^1, y^*(t, x^1), u^*(t, x^1)) = r(t)$  почти всюду на  $T$ ,  $\forall x^1 \in B_1$ ;

2)  $G(t_f, x^1, y^*(t_f, x^1)) = g \quad \forall x^1 \in B_1$ ,

то управление  $u^*(t, x^1)$  является оптимальной синтезирующей функцией на множестве  $\Omega$ .



Функцию  $r(t)$  и величину  $g$  можно без ограничения общности положить равными нулю. Тогда минимальное значение функционала определяется формулой

$$\min_{d \in \mathbf{D}(t_0, x_0)} I(d) = -\varphi(t_0, x_0) \quad \forall x_0 \in \Omega. \quad (11)$$

Пусть имеются управление  $\mathbf{u}^\varepsilon(t, x^1) \in \mathbf{U}_m$  и соответствующее решение  $y^\varepsilon(t, x^1)$  системы (6), (7).

**Теорема 2** (достаточные условия  $\varepsilon$ -оптимальности в задаче (5)). Если существует такая функция  $\varphi(t, x) \in \Phi$ , малое положительное число  $\varepsilon_2$  и функция  $\varepsilon_1(t)$ , принимающая для всех  $t \in T$  малые положительные значения, что:

$$1) \quad |r(t) - R(t, x^1, y^\varepsilon(t, x^1), \mathbf{u}^\varepsilon(t, x^1))| \leq \varepsilon_1(t) \quad \forall (t, x^1) \in T \times B_1;$$

$$2) \quad |G(t_f, x^1, y^\varepsilon(t_f, x^1)) - g| \leq \varepsilon_2 \quad \forall x^1 \in B_1,$$

то управление  $\mathbf{u}^\varepsilon(t, x^1)$  является  $\varepsilon$ -оптимальной синтезирующей функцией на множестве  $\Omega$  при  $\varepsilon = \int_{t_0}^{t_f} \varepsilon_1(t) dt + \varepsilon_2$ .

Если  $\varepsilon_1(t) \equiv 0$ ,  $\varepsilon_2 = 0$ , управление  $\mathbf{u}^\varepsilon(t, x^1)$  является оптимальной синтезирующей функцией на множестве  $\Omega$ .

**Доказательство.** Применим принцип расширения с заданием множества  $V$  и поиском удачного доопределения функционала  $I$  на этом множестве [9–11].

Определим множество  $V$  пар  $d = (x(t), u(t))$ , где элементы пар по сравнению с входящими в  $\mathbf{D}(t_0, x_0)$  необязательно связаны дифференциальным уравнением (1);  $x(t_0) = x_0 \in \Omega$ ; допускаются разрывы первого рода функций  $x(t)$  на множестве  $T'$ . Таким образом, множество  $\mathbf{D}(t_0, x_0) \subset V$  – расширение построено.

Доопределение функционала  $I$  на множестве  $V$  производится с помощью задания функции  $\varphi(t, x)$ .

На множестве  $V$  определим функционал

$$L(d) = G(t_f, x(t_f)) - \int_{t_0}^{t_f} R(t, x(t), u(t)) dt - \varphi(t_0, x_0).$$

На множестве  $\mathbf{D}(t_0, x_0) \subset V$ , где между функциями  $x(t)$  и  $u(t)$  существует дифференциальная связь (1), с учетом (8) и равенства  $x(t_0) = x_0$  справедливо

$$\begin{aligned} R(t, x(t), u(t)) &= \frac{\partial \varphi(t, x(t))}{\partial t} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial \varphi(t, x(t))}{\partial x_i} f_i(t, x(t), u(t)) - f^0(t, x(t), u(t)) = \\ &= \frac{\partial \varphi(t, x(t))}{\partial t} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial \varphi(t, x(t))}{\partial x_i} \dot{x}_i(t) - f^0(t, x(t), u(t)) = \frac{d \varphi(t, x(t))}{d t} - f^0(t, x(t), u(t)) \end{aligned}$$

и поэтому



$$L(d) = \varphi(t_f, x(t_f)) + F(x(t_f)) - \int_{t_0}^{t_f} \left[ \frac{d\varphi(t, x(t))}{dt} - f^0(t, x(t), u(t)) \right] dt - \varphi(t_0, x_0) =$$

$$= \varphi(t_f, x(t_f)) + F(x(t_f)) - [\varphi(t_f, x(t_f)) - \varphi(t_0, x_0)] + \int_{t_0}^{t_f} f^0(t, x(t), u(t)) dt - \varphi(t_0, x_0) = I(d).$$

Таким образом, на множестве  $V$  функционалы  $I(d)$  и  $L(d)$  совпадают. Поведение функционала  $L(d)$  на множестве  $V \setminus \mathbf{D}$  полностью определяется выбором функции  $\varphi(t, x)$ .

Пусть имеется функция  $\varphi(t, x) \in \Phi$ . Найдем минимум функционала  $L(d)$  на множестве  $V$ . Его третий член при заданной функции  $\varphi(t, x)$  и известном начальном состоянии  $x_0$  вычисляется и в плане минимизации не рассматривается. Операции нахождения экстремума в первых двух слагаемых могут быть выполнены по отдельности благодаря свойствам функций  $x(t), u(t)$ , образующих пары  $d \in V$ . Так как для функции  $\varphi(t, x) \in \Phi$  выполняются равенства (9),(10), они могут быть переписаны в виде

$$r(t) = \max_{x \in B} \max_{u \in U} R(t, x, u), \quad g = \min_{x \in B} G(t_f, x),$$

поскольку их правые части не зависят от  $x^1$ . Тогда

$$\min_{d \in V} L(d) = g - \int_{t_0}^{t_f} r(t) dt - \varphi(t_0, x_0).$$

Так как условия 1,2 теоремы 1 выполняются  $\forall x^1 \in B_1$ , то они справедливы и для  $x^{1*}(t)$ , т.е.

$$R(t, x^*(t), u^*(t)) = r(t), \quad t \in T; \quad G(t_f, x^*(t_f)) = g.$$

Из условий теоремы 1 следует, что на паре  $d^*$  выполняется равенство  $L(d^*) = \min_{d \in V} L(d)$ , т.е.  $L(d^*) \leq L(d) \quad \forall d \in V$ . Так как  $d^* \in \mathbf{D}(t_0, x_0) \subset V$ , то  $L(d^*) \leq L(d) \quad \forall d \in \mathbf{D}(t_0, x_0)$ . Но на множестве  $\mathbf{D}(t_0, x_0)$  справедливо равенство  $L(d) = I(d)$ . Поэтому  $I(d^*) \leq I(d) \quad \forall d \in \mathbf{D}(t_0, x_0)$ , что соответствует определению минимума функционала (3). Следовательно,  $L(d^*) = \min_{d \in V} L(d) = I(d^*) = \min_{d \in \mathbf{D}(t_0, x_0)} I(d)$ . Учитывая, что на множестве  $\mathbf{D}(t_0, x_0)$  справедливо равенство  $L(d) = I(d)$ , получаем

$$I(d^\varepsilon) - I(d^*) = L(d^\varepsilon) - L(d^*) = G(t_f, x^{1\varepsilon}(t_f), y^\varepsilon(t_f, x^{1\varepsilon}(t_f))) - g +$$

$$+ \int_{t_0}^{t_f} [r(t) - R(t, x^{1\varepsilon}(t), y^\varepsilon(t, x^{1\varepsilon}(t)), u^\varepsilon(t, x^{1\varepsilon}(t)))] dt.$$



Тогда

$$\begin{aligned} |I(d^\varepsilon) - I(d^*)| &= \left| G(t_f, x^{1\varepsilon}(t_f), y^\varepsilon(t_f, x^{1\varepsilon}(t_f))) - g + \int_{t_0}^{t_f} [r(t) - R(t, x^{1\varepsilon}(t), y^\varepsilon(t, x^{1\varepsilon}(t))), \mathbf{u}^\varepsilon(t, x^{1\varepsilon}(t)))] dt \right| \leq \\ &\leq \left| G(t_f, x^{1\varepsilon}(t_1), y^\varepsilon(t_f, x^{1\varepsilon}(t_f))) - g \right| + \left| \int_{t_0}^{t_f} [r(t) - R(t, x^{1\varepsilon}(t), y^\varepsilon(t, x^{1\varepsilon}(t))), \mathbf{u}^\varepsilon(t, x^{1\varepsilon}(t)))] dt \right| \leq \\ &\leq \left| G(t_f, x^{1\varepsilon}(t_f), y^\varepsilon(t_f, x^{1\varepsilon}(t_f))) - g \right| + \left| \int_{t_0}^{t_f} [r(t) - R(t, x^{1\varepsilon}(t), y^\varepsilon(t, x^{1\varepsilon}(t))), \mathbf{u}^\varepsilon(t, x^{1\varepsilon}(t)))] dt \right|. \end{aligned}$$

Если условие 1 теоремы 2 выполнено для любых  $(t, x^1) \in T \times B_1$ , то оно выполняется и для  $x^{1\varepsilon}(t)$  при всех  $t \in T$ . Если условие 2 теоремы 2 выполнено для любых  $x^1 \in B_1$ , то оно выполняется и для  $x^{1\varepsilon}(t_1)$ . Поэтому

$$|I(d^\varepsilon) - I(d^*)| \leq \varepsilon_2 + \int_{t_0}^{t_f} \varepsilon_1(t) dt = \varepsilon.$$

Доказательство теоремы 2 следует из произвольности начального состояния  $x_0 \in \Omega$ .

Если существует функция  $\varphi(t, x) \in \Phi$ , удовлетворяющая условиям 1,2 теоремы 1 с  $r(t) \neq 0, g \neq 0$ , можно показать, что функция

$$\tilde{\varphi}(t, x) = \varphi(t, x) + \int_t^{t_f} r(\tau) d\tau - g$$

также удовлетворяет этим условиям при  $\tilde{r}(t) \equiv 0, \tilde{g} = 0$ . Действительно,

$$\begin{aligned} \tilde{r}(t) &= \max_{x^2 \in B_2} \max_{u \in U} \left\{ \frac{\partial \varphi(t, x)}{\partial t} - r(t) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial \varphi(t, x)}{\partial x_i} f_i(t, x, u) - f^0(t, x, u) \right\} = 0 \quad \forall (t, x^1) \in T \times B_1 \\ \tilde{g} &= \min_{x^2 \in B_2} \left\{ \varphi(t_f, x) - g + F(x) \right\} = 0 \quad \forall x^1 \in B_1. \end{aligned}$$

При этом  $\min_{d \in V} L(d) = \min_{d \in V} I(d) = \min_{d \in D(t_0, x_0)} I(d) = -\tilde{\varphi}(t_0, x_0) \quad \forall x_0 \in \Omega$ . Поэтому функцию  $r(t)$  и величину  $g$  в теореме 1 можно без ограничения общности положить равными нулю.

## 4. СООТНОШЕНИЯ ДЛЯ НАХОЖДЕНИЯ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

Рассмотрим решение задачи (4). Будем искать функцию  $\varphi(t, x)$  в виде

$$\varphi(t, x) = W(t, x^1) + \sum_{j=m+1}^n \psi_j(t, x^1) \cdot x_j, \quad (12)$$

где  $W(t, x^1), \psi_j(t, x^1), j = m + 1, \dots, n$ , – неизвестные функции, подлежащие определению.

Подставляя (11) в (8), получаем

$$\begin{aligned} R(t, x, u) &= \frac{\partial W(t, x^1)}{\partial t} + \sum_{j=m+1}^n \frac{\partial \psi_j(t, x^1)}{\partial t} \cdot x_j + \sum_{i=1}^m \frac{\partial W(t, x^1)}{\partial x_i} \cdot f_i(t, x, u) + \\ &+ \sum_{j=m+1}^n x_j \cdot \sum_{i=1}^m \frac{\partial \psi_j(t, x^1)}{\partial x_i} \cdot f_i(t, x, u) + \sum_{j=m+1}^n \psi_j(t, x^1) \cdot f_j(t, x, u) - f^0(t, x, u) = \quad (13) \\ &= \underbrace{\frac{\partial W(t, x^1)}{\partial t} + \sum_{j=m+1}^n \frac{\partial \psi_j(t, x^1)}{\partial t} \cdot x_j}_{\frac{\partial \varphi(t, x)}{\partial t}} + H(t, x, u), \end{aligned}$$

$$G(t_f, x) = W(t_f, x^1) + \sum_{j=m+1}^n \psi_j(t_f, x^1) \cdot x_j + F(x).$$

Здесь функция

$$\begin{aligned} H(t, x, u) &= \sum_{i=1}^m \frac{\partial W(t, x^1)}{\partial x_i} f_i(t, x, u) + \sum_{j=m+1}^n x_j \cdot \sum_{i=1}^m \frac{\partial \psi_j(t, x^1)}{\partial x_i} f_i(t, x, u) + \\ &+ \sum_{j=m+1}^n \psi_j(t, x^1) \cdot f_j(t, x, u) - f^0(t, x, u). \end{aligned}$$

Определяя максимум в (9) с учетом условия 1 теоремы 1 и (13), находим

$$H'(t, x^1, y^*(t, x^1)) = \max_{u \in U} H(t, x^1, y^*(t, x^1), u). \quad (14)$$

Предположим, что функции в (13) непрерывно дифференцируемы относительно  $x^2$ . Поэтому можно применить необходимые условия безусловного экстремума в (9), (10) по  $x^2$  с учетом условий 1,2 теоремы 1:

$$\frac{\partial R(t, x^1, y^*(t, x^1), u^*(t, x^1))}{\partial x_j} = 0, \quad j = m + 1, \dots, n,$$



$$\frac{\partial G(t_f, x^1, y^*(t_f, x^1))}{\partial x_j} = 0, \quad j = m+1, \dots, n.$$

Отсюда с учетом (13) имеем

$$\frac{\partial \psi_j(t, x^1)}{\partial t} = -\frac{\partial H'(t, x^1, y^*(t, x^1))}{\partial x_j}, \quad j = m+1, \dots, n, \quad \forall (t, x^1) \in T \times B_1,$$

$$\psi_j(t_f, x^1) = -\frac{\partial F(x^1, y^*(t_f, x^1))}{\partial x_j}, \quad j = m+1, \dots, n, \quad \forall x^1 \in B_1.$$

Положив в (9), (10)  $r(t) \equiv 0, g = 0$ , с учетом (14) и последних соотношений получим

$$\max_{u \in U} \left\{ \frac{\partial W(t, x^1)}{\partial t} - \sum_{j=m+1}^n \frac{\partial H'(t, x^1, y^*(t, x^1))}{\partial x_j} y_j^*(t, x^1) + H(t, x^1, y^*(t, x^1), u) \right\} = 0 \quad \forall (t, x^1) \in T \times B_1,$$

$$W(t_f, x^1) = \sum_{j=m+1}^n \frac{\partial F(x^1, y^*(t_f, x^1))}{\partial x_j} y_j^*(t_f, x^1) - F(x^1, y^*(t_f, x^1)) \quad \forall x^1 \in B_1,$$

где  $H'(t, x^1, y^*(t, x^1))$  определяется выражением (14), а функция  $y^*(t, x^1)$  является решением системы (6),(7) с управлением  $u^*(t, x^1)$ , структура которого находится из условия

$$u^*(t, x^1) = u^*(t, x^1, y^*(t, x^1)) = \arg \max_{u \in U} H(t, x^1, y^*(t, x^1), u).$$

Таким образом, для определения оптимальной синтезирующей функции на множестве  $\Omega$  в задаче (4) требуется решить систему из  $2(n-m)+1$  уравнений в частных производных первого порядка с  $2(n-m)+1$  краевыми условиями на концах промежутка  $T'$ :

$$\frac{\partial y_j^*(t, x^1)}{\partial t} = -\sum_{i=1}^m \frac{\partial y_j^*(t, x^1)}{\partial x_i} f_i(t, x^1, y^*(t, x^1), u^*(t, x^1)) + f_j(t, x^1, y^*(t, x^1), u^*(t, x^1)),$$

$$y_j^*(t_0, x^1) = y_{0j}(x^1),$$

$$\max_{u \in U} \left\{ \frac{\partial W(t, x^1)}{\partial t} - \sum_{j=m+1}^n \frac{\partial H'(t, x^1, y^*(t, x^1))}{\partial x_j} y_j^*(t, x^1) + H(t, x^1, y^*(t, x^1), u) \right\} = 0,$$

$$\frac{\partial \psi_j(t, x^1)}{\partial t} = -\frac{\partial H'(t, x^1, y^*(t, x^1))}{\partial x_j}, \quad (15)$$



$$\psi_j(t_f, x^1) = -\frac{\partial F(x^1, y^*(t_f, x^1))}{\partial x_j},$$

$$W(t_f, x^1) = \sum_{j=m+1}^n \frac{\partial F(x^1, y^*(t_f, x^1))}{\partial x_j} y_j^*(t_f, x^1) - F(x^1, y^*(t_f, x^1)),$$

где  $j = m+1, \dots, n$ ,  $H'(t, x^1, y^*(t, x^1)) = \max_{u \in U} H(t, x^1, y^*(t, x^1), u)$ .

Минимальное значение функционала (3) можно вычислить по формуле (11) с учетом (12):

$$\min_{d \in \mathcal{D}(t_0, x_0)} I(d) = -W(t_0, x_0^1) - \sum_{j=m+1}^n \psi_j(t_0, x_0^1) \cdot x_{0j}, \quad \forall x_0 \in \Omega. \quad (16)$$

**Замечание.** Соотношения (15) не эквивалентны достаточным условиям оптимальности (теорема 1). Но структура (12) не задает до конца функцию  $\varphi(t, x) \in \Phi$ , определяя только частные производные первого порядка по  $x_j, j = m+1, \dots, n$ . Поэтому, если найдено решение системы (15), то оно в общем случае является подозрительным на оптимальность.

В предельных случаях информированности о векторе состояния (им соответствуют различные способы задания множества начальных состояний  $\Omega$ ) система (15) преобразуется к соотношениям принципа максимума и уравнению Беллмана.

## 5. СТРАТЕГИЯ ПОИСКА ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ С НЕПОЛНОЙ ОБРАТНОЙ СВЯЗЬЮ НА ОСНОВЕ ДОСТАТОЧНЫХ УСЛОВИЙ E-ОПТИМАЛЬНОСТИ

На основе описанных достаточных условий оптимальности и соотношений сформирована стратегия поиска оптимального управления с неполной обратной связью. Предполагается, что:

- известна оценка множества возможных состояний, которая представляется прямым произведением  $\tilde{B} = [\underline{x}_1, \bar{x}_1] \times \dots \times [\underline{x}_n, \bar{x}_n] = \tilde{B}_1 \times \tilde{B}_2$ , где  $\underline{x}_j, \bar{x}_j$  – нижняя и верхняя границы по каждой координате соответственно, определяемые физическим смыслом решаемой задачи;  $\tilde{B}_1 = [\underline{x}_1, \bar{x}_1] \times \dots \times [\underline{x}_m, \bar{x}_m]$ ,  $\tilde{B}_2 = [\underline{x}_{m+1}, \bar{x}_{m+1}] \times \dots \times [\underline{x}_n, \bar{x}_n]$ ;
- известна оценка множества допустимых значений управления  $U$ , представляемая параллелепипедом  $\tilde{U} = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_q, b_q]$ , так что  $U \subseteq \tilde{U}$  (если множество  $U$  задано параллелепипедом, то  $\tilde{U} = U$ ).
- условие  $H'(t, x^1, y^*(t, x^1)) = \max_{u \in U} H(t, x^1, y^*(t, x^1), u)$  разрешимо и однозначно определяет структуру управления  $u^*(t, x^1)$  с неполной обратной связью.

Стратегия поиска приближенного решения содержит два этапа:



- а) нахождение нулевого приближения управления  $\mathbf{u}^*(t, x^1)$  ;  
 б) последовательное улучшение нулевого приближения путем минимизации величины верхней оценки близости текущего управления к оптимальному.

*Первый этап.* Нахождение нулевого приближения искомого закона управления.

1. Задать структуру управления  $\mathbf{u}(t, x^1)$  в виде разложений по системе ортонормированных базисных функций:

$$\mathbf{u}_j(t, x^1) = \mathbf{u}_j(t, x_1, \dots, x_m) = \sum_{i_0=0}^{L_0-1} u_{i_0}^{j,0} q(i_0, t) \sum_{i_1=0}^{L_1-1} u_{i_1}^{j,1} p(i_1, x_1) \cdots \sum_{i_m=0}^{L_m-1} u_{i_m}^{j,m} p(i_m, x_m), \quad j=1, \dots, q, \quad (17)$$

где  $u_{i_0}^{j,0}$ ,  $u_{i_1}^{j,1}$ ,  $u_{i_m}^{j,m}$  – неизвестные коэффициенты;  $\{q(i_0, t)\}, i_0 = 0, 1, \dots$ ,  $\{p(i_1, x_1)\}, i_1 = 0, 1, \dots$ ;  $\{p(i_m, x_m)\}, i_m = 0, 1, \dots$  – ортонормированные базисные системы функций.

2. Задать множество  $\tilde{\Omega} = [\tilde{x}_1, \tilde{x}_1] \times \dots \times [x_m, \tilde{x}_m] \subseteq \tilde{B}_1$  возможных начальных значений координат вектора состояния, используемых в управлении.  
 3. Минимизировать величину функционала

$$J = \frac{1}{\text{mes } \tilde{\Omega}} \int_{\tilde{\Omega}} I(x_0^1, y_0(x_0^1), d) dx_0^1, \quad (18)$$

характеризующую среднее значение функционала (3) на множестве начальных условий  $\{x_0 = (x_0^1, y_0(x_0^1))^T, x_0^1 \in \tilde{\Omega}\}$ . Определить значения коэффициентов разложения (17) по выбранным базисным системам одним из мультиагентных методов оптимизации [8].

Для нахождения решения системы уравнений

$$\frac{\partial y_j(t, x^1)}{\partial t} = - \sum_{i=1}^m \frac{\partial y_j(t, x^1)}{\partial x_i} f_i(t, x^1, y(t, x^1), \mathbf{u}(t, x^1)) + f_j(t, x^1, y(t, x^1), \mathbf{u}(t, x^1)), \quad (19)$$

$$y_j(t_0, x^1) = y_{0j}(x^1), \quad (20)$$

где  $j = m+1, \dots, n$ , применить метод характеристик. Уравнениями характеристик этой системы являются уравнения для координат вектора состояния, образующие (1):

$$\begin{aligned} \dot{x}_i(t) &= f_i(t, x^1(t), y(t), \mathbf{u}(t, x^1(t))), \quad i = 1, \dots, m, \quad x^1(t_0) = x_0^1 \in \tilde{\Omega}, \\ \dot{y}_j(t) &= f_j(t, x^1(t), y(t), \mathbf{u}(t, x^1(t))), \quad j = m+1, \dots, n, \quad y(t_0) = y_0(x_0^1). \end{aligned} \quad (21)$$

Решение системы устанавливает связь:  $x^2 = y(t, x^1) \quad \forall (t, x^1) \in T' \times B_1$ .

