Изучение действительных чисел на уроках математики в V–VI классах

С. Ф. Горбов,
старший научный сотрудник

Приложение идей развивающего обучения системы Д. Б. Эльконина — В. В. Давыдова [1, 2] к разработке программ средней школы может осуществляться по крайней мере в двух направлениях. Первое — это развитие предметного содержания учебных курсов, начало которым положено в I—III классах. Второе — трансформация способа организации учебной деятельности с учетом социальных и психологических условий обучения подростков. Оба направления взаимосвязаны, но для проектирования конкретных учебных курсов одно из них должно быть главенствующим. В настоящей статье мы рассматриваем обучение детей математике в V—VI классах с точки зрения именно логики развития предметного содержания.

Обучение в V классе начинается с обобщения и систематизации материала, изученного в I—III классах [3, 4]. Этому посвящены первые четыре темы программы, которые изучаются в течение первого полугодия. Такой большой расход времени на повторение объясняется следующим. В III классе завершается определенный цикл учебной деятельности детей, полностью построена система натуральных (но еще не действительных) чисел. Тем самым появляется возможность рассмотреть эту числовую систему целиком, выделяя основания способов действий, приведших к ее построению. Поэтому основной целью данного периода обучения является не просто повторение открытых ранее способов действий и соответствующих понятий, а выделение тех задач, которые привели к их созданию, оценка того, в какой степени имеющиеся способы действий позволяют решить эти задачи, анализ и сравнение различных моделей, описывающих эти способы.

В итоге выделяются следующие аспекты понятий величины и числа:

1. Величины — это характеристики различных свойств объектов. Характеристики каждого такого свойства образуют отдельный род величин, поэтому величины могут быть