Для приближенного подсчета величины функционала (18) генерировать по  $M$  точек на каждом из отрезков  $[\tilde{x}_1, \tilde{x}_1], \dots, [x_m, \tilde{x}_m]$  при помощи разбиения с шагом  $\Delta_j, j = 1, \dots, m$ , т.е. разбить множество  $\tilde{\Omega}$  на  $Mm$  элементарных



подмножеств  $\omega_k$ ,  $\tilde{\Omega} = \bigcup_{k=1}^{Mm} \omega_k$ . В каждом элементарном множестве выбрать среднюю точку:  $x_0^{1,k}, k=1, \dots, Mm$ , а в ней определить соответствующие векторы  $x_0^{2,k} = y_0(x_0^{1,k}), k=1, \dots, Mm$ . В результате получить векторы начальных состояний  $x_0^k = (x_0^{1,k}, x_0^{2,k})^T, k=1, \dots, Mm$  из множества  $\Omega$ . При этом справедливо равенство  $\text{mes } \tilde{\Omega} = Mm \text{ mes } \omega_k$ , так как меры  $\text{mes } \omega_k$  всех элементарных подмножеств равны.

Тогда значение функционала (18) можно приближенно вычислить по формуле

$$J = \sum_{k=1}^{Mm} I(x_0^k, d) / Mm. \quad (22)$$

Результатом первого этапа является нулевое приближение  $u(t, x^1)$ .

*Второй этап.* Последовательное улучшение нулевого приближения.

Согласно теореме 2 требуется найти функцию  $\varphi(t, x) \in \Phi$ , удовлетворяющую условиям 1 и 2. Она представляется в параметрической форме с использованием разложений по базисным системам функций. Далее реализуется итерационная процедура пошагового улучшения значений параметров с целью минимизации значения оценки  $\varepsilon$ .

1. Задать представление вспомогательных функций  $W(t, x^1), \psi_j(t, x^1), j = m+1, \dots, n$ , образующих функцию  $\varphi(t, x) = W(t, x^1) + \sum_{j=m+1}^n \psi_j(t, x^1) \cdot x_j$ :

$$W(t, x^1) = W(t, x_1, \dots, x_m) = \sum_{i_0=0}^{L_0-1} w_{i_0}^0 q(i_0, t) \sum_{i_1=0}^{L_1-1} w_{i_1}^1 p(i_1, x_1) \cdots \sum_{i_m=0}^{L_m-1} w_{i_m}^m p(i_m, x_m), \quad (23)$$

$$\psi_j(t, x^1) = \psi_j(t, x_1, \dots, x_m) = \sum_{i_0=0}^{L_0-1} \psi_{i_0}^{j,0} q(i_0, t) \sum_{i_1=0}^{L_1-1} \psi_{i_1}^{j,1} p(i_1, x_1) \cdots \sum_{i_m=0}^{L_m-1} \psi_{i_m}^{j,m} p(i_m, x_m), \quad j = m+1, \dots, n,$$

где  $w_{i_0}^0, w_{i_1}^1, w_{i_m}^m; \psi_{i_0}^0, \psi_{i_1}^1, \psi_{i_m}^{j,m}$  – неизвестные коэффициенты;  $L_0, L_1, \dots, L_m$  – масштабы усечения по времени и координатам вектора состояния, используемым в управлении. В качестве базисных функций  $q(i_0, t), p_k(i_k, x_k), k=1, \dots, m$ , можно, например, взять ортонормированную на отрезке  $[0; t_f]$  систему косинусовид или системы многочленов Лежандра, определенные на отрезках  $[x_1, \tilde{x}_1], \dots, [x_m, \tilde{x}_m]$ .

2. Найти частные производные  $\frac{\partial W(t, x^1)}{\partial t}, \frac{\partial W(t, x^1)}{\partial x_i}, \frac{\partial \psi_j(t, x^1)}{\partial t}, \frac{\partial \psi_j(t, x^1)}{\partial x_i}$ ,  $i=1, \dots, m; j = m+1, \dots, n$ .
3. Решить задачу минимизации оценки близости к оптимальному решению:

$$\min_{\psi_{i_0}^j \dots i_m; w_{i_0}^0 \dots i_m} \varepsilon$$

с помощью выбранного мультиагентного алгоритма. При этом использовать нулевое приближение закона управления  $u(t, x^1)$  и соответствующее ему решение системы (19), (20).



Для вычисления оценки выполнить следующие операции.

### 3.1. Проинтегрировать систему уравнений

$$\frac{\partial y_j^*(t, x^1)}{\partial t} = - \sum_{i=1}^m \frac{\partial y_j^*(t, x^1)}{\partial x_i} f_i(t, x^1, y^*(t, x^1), \mathbf{u}(t, x^1)) + f_j(t, x^1, y^*(t, x^1), \mathbf{u}(t, x^1)),$$

$$y_j^*(t_0, x^1) = y_{0j}(x^1), \quad j = m+1, \dots, n,$$

методом характеристик

$$\dot{x}_i(t) = f_i(t, x^1(t), y(t), \mathbf{u}(t, x^1(t))), \quad i = 1, \dots, m, \quad x^1(t_0) = x_0^1 \in \tilde{\Omega},$$

$$\dot{y}_j(t) = f_j(t, x^1(t), y(t), \mathbf{u}(t, x^1(t))), \quad j = m+1, \dots, n, \quad y(t_0) = y_0(x_0^1).$$

Решение системы устанавливает связь:  $x^2 = y(t, x^1) \quad \forall (t, x^1) \in T' \times B_1$ .

Для этого задать на отрезке  $[t_0, t_f]$  равномерное разбиение  $t_0, t_1, \dots, t_N = t_f$  из  $N$  точек с шагом  $h$ .

При  $t = t_0$  генерировать по  $M$  точек на каждом из отрезков  $[\tilde{x}_1, \tilde{x}_1], \dots, [\tilde{x}_m, \tilde{x}_m]$  при помощи разбиения с шагом  $\Delta_j, j = 1, \dots, m$ . В результате получить  $Mm$  векторов  $x_0^{1,k}, k = 1, \dots, Mm$ , и  $x_0^{2,k} = y_0(x_0^{1,k}), k = 1, \dots, Mm$ , образующих векторы начальных состояний  $x_0^k = (x_0^{1,k}, x_0^{2,k})^T, k = 1, \dots, Mm$  из множества  $\Omega$ .

В процессе численного интегрирования получить значения координат векторов

$$x^{1,k}(t_i), k = 1, \dots, Mm; \quad x^{2,k}(t_i) = y^k(t_i) = y(t_i, x^{1,k}(t_i)), k = 1, \dots, Mm;$$

$$u^k(t_i) = \mathbf{u}(t_i, x^{1,k}(t_i)), \quad k = 1, \dots, Mm; \quad i = 0, 1, \dots, N.$$

### 3.2. Вычислить

$$r^k(t_i) = \max_{x^2 \in \tilde{B}_2} \max_{u \in \tilde{U}} R(t_i, x^{1,k}(t_i), x^2, u), \quad k = 1, \dots, Mm; \quad i = 0, 1, \dots, N;$$

$$g^k = \min_{x^2 \in \tilde{B}_2} G(t_N, x^{1,k}(t_N), x^2), \quad k = 1, \dots, Mm;$$

где

$$R(t, x, u) = \frac{\partial W(t, x^1)}{\partial t} + \sum_{j=m+1}^n \frac{\partial \psi_j(t, x^1)}{\partial t} \cdot x_j + \sum_{i=1}^m \frac{\partial W(t, x^1)}{\partial x_i} \cdot f_i(t, x, u) +$$

$$+ \sum_{j=m+1}^n x_j \cdot \sum_{i=1}^m \frac{\partial \psi_j(t, x^1)}{\partial x_i} \cdot f_i(t, x, u) + \sum_{j=m+1}^n \psi_j(t, x^1) \cdot f_j(t, x, u) - f^0(t, x, u).$$

$$G(t_N, x) = W(t_N, x^1) + \sum_{j=m+1}^n \psi_j(t_N, x^1) \cdot x_j + F(x).$$



### 3.3. Вычислить

$$R(t_i, x^{1,k}(t_i), y^k(t_i) = x^{2,k}(t_i), u(t_i, x^{1,k}(t_i))), k = 1, \dots, Mm; i = 0, 1, \dots, N;$$

$$G(t_N, x^{1,k}(t_N), y^k(t_N, x^{1,k}(t_N))), k = 1, \dots, Mm.$$

### 3.4. Вычислить

$$\varepsilon_1(t_i) = \max_{k=1, \dots, Mm} |r^k(t_i) - R(t_i, x^{1,k}(t_i), y^k(t_i) = x^{2,k}(t_i), u(t_i, x^{1,k}(t_i)))|, i = 0, 1, \dots, N,$$

$$\varepsilon_2 = \max_{k=1, \dots, Mm} |G(t_N, x^{1,k}(t_N), y^k(t_N, x^{1,k}(t_N))) - g^k|.$$

### 3.5. Вычислить

$$\varepsilon = \int_{t_0}^{t_f} \varepsilon_1(t) dt + \varepsilon_2 \cong \frac{t_N - t_0}{2N} \left[ \varepsilon_1(t_0) + 2 \sum_{i=1}^{N-1} \varepsilon_1(t_i) + \varepsilon_1(t_N) \right] + \varepsilon_2. \quad (24)$$

В результате решения задачи минимизации оценки близости к оптимальному решению находятся значения коэффициентов  $\psi_{i_0 i_1 \dots i_m}^j$ ,  $w_{i_0 i_1 \dots i_m}$ , величина оценки  $\varepsilon$  и значения коэффициентов  $u_{i_0}^{j,0}$ ,  $u_{i_1}^{j,1}$ ,  $u_{i_m}^{j,m}$ .

## 6. МОДЕЛЬНЫЙ ПРИМЕР

Постановка задачи приведена в табл. 1 ( $m = 1$ ).

Таблица 1

Постановка задачи

Система дифференциальных уравнений	$\begin{cases} \dot{x}_1 = u(t) \\ \dot{x}_2 = x_1(t) \end{cases}$
Временной интервал	$t \in [0; 2]$
Множество начальных условий	$x(t_0) \in \Omega = \left\{ x \mid x_2 = -\frac{4}{3}x_1, x_1 \in R \right\}$
Ограничения на управление	$u \in R$
Функционал (3)	$I(x_0, d) = \frac{1}{2} \int_0^2 u^2(t) dt + \frac{1}{2} [x_1^2(2) + x_2^2(2)]$

Требуется найти  $\varepsilon$  – оптимальную синтезирующую функцию  $u(t, x_1)$  на множестве  $\Omega$ .



В качестве базисных функций использовалась система нестационарных косинусоид и полиномы Лежандра. Наложены ограничения на значения коэффициентов в (17), (23):  $w_{i_0}^0, w_{i_1}^1 \in [-1; 1]$ ,  $\psi_{i_0}^0, \psi_{i_1}^1 \in [-0, 5; 0, 5]$ ,  $u_{i_0}^{j,0} \in [-1; 0, 5]$ ,  $u_{i_1}^{j,1} \in [1; 3]$ . Задано множество  $\tilde{\Omega} = [\underline{x}_1, \tilde{x}_1] = [0, 5; 2, 5]$  возможных начальных значений координаты  $x_1$  вектора состояния, используемой в управлении, и  $\tilde{B}_1 = [\underline{x}_1, \tilde{x}_1] = [0; 3]$  – нижняя и верхняя границы по координате  $x_1$ .

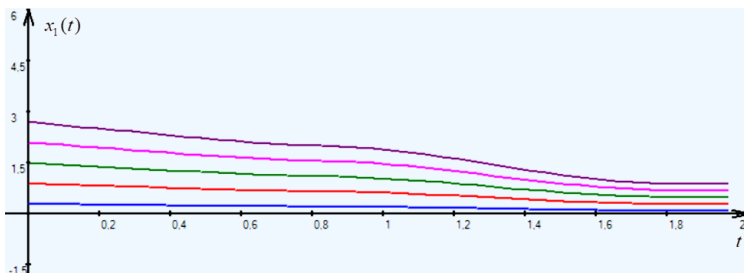
Выбраны следующие параметры гибридного мультиагентного алгоритма интерполяционного поиска [8]:  $NP = 20$ ,  $I_{\max} = 100$ ,  $M_1 = 1$ ,  $M_2 = 7$ ,  $PRTVector = 0,9$ ,  $nstep = 5$ ,  $b_2 = 8$ .

Решена задача минимизации оценки близости к оптимальному решению. Найдено  $\varepsilon$ -оптимальное управление с неполной обратной связью  $u(t, x_1)$  и вспомогательные функции  $W(t, x_1)$ ,  $\psi_2(t, x_1)$ . Для каждой функции определялось рациональное количество коэффициентов в разложении  $L_0^u, L_1^u, L_0^w, L_1^w, L_0^v, L_1^v$  и значения коэффициентов. Результаты численного решения задачи приведены в табл. 2. На рис. 2–4 приведены графики порождаемых законов управления и траекторий системы (1). На рис. 5 изображен график изменения оценки  $\hat{a}$  с ростом числа итераций. Сравнение точного решения  $u(t, x_1) = x_1 / (t - 3)$  [15] с полученным приближенным решением свидетельствует о приемлемой точности достигнутого результата.

Таблица 2

**Результаты решения гибридным мультиагентным методом интерполяционного поиска**

Искомые функции	$u(t, x_1)$	$W(t, x_1)$	$\psi_2(t, x_1)$
Масштабы усечения	$L_0^u = 8, L_1^u = 2$	$L_0^w = 4, L_1^w = 4$	$L_0^v = 1, L_1^v = 1$
Значения коэффициентов в разложениях	-0,79; 0,23; 0,01; 0,14; 0,24; -0,36; 0,23; -0,13; 2,6; 1,51	0,92; 0,38; 0,99; 0,91; 0,05; -0,02; 0,17; -0,37	0,04; 0
Отрезки значений координат при $t_f = 2$	$x_1(2) \in [0, 1062; 0, 8831]$ , $x_2(2) \in [-0, 0148; 0, 0064]$		
Значение оценки $\varepsilon$ (24)	0,874092		

Рис. 2. Графики изменения координаты  $x_1(t)$

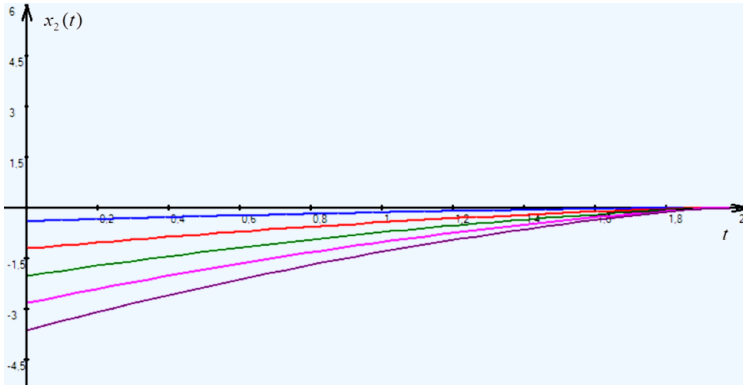


Рис. 3. Графики изменения координаты  $x_2(t)$

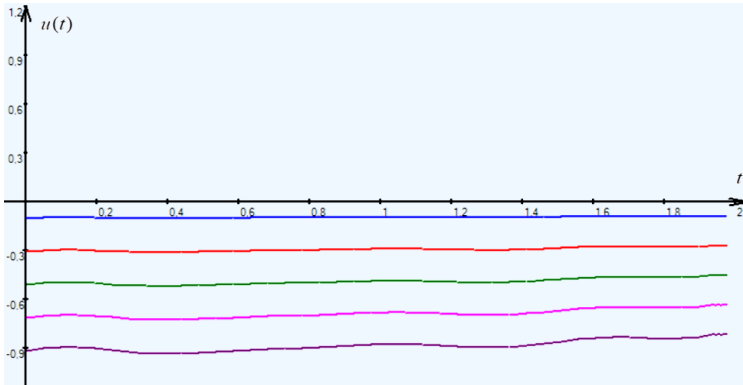


Рис. 4. Графики порождаемого управления  $u(t) = u(t, x_1(t))$

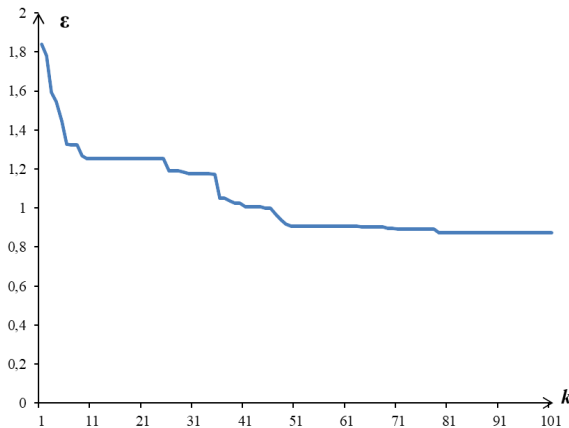


Рис. 5. Изменение величины оценки  $\epsilon$  с ростом числа итераций



## 7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В статье предложен и обоснован алгоритм синтеза оптимального управления с неполной обратной связью на заданном многообразии начальных состояний. Приведен пример, иллюстрирующий эффективность предложенного алгоритма, и найдена априорная оценка близости к оптимальному решению.

### *Литература*

1. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1983.
2. Федоренко Р.П. Приближенное решение задач оптимального управления. М.: Наука, 1978.
3. Athans M., Falb P.L. Optimal Control: An Introduction to the Theory and Its Applications, Chelmsford, MA, USA: Courier Corporation, 2013.
4. Горнов А.Ю. Вычислительные технологии решения задач оптимального управления. Новосибирск: Наука, 2009.
5. Срочко В.А. Итерационные методы решения задач оптимального управления. М.: Физматлит, 2000.
6. Дыхта В.А., Тятюшкин А.И. Методы улучшения в вычислительном эксперименте. Новосибирск: Наука, 1988.
7. Колмановский В.Б., Носов В.Р. Приближенные и численные методы решения задач оптимального управления. М.: МИЭМ, 1989.
8. Пантелеев А.В., Каранэ М.М.С. Мультиагентные и биоинспирированные методы оптимизации технических систем. М.: Изд-во Доброе слово и Ко, 2024.
9. Кротов В.Ф., Гурман В.И. Методы и задачи оптимального управления. М.: Наука, 1973.
10. Krotov V.F. Global methods in optimal control theory. New York: Marcel Dekker, 1996.
11. Гурман В.И. Принцип расширения в задачах управления. М.: Наука, 1997.
12. Гурман В.И. Приближенный синтез оптимального управления // Автоматика и телемеханика, 1976. № 5.
13. Батулин В.А. Приближенные методы оптимального управления, основанные на принципе расширения / В.А. Батулин, Д.Е. Урбанович. – Новосибирск: Наука, 1997.
14. Weinstein S.E. Approximation of function of several variables // J. Approximation Theory. 1969. Vol. 2. P. 433–447.
15. Пантелеев А.В., Семенов В.В. Синтез оптимальных систем управления при неполной информации. М.: Изд-во МАИ, 1992.
16. Кротов В.Ф., Фельдман Н.Н. Итерационный метод решения задач оптимального управления // Известия АН СССР. Техническая кибернетика. 1983. № 2. С. 160–168.
17. Хрусталева М.М. Необходимые и достаточные условия в форме уравнения Беллмана // Доклады АН СССР. 1978. Т. 242. № 5. С. 1023–1026.





# Approximate Synthesis of Optimal Deterministic Control Systems with Incomplete Feedback Based on Sufficient $\varepsilon$ -Optimality Conditions

**Andrei V. Panteleev\***

Moscow Aviation Institute (National Research University), Moscow, Russia

ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-2493-3617>

e-mail: [avpanteleev@inbox.ru](mailto:avpanteleev@inbox.ru)

**Maria Magdalena S. Karane\*\***

Moscow Aviation Institute (National Research University), Moscow, Russia

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-8019-8613>

e-mail: [mm\\_karane@mail.ru](mailto:mm_karane@mail.ru)

The problem of optimal control of deterministic dynamical systems in the absence of information about a part of the coordinates of the state vector is considered. Sufficient  $\varepsilon$ -optimality conditions based on the principle of expansion are formulated and proved. An algorithm is proposed for finding an a priori estimate of the proximity of the synthesized control law with incomplete feedback to the optimal one for a given set of initial states. The solution of the model example is given.

**Keywords:** sufficient optimality conditions, optimal synthesizing function, multi-agent algorithm, calculation of a priori estimation.

## For citation:

Panteleev A.V., Karane M.M.S. Approximate Synthesis of Optimal Deterministic Control Systems with Incomplete Feedback Based on Sufficient  $\varepsilon$ -Optimality Conditions. *Modelirovanie i analiz dannykh = Modelling and Data Analysis*, 2024. Vol. 14, no. 1, pp. 135–154.

DOI: <https://doi.org/10.17759/mda.2024140109> (In Russ., abstr. in Engl.).

## References

1. Pontryagin L.S., Boltyansky V.G., Gamkrelidze R.V., Mishchenko E.F. Mathematical theory of optimal processes. M.: Nauka, 1983. (In Russ.).
2. Fedorenko R.P. Approximate solution of optimal control problems. M.: Nauka, 1978. (In Russ.).
3. Athans M., Falb P.L. Optimal Control: An Introduction to the Theory and Its Applications, Chelmsford, MA, USA: Courier Corporation, 2013.

\***Andrei V. Panteleev**, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Head of the Department of Mathematics and Cybernetics, Institute “Computer Science and Applied Mathematics”, Moscow Aviation Institute (National Research University), Moscow, Russia, ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-2493-3617>, e-mail: [avpanteleev@inbox.ru](mailto:avpanteleev@inbox.ru)

\*\***Maria Magdalena S. Karane**, Postgraduate Student of the Institute “Computer Science and Applied Mathematics”, Moscow Aviation Institute (National Research University), Moscow, Russia, ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-8019-8613>, e-mail: [mm\\_karane@mail.ru](mailto:mm_karane@mail.ru)



4. *Gornov A.Yu.* Computational technologies for solving optimal control problems. Novosibirsk: Nauka, 2009. (In Russ.).
5. *Srochko V.A.* Iterative methods for solving optimal control problems. M.: Fizmatlit, 2000. (In Russ.).
6. *Dykhta V.A., Tyatyushkin A.I.* Improvement methods in computational experiment. Novosibirsk: Nauka, 1988. (In Russ.).
7. *Kolmanovsky V.B., Nosov V.R.* Approximate and numerical methods for solving problems of optimal control. Moscow: MIEM, 1989. (In Russ.).
8. *Panteleev A.V., Karane M.M.S.* Multi-agent and bio-inspired optimization methods for optimizing technical systems. – M.: Dobroe slovo & Co, 2024.– 336 p. (In Russ.).
9. *Krotov V.F., Gurman V.I.* Methods and problems of optimal control. Moscow: Nauka, 1973. (In Russ.).
10. *Krotov V.F.* Global methods in optimal control theory. New York: Marcel Dekker, 1996.
11. *Gurman V.I.* The principle of expansion in control problems. M.: Nauka, 1997. (In Russ.).
12. *Gurman V.I.* Approximate synthesis of optimal control// Automation and Telemechanics, 1976. No.5. (In Russ.).
13. *Baturin V.A., Urbanovich D.E.* Approximate methods of optimal control based on the principle of expansion. Novosibirsk: Nauka, 1997. (In Russ.).
14. *Weinstein S.E.* Approximation of function of several variables // J. Approximation Theory. 1969. Vol. 2. P. 433–447.
15. *Panteleev A.V., Semenov V.V.* Synthesis of optimal control systems with incomplete information. Moscow: MAI Publishing House, 1992. (In Russ.).
16. *Krotov V. F., Feldman N.N.* Iterative method for solving optimal control problems // Izvestia of the USSR Academy of Sciences. Technical cybernetics. 1983. No. 2. pp. 160–168. (In Russ.).
17. *Khrustalev M.M.* Necessary and sufficient conditions in the form of the Bellman equation // Reports of the USSR Academy of Sciences. 1978. Vol.242. No.5. pp. 1023–1026. (In Russ.).

Получена 01.03.2024

Принята в печать 14.03.2024

Received 01.03.2024

Accepted 14.03.2024

## ◆◆◆◆◆ КОМПЛЕКСЫ ПРОГРАММ ◆◆◆◆◆

УДК 004.415.2

# Создание специализированного программного обеспечения для оперативного подсчета объемов потерь углеводов в резервуарах

**Щербань П.С.** \*

Балтийский Федеральный Университет им. И. Канта  
г. Калининград, Российская Федерация  
ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-5106-7852>  
e-mail: [ursa-maior@yandex.ru](mailto:ursa-maior@yandex.ru)

**Абу-Хамди Р.В.** \*\*

Московский физико-технический институт  
Физтех-школа прикладной математики и информатики (МФТИ)  
г. Москва, Российская Федерация  
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-2275-0529>  
e-mail: [rabouhamdi@gmail.com](mailto:rabouhamdi@gmail.com)

Обеспечение современного хранения углеводов не является тривиальной задачей. Существующие требования, налагаемые природоохранным и противопожарным законодательством, а также экономика производства обязывают собственников резервуарных парков предпринимать меры по учету и сокращению потерь нефтепродуктов. Для решения этой задачи сформирована группа расчетных методик, позволяющая определить объем потерь углеводов в ходе больших и малых дыханий в резервуарных парках. При этом проведение расчетов и подбор соответствующего оборудования по сокращению потерь довольно затруднено для инженерно-технического персонала нефтебаз. В связи с этим на основе методов расчета В.И. Черникина, Ф.Ф. Абузовой и Н.Н. Константинова было создано программное обеспечение по расчету потерь углеводов в резервуарах от больших и малых дыханий, с возможностью хранения данных в течение месяца посуточно и с выдачей системой рекомендаций относительно применения средств сокращения потерь углеводов. Для написания программного кода был использован C# в Visual Studio 2022. Демоверсия программы позволяет рассчитывать объемы потерь нефтепродуктов в вертикальных стальных резервуарах различного объема и при меняющихся условиях внешней среды, а также на основе заложенной базы данных рекомендовать необходимые средства сокращения потерь к установке на рассматриваемый резервуар.



**Ключевые слова:** потери углеводородов, резервуар, управление качеством, управление технологическими процессами, разработка программного обеспечения, методы подсчета, C#.

**Для цитаты:**

Щербань П.С., Абу-Хамди Р.В. Создание специализированного программного обеспечения для оперативного подсчета объемов потерь углеводородов в резервуарах // Моделирование и анализ данных. 2024. Том 14. № 1. С. 155–169. DOI: <https://doi.org/10.17759/mda.2024140110>

\*Щербань Павел Сергеевич, кандидат технических наук, доцент, Балтийский Федеральный Университет им. И. Канта (ФГБОУ ВО БФУ им. И. Канта), г. Калининград, Российская Федерация, ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-5106-7852>, e-mail: [ursa-maior@yandex.ru](mailto:ursa-maior@yandex.ru)

\*\*Абу-Хамди Реда Валидович, магистрант, Московский физико-технический институт. Физтех-школа прикладной математики и информатики (МФТИ), г. Москва, Российская Федерация, ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-2275-0529>, e-mail: [rabouhamdi@gmail.com](mailto:rabouhamdi@gmail.com)

## 1. ВВЕДЕНИЕ

В ходе функционирования резервуаров по хранению углеводородов возникают потери различного рода. Среди них можно выделить две основные группы: потери, обусловленные нарушением правил эксплуатации резервуаров и технологические потери. Нарушение правил эксплуатации предполагает возникновение проливов, смешивания, утечек и находится за пределами настоящей работы, технологические же потери обуславливаются большими и малыми дыханиями, возникающими в ходе естественной эксплуатации резервуара [1]. Большие дыхания возникают при наполнении резервуара, когда поднимающийся столб нефтепродукта вытесняет паровоздушную смесь углеводородов через систему клапанов. Малые дыхания обусловлены входом воздуха и выходом паровоздушной смеси из резервуара при изменении параметров окружающей среды (температура, освещенность, давление).

Учитывая физические характеристики (материал и его теплопроводность, интенсивность солнечного излучения, температуру окружающей среды и давление, объем нефтепродукта и размер резервуара) и химические характеристики (вид нефтепродукта, количество примесей) – можно произвести расчет объемов потерь как при малых, так и при больших дыханиях [2]. Суммируя эти данные, варьирующиеся в течение определенного интервала времени, можно установить суммарный объем потерь. Исходя из получаемого суммарного объема – могут быть подобраны соответствующие средства сокращения потерь углеводородов. Для начала представим аналитические методы расчета больших и малых дыханий, после чего перейдем к разработке соответствующего программного обеспечения, позволяющего значительно снизить трудоемкость задачи, для инженерного персонала, по учету потерь углеводородов в резервуарном парке, а также упростить работу проектировщиков при возникновении запроса на модернизацию нефтебазы.

## 2. МЕТОДИКИ РАСЧЕТА БОЛЬШИХ ДЫХАНИЙ В ВЕРТИКАЛЬНЫХ СТАЛЬНЫХ РЕЗЕРВУАРАХ

При опорожнении вертикального стального резервуара, в него начинает поступать атмосферный воздух, что приводит к снижению давления паров и началу испарения нефтепродукта до тех пор, пока газовое пространство не насытится [3]. Далее при наполнении резервуара – паровоздушная смесь с находящимися в виде взвеси углеводородами выталкивается из резервуара и возникают потери. Размер потерь от «больших дыханий» напрямую зависит от частоты процесса слива и заполнения резервуара нефтепродуктом и пропорционален объему нефтепродукта, который был помещен в резервуар [4].

Малые дыхания возникают в основном в ходе нагрева резервуара в дневные часы и охлаждения в ночные. Дневной нагрев приводит к увеличению скорости испарения углеводородов и повышению их концентрации в паровоздушной смеси, а, следовательно, увеличению давления в резервуаре [5]. Для снижения избыточного давления часть паровоздушной смеси стравливается системой клапанов в атмосферу [6].

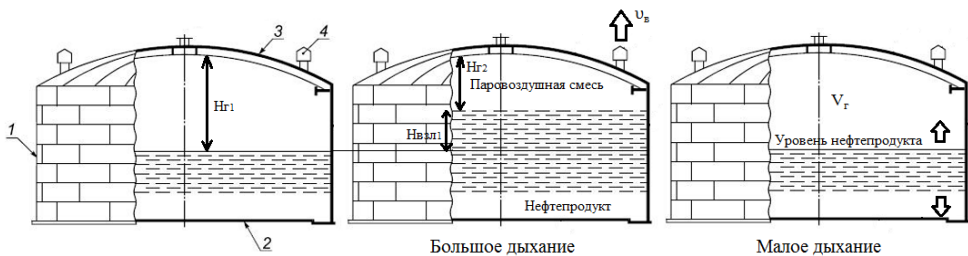


Рис. 1. Большие и малые дыхания в вертикальных стальных резервуарах

1 – стенка; 2 – днище; 3 – стационарная крыша; 4 – дыхательный клапан;  $H_{г1}$  – высота газового пространства резервуара перед закачкой нефтепродуктов;  $H_{г2}$  – высота газового пространства резервуара после закачки нефтепродуктов;  $H_{взл1}$  – высота залива нефтепродуктов;  $v_{в}$  – скорость выхода паровоздушной смеси через дыхательный клапан;  $V_{г}$  – объём газового пространства резервуара перед закачкой нефтепродукта

Как уже отмечалось существует несколько методик подсчета объема потерь углеводородов во время больших и малых дыханий. В случае с большими дыханиями в работе принято решение рассматривать методики Ф.Ф. Абузовой и В.И. Черникина (как более точную) для сверки [7].

Ф.Ф. Абузова для вычисления потерь от «больших дыханий» предложила следующее уравнение:

$$G_{бд} = \beta * F_p * \frac{C_s - C}{1 - C} * \tau / 3600, \text{ кг} \quad (1)$$

где:  $\beta$  – коэффициент массоотдачи,  $\text{кг}/\text{м}^2 \cdot \text{сек}$ ;  $F_p$  – площадь «зеркала» нефти в резервуаре,  $\text{м}^2$ ;  $C_s$  – концентрация насыщенных паров, Па;  $C$  – средняя концентрация нефти



в газовом пространстве, Па; тВ.И. Черникин, усовершенствовал метод расчета «больших» дыханий П.В. Валявского, предложил свою формулу расчета потерь легких фракций углеводорода. Отразим ее с пересчетом массы на килограммы потерянного топлива:

$$G_{\text{бд}} = \left( \left[ \Delta V - V_r \cdot \left( \frac{P_2 - P_1}{P_2 - P_y} \right) \right] \cdot \frac{P_y}{P_2} \cdot \rho_y \right) * 1000, \text{ кг} \quad (2)$$

где:  $\Delta V$  – объем паровоздушной смеси, вышедшей при заполнении резервуара, м<sup>3</sup>;  $V_r$  – объём газового пространства резервуара перед закачкой нефтепродукта, м<sup>3</sup>;  $P_1$  – абсолютное давление газового пространства в начале закачки, Па;  $P_2$  – абсолютное давление газового пространства в конце закачки, Па;  $P_y$  – среднее расчётное парциальное давление паров нефтепродукта при закачке, Па;  $\rho_y$  – плотность нефти, т/м<sup>3</sup>

Необходимо отметить, что расчеты по формуле В.И. Черникина еще более трудоемки, чем по методике Ф.Ф. Абузовой, и приведем все формульные расчеты по каждой из методик (более 40 формул) в рамках настоящей статьи – не представляется возможным в виду объема. В результате по расчету больших дыханий приводятся лишь итоговые расчетные формулы. В целом обе методики расчетов требуют определения большого числа показателей, в связи с чем их автоматизация крайне востребована.

Для наиболее полного учета всех потерь углеводородов в резервуарах необходимо и установить объемы выбросов при малых дыханиях. Наиболее полной, обоснованной и практически подтвержденной методикой в этом отношении является методика Н.Н. Константинова.

### 3. МЕТОДИКА РАСЧЕТА МАЛЫХ ДЫХАНИЙ В ВЕРТИКАЛЬНЫХ СТАЛЬНЫХ РЕЗЕРВУАРАХ

При изменении температуры и атмосферного давления, давление в газовом пространстве резервуара увеличивается, что может привести к малым дыханиям резервуара [7].

Для расчета потерь от «малых дыханий» Н.Н. Константинов предложил следующую методику вычисления:

$$G_{\text{мд}} = \sigma \cdot \Delta V, \text{ кг} \quad (3)$$

где:  $\sigma$  – среднее массовое содержание паров нефтепродукта в паровоздушной смеси.  $\Delta V$  – вытесняемый объем паровоздушной смеси.

При этом для расчета среднего массового содержания паров нефтепродуктов в паровоздушной смеси резервуара и вытесняемого объема требуется дополнительное определение ряда показателей [8]. Так, например, среднее массовое содержание паров нефтепродуктов в паровоздушной смеси резервуара будет рассчитываться по формуле:

$$\sigma = \frac{P_{\text{max}} + P_{\text{min}}}{R_{\text{п}} * (T_{\text{rmax}} + T_{\text{rmin}})}, \text{ кг/м}^3 \quad (4)$$



где:  $R_n$  – газовая постоянная паров бензина, Дж/(моль·К)  $T_{\min}$ ,  $T_{\max}$  – минимальная и максимальная температура газового пространства резервуара в течение суток, К;  $P_{\min}$ ,  $P_{\max}$  – минимальное и максимальное парциальное давление нефтепродукта в газовом пространстве резервуара в течение суток, Па.

В свою очередь, вытесняемый объем паровоздушной смеси (а, следовательно, и масса потерянного нефтепродукта, если известна его плотность) может быть определен как:

$$\Delta V = V_r \cdot \ln \left[ \frac{(P_a - P_{\text{кв}} - P_{\text{min}}) \cdot T_{\text{rmax}}}{(P_a + P_{\text{кд}} - P_{\text{max}}) \cdot T_{\text{min}}} \right], \text{ м}^3 \quad (5)$$

где:  $P_a$  – атмосферное давление, Па;  $P_{\text{кв}}$  – вакуум в газовом пространстве, соответствующий нагрузке вакуумного клапана, Па;  $P_{\text{кд}}$  – избыточное давление в газовом пространстве, соответствующее нагрузке клапана давления, Па;  $V_r$  – объем газового пространства, м;  $\Delta V$  – вытесняемый объем паровоздушной смеси, м.

Представленные расчеты требуют большого количества времени от персонала резервуарных парков по учету объема потерь нефтепродуктов при проведении проверок и в особенности проверки на соответствие нормам естественной убыли. Для оптимизации данного процесса было принято решение на основе изложенных методик создать демоверсию специализированной компьютерной программы, которая позволяет сократить и облегчить процедуру расчета для персонала резервуарных парков.

#### 4. СОЗДАНИЕ ПРОГРАММНОГО ОБЕСПЕЧЕНИЯ ДЛЯ РАСЧЕТА ОБЪЕМА ПОТЕРЬ ОТ БОЛЬШИХ И МАЛЫХ ДЫХАНИЙ В РЕЗЕРВУАРАХ

Решение задач по расчёту потерь углеводородов при «больших» и «малых» дышаниях может быть упрощено с помощью программных средств автоматического расчета. Одним из наиболее эффективных способов решения проблемы является использование компьютерной программы, которая позволяет изменять технические характеристики исходной задачи и автоматически рассчитывать потери (Рисунок 2).

Основной задачей такой программы является расчет значений потерь при «больших» и «малых» дышаниях на основе введенных пользователем значений параметров, сохранение результатов расчета на протяжении периода наблюдений, и на основе собранных данных предоставление аналитики – рекомендаций по установке систем сокращения потерь и графика, отображающего динамику потерь за период наблюдения. В соответствии с задачей программы – алгоритм расчета должен быстро и точно получать необходимые значения и выводить их на экран [9].

Необходимо разработать алгоритм таким образом, чтобы расчеты значений потерь не блокировали главный поток программы, отвечающий за графический интерфейс. Такого эффекта можно добиться, заметив, что расчеты в каждой из формул не зависят друг от друга, а значит могут выполняться параллельно [10].



Разработанный алгоритм получает на вход данные из полей, заполненных пользователем, затем запускает три параллельные задачи – по одной на вычисление каждого значения потерь. Запущенные задачи по завершению, каждая и независимо, обновляет свою часть экрана рассчитанным значением, после чего алгоритм завершается и будет ожидать новых входных данных [11].

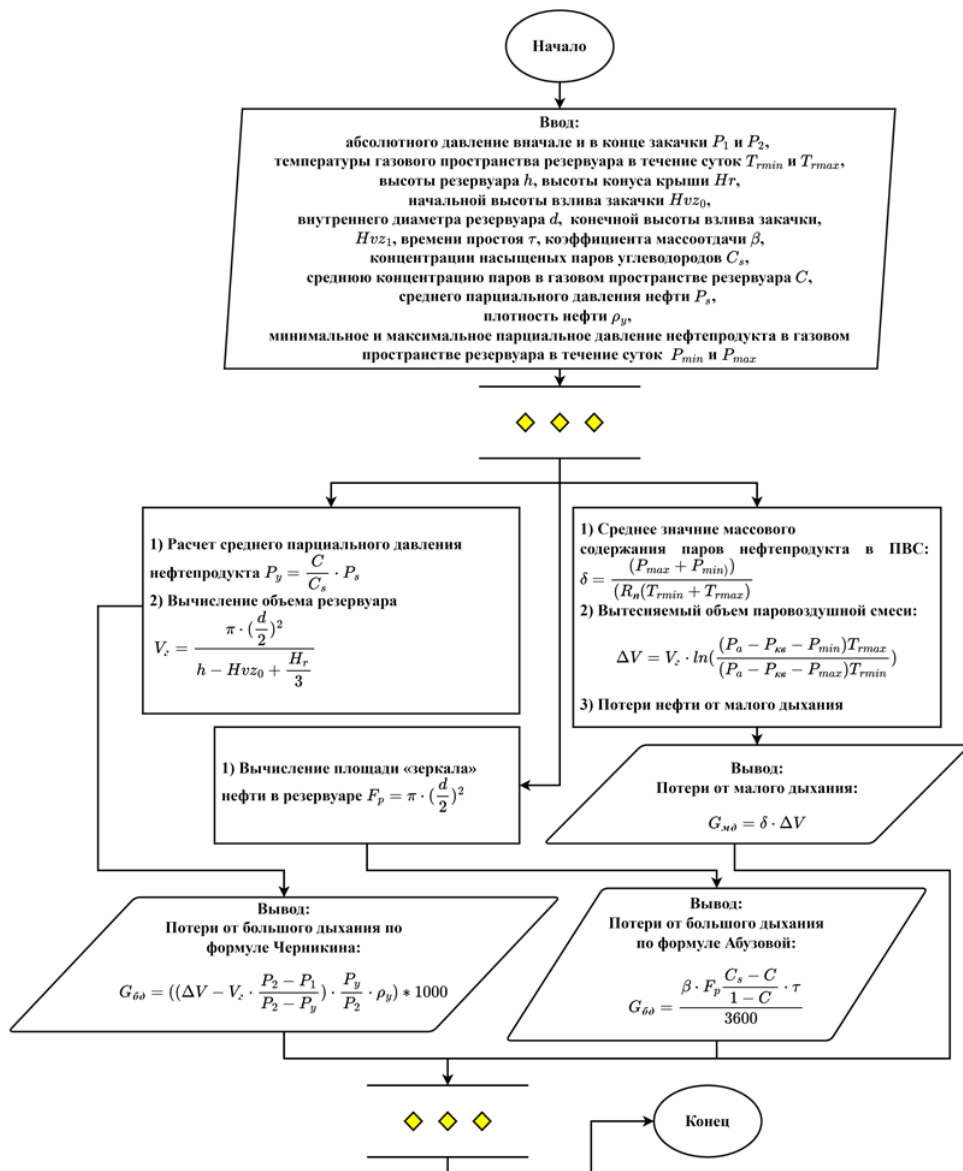


Рис. 2. Блок-схема компьютерной программы



Параллельное выполнение происходит именно посредством вычисления значений на разных потоках, так как потоки имеют общую память, что позволяет избежать затрат на копирование данных, которое необходимо при запуске параллельных процессов [12].

На этапе проектирования была составлена блок-схема программного кода, отражающая взаимосвязь начальных значений, необходимых для реализации программного обеспечения и программные этапы расчета, представленные на Рисунке 2. Для расчета потерь при «больших» и «малых» дыханий была разработана компьютерная программа на языке программирования C# в Visual Studio 2022 [13]. Далее на основе приведенного алгоритма был создан удобный пользовательский графический интерфейс (Рисунки 3, 4).

Вычисление технологических потерь нефти и нефтепродуктов при хранении в резервуарах

Начальные параметры    Результат    Инфографика

Выберите тип нефтехранилища

RVC 1000     RVC 2000     Свободный ввод

RVC 5000     RVC 10000     Тестовые значения

Характеристики резервуара

Геометрический объем резервуара

Внутренний диаметр резервуара, м

Высота резервуара, м

Высота конуса крыши, м

Количество дыхательных клапанов

Диаметр дыхательных клапанов, м

Нагрузка дыхательных клапанов, Па

Абсолютное давление до закачки, Па

Нагрузка вакуумного дыхательного клапана, Па

Средняя температура воздуха, С

Закачка нефтепродуктов в резервуар

Высота залива бензина начальная, м

Высота залива бензина конечная, м

Производительность закачки, м<sup>3</sup>/ч

Время простоя, ч

Плотность нефтепродукта, г/см<sup>3</sup>

Температура начала кипения нефтепродукта, К

**Выполнить расчёт потерь**

Рис. 3. Интерфейс компьютерной программы

Он позволяет регулировать условия расчета, такие как начальная и конечная высота залива и производительность закачки или габариты РВС, а также изменить плотность хранимого нефтепродукта в резервуаре. Благодаря этому, программа может рассчитывать потери для различных РВС. Начальные значения могут быть указаны в свободном вводе, либо с помощью автоматического выбора типа резервуара.

При нажатии на кнопку «выполнить расчет» пользователь получает результат количества потерь легких фракций углеводорода при «больших» дыханиях по двум методам: методу расчета В.И. Черникина и Ф.Ф. Абузовой, и «малых» дыханиях по методу расчета Н.Н. Константинова.



Вычисление технологических потерь нефти и нефтепродуктов при хранении в резервуарах

Начальные параметры | **Результат** | Инфографика

Объемы потерь углеводородов

Вычисление потерь от «больших дыханий» по методике расчета В.И. Черникина	1327,152	кг
Вычисление потерь от «больших дыханий» по методике расчета Ф.Ф. Абузовой	1632,397	кг
Вычисление потерь от «малых дыханий»	71,476	кг за 1 день
	2144,280	кг за месяц
<b>Сохранить данные по потерям за сутки в БД</b>		
<b>Сформировать график</b>		
Результаты предыдущих расчетов потерь от «больших дыханий»	1125,552 868,647	
<b>Потери нефтепродукта при хранении в резервуаре составляют</b>	5465,632	кг за месяц

Рекомендации

**Для сокращения потерь рекомендовано использовать следующее:**

Окрашивание резервуара сократит потери на	1093,126	кг за месяц
Установка алюминиевого понтона сократит испарения на	4919,068	кг за месяц

Рис. 4. Расчет потерь программным методом и вывод рекомендаций по внедрению средств сокращения потерь

Т.к. расчет «малых» дыханий зависит от количества операций закачивания нефтепродукта в резервуар и его выкачки за одни сутки, программой предусмотрено сохранение предыдущих результатов расчета. В блоке «Потери нефтепродукта при хранении в резервуаре» отражается сумма значений потерь от «больших дыханий» по методу В.И. Черникина методом сложения текущих и предыдущих результатов, а также потерь при «малых» дыханиях, рассчитанных на месяц. На основе полученных с помощью программы значений потерь углеводородов от «больших» и «малых» дыханий при хранении в резервуарах нефтебазы, и сравнения полученных результатов с нормами потерь углеводородов (имеющихся в базе данных программы) даются рекомендации по внедрению современных методов уменьшения потерь при эксплуатации резервуаров, исходя из объема резервуара (Рисунок 4).

При этом учитывая вид средства сокращения потерь и его усредненную эффективность, а также объем углеводородов, теряемых резервуаром, рассчитывается предварительный объем сокращения потерь по резервуару от установки того или иного средства. Это производится путем обращения программы к базе данных, в которой содержится статистика по сокращению потерь углеводородов различными техническими решениями (Рисунок 5).

База данных программы была разработана с учетом сценариев ее использования [14]. Среди таких сценариев – запись данных о потерях резервуара в определенный день,

сопоставление системой оптимального метода сокращения потерь в конкретный день наблюдения, и формирование ряда данных для аналитики и визуализации [15]. Спроектированная и реализованная база состоит из двух основных таблиц и одной связующей [16].

Таблица «Резервуар» позволяет программе отслеживать конкретные резервуары через их идентификатор. Таблица «Метод сокращения потерь» является справочником, содержащим необходимую информацию о доступных методах сокращения потерь. Связная таблица «Метод сокращения потерь\_Резервуар» содержит информацию о конкретных наблюдениях потерь резервуара в определенный день. Такая структура базы данных соответствует требованиям четвертой нормальной формы так как не содержит многозначных зависимостей [17]. Такая структура позволяет легко выполнить основные запросы, которые необходимы для работы программы, в частности запись данных производится по средством добавления строки в таблицу «Метод сокращения потерь\_Резервуар», а формирование данных для визуализации выполняется запросом вида:

```
SELECT 'Потери от большого дыхания Черникин', 'Потери от малого дыхания'
FROM 'Метод сокращения потерь_Резервуар' INNER JOIN 'Резервуар' ON 'Резервуар'.
' ID Резервуар' = 'Метод сокращения потерь_Резервуар'. ' ID Резервуар' WHERE
' ID Резервуар' = x.
```

В качестве СУБД был выбран SQLite в силу небольшого объема хранимых данных и несложной структуры базы данных [18]. SQLite позволяет работать с базой данных в виде локального файла, благодаря этому, пользователю нет необходимости устанавливать сервер СУБД для работы с программой [19].

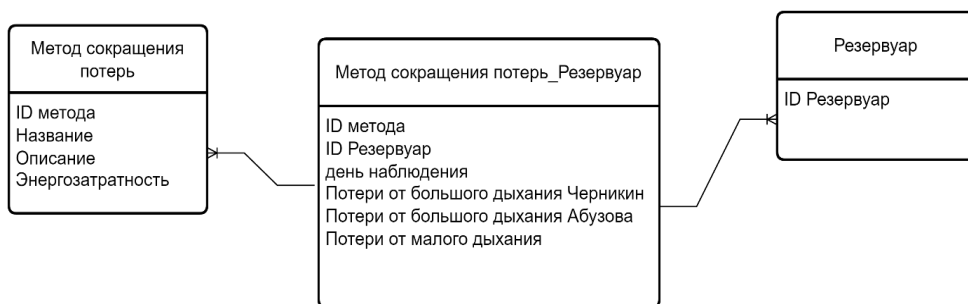


Рис. 5. Информационно-логическая база данных программы

Финальным блоком программы является вкладка инфографика. В ней отображаются в виде гистограммы результаты расчета потерь углеводородов по методикам Ф.Ф. Абузовой, В.И. Черникина и Н.Н. Константинова (Рисунок 6). Представленная разработка является по своей сути базовой, пилотной версией программного обеспечения. Учитывая ее простую модульную архитектуру, она может быть эффективно расширена и дополнена [20].

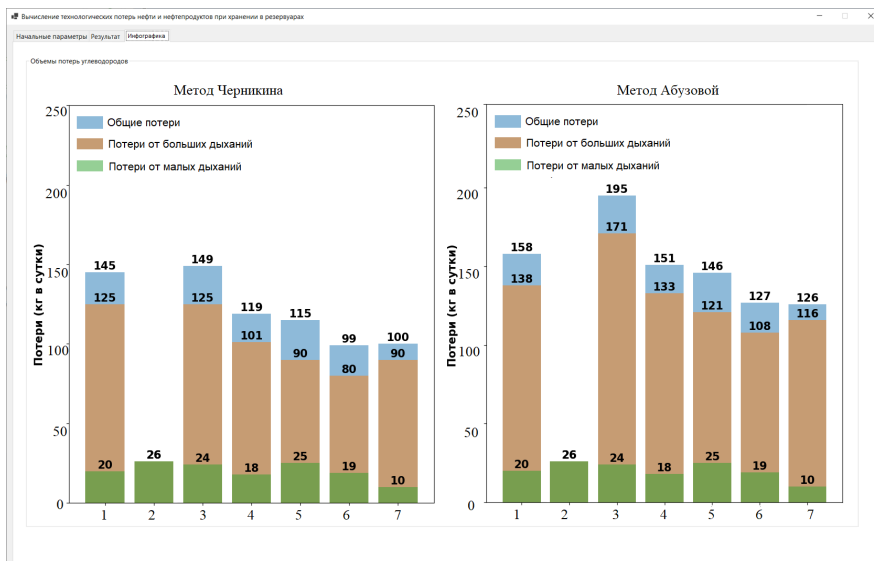


Рис. 6. Сравнение результатов подсчета объема ежедневных потерь АИ-92 (за неделю) в резервуаре РВС-2000 методами В.И. Черникина и Ф.Ф. Абузовой с учетом малых дыханий

Предложенная демOVERсия значительно упрощает процедуры вычислений объемов потерь по резервуару, сокращает трудовые затраты инженерно-технического персонала и уменьшает риск возникновения случайной ошибки.

## 5. ВЫВОДЫ

В результате работы получена демOVERсия программы, позволяющая используя язык С# рассчитывать объемы потерь углеводородов в резервуарах РВС-1000, РВС-2000, РВС-5000, РВС-10000 от больших и малых дыханий на основе методик Ф.Ф. Абузовой, В.И. Черникина и Н.Н. Константинова. Алгоритм программы и созданная база данных позволяют рассчитывать ежедневные потери по резервуару, формировать массив данных за несколько дней (до месяца), выдавать предварительные рекомендации по подбору средств сокращения потерь (в зависимости от их объема).

Разработанная демOVERсия может служить ядром расширенной программы. Для ее наполнения необходимо укрупнение базы данных по характеристикам резервуаров различных типоразмеров, по эффективности методов сокращения потерь. Возможно создание дополнительных надстроек под моделирование работы каждого из средств сокращения потерь и отображения результатов на инфографике, а также по соотношению полученных результатов с требованиями норм естественной убыли нефтепродуктов. Возможно также расширение программных возможностей в части проведения одновременного расчета для нескольких резервуаров.

### Литература

1. Юрьев В.И., Петров А.П., Швырков С.А., Воробьев В.В. К оценке пожарной опасности «больших» дыханий резервуаров типа РВС // Технологии техносферной безопасности. – 2017. – № 4(74). – С. 54–58. – EDN LBNPXV.
2. Лесных К.Е., Коршак. А.А, Хафизов Н.Н., Кузнецов А.А. Методические подходы к моделированию условий образования технологических потерь нефти и нефтепродуктов при испарениях из резервуаров // Наука и технологии трубопроводного транспорта нефти и нефтепродуктов. – 2020. – Т. 10, № 4. – С. 386–393. – DOI 10.28999/2541-9595-2020-10-4-386-393. – EDN MPJJBP.
3. Коршак, А.А. Прогнозирование потерь нефти и нефтепродуктов от испарения / А.А. Коршак. – Новосибирск: Академиздат, 2022. – 252 с. – ISBN 978-5-6048425-3-9. – EDN VCTWGX.
4. Юрьев В.И., Петров А.П., Шейкина В.А., Трубицына А.А. Проблема аналитической оценки величины давления насыщенных паров бензинов при анализе пожарной опасности «больших» дыханий резервуаров // Проблемы техносферной безопасности: материалы международной научно-практической конференции молодых учёных и специалистов. – 2017. – № 6. – С. 148–153. – EDN GGKCYN.
5. Тютяев, А.В. Исследования причин воспламенения газозооной смеси нефтепродуктов при заполнении резервуаров дизельным топливом / А.В. Тютяев, А.С. Должиков, И.С. Зверева // Фундаментальные исследования. – 2013. – № 6–4. – С. 873–876. – EDN QASRHB.
6. Плеваков, А.В. Анализ существующих средств сокращения потерь от испарений в резервуарах / А.В. Плеваков // Научный электронный журнал Меридиан. – 2019. – № 10(28). – С. 150–152. – EDN YGRASX.
7. Левицкий И.Н., Силинский А.В., Батраев А.В. Сравнительный анализ методик расчета потерь нефтепродуктов из резервуаров // Современные фундаментальные и прикладные исследования. – 2017. – № 4–1(27). – С. 146–150. – EDN YPBVCI.
8. Коршак, А.А. Актуализация методики прогнозирования потерь нефтепродуктов от «малых дыханий» резервуаров / А.А. Коршак, И.М. Руфанова // Проблемы сбора, подготовки и транспорта нефти и нефтепродуктов. – 2021. – № 2(130). – С. 60–69. – DOI 10.17122/ntj-oil-2021-2-60-69. – EDN LLBBSR.
9. Цвинкайло, П.С. Автоматизация инженерных расчётов / П.С. Цвинкайло // Экономика и социум. – 2022. – № 3–1(94). – С. 524–532. – EDN ACQWHP.
10. Коробейников, А.Г. Разработка и исследование многомерных математических моделей с использованием систем компьютерной алгебры / А.Г. Коробейников, А.Ю. Грищенко. – Санкт-Петербург: Санкт-Петербургский национальный исследовательский университет информационных технологий, механики и оптики, 2014. – 100 с. – EDN VZPXLТ.
11. Городня, Л.В. Функциональное программирование. Парадигма, модели и методы / Л.В. Городня; Российская академия наук, Сибирское отделение институт систем информатики им. А.П. Ершова. – Новосибирск: Сибирское отделение РАН, 2022. – 482 с. – ISBN 978-5-6047823-0-9. – DOI 10.53954/9785604782309. – EDN FOUPRH.
12. Луценко, Е.В. Инженерия знаний и интеллектуальные системы: учебник / Е.В. Луценко. – Краснодар: Виртуальный центр системно-когнитивных исследований «Эйдос», 2020. – 642 с. – DOI 10.13140/RG.2.2.28085.91364. – EDN GXJMAO.
13. Ткаченко, К. Программная реализация инструментального средства поддержки расчетов информационных характеристик физических систем на C# и Windows Forms / К. Ткаченко // Системный администратор. – 2021. – № 12(229). – С. 34–49. – EDN AAEGZW.
14. Смоленцев, Н.К. MATLAB. Программирование на Visual C#, Borland C#, JBuilder, VBA (2-е издание): Учебный курс / Н.К. Смоленцев. – Москва: ДМК Пресс, 2014. – 456 с. – ISBN 978-5-94074-771-0. – EDN UGOZYP.



15. Кудрина, Е.В. Основы алгоритмизации и программирования на языке С# / Е.В. Кудрина, М.В. Огнева. – Москва: Общество с ограниченной ответственностью «Издательство ЮРАЙТ», 2019. – 322 с. – (Профессиональное образование). – ISBN 978-5-534-10772-2. – EDN PDPFXO.
16. Трофимов В.В., Ильина О.П., Саитов А.В. Информатика: Учебник в 2 томах Под ред. профессора В.В. Трофимова. – 3-е издание, переработанное и дополненное. – Москва: Общество с ограниченной ответственностью «Издательство ЮРАЙТ», 2017. – 406 с. – (Профессиональное образование; 2). – ISBN 978-5-534-02519-4. – EDN ZSXFZN.
17. Корневский, Н.А. Автоматизированные системы управления химико-технологическими процессами: Учебник / Н.А. Корневский, Л.П. Лазурина, Л.В. Стародубцева. – Старый Оскол: ООО «Тонкие наукоемкие технологии», 2021. – 244 с. – ISBN 978-5-94178-717-3. – EDN YYXULK.
18. Иванова, А.К. Базы данных. Системы управления базами данных / А.К. Иванова, А.Л. Куленцан // Сборник научных трудов вузов России «Проблемы экономики, финансов и управления производством». – 2023. – № 52. – С. 110–114. – EDN GVIXFD.
19. Лазицкас, Е.А. Базы данных и системы управления базами данных: Учебное пособие / Е.А. Лазицкас, И.Н. Загуменникова, П.Г. Гилевский. – Минск: Республиканский институт профессионального образования (РИПО), 2016. – 268 с. – ISBN 978-985-503-558-0. – EDN ZUZHKN.
20. Окуловский, Д.В. Оптимизация работы резервуарного парка / Д.В. Окуловский, Р.Е. Левитин // Интернаука. – 2020. – № 47–1(176). – С. 91–93. – EDN UQPRSD.



## Design of Specialized Software for the Operational Calculation of Hydrocarbon Losses in Reservoirs

***Pavel S. Shcherban\****

I. Kant Baltic Federal University (BFU), Kaliningrad, Russia

ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-5106-7852>

e-mail: [ursa-maior@yandex.ru](mailto:ursa-maior@yandex.ru)

***Reda V. Abu-Hamdi\*\****

Moscow Institute of Physics and Technology

Phystech School of Applied Mathematics and Informatics (MFTI), Moscow, Russia

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-2275-0529>

e-mail: [rabouhamdi@gmail.com](mailto:rabouhamdi@gmail.com)

Ensuring modern storage of hydrocarbons is not a trivial task. The existing requirements imposed by environmental and fire protection legislation, as well as the economics of production, oblige the owners of tank farms to take measures for calculation and reduction of petroleum products losses. For solvation of this problem, a group of calculation methods has been formed. They are allow to determine the volume of hydrocarbon losses during large and small breaths in tank farms. At the same time, carrying out calculations and selecting the appropriate equipment to reduce losses is quite difficult for the engineering and technical personnel of oil storages. In this regard, based on the calculation methods of V.I. Chernikin, F.F. Abuzova and N.N. Konstantinov the software for calculating hydrocarbon losses in reservoirs from large and small respirations was developed. Software has the ability to store data for a month daily and with a system of issuing recommendations regarding the use of means to reduce hydrocarbon losses. To write the program code, C# was used in Visual Studio 2022. The demo version of the program allows to calculate the volume of losses of petroleum products in vertical steel tanks of various sizes and under changing environmental conditions, and also, based on the embedded database, recommend the necessary means of losses reduction for installation on the tank.

***Keywords:*** hydrocarbon losses, reservoir, quality management, process control, software development, calculation methods, C#.

### **For citation:**

Shcherban P.S., Abu-Hamdi R.V. Design Of Specialized Software for the Operational Calculation of Hydrocarbon Losses in Reservoirs. *Modelirovanie i analiz dannykh = Modelling and Data Analysis*, 2024. Vol. 14, no. 1, pp. 155–169. DOI: <https://doi.org/10.17759/mda.2024140110> (In Russ., abstr. in Engl.).



\***Pavel S. Shcherban**, PhD in technical sciences, Baltic Federal University. I. Kant (BFU), Kaliningrad, Russia, ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-5106-7852>, e-mail: [ursa-maior@yandex.ru](mailto:ursa-maior@yandex.ru)

\*\***Reda V. Abu-Hamdi**, Master student, Moscow Institute of Physics and Technology. Phystech School of Applied Mathematics and Informatics (MFTI), Moscow, Russia. ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-2275-0529>, e-mail: [rabouhamdi@gmail.com](mailto:rabouhamdi@gmail.com)

### References

1. Yuryev V.I., Petrov A.P., Shvyrkov S.A., Vorobyov V.V. To assess the fire hazard of “large” breathing tanks of the RVS type // *Technologies of technosphere safety*. – 2017. – No. 4(74). – pp. 54–58. – EDN LBNPXV.
2. Lesnykh K.E., Korshak. A.A., Khafizov N.N., Kuznetsov A.A. Methodological approaches to modeling the conditions for the formation of technological losses of oil and oil products during evaporation from reservoirs // *Science and technology of pipeline transport of oil and oil products*. – 2020. – T. 10, No. 4. – P. 386–393. – DOI 10.28999/2541-9595-2020-10-4-386-393. – EDN MPJJBP.
3. Korshak, A.A. Forecasting losses of oil and petroleum products from evaporation / A.A. Korshak. – Novosibirsk: Akademizdat, 2022. – 252 p. – ISBN 978-5-6048425-3-9. – EDN VCTWGX.
4. Yuryev V.I., Petrov A.P., Sheikina V.A., Trubitsyna A.A. The problem of analytical assessment of the pressure of saturated gasoline vapors when analyzing the fire hazard of “large” breathing tanks // *Problems of technospheric safety: international materials scientific and practical conference of young scientists and specialists*. – 2017. – No. 6. – P. 148–153. – EDN GGKCYN.
5. Tyutyaev, A.V. Research on the causes of ignition of a gas-air mixture of petroleum products when filling tanks with diesel fuel / A.V. Tyutyaev, A.S. Dolzhikov, I.S. Zvereva // *Fundamental Research*. – 2013. – No. 6–4. – pp. 873–876. – EDN QASRHB.
6. Pleshakov, A.V. Analysis of existing means of reducing losses from evaporation in tanks / A.V. Pleshakov // *Scientific electronic journal Meridian*. – 2019. – No. 10(28). – pp. 150–152. – EDN YGRASX.
7. Levitsky I. N., Silinsky A.V., Batraev A.V. Comparative analysis of methods for calculating losses of oil products from tanks // *Modern fundamental and applied research*. – 2017. – No. 4–1(27). – pp. 146–150. – EDN YPBVCI.
8. Korshak, A.A. Updating the methodology for predicting losses of petroleum products from “small breathing” of tanks / A.A. Korshak, I.M. Rufanova // *Problems of collection, preparation and transport of oil and petroleum products*. – 2021. – No. 2(130). – P. 60–69. – DOI 10.17122/ntj-oil-2021–2–60–69. – EDN LLBBSR.
9. Tsvinkaylo, P.S. Automation of engineering calculations / P.S. Tsvinkaylo // *Economics and society*. – 2022. – No. 3–1(94). – pp. 524–532. – EDN ACQWHP.
10. Korobeinikov, A.G. Development and research of multidimensional mathematical models using computer algebra systems / A.G. Korobeinikov, A. Yu. Grishentsev. – St. Petersburg: St. Petersburg National Research University of Information Technologies, Mechanics and Optics, 2014. – 100 p. – EDN VZPXLT.
11. Gorodnyaya, L.V. Functional programming. Paradigm, models and methods / L.V. Gorodnyaya; Russian Academy of Sciences, Siberian Branch of the Institute of Informatics Systems named after. A.P. Ershova. – Novosibirsk: Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, 2022. – 482 p. – ISBN 978-5-6047823-0-9. – DOI 10.53954/9785604782309. – EDN FOUPRH.
12. Lutsenko, E.V. Knowledge engineering and intelligent systems: textbook / E.V. Lutsenko. – Krasnodar: Virtual Center for Systemic Cognitive Research “Eidos”, 2020. – 642 p. – DOI 10.13140/RG.2.2.28085.91364. – EDN GXJMAO.





13. Tkachenko, K. Software implementation of a tool to support calculations of information characteristics of physical systems in C# and Windows Forms / K. Tkachenko // System Administrator. – 2021. – No. 12(229). – P. 34–49. – EDN AAEGZW.
14. Smolentsev, N. K. MATLAB. Programming in Visual C#, Borland C#, JBuilder, VBA (2nd edition): Training course / N.K. Smolentsev. – Moscow: DMK Press, 2014. – 456 p. – ISBN 978-5-94074-771-0. – EDN UGOZYP.
15. Kudrina, E.V. Fundamentals of algorithmization and programming in the C# language / E.V. Kudrina, M.V. Ogneva. – Moscow: Limited Liability Company “YURAYT Publishing House”, 2019. – 322 p. – (Professional education). – ISBN 978-5-534-10772-2. – EDN PDPFXO.
16. Trofimov V.V., Ilyina O.P., Saitov A.V. Computer Science: Textbook in 2 volumes Ed. Professor V.V. Trofimova. – 3rd edition, revised and expanded. – Moscow: Limited Liability Company “YURAYT Publishing House”, 2017. – 406 p. – (Vocational education; 2). – ISBN 978-5-534-02519-4. – EDN ZSXFZN.
17. Korenevsky, N.A. Automated control systems for chemical technological processes: Textbook / N.A. Korenevsky, L.P. Lazurina, L.V. Starodubtseva. – Sary Oskol: LLC “Subtle Science-Intensive Technologies”, 2021. – 244 p. – ISBN 978-5-94178-717-3. – EDN YYXULK.
18. Ivanova, A.K. Databases. Database management systems / A.K. Ivanova, A.L. Kulentsan // Collection of scientific works of Russian universities “Problems of economics, finance and production management”. – 2023. – No. 52. – P. 110–114. – EDN GVIXFD.
19. Lazickas, E.A. Databases and database management systems: Textbook / E.A. Lazickas, I.N. Zagumennikova, P.G. Gilevsky. – Minsk: Republican Institute of Vocational Education (RIPO), 2016. – 268 p. – ISBN 978-985-503-558-0. – EDN ZUZHKH.
20. Okulovsky, D.V. Optimization of tank farm operation / D.V. Okulovsky, R.E. Levitin // Internauka. – 2020. – No. 47–1(176). – pp. 91–93. – EDN UQPRSD.

Получена 17.11.2023

Принята в печать 10.12.2023

Received 17.11.2023

Accepted 10.12.2023

## ◆◆◆◆◆МЕТОДИКА ПРЕПОДАВАНИЯ◆◆◆◆◆

УДК 372.851

### **Вычислительный эксперимент в преподавании высшей математики на примере теории чисел**

**Куланин Е.Д.\***

Московский государственный психолого-педагогический университет  
(ФГБОУ ВО МГППУ), г. Москва, Российская Федерация  
ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-6093-7012>  
e-mail: [lucas03@mail.ru](mailto:lucas03@mail.ru)

**Степанов М.Е.\*\***

Московский государственный психолого-педагогический университет  
(ФГБОУ ВО МГППУ), г. Москва, Российская Федерация  
ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-4803-8211>  
e-mail: [mestepanov@yandex.ru](mailto:mestepanov@yandex.ru)

Статья продолжает цикл методических разработок авторов [1] – [17]. В ней обсуждаются некоторые проблемы, связанные с путями повышения культуры математического мышления студентов-математиков. Авторы опираются на опыт работы на факультете информационных технологий МГППУ.

**Ключевые слова:** высшее образование, методика преподавания высшей математики, компьютерные вычисления, вычислительный эксперимент, теория чисел, простые числа, числа-близнецы, четвёрки простых чисел, диофантовы уравнения, иррациональные числа.

#### **Для цитаты:**

*Куланин Е.Д., Степанов М.Е.* Вычислительный эксперимент в преподавании высшей математики на примере теории чисел // Моделирование и анализ данных. 2024. Том 14. № 1. С. 170–195. DOI: <https://doi.org/10.17759/mda.2024140111>

\***Куланин Евгений Дмитриевич**, кандидат физико-математических наук, профессор, Московский государственный психолого-педагогический университет (ФГБОУ ВО МГППУ), г. Москва, Российская Федерация, ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-6093-7012>, e-mail: [lucas03@mail.ru](mailto:lucas03@mail.ru)

\*\***Степанов Михаил Евграфович**, кандидат педагогических наук, доцент, Московский государственный психолого-педагогический университет (ФГБОУ ВО МГППУ), г. Москва, Российская Федерация, ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-4803-8211>, e-mail: [mestepanov@yandex.ru](mailto:mestepanov@yandex.ru)



## 1. ВВЕДЕНИЕ

Одной из задач данной статьи является обсуждение роли эксперимента в преподавании высшей математики. Начнём статью с пространной цитаты из статьи известного отечественного математика Владимира Игоревича Арнольда [18].

«Математика – часть физики. Физика – экспериментальная, естественная наука, часть естествознания. Математика – это та часть физики, в которой эксперименты дешёвы.

Тождество Якоби (вынуждающее высоты треугольника пересекаться в одной точке) – такой же экспериментальный факт, как то, что Земля круглая (т.е. гомеоморфна шару). Но обнаружить его можно с меньшими затратами.

В середине двадцатого века была предпринята попытка разделить математику и физику. Последствия оказались катастрофическими. Выросли целые поколения математиков, незнакомых с половиной своей науки и, естественно, не имеющих никакого представления ни о каких других науках. Они начали учить своей уродливой схоластической псевдоматематике сначала студентов, а потом и школьников (забыв о предупреждении Харди, что для уродливой математики нет постоянного места под Солнцем)».

Общий смысл позиции В.И. Арнольда, с точки зрения авторов статьи таков. Математика изучает не бессодержательные абстрактные структуры, а образы реального мира. В частности, речь идёт о геометрических образах, которые характеризуют строение окружающего мира и в чём-то подобны физическим телам и силовым полям, но могут изучаться математиками без применения измерительной аппаратуры ([1]). Методы математического познания основываются на духовном созерцании образов, в известном смысле напоминающих платоновские идеи, и их логическом анализе ([10]). Если нужно охарактеризовать эти методы одним словом, то следует использовать слово «**Размышление**».

Однако общеизвестно то обстоятельство, что многие математические результаты могут быть получены с помощью **вычислений**. При этом иногда размышления и вычисления противопоставляются друг другу как антагонисты. Не вдаваясь в подробности, отметим, что математик, в отличие от инженера, должен сам разработать процедуру вычисления, включая постановку задачи, которая может быть решена вычислителем, разработку алгоритма и, наконец, анализ результатов вычисления. Таким образом, полноценное вычисление основано на размышлении. Появление компьютерной техники, несомненно, упростило вычисления с технической стороны, но не отменило их связь с размышлениями.

Учебная работа со студентами-математиками, кроме всего прочего, включает в себя развитие их интереса к математике как таковой. Добиться даже минимальных результатов в этом направлении можно, только предлагая учащимся задания, имеющие характер научного исследования. Поиск таких задач связан с определёнными трудностями. Действительно, с одной стороны задача должна быть посильной, а с другой – представлять возможности для получения новых результатов.

Авторы статьи считают, что для этих целей как раз и можно использовать задачи вычислительного характера. Данная статья посвящена рассмотрению ряда примеров



таких вопросов, связанных с теорией чисел. В дальнейшем предполагается также и написание статей, которые касаются вычислений в общей алгебре, геометрии, математическом анализе и т. д.

## 2. ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ ИНСТРУМЕНТАРИЙ

Проведение вычислений в современных условиях предполагает использование электронных вычислительных устройств. Это в высшей степени облегчает работу вычислителя. Однако, как известно, повсеместный отказ от ручных вычислений имеет ряд важных негативных последствий. Прежде всего, речь идёт об ухудшении мыслительных способностей, в том числе и студентов. По этой причине желательно использовать вычислительные задания, при выполнении которых студент должен использовать ручной, а порой даже устный счёт.

Таким образом, кроме компьютерных вычислений в данной статье будут рассматриваться и вычисления устные. Конечно, возникает вопрос о том, можно ли в современных условиях заставить студента отказаться даже от калькулятора? Сделать это можно только, наложив ограничения на результат вычислений.

Перечислим теперь те три вида вычислений, которые будут использованы далее при проведении вычислительных экспериментов.

1. Ручные и устные вычисления.
2. Вычисления с помощью электронных таблиц Excel.
3. Вычисления с помощью программ, написанных на языке программирования Small Basic.

Приведём примеры заданий, естественным образом решаемых одним из перечисленных видов вычислений.

## 3. РУЧНЫЕ И УСТНЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ

**Обсуждение вычислительного метода.** Для извлечения квадратного корня из некоторого числа рассмотрим известную формулу сокращённого умножения  $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ . Считая, что  $b$  мало, можно отбросить  $b^2$  и получить приближённую формулу  $(a+b)^2 \approx a^2 + 2ab$ . Отсюда следует, что  $\sqrt{a^2 + 2ab} \approx a + b$ . Предположим, что нужно вычислить корень из числа  $c$ . Пусть  $a$  – приближённое значение корня из  $c$ , тогда можно положить, что  $c = a^2 + 2ab$ . Это позволяет вычислить параметр  $b$ . Но, зная его, можно получить и приближённое значение квадратного корня, равное  $a + b$ .

**Задание 1.** Вычислить приближённое значение  $\sqrt{5}$ . При этом требуется получить результат в виде обыкновенной дроби без использования калькулятора.

**Решение.** По условию  $c = 5$ . На роль  $a$  естественно выбрать число 2 (поскольку  $2^2 \approx 5$ ). Вычислим параметр  $b$ . Поскольку  $c = a^2 + 2ab$ , то  $b = \frac{c - a^2}{2a}$ . В нашем конкретном случае  $b = \frac{5 - 4}{4} = \frac{1}{4}$ . Таким образом,  $\sqrt{5} \approx 2 + \frac{1}{4} = \frac{9}{4}$ .



Проведём проверку:  $(\frac{9}{4})^2 = \frac{81}{16} \approx 5$ .

**Задание 2.** Как получить более точное значение корня?

**Решение.** В качестве  $a$  следует взять полученное ранее приближение квадратного корня из 5.

**Задание 3.** Вычислить более точное значение  $\sqrt{5}$ .

Возможное развитие данной темы, в том числе и теоретическое, связано с разработкой аналогичных методов извлечения корней любых степеней с помощью усечения бинома Ньютона до двух слагаемых.

## 4. ВЫЧИСЛЕНИЯ С ПОМОЩЬЮ ЭЛЕКТРОННЫХ ТАБЛИЦ EXCEL

**Задание 4.** Вычислить, используя описанный выше способ, несколько последовательных приближений квадратного корня из какого-либо числа.

**Решение.** Главная задача состоит в разработке вычислительной схемы, которая будет реализована в Excel. Структура схемы показана на рисунке 1. В конкретном примере будет извлечён квадратный корень из  $c = 7$ .

Для того, чтобы начать вычисление, необходимо выбрать исходное приближение  $a$  для квадратного корня. Это делается вычислителем. При этом на роль  $a^2$  следует выбрать ближайший к  $c$  квадрат натурального числа. В нашем случае  $a^2 = 9$ .

	A	B	C	D	E	F
1	c	№ пригл	a	b		a <sup>2</sup>
2	7	1	3	=(A\$2-C2^2)/(2*C2)		=C2^2
3		=B2+1	=C2+D2			
4						
5						
6				Автозаполнение		
7						

Автозаполнение

Рис. 1

Результаты вычислений показаны на рисунке 2.

	A	B	C	D	E	F
1	Число c	Номер приближения	Приближение a	Поправка b		Квадрат приближения
2	7	1	3	-0,333333333		9
3		2	2,666666667	-0,020833333		7,111111111
4		3	2,645833333	-8,2021E-05		7,000434028
5		4	2,645751312	-1,27137E-09		7,000000007
6		5	2,645751311	-1,6785E-16		7
7						

Рис. 2



## 5. ВЫЧИСЛЕНИЯ С ПОМОЩЬЮ КОМПЬЮТЕРНОЙ ПРОГРАММЫ

**Задание 5.** Написать программу, которая позволяет вычислить достаточно точное значение квадратного корня из какого-либо числа.

**Решение.** Программа соответствует вычислительной схеме, которая была реализована в Excel.

*'Число*

$c = 29$

*'Степень корня*

$n = 2$

*'Исходное приближение*

$a = 5$

*'Число приближений*

$m = 5$

*'Вычислительный цикл*

For  $i = 1$  To 5

$a1 = \text{Math.Power}(a, n)$

$a2 = \text{Math.Power}(a, n - 1)$

$b = (c - a1)/(n*a2)$

$a = a + b$

*'Печать очередного приближения*

GraphicsWindow.DrawText(50,  $i*50$ , a)

EndFor

*'Проверка результата*

GraphicsWindow.DrawText(50,  $i*50 + 50$ ,  $\text{Math.Power}(a, n)$ )

Результаты работы программы приведены на рисунке 3.

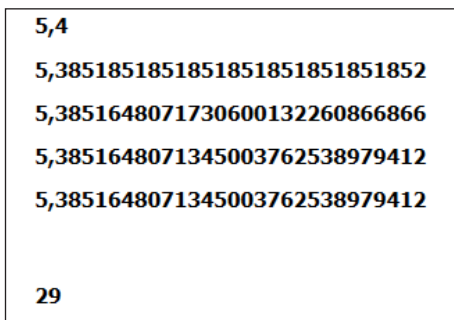


Рис.3



Важной теоретической задачей в рамках данной тематики, которую можно предложить студентам, является сравнение предлагаемого способа извлечения корней с вычислениями, основанными на использовании дифференциала.

Наши вычислительные примеры можно отнести не столько к теории чисел, сколько к методам вычислений. Перейдём теперь к чисто теоретико-числовым задачам.

## 5. ДЕЛИМОСТЬ ЧИСЕЛ

Важнейшие задачи теории чисел связаны с вопросами делимости натуральных чисел. По этой причине на первое место при вычислениях должны выйти соответствующие задачи.

**Задание 6.** Написать программу, которая выполняет деление с остатком одного натурального числа на другое.

**Решение.** Пусть в программе требуется разделить число  $n$  на число  $m$ . Для этого нужно выполнить деление в поле рациональных чисел и округлить частное, до ближайшего натурального числа меньшего, чем частное. В языке Small Basic для такого округления используется функция `Math.Floor`(«переменная»).

*'Делимое*

`n = 1097`

`GraphicsWindow.DrawText(100, 50, «Делимое равно « + n)`

*'Делитель*

`m = 19`

`GraphicsWindow.DrawText(100, 70, «Делитель равен « + m)`

*'Округление частного*

`p = Math.Floor(n/m)`

*'Получение остатка*

`r = n - m*p`

*'Печать результата*

`GraphicsWindow.DrawText(100, 90, «Частное равно « + p)`

`GraphicsWindow.DrawText(100, 110, «Остаток равен « + r)`

*'Проверка*

`GraphicsWindow.DrawText(100, 130, p + “ * “ + m + “ + “ + r + “ = “ + (p*m + r))`

**Задание 7.** Написать программу, которая находит наибольший общий делитель (НОД) двух чисел.

**Решение.** Пусть в программе нужно найти НОД двух чисел  $n$  и  $m$ . Для нахождения НОД следует использовать алгоритм Евклида, который представляет собой многократное деление с остатком. Сначала большее из двух чисел делят с остатком на меньшее число. Далее, меньшее из исходных чисел делят на остаток. И далее каждый очередной делитель становится делимым, а очередной остаток делителем. Этот



процесс продолжается до тех пор, пока не будет произведено деление с нулевым остатком. Тогда искомым НОД равен последнему делителю.

```
'Первое число
n = 77
'Второе число
m = 209
If n < m Then
buf = n
n = m
m = buf
EndIf
y = 30
r = n
While (r > 0)
'Округление частного
p = Math.Floor(n/m)
'Получение остатка
r = n - m*p
'Печать результата
GraphicsWindow.DrawText(100, y, «Частное равно « + p)
y = y + 30
GraphicsWindow.DrawText(100, y, «Остаток равен « + r)
y = y + 30
'Проверка
GraphicsWindow.DrawText(100, y, p + “ * “ + m + “ + “ + r + “ = “ + (p*m + r))
n = m
m = r
y = y + 30
EndWhile
GraphicsWindow.DrawText(100, y, “НОД равен “ + n)
```

**Задание 8.** Написать программу, которая находит наименьшей общее кратное (НОК) двух чисел.

**Решение.** Имея в своём распоряжении предыдущую программу, достаточно просто написать программу для нахождения НОК. Тем не менее, полезно предлагать студентам и простые задания, связанные с вычислениями. В частности, их выполнение помогает освоить ранее разработанные вычислительные алгоритмы.

**Задание 9.** Написать программу, которая вычисляет теоретико-числовую функцию Эйлера.

**Решение.** Функция Эйлера от натурального числа  $n$  обозначается через  $\varphi(n)$ . По определению  $\varphi(1) = 1$ . При  $n > 1$  функция Эйлера равна количеству взаимно





простых с  $n$  натуральных чисел из последовательности  $1, 2, \dots, n-1$ . Таким образом, для вычисления функции Эйлера (в программе это значение обозначено через `funk`) от некоторого аргумента (в программе он обозначен через `arg`) нужно подсчитать количество взаимно простых с `arg` чисел  $k$  из последовательности  $2, 3, \dots, \text{arg} - 1$ . Для подсчётов используется подпрограмма, которая вычисляет соответствующие наибольшие общие делители. Если НОД  $k$  и `arg` равен 1, то значение `funk` увеличиваем на 1.

```
arg = 95
funk = 1
For k = 2 to arg-1
n = arg
m = k
NOD()
If n = 1 Then
funk = funk + 1
EndIf
EndFor
GraphicsWindow.DrawText(100,100, funk)
Sub NOD
r = n
While (r > 0)
p = Math.Floor(n/m)
r = n - m*p
n = m
m = r
EndWhile
EndSub
```

Одним из способов осмысления результатов вычислений является представление этих результатов в образной форме, например, в виде графика. Построив график функции Эйлера, можно убедиться, что её значения группируются вдоль прямых. Размышления о причинах этого факта, кроме всего прочего, потребует рассмотрения мультипликативности этой функции. Таким образом, результаты вычислений становятся поводом для теоретических построений.

**Задание 10.** Написать программу, которая построит график функции Эйлера.

**Решение.** Предыдущая программа является алгоритмическим стержнем соответствующего построения. Её результаты показаны на рисунке 4.

```
Sub NOD
r = n
While (r > 0)
p = Math.Floor(n/m)
```



```
r = n - m*p
n = m
m = r
EndWhile
EndSub

GraphicsWindow.Width = 800
GraphicsWindow.Height = 750
GraphicsWindow.PenColor = "blue"
GraphicsWindow.DrawLine(10,0,10,750)
GraphicsWindow.DrawLine(0,740,800,740)
GraphicsWindow.BrushColor = "black"
arg = 1
funk = 1
x = 10 + arg*4
y = 740 - funk*4
GraphicsWindow.FillEllipse(x-2, y-2,4,4)
For arg = 2 to 190
funk = 1
For k = 2 to arg-1
n = arg
m = k
NOD()
If n = 1 Then
funk = funk + 1
EndIf
EndFor
x = 10 + arg*4
y = 740 - funk*4
GraphicsWindow.FillEllipse(x-2, y-2,4,4)
EndFor
```

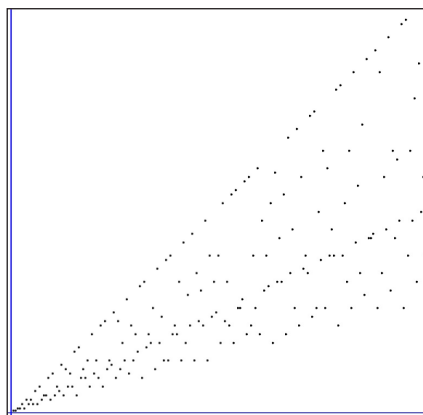


Рис. 4

## 6. ПРОСТЫЕ ЧИСЛА

Простым числом называется натуральное число, большее, чем единица, которое делится только на себя и на единицу. Это в частности означает, что натуральное число  $p$  является простым тогда и только тогда, когда функция Эйлера  $\varphi(p) = p - 1$ . Таким образом, программа из задания 8 может быть использована для определения простоты натурального числа. Однако вычисления, требуемые для этой цели можно ускорить. Дело в том, что при определении простоты числа  $p$  нет необходимости



подсчитывать количество взаимно простых с  $p$  чисел в интервале от 2 до  $p-1$ . Достаточно показать, что делителей числа  $p$  в этой последовательности нет. При этом если число  $p$  разлагается на множители  $n$  и  $m$  ( $p = n \cdot m$ ), то одно из этих чисел меньше или равно корню квадратному из  $p$ . Из этого следует, что для проверки простоты число  $p$  достаточно делить только на члены последовательности от двух до целой части корня квадратного из  $p$ .

**Задание 11.** Вручную определить, является ли число 131 простым.

**Решение.** Поскольку  $11^2 = 121$ , а  $12^2 = 144$ , целая часть корня квадратного из 131 равна 11. Таким образом, нужно проверить делимость числа 131 на числа из интервала от двух до одиннадцати. При этом будем использовать признаки делимости. Число 131 нечётное, значит, отбрасываем делители 2, 4, 6, 8, 10. Число 131 не делится на 3 и 9, так как сумма его цифр на эти числа не делится. Число 131 не делится на 5. Остаётся разделить с остатком 131 на 7 и 11:

$$131 = 140 - 14 + 5 = 20 \cdot 7 - 2 \cdot 7 + 5 = 18 \cdot 7 + 5,$$

$$131 = 121 + 10 = 11 \cdot 11 + 10.$$

Остатки от деления не равны нулю, значит, 131 не делится ни на 7, ни на 11. В итоге убеждаемся, что 131 является простым числом.

**Задание 12.** Разработать вычислительную схему для определения простоты числа с помощью Excel.

**Решение.** Предварительно нужно вычислить целую часть корня из проверяемого числа, чтобы установить количество делителей. Деление производится с остатком. Если хотя бы один остаток равен нулю, то число не является простым. Вычислительная схема показана на рисунке 5.

	А	В	С	Д
1	Число	Делители	Частное	Остаток
2	193	2	= ЦЕЛОЕ(\$A\$2/В2)	=\$A\$2 - В2*С2
3	Корень	= В2 + 1		
4	= ЦЕЛОЕ (КОРЕНЬ(А2))			
5				
6				
7				
8				
9				
10				
11				
12				
13		13		
14				
15	= ЕСЛИ(D15 = 0; "Число сложное"; "Число простое")			= МИН(D2:D13)
16				

Рис. 5



**Задание 13.** Написать программу, которая проверяет натуральное число на простоту.

**Решение.** В программе проверяется на простоту натуральное число  $n$ .

```
n = 1093
m = 1
prz = 0
q = Math.Floor(Math.Sqrt(n))
For k = 2 To q
    s = n/k
    s1 = Math.Floor(s)
    If s = s1 Then
        prz = 1
    EndIf
EndFor
If prz = 0 Then
    GraphicsWindow.DrawText(100, 100, n + " простое число")
Else
    GraphicsWindow.DrawText(100, 100, n + " сложное число")
EndIf
```

Простые числа образуют последовательность, которая на первый взгляд довольно хаотична, поскольку в ней наблюдается значительная неравномерность. По этой причине важной частью теории чисел является изучение распределения чисел в этой последовательности.

Прежде всего, не найдена простая аналитическая формула зависимости простого числа от его номера. По этой причине изучение простых чисел связано с вычислениями. Ими занимаются специалисты высочайшего уровня. По этой причине невозможно превзойти уже полученные результаты. Тем не менее, самостоятельное выполнение вычислений, связанных с теоретико-числовой проблематикой может оказаться очень полезным.

Одной из целей при этом может стать «личное знакомство» с натуральными числами и, в том числе, с простыми. Приведём по этому поводу цитату из книги Г. Харди [19] о индийском математике Рамануджане: «Литлвуд сказал, что каждое положительное число было одним из личных друзей Рамануджана. Я помню, как однажды собирался навестить его, когда он лежал больной в Пулни. Я ехал на такси с номером 1729 и упомянул, что это число кажется мне довольно тупым и что я надеюсь, что оно не окажется неблагоприятным предзнаменованием. «Нет» – ответил он, – «это очень интересное число, это наименьшее число, которое выражается как сумма двух кубов двумя различными способами».

По этой причине продолжим работу над заданиями, связанными с теоретико-числовой проблематикой, но сделаем небольшое отступление от работы с простыми числами.

**Задание 14.** Найти упомянутые в цитате разложения числа 1729.

**Решение.** Извлечём из числа 1729 кубический корень и найдём его целую часть. Сделаем это так. Корень кубический из тысячи равен 10. Будем возводить в куб числа 11, 12 и так далее пока не получим нужный результат:  $11^3 = 1331$ ,  $12^3 = 1728$ . Ясно, что целая часть корня кубического из 1729 равна 12. Заодно получено первое разложение:  $1^3 + 12^3 = 1729$ .

Далее будем вычитать из 1729 кубы 11, 10 и так далее и проверять, будет ли в остатке получен ещё один куб.  $1729 - 11^3 = 1729 - 1331 = 398$  – не куб.  $1729 - 10^3 = 729 = 9^3$ . Найдено и второе разложение:  $9^3 + 10^3 = 1729$ .

Вернёмся к простым числам.

**Задание 15.** Написать программу, которая построит график последовательности занумерованных по порядку простых чисел.

**Решение.** График показан на рисунке 6.

```
GraphicsWindow.Width = 300
GraphicsWindow.Height = 700
kol = 0
min = 2
max = 1200
For n = min To max
  prz = 0
  q = Math.Floor(Math.Sqrt(n))
  For k = 2 To q
    s = n/k
    s1 = Math.Floor(s)
    If s = s1 Then
      prz = 1
    EndIf
  EndFor
  If prz = 0 Then
    x = kol + 50
    y = 650 - n/2
    GraphicsWindow.FillEllipse(x - 2, y - 2, 4, 4)
    kol = kol + 1
  EndIf
EndFor
```

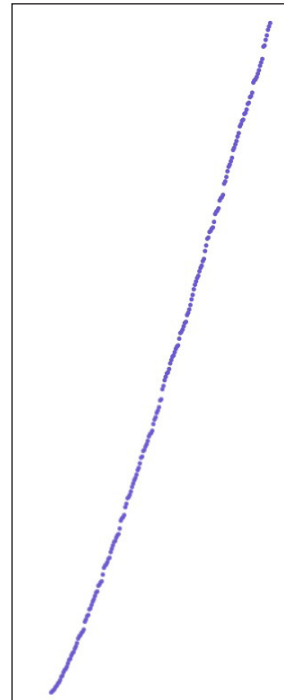


Рис. 6

**Задание 16.** Написать программу, которая проверяет на простоту числа из некоторого интервала и подсчитывает количество простых чисел в этом интервале.

**Решение.** Приводимая ниже программа проверяет числа интервала натуральных чисел от  $min$  до  $max$  на простоту и подсчитывает их количество  $kol$ .



```
kol = 0
min = 1000
max = 1100
m = 1
For n = min To max
  prz = 0
  q = Math.Floor(Math.SquareRoot(n))
  For k = 2 To q
    s = n/k
    s1 = Math.Floor(s)
    If s = s1 Then
      prz = 1
    EndIf
  EndFor
  If prz = 0 Then
    GraphicsWindow.DrawText(100, m*12, n + " простое число")
    m = m + 1
    kol = kol + 1
  EndIf
EndFor
GraphicsWindow.DrawText(100, m*12 + 12, kol + " простых в интервале")
```

Важность простых чисел связана с тем, что с их помощью при перемножении возникают все натуральные числа, в том числе составные. Одна из первых теорем теории чисел состоит в том, что любое натуральное число больше единицы можно разложить на простые множители.

**Задание 17.** Используя результат задания 13, с помощью устных вычислений разложить число 1729 на простые множители.

**Решение.** Поскольку число, представленное в виде  $a^3 + b^3$ , делится на  $a + b$ , число 1729 делится на 13 и 19. Сначала разделим его на 13. Для этого представим его в виде  $1300 + 429 = 1300 + 390 + 39 = 133 \cdot 13$ . Чтобы разделить число 133 на 19, представляем его в виде  $133 = 20 \cdot 7 - 7 = (20 - 1) \cdot 7 = 19 \cdot 7$ . В итоге получено искомое разложение:  $1729 = 7 \cdot 13 \cdot 19$ .

**Задание 18.** Написать программу, которая разлагает натуральное число на простые множители.

**Решение.** Программа делит разлагаемое на множители число  $n$  на числа последовательности натуральных чисел, начиная с двух. При этом деление на одно и то же число из этой последовательности производится многократно до тех пор, пока деление нацело становится невозможным. После этого производится увеличение делителя на единицу. Все делители, для которых прошло деление без остатка, фиксируются как делители числа  $n$ .



Может возникнуть следующий вопрос. Описанный алгоритм предполагает деление и на составные числа, например, на 4. Однако предварительно проводятся все деления на число 2. Тем самым в дальнейшем деление на все чётные числа даёт ненулевые остатки.

Число  $n$  в программе задано как произведение чисел, что позволяет убедиться в правильности работы программы.

```
GraphicsWindow.Width = 200
GraphicsWindow.Height = 700
GraphicsWindow.BrushColor = "red"

n = 11*17*19*25*27
GraphicsWindow.DrawText(50,60, n)
k = 1
d = n
m = 2
GraphicsWindow.BrushColor = "green"
While (d > 1)
  p = Math.Floor(d/m)
  r = d - m*p
  If r = 0 Then
    GraphicsWindow.DrawText(50, k*30 + 100, m)
    k = k + 1
    d = p
  Else
    m = m + 1
  EndIf
EndWhile
```

## 7. МАКСИМАЛЬНО ПЛОТНЫЕ БЛОКИ ПРОСТЫХ ЧИСЕЛ

Последовательность простых чисел обладает свойством впечатляющей неравномерности. С одной стороны, в этой последовательности существуют сколь угодно большие пробелы, не содержащие простых чисел, то есть существуют цепочки любой длины из следующих друг за другом составных чисел [20]. С другой стороны, существуют простые числа, разность между которыми равна двум. Такие простые числа называют **близнецами**. Вопрос о существовании бесконечного количества близнецов не решён [21].



Однако теорема Бруна утверждает, что ряд, составленный из величин, обратных простым-близнецам, сходится, хотя ряд, составленный из величин, обратных последовательным простым числам, расходится [22]. Это означает, что близнецы среди простых чисел встречаются довольно редко.

Все близнецы, кроме пары 3 и 5, имеют вид  $6n - 1$  и  $6n + 1$ , так как числа с другими вычетами по модулю 6 делятся на 2 или на 3 [23]. В основу самостоятельного вычисления близнецов можно положить программу из задания 16.

**Задание 19.** Написать программу, которая находит числа-близнецы в заданном интервале натуральных чисел.

**Решение.** Программа вычисляет близнецы из интервала от 3 до 1001. Результат показан на рисунке 7.

```
GraphicsWindow.Width = 250
GraphicsWindow.Height = 700
m = 1
For min = 3 to 1001 step 2
kol = 0
Blizn()
EndFor
Sub Blizn
For n = min To min + 2 Step 2
prz = 0
q = Math.Floor(Math.Sqrt(n))
For k = 2 To q
s = n/k
s1 = Math.Floor(s)
If s = s1 Then
prz = 1
EndIf
EndFor
If prz = 0 Then
kol = kol + 1
EndIf
EndFor
If kol = 2 Then
GraphicsWindow.DrawText(50, m*12, "близнецы")
GraphicsWindow.DrawText(150, m*12, min)
GraphicsWindow.DrawText(200, m*12, min + 2)
m = m + 1
EndIf
EndSub
```

близнецы	3	5
близнецы	5	7
близнецы	11	13
близнецы	17	19
близнецы	29	31
близнецы	41	43
близнецы	59	61
близнецы	71	73
близнецы	101	103
близнецы	107	109
близнецы	137	139
близнецы	149	151
близнецы	179	181
близнецы	191	193
близнецы	197	199
близнецы	227	229
близнецы	239	241
близнецы	269	271
близнецы	281	283
близнецы	311	313
близнецы	347	349
близнецы	419	421
близнецы	431	433
близнецы	461	463
близнецы	521	523
близнецы	569	571
близнецы	599	601
близнецы	617	619
близнецы	641	643
близнецы	659	661
близнецы	809	811
близнецы	821	823
близнецы	827	829
близнецы	857	859
близнецы	881	883

Рис. 7





Кроме близнецов можно рассматривать и другие плотные блоки простых чисел. Прежде всего, речь идёт о **числах-триплетах**. Согласно [23], триплет – это «тройка различных простых чисел, разность между наибольшим и наименьшим из которых минимальна. Наименьшими простыми числами, отвечающими заданному условию, являются – (2, 3, 5) и (3, 5, 7). Однако далее во всех остальных тройках разность между наибольшим и наименьшим членом равна шести и не может быть меньше. То есть, если обобщить, триплетом называется тройка простых чисел (2, 3, 5), (3, 5, 7),  $(p, p + 2, p + 6)$  или  $(p, p + 4, p + 6)$ .

**Четверками простых чисел-близнецов (квадруплетами)** называются 4 простых числа в пределах одного десятка, например, 101, 103, 107, 109. В общем виде квадруплеты задаются формулами  $(p, p + 2, p + 6, p + 8)$ .

Оказывается, что все такие четверки содержатся в арифметической прогрессии вида  $(11 + 30 \cdot k, 13 + 30 \cdot k, 17 + 30 \cdot k, 19 + 30 \cdot k)$ . Существуют четверки, у которых значения  $k$  отличаются на 1. Такие четверки назовем четверками-близнецами.

**Задание 20.** Написать программу, которая находит первые две четверки близнецов.

**Решение.** Первое число четвёрки при  $k + 1$  можно записать в виде  $11 + 30 \cdot (k + 1) = 41 + 30 \cdot k$ . Подобное преобразование можно проделать и для остальных трёх чисел. В результате получаем, что все восемь простых чисел из четверки близнецов являются членами арифметической прогрессии  $(11 + 30 \cdot k, 13 + 30 \cdot k, 17 + 30 \cdot k, 19 + 30 \cdot k, 41 + 30 \cdot k, 43 + 30 \cdot k, 47 + 30 \cdot k, 49 + 30 \cdot k)$ . Программа должна проверять на простоту именно эти числа.

Однако прямая проверка может вызвать затруднения, в том числе и психологического характера. Дело в том, что первые две четверки близнецов, скорее всего, появятся при больших значениях  $k$ . По этой причине проще искать четвёрки в достаточно коротких интервалах и пытаться найти две четвёрки с последовательными значениями  $k$ .

Программа, приводимая далее, позволяет проводить вычисления и проверкой восьмёрок (переменная  $diam = 8$ ), и проверкой четвёрок (переменная  $diam = 4$ ). Проверяемые интервалы имеют длину 2000. По этой причине переменной  $min$  вручную придаются значения 1, 2001, 4001, ...

$$c[1] = 11$$

$$c[2] = 13$$

$$c[3] = 17$$

$$c[4] = 19$$

$$c[5] = 41$$

$$c[6] = 43$$

$$c[7] = 47$$

$$c[8] = 49$$

$$\text{GraphicsWindow.Width} = 300$$

$$\text{GraphicsWindow.Height} = 700$$

$$diam = 8$$



```

min = 32001
m = 1
For k = min to min + 2000
kol = 0
Blizn()
EndFor

```

```

Sub Blizn
For i = 1 To diam
n = 30*k + c[i]
prz = 0
q = Math.Floor(Math.SquareRoot(n))
For k1 = 2 To q

```

```

s = n/k1
s1 = Math.Floor(s)
If s = s1 Then
prz = 1
EndIf
EndFor
If prz = 0 Then
kol = kol + 1
EndIf
EndFor

```

```

If kol = diam Then

```

```

GraphicsWindow.DrawText(50, m*12, "четвёрки-близнецы при k =")

```

```

GraphicsWindow.DrawText(50, m*12 + 12, k)

```

```

m = m + 2

```

```

EndIf

```

```

EndSub

```

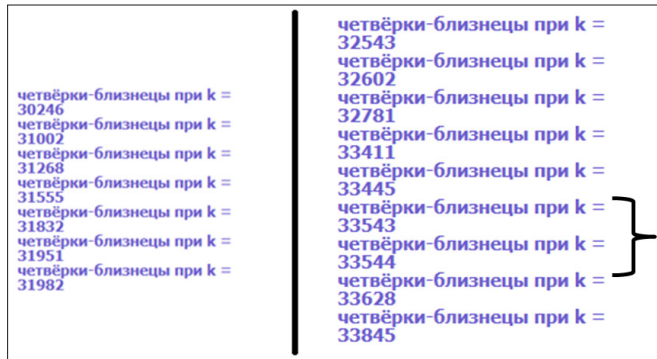


Рис. 8

Результаты работы программы при  $\text{diam} = 4$  и  $\text{min} = 30001$ , а затем при  $\text{min} = 32001$  показаны на рисунке 8.

Таким образом, первые две четвёрки-близнеца достигаются при  $k = 33543$ . Следовательно, речь идёт о простых числах 1006301, 1006303, 1006307, 1006309, 1006331, 1006333, 1006337, 1006339. Понятно, что четверки-близнецы встречаются довольно редко. Тем не менее вполне возможно, что множество таких четверок-близнецов бесконечно. Конечно это гораздо более сильное предположение, чем предположение о бесконечности чисел-близнецов, т.е. пар простых чисел, разность между которыми равна двум. Очевидно, что из бесконечности множества четверок-близнецов будет следовать бесконечность множества близнецов, поскольку каждая пара четверок – близнецов состоит из четырех пар близнецов. Так в приведенном



примере пару четверок (1006301, 1006303, 1006307, 1006309) и (1006331, 1006333, 1006337, 1006339) можно представить в виде объединения четырех близнецов: (1006301, 1006303), (1006307, 1006309), (1006331, 1006333) и (1006337, 1006339).

Наконец, упомянем о **секступлетах (шестёрках)** простых чисел. Это шестёрки простых чисел вида  $(p, p + 4, p + 6, p + 10, p + 12, p + 16)$ . В качестве примеров приведём две шестёрки (7, 11, 13, 17, 19, 23) и (97, 101, 103, 107, 109, 113).

## 8. ПРОСТЫЕ ЧИСЛА И МНОГОЧЛЕНЫ

Метод древнейшего доказательства бесконечности простых чисел основан на следующем рассуждении. Пусть множество простых чисел конечно. Тогда существует максимальное простое число  $p$ . Рассмотрим число  $p! + 1$ . Оно не делится ни на одно простое число, меньшее  $p$ . Значит, оно либо является простым, либо делится на некоторое простое число, которое больше числа  $p$ .

Придумывая многочлен, дающий много простых значений можно использовать видоизменённую и ослабленную (по числу сомножителей) формулу: многочлен равен произведению последовательных чисел плюс простое число.

Например, многочлен Эйлера задаётся формулой  $x \cdot (x + 1) + 41$ .

**Задание 21.** Написать программу, которая вычисляет значения многочлена Эйлера и проверяет их на простоту.

**Решение.** Многочлен Эйлера даёт простые значения в интервале от 0 до 39, что и подтверждается работой следующей программы. Результат её работы показан на рисунке 9.

```
GraphicsWindow.Width = 300
GraphicsWindow.Height = 720
k = 1
For x = 1 To 39
n = x*x + x + 41
Prst()
GraphicsWindow.DrawText(50, k*18, n + txt + " при x = " + x)
k = k + 1
EndFor

Sub Prst
prz = 0
q = Math.Floor(Math.SquareRoot(n))
For z = 2 To q
s = n/z
s1 = Math.Floor(s)
If s = s1 Then
prz = 1
```



```

EndIf
EndFor
If prz = 0 Then
txt = " простое число "
Else
txt = " сложное число "
EndIf
EndSub

```

43 простое число при x = 1	251 простое число при x = 14	797 простое число при x = 27
47 простое число при x = 2	281 простое число при x = 15	853 простое число при x = 28
53 простое число при x = 3	313 простое число при x = 16	911 простое число при x = 29
61 простое число при x = 4	347 простое число при x = 17	971 простое число при x = 30
71 простое число при x = 5	383 простое число при x = 18	1033 простое число при x = 31
83 простое число при x = 6	421 простое число при x = 19	1097 простое число при x = 32
97 простое число при x = 7	461 простое число при x = 20	1163 простое число при x = 33
113 простое число при x = 8	503 простое число при x = 21	1231 простое число при x = 34
131 простое число при x = 9	547 простое число при x = 22	1301 простое число при x = 35
151 простое число при x = 10	593 простое число при x = 23	1373 простое число при x = 36
173 простое число при x = 11	641 простое число при x = 24	1447 простое число при x = 37
197 простое число при x = 12	691 простое число при x = 25	1523 простое число при x = 38
223 простое число при x = 13	743 простое число при x = 26	1601 простое число при x = 39

Рис. 9

**Задание 22.** Придумать многочлен для генерации простых чисел и провести проверку его значений на простоту.

**Решение.** Для многочлена-генератора выберем, например, следующую формулу  $(x-1) \cdot x \cdot (x+1) + 23$ . В программе из предыдущего задания заменим только пятую строку:

$$n = x*(x*x - 1) + 23$$

Тут, конечно, простые числа генерируются куда реже, чем у Эйлера.

## 9. ИРРАЦИОНАЛЬНЫЕ ЧИСЛА

При рассмотрении данной темы мы не будем использовать вычисления в традиционном смысле. Они будут заменены простыми манипуляциями с цифрами и блоками цифр, что в широком смысле соответствует вычислениям.

Факт наличия иррациональных чисел в качестве изучаемого объекта создаёт ряд сложностей педагогического характера. С одной стороны, без иррациональных чисел невозможно строгое построение важнейших разделов математики. С другой – иррациональные числа ускользают от непосредственного их использования. Их неизбежно округляют. Для многих людей число  $\pi$  – это всё-таки 3,14.

По всей видимости, существует необходимость более тесного соприкосновения студентов с иррациональными числами. При этом наиболее осязаемым является





**Задание 25.** Доказать, что получена десятичная запись иррационального числа.

**Решение.** В последовательность квадратов натуральных чисел входят растущие степени числа 10. Это обеспечивает присутствие в записи десятичной дроби блоков растущей длины, состоящих из нулей.

Приведённое доказательство гарантирует, что выписывание цифр последовательных натуральных чисел, а также любых их степеней приводит к получению иррациональных чисел.

Описанный метод позволяет сформулировать задачу достаточно общего характера, которую мы назовём задачей Алексея Величко.

**Формулировка задачи.** Дана бесконечная возрастающая последовательность натуральных чисел. После нуля и десятичной запятой выпишем последовательные цифры, образующие записи чисел этой последовательности. Установить, является ли полученная бесконечная десятичная дробь записью иррационального числа.

Каждая конкретная последовательность приводит к особой задаче. При этом такие задачи могут быть несравненно более сложными, чем в случае степеней последовательных натуральных чисел. Приведём три примера.

**Пример 1.** За основу взята геометрическая прогрессия

$$1, 2, 4 = 2^2, 8 = 2^3, 16 = 2^4, 25 = 2^5, \dots$$

**Пример 2.** За основу взяты числа Фибоначчи:

$$1, 1, 2 = 1 + 1, 3 = 1 + 2, 5 = 2 + 3 \dots$$

**Пример 3.** За основу взяты периоды обратных для натуральных чисел величин, то есть дробей вида  $\left\{ \frac{1}{n} \right\}$ . В данном случае нарушается условие монотонного роста членов исходной последовательности, но сохраняет общий характер нарастания длины блоков.

Наконец, для уяснения характера тех способов, которыми можно задавать иррациональные числа рассмотрим ещё одну конструкцию формирования десятичной дроби на основе последовательности  $\{a_n\}$ .

Обозначим через  $a_n$  последовательность десятичных чисел цифр, которая описывает число  $a_n$ . Наш исходный метод состоял в последовательном построении бесконечной десятичной дроби. После  $n$ -го шага будет получена десятичная дробь  $0, a_1 a_2 \dots a_{n-1} a_n$ .

Вторая конструкция осуществляет в известном смысле обратное построение, при котором новые цифры вписываются сразу после запятой. В этом случае после  $n$ -го шага будет получена десятичная дробь  $0, a_n a_{n-1} \dots a_2 a_1$ .

Сравним обе конструкции. И там, и там результат достигается только после бесконечного числа шагов. На каждом шагу строятся десятичные дроби равной длины. Вопрос состоит в том, приведёт ли вторая конструкция к возникновению иррационального числа? Если же не приведёт, то по какой причине?



Ответ на первый вопрос отрицательный. Причина же этого такова. В первой конструкции каждый шаг приводит к последовательному уточнению значения конструируемого числа. Таким образом, это число вычислимо. Во второй конструкции вычислимость отсутствует. Следовательно, иррациональное число ею не задаётся.

Это обсуждение показывает, что вычисления в математике имеют связь с построением исходных понятий, таких, например, как действительные числа. Надеемся, что это обстоятельство является дополнительным аргументом, обосновывающим полезность данной статьи.

### **Темы для самостоятельной работы студентов, связанные с теорией чисел.**

1. Освоить определение теоретико-числовой функции Мёбиуса. Построить таблицу значений этой функции на заданном интервале.

Каждое натуральное число  $n$  большее, чем 1, разлагается на простые произведение простых множителей  $\{p_i\}$ , некоторые из которых могут быть равны между собой. Таким образом,  $n = \prod_{i=1}^m p_i^{k_i}$ . Рассмотреть функцию, которая равна числу различных простых делителей натурального числа, то есть  $m$ . Построить таблицу значений этой функции на заданном интервале. Построить её график.

Рассмотреть функцию, которая равна общему числу простых делителей натурального числа, то есть  $\sum_{i=1}^m k_i$ . Построить таблицу значений этой функции на заданном интервале. Построить её график.

2. Получить таблицу чисел-близнецов с указанием порядковых номеров составляющих их простых чисел.
3. Получить таблицу триплетов.
4. Получить таблицу четвёрок.
5. Получить таблицу секступлетов.

Пусть выбрано натуральное число  $n$ . Можно рассмотреть блоки простых чисел длиной  $n$ . Задача исследования таких блоков состоит в решении вопроса о существовании особо плотных блоков, аналогичных ранее упомянутым близнецам, триплетам и т. д. В частности, можно решить вопрос о том, нужно ли рассматривать пропущенные в приведённой классификации пятёрки.

Сконструировать и исследовать многочлены-генераторы простых чисел.

6. Совершенным числом называется число, которое равно сумме своих делителей, кроме самого числа [24]. Классическим примером является шестёрка:  $6 = 1 + 2 + 3$ . Написать программу проверки натурального числа на совершенство. Провести поиск совершенных чисел и составить таблицу.
7. Два числа называются дружественными числами, если сумма делителей первого числа равна второму числу и наоборот, сумма делителей второго числа равна первому числу. Примером дружественных чисел являются числа 220 и 284. Проверить это обстоятельство. Написать программу проверки наличия у данного натурального числа дружественного числа. Провести поиск дружественных чисел и составить таблицу.
8. Выбрать какую-нибудь числовую последовательность и для неё решить задачу Алексея Величко.



## 10. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Авторы надеются, что их методические идеи могут помочь молодым преподавателям в их нелёгкой работе. По этой же причине предполагается написание ещё ряда статей, связанных с вычислениями в различных областях математики.

### *Литература*

1. *Степанов М.Е.* Образ силового поля как эвристическая модель в математике. Моделирование и анализ данных. Труды факультета информационных технологий МГППУ. – Вып. 3., 2007.
2. *Степанов М.Е.* Эрлангенская программа Клейна и геометрия треугольника. Моделирование и анализ данных. Труды факультета информационных технологий МГППУ. – 2015. № 1. С. 100–135.
3. *Степанов М.Е.* Эрлангенская программа Клейна и геометрия треугольника (часть вторая). Моделирование и анализ данных. Труды факультета информационных технологий МГППУ. – 2016. № 1. С. 60–115.
4. *Степанов М.Е.* Эрлангенская программа Клейна и геометрия треугольника Моделирование и анализ данных. Математическое образование. 2017. № 3(83). С. 28–42.
5. *Степанов М.Е.* Компьютерные технологии как средство приобщения учащегося к математической реальности. Моделирование и анализ данных. Научный журнал. – Вып. 1, 2018.
6. *Куланин Е.Д., Нуркаева И.М.* О двух геометрических задачах на экстремум. Математика в школе. 2019. № 4. С. 35–40.
7. *Куланин Е.Д., Нуркаева И.М.* Еще раз о задаче Мавло. Математика в школе. 2020. № 2. С. 76–79.
8. *Куланин Е.Д., Степанов М.Е., Нуркаева И.М.* Пропедевтика решения экстремальных задач в школьном курсе математики. Моделирование и анализ данных. 2019. № 4. С. 127–144.
9. *Куланин Е.Д., Нгуен Ву Куанг, Степанов М.Е.* Осязаемая предметность с компьютерной поддержкой. Моделирование и анализ данных. Научный журнал. 2019. № 4. С. 145–156.
10. *Куланин Е.Д., Степанов М.Е., Нуркаева И.М.* Роль образного мышления в научном мышлении. Моделирование и анализ данных. 2020. Т. 10. № 2 С.110–128.
11. *Куланин Е.Д., Степанов М.Е., Нуркаева И.М.* О различных подходах к решению экстремальных задач. Моделирование и анализ данных. 2020. Т. 11. № 1. С.40–60.
12. *Лунгу К.Н., Норин В.П., Письменный Д.Т., Шевченко Ю.А., Куланин Е.Д.* Сборник задач по высшей математике с контрольными работами. Москва, 2013. Том 2 (8-е издание).
13. *Степанов М.Е.* Некоторые вопросы методики преподавания высшей математики. Моделирование и анализ данных. Научный журнал. – Вып. 1, 2017.
14. *Степанов М.Е.* Некоторые вопросы методики преподавания высшей математики. Моделирование и анализ данных. 2017. № 1. С. 54–94.
15. *Куланин Е.Д., Степанов М.Е.* Из опыта работы в режиме дистанционного обучения Моделирование и анализ данных. 2022. Т. 12. № 3. С. 58–70.
16. *Куланин Е.Д., Степанов М.Е.* Всестороннее рассмотрение математических понятий как методический прием. Моделирование и анализ данных. 2022. Т. 12. № 4. С.67–84.
17. *Куланин Е.Д., Степанов М.Е.* О визуализации решений некоторых экстремальных задач. Моделирование и анализ данных. 2022. Т. 12. № 4. С. 94–104.
18. *Арнольд В.И.* О преподавании математики. УСПЕХИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК, т. 53, вып. 1 (319).





19. Харди Г. Двенадцать лекций о Рамануджане. М., Институт компьютерных исследований. 2002.
20. Прахар К. Распределение простых чисел. М., Мир, 1967.
21. Серпинский В. Что мы знаем и чего не знаем о простых числах. М. – Л. Гос. изд. физ. – мат. литературы. 1963.
22. Зенкин В.И. Распределение простых чисел: Элементарные методы. Калининград, 2008.
23. [ru.wikipedia.org](https://ru.wikipedia.org) > Числа-близнецы.
24. Денман И. Совершенные числа. Квант, 1991, № 5.



# Computational Experiment in Teaching Higher Mathematics by the Example of Number Theory

***Yevgeny D. Kulanin***\*

Moscow State University of Psychology & Education (MSUPE), Moscow, Russia

ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-6093-7012>

e-mail: [lucas03@mail.ru](mailto:lucas03@mail.ru)

***Mikhail E. Stepanov***\*\*

Moscow State University of Psychology & Education (MSUPE), Moscow, Russia

ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-4803-8211>

e-mail: [mestepanov@yandex.ru](mailto:mestepanov@yandex.ru)

The article continues the cycle of methodological developments of the authors [1] – [17]. It discusses some problems related to ways to improve the culture of mathematical thinking of mathematics students. The authors rely on the experience of working at the Faculty of Information Technology of MGPPU.

**Keywords:** higher education, methods of teaching higher mathematics, computer calculations, computational experiment, theory of numbers, prime numbers, twin numbers, fours of prime numbers, Diophantine equations, irrational numbers.

## **For citation:**

Kulanin Y.D., Stepanov M.E. Computational Experiment in Teaching Higher Mathematics by the Example of Number Theory. *Modelirovanie i analiz dannykh = Modelling and Data Analysis*, 2024. Vol. 14, no. 1, pp. 170–195. DOI: <https://doi.org/10.17759/mda.2024140111> (In Russ., abstr. in Engl.).

## **References**

1. Stepanov M.E. The image of a force field as a heuristic model in mathematics. Modeling and data analysis. Proceedings of the Faculty of Information Technologies of MGPPU. – Issue 3., 2007.
2. Stepanov M.E. Klein's Erlangen program and triangle geometry. Modeling and data analysis. Proceedings of the Faculty of Information Technologies of MGPPU. – 2015. No. 1. pp.100–135.
3. Stepanov M.E. Klein's Erlangen program and the geometry of triangles (Part two). Modeling and data analysis. Proceedings of the Faculty of Information Technologies of MGPPU. – 2016. No. 1. pp. 60–115.

\****Yevgeny D. Kulanin***, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Moscow State University of Psychology & Education (MSUPE), Moscow, Russia, ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-6093-7012>, e-mail: [lucas03@mail.ru](mailto:lucas03@mail.ru)

\*\****Mikhail E. Stepanov***, Candidate of Pedagogical Sciences, Associate Professor, Moscow State University of Psychology & Education (MSUPE), Moscow, Russia, ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-4803-8211>, e-mail: [mestepanov@yandex.ru](mailto:mestepanov@yandex.ru)



4. Stepanov M.E. Klein's Erlangen program and triangle geometry Modeling and data analysis. *Mathematical education*. 2017. No.3(83). pp.28–42.
5. Stepanov M.E. Computer technologies as a means of introducing the student to mathematical reality. *Modeling and data analysis. Scientific journal.* – Issue 1, 2018.
6. Kulanin E.D., Nurkaeva I.M. On two geometric problems on the extremum. *Math at school*. 2019. No. 4. pp. 35–40.
7. Kulanin E.D., Nurkaeva I.M. Once again about the Mavlo problem. *Mathematics in school*. 2020. No. 2. pp. 76–79.
8. Kulanin E.D., Stepanov M.E., Nurkaeva I.M. Propaedeutics of solving extreme problems in the school course of mathematics. *Modeling and analysis of data*. 2019. No. 4. pp.127–144.
9. Kulanin E.D., Nguyen Wu Quang, Stepanov M.E. Tangible objectivity with computer support. *Modeling and data analysis. Scientific journal*. 2019. No. 4. pp.145–156.
10. Kulanin E.D., Stepanov M.E., Nurkaeva I.M. The role of imaginative thinking in scientific thinking. *Modeling and data analysis*. 2020. Vol. 10. No. 2. Pp.110–128.
11. Kulanin E.D., Stepanov M.E., Nurkaeva I.M. On various approaches to solving extreme tasks. *Modeling and data analysis*. 2020. Vol.11. No. 1. P.40–60.
12. Lungu K.N., Norin V.P., Pismennyi D.T., Shevchenko Yu.A., Kulanin E.D. *Collection of problems in higher mathematics with control papers*. Moscow, 2013. Volume 2 (8th edition).
13. Stepanov M.E. From experience in the field of typhlopedagogics. *Modeling and data analysis*. 2017. No. 1. pp.42–53.
14. Stepanov M.E. Some questions of the methodology of teaching higher mathematics. *Modeling and data analysis*. 2017. No. 1. pp.54–94.
15. Kulanin E.D., Stepanov M.E. From the experience of working in the remote mode *Learning Modeling and data analysis*. 2022. Vol.12. No.3. pp.58–70.
16. Kulanin E.D., Stepanov M.E. Comprehensive consideration of mathematical concepts as a methodological technique. *Modeling and data analysis*. 2022. Vol.12. No.4. pp.67–84.
17. Kulanin E.D., Stepanov M.E. On visualization of solutions to some extreme problems. *Modeling and data analysis*. 2022. Vol.12. No. 4. pp.94–104.
18. Arnold V.I. About teaching mathematics. *SUCSESSES OF MATHEMATICAL SCIENCES*, Vol. 53, issue 1 (319).
19. Hardy G. *Twelve lectures on Ramanujan*. M., Institute of Computer Research. 2002.
20. Prahara K. *Distribution of primes*. M., Mir, 1967.
21. Serpinsky V. *What we know and what we don't know about primes*. M. – L. State Publishing House of Physics. – mate. literatures. 1963.
22. [ru.wikipedia.org](http://ru.wikipedia.org) › The numbers are twins.
23. Zenkin V.I. *Distribution of prime numbers: Elementary methods*. Kaliningrad, 2008.
24. Depman. I. *Perfect numbers*. *Kvant*, 1991, No. 5.

Получена 10.01.2024

Принята в печать 25.01.2024

Received 10.01.2024

Accepted 25.01.2024





By examining the complex interactions between climatic factors and agricultural practices, this paper This paper serves as a foundational exploration into predicting the yields of important cereal crops in Ethiopia. We use a visual analytic approach to identify patterns in annual temperature, precipitation, area harvested, production, and yield data from 1995 to 2021 by integrating climate factors and agricultural practices. By examining these Agricultural variables, we hope to build links between shifting climatic conditions, agricultural decisions, and crop production, providing indispensable insights for stakeholders, farmers, and policymakers.

## 2. DATA AND METHODOLOGY

The Central Statistics Agency of Ethiopia (CSA) provided information on the area harvested, production, and yield of cereal crops at the national level in Ethiopia during the “Meher,” or main rainy season. The data covered the years 1994/95 to 2020/21. The Food and Agriculture Organization (FAO) and the World Bank provide meteorological and pesticide usage statistics, which we have combined into our dataset.

This dataset contains important factors related to cereal crop yields, including Teff, Maize, Sorghum, Millet, and Oats/Aja. A record of the data’s annual temperature (in °C), precipitation (in mm), pesticide usage (in tons), Area harvested(ha), production (t) and crop yields (100 g/ha) are all included. A26-year dataset of cereal harvest data was subjected to time series analysis using Jupiter Notebook. We use a multi-step approach in our methodology that includes data cleaning and preprocessing, statistical analysis, and the application of advanced data visualization techniques.

These visualization tools help us to understand the complex dynamics that affect cereal crop yields, paving the way for the development of accurate and insightful machine learning models. Table 1 shows the total annual cereal crops data and climate data in Ethiopia between 1995 and 2021.

Table 1

### Crop and Climate Data: Ethiopia (1995–2021)

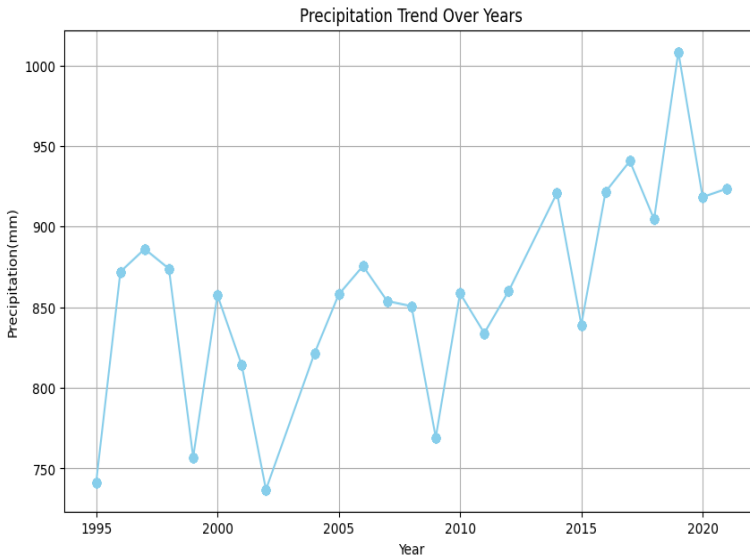
Year	Precipitation(mm)	Tempratue(°C)	Crop Type	TOTAL AREA(ha)	Production (t)	100g/ha	Pesticides (t)	
0	1995	741.28	23.11	Teff	1843760	1.298389e+06	7040.0	242.0
1	1995	741.28	23.11	Barley	879,170.00	8.476830e+05	9640.0	242.0
2	1995	741.28	23.11	Wheat	769,340.00	1.023914e+06	13310.0	242.0
3	1995	741.28	23.11	Maize	1,104,700.00	1.673202e+06	15150.0	242.0
4	1995	741.28	23.11	Sorghum	886,010.00	1.121913e+06	12660.0	242.0
...	...	...	...	...	...	...	...	...
169	2021	923.57	23.41	Wheat	1,897,405.05	5.780131e+06	30460.0	4128.1
170	2021	923.57	23.41	Maize	2,526,212.36	1.055709e+07	41790.0	4128.1
171	2021	923.57	23.41	Sorghum	1,679,277.06	4.517350e+06	26900.0	4128.1
172	2021	923.57	23.41	Finger millet	480,343.25	1.203016e+06	25040.0	4128.1
173	2021	923.57	23.41	oats/Aja	15,502.18	3.054034e+04	19700.0	4128.1



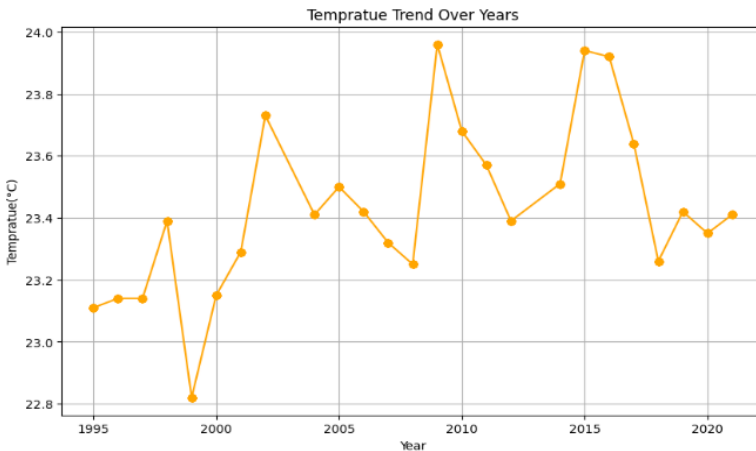
### 3. VISUAL ANALYSIS

#### Visual 1: Temporal Trends in Precipitation, Temperature and pesticides

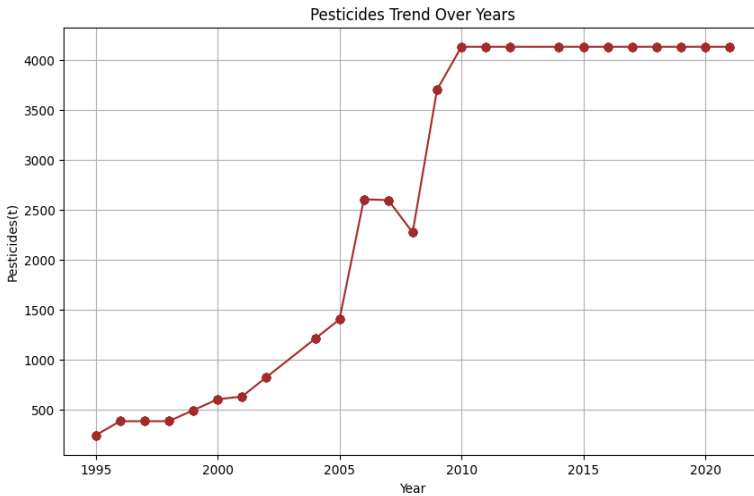
A detailed examination of the temperature and precipitation patterns from 1994 to 2021 is shown in Figure 1. Essential insights into the climatic factors influencing Ethiopia's yields of Teff, Maize, Sorghum, Millet, and Oats/Aja are shown by this graphic.



a) Precipitation trend over years



b) Temperature trend over years



c) Pesticides trend over years

Fig. 1. Temporal Trends in Precipitation, Temperature and pesticides

The study examines temporal trends in precipitation, temperature, and pesticides over the years. Precipitation levels show some variation, with a notable spike in 2019 reaching 1008.31 mm. The average temperature remains within the range of 23–24 degrees Celsius, with minor fluctuations. The year 2019 corresponds to the highest precipitation and slightly elevated temperature of 23.42 degrees Celsius. The consistent temperature range suggests stability in climatic conditions, while variations in precipitation may impact agricultural practices and water availability.

Pesticide application remained relatively stable from 1995 to 2002, with a gradual increase. A significant spike in 2003 nearly doubled pesticide use from the previous year. The application reached its peak in 2007 at 2593.9 tons. A sudden drop in 2008 brought pesticide use back to 2002 levels. From 2010 onwards, there was a remarkable rise in pesticide application, reaching a plateau at 4128.1 tons from 2011 to 2021.

The trend analysis highlights key shifts in pesticide usage over the years, with early years showing stability, followed by a significant surge, a subsequent decline, and a steady increase in later years. Further investigation into these factors would provide a more comprehensive understanding of the observed trend.

### Visual 2: Longitudinal Crop Yield Analysis

Figure 2 shows the actual yields of selected cereal crops over the years, making it possible to see trends and possible relationships with the climate.

The temporal trends in cereal crop yield from 1995 to 2021 reveal variations among different crop types. Teff, a staple cereal in the region, shows a steady increase in yield

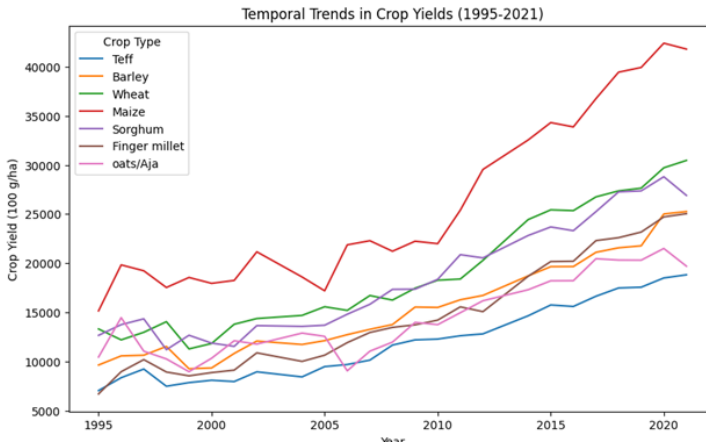


Fig. 2. Temporal trends in cereal crops yield (1995–2021)

from 1995 to 2021, with a peak around 2021. Barley, another important crop, shows fluctuations in yield, reaching higher values in recent years. Wheat exhibits a general upward trend, with sporadic fluctuations, while Maize demonstrates a steady rise in yield over the years. Sorghum and Finger Millet show fluctuations in yield, with some years experiencing a significant increase. Oats/Aja demonstrates a mixed pattern with alternating peaks and troughs. Understanding these temporal trends is crucial for developing sustainable agricultural strategies and ensuring food security in the region. Teff yield increased significantly from 1995 to 2008, with a peak in 2019. Barley showed a consistent upward trend, reaching its highest yield in 2021. Wheat displayed fluctuations, with occasional declines in yield. Finger Millet and Oats/Aja showed positive trends, with relatively stable or increasing yields over the years.

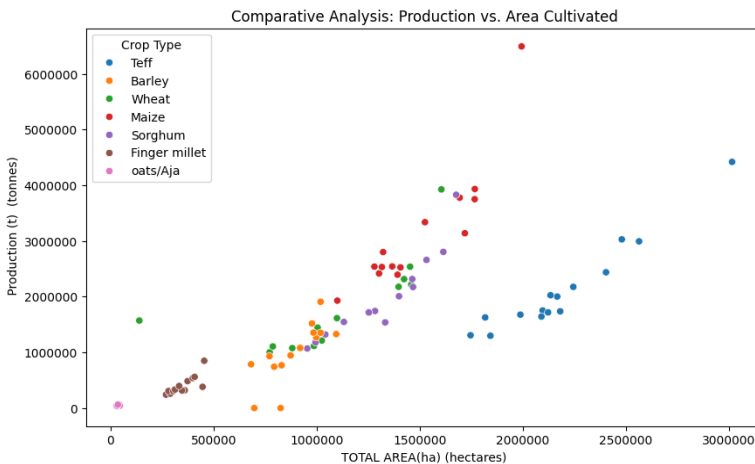


Fig. 3. A scatter plot comparing the area cultivated and productivity of the main cereal crops



A scatter plot shows the relationship between the amount of land harvested and the total amount of agricultural production (in tons). Some of the observations include that each crop shows a different pattern; some show a positive relationship between increased area and production, while others show fluctuations and outliers.

**Visual 3: Correlation Between Precipitation, Temperature, and Crop Yields**

Figure 3 illustrates the correlation between temperature, precipitation, area cultivated, number of pesticides and crop yields. The heatmap in the figure showing correlation matrix helps to understand how these variables relate to each other and affect cereal crops yield.

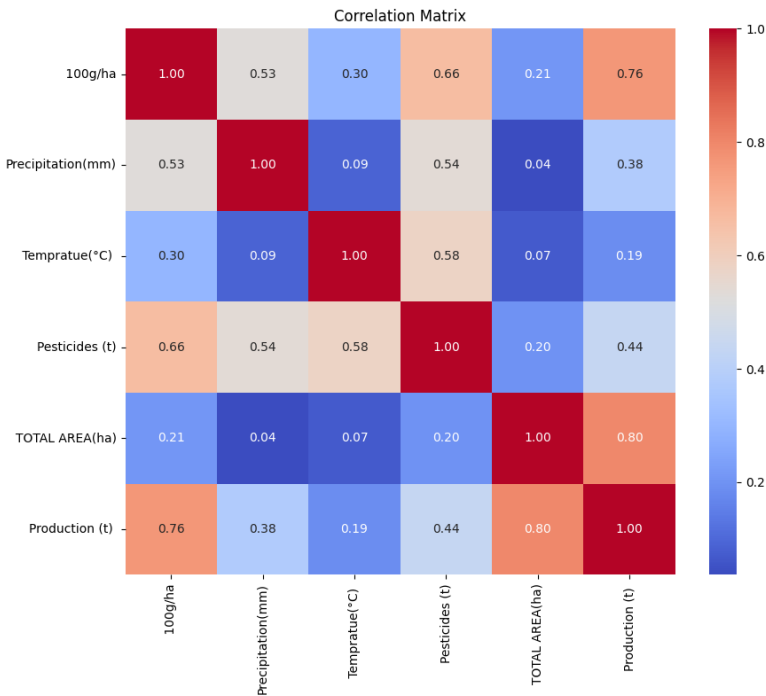


Fig. 4. A heatmap which shows the correlation matrix between all variables

The correlation matrix in our agricultural dataset shows a strong positive correlation between crop yield and production (0.76), indicating that higher yields lead to increased overall production. Pesticide use also shows a significant positive correlation with both crop yield (0.69) and production (0.44), highlighting its influence on agricultural outcomes. Precipitation has a moderate positive correlation with crop yield (0.55) and pesticides (0.57), suggesting that adequate rainfall positively affects both crop yield and the need for pesticides. Temperature has a weaker positive correlation with crop yield (0.36) and pesticides (0.63). Total area harvested has a modest positive correlation with crop yield (0.21) and a stronger positive correlation with production (0.8), suggesting that the size of the



cultivated area significantly contributes to overall production. The matrix also reveals patterns in the relationships between key variables, with crop yield showing a strong positive correlation with itself ( $r = 1$ ).

### Visual 4: Distribution of each variable

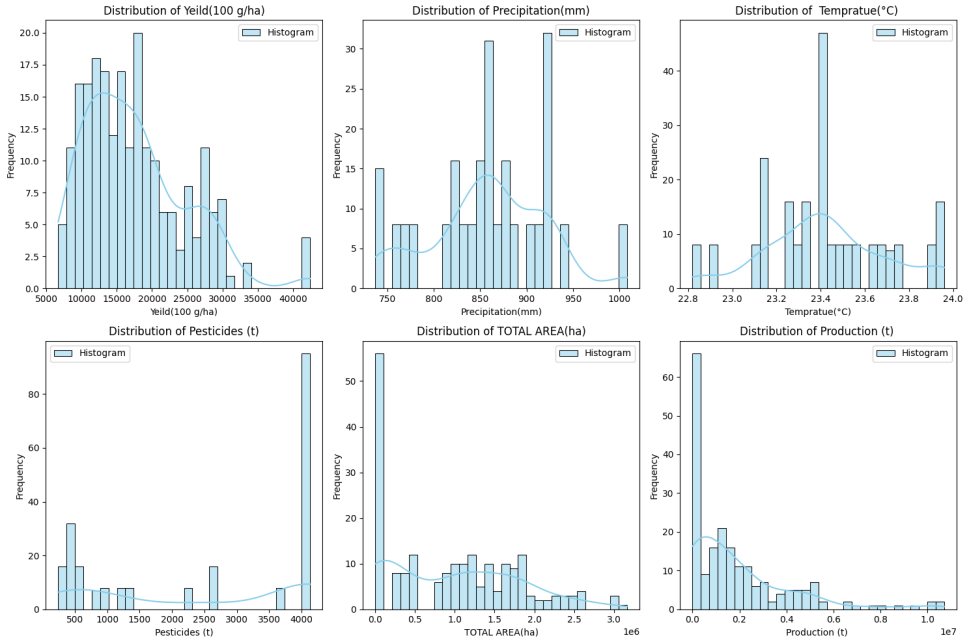


Fig. 5. Histograms for various agricultural variables distribution over the years

Figure 5 shows the temporal evolution of key agricultural variables from 1995 to 2021, revealing significant trends. Key trends include a significant concentration of yield between 15,000 and 20,000 100g/ha, precipitation peaks at 850 mm and around 920 mm, temperature at 23.4 degrees Celsius, and pesticide usage peaks at 4,000 tons. Total area harvested shows a peak at lower values, suggesting agricultural activity in smaller areas. The production histogram shows a substantial peak at the beginning of the timeline, reflecting higher production levels in earlier years. This graphical representation provides a clear overview of distributional shifts and frequency in these variables, providing insights for further analysis and decision-making in crop management. The findings can inform further analysis and decision-making in the realm of crop management.

## 4. CONCLUSION

This study explores the dynamics of staple crops in Ethiopian agriculture, focusing on key crops like Teff, Maize, Sorghum, Millet, and Oats/Aja. The dataset, collected from



Ethiopian Statistical Agency yearly reports from 1995 to 2021, provides insights into historical trends and predictive models, contributing to the resilience and sustainability of Ethiopian agriculture. Visual graphs reveal temporal trends in precipitation, temperature, and pesticide usage, while longitudinal analysis reveals evolving dynamics. The scatter plot highlights patterns in the relationship between area harvested and production, while the correlation matrix heatmap explains how various factors interact to influence crop yields. Distribution histograms visually represent frequency and patterns within the dataset, facilitating clear interpretation. This research is a crucial step in understanding and predicting cereal crop yields in Ethiopia, providing a foundation for informed decision-making in agricultural management and holds transformative potential for the future of Ethiopian agriculture. The visualizations enhance the clarity and applicability of the findings, setting the stage for further research and practical implementations to optimize staple crop production in the region.

## 5. FUTURE DIRECTIONS

This research aims to develop machine learning models that can accurately predict cereal crop yields in Ethiopia based on historical and environmental factors. Future studies should expand the dataset to include soil health and socioeconomic factors, enriching predictive capabilities and providing a holistic understanding of crop production. Collaboration with local agricultural stakeholders and policymakers is crucial for integrating these predictive insights into real-world decision-making processes. This research opens avenues for implementing precision agriculture practices, optimizing resource allocation, and enhancing productivity in Ethiopian agriculture. The ongoing synergy between academia, agriculture, and policy will play a pivotal role in shaping a more resilient and sustainable future for Ethiopia's agricultural landscape.

### *References*

1. Central statistical Agency (CSA). 1995. The Federal Democratic Republic of Ethiopia Central Statistical Agency, Agricultural Sample Survey Vol.1: Report on Area and Production of Major Crops (Private Peasant Holdings, Meher Season), 1994/95 (1987E.C.). Statistical Bulletin, Addis Ababa.
2. Central statistical Agency (CSA). 1996. The Federal Democratic Republic of Ethiopia Central Statistical Agency Agricultural Sample Survey Vol.1: Report on Area and Production of Major Crops (Private Peasant Holdings, Meher Season), 1995/96 (1988 E.C.). Statistical Bulletin, Addis Ababa.
3. Central statistical Agency (CSA). 1997. The Federal Democratic Republic of Ethiopia Central Statistical Agency, Agricultural Sample Survey Vol.1: Report on Area and Production of Major Crops (Private Peasant Holdings, Meher Season), 1996/97 (1989 E.C.). Statistical Bulletin, Addis Ababa.
4. Central statistical Agency (CSA). 1998. The Federal Democratic Republic of Ethiopia Central Statistical Agency, Agricultural Sample Survey Vol.1: Report on Area and Production of Major Crops (Private Peasant Holdings, Meher Season), 1997/98 (1990E.C.). Statistical Bulletin, Addis Ababa.
5. Central statistical Agency (CSA). 1999. The Federal Democratic Republic of Ethiopia Central Statistical Agency, Agricultural Sample Survey Vol.1: Report on Area and Production of Major Crops (Private Peasant Holdings, Meher Season), 1998/99 (1991 E.C.). Statistical Bulletin, Addis Ababa.



6. Central statistical Agency (CSA). 2000. The Federal Democratic Republic of Ethiopia Central Statistical Agency, Agricultural Sample Survey Vol.1: Report on Area and Production of Major Crops (Private Peasant Holdings, Meher Season), 1999/2000 (1992 E.C.). Statistical Bulletin, Addis Ababa.
7. Central statistical Agency (CSA). 2001. The Federal Democratic Republic of Ethiopia Central Statistical Agency, Agricultural Sample Survey Vol.1: Report on Area and Production of Major Crops (Private Peasant Holdings, Meher Season), 2000/01 (1993 E.C.). Statistical Bulletin, Addis Ababa, Ethiopia.
8. Central statistical Agency (CSA). 2002. The Federal Democratic Republic of Ethiopia Central Statistical Agency, Agricultural Sample Survey Vol.1: Report on Area and Production of Major Crops (Private Peasant Holdings, Meher Season), 2001/02 (1994 E.C.). Statistical Bulletin, Addis Ababa.
9. Central statistical Agency (CSA). 2003. The Federal Democratic Republic of Ethiopia Central Statistical Agency, Agricultural Sample Survey Vol.1: Report on Area and Production of Major Crops (Private Peasant Holdings, Meher Season), 2002/03 (1995 E.C.). Statistical Bulletin, Addis Ababa.
10. Central statistical Agency (CSA). 2004. The Federal Democratic Republic of Ethiopia Central Statistical Agency, Agricultural Sample Survey Vol.1: Report on Area and Production of Major Crops (Private Peasant Holdings, Meher Season), 2003/04 (1996 E.C.). Statistical Bulletin, Addis Ababa.
11. Central statistical Agency (CSA). 2005. The Federal Democratic Republic of Ethiopia Central Statistical Agency, Agricultural Sample Survey Vol.1: Report on Area and Production of Major Crops (Private Peasant Holdings, Meher Season), 2004/05 (1997 E.C.). Statistical Bulletin, Addis Ababa.
12. Central statistical Agency (CSA). 2006. The Federal Democratic Republic of Ethiopia Central Statistical Agency, Agricultural Sample Survey Vol.1: Report on Area and Production of Major Crops (Private Peasant Holdings, Meher Season), 2005/06 (1998 E.C.). Statistical Bulletin, Addis Ababa.
13. Central statistical Agency (CSA). 2007. The Federal Democratic Republic of Ethiopia Central Statistical Agency, Agricultural Sample Survey Vol.1: Report on Area and Production of Major Crops (Private Peasant Holdings, Meher Season), 2006/07 (1999 E.C.). Statistical Bulletin, Addis Ababa.
14. Central statistical Agency (CSA). 2008. The Federal Democratic Republic of Ethiopia Central Statistical Agency, Agricultural Sample Survey Vol.1: Report on Area and Production of Major Crops (Private Peasant Holdings, Meher Season), 2007/08 (2000 E.C.). Statistical Bulletin, Addis Ababa.
15. Central statistical Agency (CSA). 2009. The Federal Democratic Republic of Ethiopia Central Statistical Agency, Agricultural Sample Survey Vol.1: Report on Area and Production of Major Crops (Private Peasant Holdings, Meher Season), 2008/09 (2001 E.C.). Statistical Bulletin, Addis Ababa.
16. Central statistical Agency (CSA). 2010. The Federal Democratic Republic of Ethiopia Central Statistical Agency, Agricultural Sample Survey Vol.1: Report on Area and Production of Major Crops (Private Peasant Holdings, Meher Season), 2009/10 (2002 E.C.). Statistical Bulletin, Addis Ababa.
17. Central statistical Agency (CSA). 2011. The Federal Democratic Republic of Ethiopia Central Statistical Agency, Agricultural Sample Survey Vol.1: Report on Area and Production of Major Crops (Private Peasant Holdings, Meher Season), 2010/11 (2003 E.C.). Statistical Bulletin, Addis Ababa.
18. Central statistical Agency (CSA). 2012. The Federal Democratic Republic of Ethiopia Central Statistical Agency, Agricultural Sample Survey Vol.1: Report on Area and Production of Major Crops (Private Peasant Holdings, Meher Season), 2011/12 (2004 E.C.). Statistical Bulletin, Addis Ababa.
19. Central statistical Agency (CSA). 2013. The Federal Democratic Republic of Ethiopia Central Statistical Agency, Agricultural Sample Survey Vol.1: Report on Area and Production of Major Crops (Private Peasant Holdings, Meher Season), 2012/13 (2005 E.C.). Statistical Bulletin, Addis Ababa.
20. Central statistical Agency (CSA). 2014. The Federal Democratic Republic of Ethiopia Central Statistical Agency, Agricultural Sample Survey Vol.1: Report on Area and Production of Major Crops (Private Peasant Holdings, Meher Season), 2013/14 (2006 E.C.). Statistical Bulletin, Addis Ababa.



21. Central statistical Agency (CSA). 2015. The Federal Democratic Republic of Ethiopia Central Statistical Agency, Agricultural Sample Survey Vol.1: Report on Area and Production of Major Crops (Private Peasant Holdings, Meher Season), 2014/15 (2007 E.C.). Statistical Bulletin, Addis Ababa.
22. Central statistical Agency (CSA). 2016. The Federal Democratic Republic of Ethiopia Central Statistical Agency, Agricultural Sample Survey Vol.1: Report on Area and Production of Major Crops (Private Peasant Holdings, Meher Season), 2015/16 (2008 E.C.). Statistical Bulletin, Addis Ababa.
23. Central statistical Agency (CSA). 2017. The Federal Democratic Republic of Ethiopia Central Statistical Agency, Agricultural Sample Survey Vol.1: Report on Area and Production of Major Crops (Private Peasant Holdings, Meher Season), 2016/17 (2009 E.C.). Statistical Bulletin, Addis Ababa.
24. Central statistical Agency (CSA). 2018. The Federal Democratic Republic of Ethiopia Central Statistical Agency, Agricultural Sample Survey Vol.1: Report on Area and Production of Major Crops (Private Peasant Holdings, Meher Season), 2017/18 (2010 E.C.). Statistical Bulletin, Addis Ababa.
25. Central statistical Agency (CSA). 2019. The Federal Democratic Republic of Ethiopia Central Statistical Agency, Agricultural Sample Survey Vol.1: Report on Area and Production of Major Crops (Private Peasant Holdings, Meher Season), 2018/19 (2011E.C.). Statistical Bulletin, Addis Ababa.
26. Central statistical Agency (CSA). 2020. The Federal Democratic Republic of Ethiopia Central Statistical Agency, Agricultural Sample Survey Vol.1: Report on Area and Production of Major Crops (Private Peasant Holdings, Meher Season), 2019/20 (2012E.C.). Statistical Bulletin, Addis Ababa.
27. Central statistical Agency (CSA). 2021. The Federal Democratic Republic of Ethiopia Central Statistical Agency, Agricultural Sample Survey Vol.1: Report on Area and Production of Major Crops (Private Peasant Holdings, Meher Season), 2020/21 (2013 E.C.). Statistical Bulletin, Addis Ababa.
28. Food and Agriculture Organization of the United Nations. (1995–2021). FAOSTAT statistical database. Retrieved from <http://www.fao.org/faostat/en/#data/>
29. World Bank. (1995–2021). Climate Change Knowledge Portal. World Bank. <https://climate-knowledgeportal.worldbank.org/>



## Анализ климата и сельскохозяйственных факторов для прогнозирования урожайности основных зерновых культур в Эфиопии: визуальный анализ (1995–2021 гг.)

**Макеча Б.Б.\***

Национальный исследовательский технологический университет

«МИСИС» (МИСИС), г. Москва, Российская Федерация

ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-4552-6677>

Эта статья представляет собой фундаментальное исследование по прогнозированию урожайности важных зерновых культур в Эфиопии. Используется визуальный аналитический подход для выявления закономерностей в годовой температуре, осадках, убранных площадях, производстве и урожайности с 1995 по 2021 год путем интеграции климатических факторов и методов ведения сельского хозяйства. Изучая эти сельскохозяйственные переменные, мы надеемся установить связь между меняющимися климатическими условиями, сельскохозяйственными решениями и растениеводством, предоставляя необходимую информацию заинтересованным сторонам, фермерам и политикам.

**Ключевые слова:** прогнозирование урожайности, визуальный анализ.

**Для цитаты:**

Макеча Б.Б. Анализ климата и сельскохозяйственных факторов для прогнозирования урожайности основных зерновых культур в Эфиопии: визуальный анализ (1995–2021 гг.) // Моделирование и анализ данных. 2024. Том 14. № 1. С. 196–208. DOI: <https://doi.org/10.17759/mda.2024140112>

**Литература**

1. Central statistical Agency (CSA). 1995. The Federal Democratic Republic of Ethiopia Central Statistical Agency, Agricultural Sample Survey Vol.1: Report on Area and Production of Major Crops (Private Peasant Holdings, Meher Season), 1994/95 (1987E.C.). Statistical Bulletin, Addis Ababa.
2. Central statistical Agency (CSA). 1996. The Federal Democratic Republic of Ethiopia Central Statistical Agency Agricultural Sample Survey Vol.1: Report on Area and Production of Major Crops (Private Peasant Holdings, Meher Season), 1995/96 (1988 E.C.). Statistical Bulletin, Addis Ababa.

\***Банчигизе Базев Мекеча**, студент, кафедра автоматизированного проектирования, Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Национальный исследовательский технологический университет “МИСИС”» (МИСИС), г. Москва, Российская Федерация, ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-4552-6677>



3. Central statistical Agency (CSA). 1997. The Federal Democratic Republic of Ethiopia Central Statistical Agency, Agricultural Sample Survey Vol.1: Report on Area and Production of Major Crops (Private Peasant Holdings, Meher Season), 1996/97 (1989 E.C.). Statistical Bulletin, Addis Ababa.
4. Central statistical Agency (CSA). 1998. The Federal Democratic Republic of Ethiopia Central Statistical Agency, Agricultural Sample Survey Vol.1: Report on Area and Production of Major Crops (Private Peasant Holdings, Meher Season), 1997/98 (1990E.C.). Statistical Bulletin, Addis Ababa.
5. Central statistical Agency (CSA). 1999. The Federal Democratic Republic of Ethiopia Central Statistical Agency, Agricultural Sample Survey Vol.1: Report on Area and Production of Major Crops (Private Peasant Holdings, Meher Season), 1998/99 (1991 E.C.). Statistical Bulletin, Addis Ababa.
6. Central statistical Agency (CSA). 2000. The Federal Democratic Republic of Ethiopia Central Statistical Agency, Agricultural Sample Survey Vol.1: Report on Area and Production of Major Crops (Private Peasant Holdings, Meher Season), 1999/2000 (1992E.C.). Statistical Bulletin, Addis Ababa.
7. Central statistical Agency (CSA). 2001. The Federal Democratic Republic of Ethiopia Central Statistical Agency, Agricultural Sample Survey Vol.1: Report on Area and Production of Major Crops (Private Peasant Holdings, Meher Season), 2000/01 (1993 E.C.). Statistical Bulletin, Addis Ababa, Ethiopia.
8. Central statistical Agency (CSA). 2002. The Federal Democratic Republic of Ethiopia Central Statistical Agency, Agricultural Sample Survey Vol.1: Report on Area and Production of Major Crops (Private Peasant Holdings, Meher Season), 2001/02 (1994 E.C.). Statistical Bulletin, Addis Ababa.
9. Central statistical Agency (CSA). 2003. The Federal Democratic Republic of Ethiopia Central Statistical Agency, Agricultural Sample Survey Vol.1: Report on Area and Production of Major Crops (Private Peasant Holdings, Meher Season), 2002/03 (1995 E.C.). Statistical Bulletin, Addis Ababa.
10. Central statistical Agency (CSA). 2004. The Federal Democratic Republic of Ethiopia Central Statistical Agency, Agricultural Sample Survey Vol.1: Report on Area and Production of Major Crops (Private Peasant Holdings, Meher Season), 2003/04 (1996 E.C.). Statistical Bulletin, Addis Ababa.
11. Central statistical Agency (CSA). 2005. The Federal Democratic Republic of Ethiopia Central Statistical Agency, Agricultural Sample Survey Vol.1: Report on Area and Production of Major Crops (Private Peasant Holdings, Meher Season), 2004/05 (1997 E.C.). Statistical Bulletin, Addis Ababa.
12. Central statistical Agency (CSA). 2006. The Federal Democratic Republic of Ethiopia Central Statistical Agency, Agricultural Sample Survey Vol.1: Report on Area and Production of Major Crops (Private Peasant Holdings, Meher Season), 2005/06 (1998 E.C.). Statistical Bulletin, Addis Ababa.
13. Central statistical Agency (CSA). 2007. The Federal Democratic Republic of Ethiopia Central Statistical Agency, Agricultural Sample Survey Vol.1: Report on Area and Production of Major Crops (Private Peasant Holdings, Meher Season), 2006/07 (1999E.C.). Statistical Bulletin, Addis Ababa.
14. Central statistical Agency (CSA). 2008. The Federal Democratic Republic of Ethiopia Central Statistical Agency, Agricultural Sample Survey Vol.1: Report on Area and Production of Major Crops (Private Peasant Holdings, Meher Season), 2007/08 (2000E.C.). Statistical Bulletin, Addis Ababa.
15. Central statistical Agency (CSA). 2009. The Federal Democratic Republic of Ethiopia Central Statistical Agency, Agricultural Sample Survey Vol.1: Report on Area and Production of Major Crops (Private Peasant Holdings, Meher Season), 2008/09 (2001 E.C.). Statistical Bulletin, Addis Ababa.
16. Central statistical Agency (CSA). 2010. The Federal Democratic Republic of Ethiopia Central Statistical Agency, Agricultural Sample Survey Vol.1: Report on Area and Production of Major Crops (Private Peasant Holdings, Meher Season), 2009/10 (2002 E.C.). Statistical Bulletin, Addis Ababa.
17. Central statistical Agency (CSA). 2011. The Federal Democratic Republic of Ethiopia Central Statistical Agency, Agricultural Sample Survey Vol.1: Report on Area and Production of Major Crops (Private Peasant Holdings, Meher Season), 2010/11 (2003 E.C.). Statistical Bulletin, Addis Ababa.



18. Central statistical Agency (CSA). 2012. The Federal Democratic Republic of Ethiopia Central Statistical Agency, Agricultural Sample Survey Vol.1: Report on Area and Production of Major Crops (Private Peasant Holdings, Meher Season), 2011/12 (2004 E.C.). Statistical Bulletin, Addis Ababa.
19. Central statistical Agency (CSA). 2013. The Federal Democratic Republic of Ethiopia Central Statistical Agency, Agricultural Sample Survey Vol.1: Report on Area and Production of Major Crops (Private Peasant Holdings, Meher Season), 2012/13 (2005 E.C.). Statistical Bulletin, Addis Ababa.
20. Central statistical Agency (CSA). 2014. The Federal Democratic Republic of Ethiopia Central Statistical Agency, Agricultural Sample Survey Vol.1: Report on Area and Production of Major Crops (Private Peasant Holdings, Meher Season), 2013/14 (2006 E.C.). Statistical Bulletin, Addis Ababa.
21. Central statistical Agency (CSA). 2015. The Federal Democratic Republic of Ethiopia Central Statistical Agency, Agricultural Sample Survey Vol.1: Report on Area and Production of Major Crops (Private Peasant Holdings, Meher Season), 2014/15 (2007 E.C.). Statistical Bulletin, Addis Ababa.
22. Central statistical Agency (CSA). 2016. The Federal Democratic Republic of Ethiopia Central Statistical Agency, Agricultural Sample Survey Vol.1: Report on Area and Production of Major Crops (Private Peasant Holdings, Meher Season), 2015/16 (2008 E.C.). Statistical Bulletin, Addis Ababa.
23. Central statistical Agency (CSA). 2017. The Federal Democratic Republic of Ethiopia Central Statistical Agency, Agricultural Sample Survey Vol.1: Report on Area and Production of Major Crops (Private Peasant Holdings, Meher Season), 2016/17 (2009 E.C.). Statistical Bulletin, Addis Ababa.
24. Central statistical Agency (CSA). 2018. The Federal Democratic Republic of Ethiopia Central Statistical Agency, Agricultural Sample Survey Vol.1: Report on Area and Production of Major Crops (Private Peasant Holdings, Meher Season), 2017/18 (2010 E.C.). Statistical Bulletin, Addis Ababa.
25. Central statistical Agency (CSA). 2019. The Federal Democratic Republic of Ethiopia Central Statistical Agency, Agricultural Sample Survey Vol.1: Report on Area and Production of Major Crops (Private Peasant Holdings, Meher Season), 2018/19 (2011E.C.). Statistical Bulletin, Addis Ababa.
26. Central statistical Agency (CSA). 2020. The Federal Democratic Republic of Ethiopia Central Statistical Agency, Agricultural Sample Survey Vol.1: Report on Area and Production of Major Crops (Private Peasant Holdings, Meher Season), 2019/20 (2012E.C.). Statistical Bulletin, Addis Ababa.
27. Central statistical Agency (CSA). 2021. The Federal Democratic Republic of Ethiopia Central Statistical Agency, Agricultural Sample Survey Vol.1: Report on Area and Production of Major Crops (Private Peasant Holdings, Meher Season), 2020/21 (2013 E.C.). Statistical Bulletin, Addis Ababa.
28. Food and Agriculture Organization of the United Nations. (1995–2021). FAOSTAT statistical database. Retrieved from <http://www.fao.org/faostat/en/#data/>
29. World Bank. (1995–2021). Climate Change Knowledge Portal. World Bank. <https://climateknowledgeportal.worldbank.org/>

Получена 10.01.2024

Принята в печать 25.01.2024

Received 10.01.2024

Accepted 25.01.2024



**Моделирование и анализ данных 2024. Том 14. № 1.**

Научный журнал

Издаётся с 2011 года

Учредитель

Федеральное государственное бюджетное  
образовательное учреждение высшего образования  
«Московский государственный психолого-педагогический университет»

Адрес редколлегии:

г. Москва, ул. Сретенка, 29, факультет информационных технологий

Тел.: +7 (499) 167-66-74

E-mail: mad.mgppu@gmail.com

Журнал зарегистрирован в Государственном комитете РФ по печати.

Свидетельство о регистрации средств массовой информации

ПИ № ФС77-66444 от 14 июля 2016 года

ISSN: 2219-3758

ISSN: 2311-9454 (online)

Подписано в печать: 21.03.2024.

Формат: 70\*100/16. Гарнитура Times.

Усл. печ. п. 13,1. Усл.-изд. л. 10,1.

Печать по требованию. Электронное издание.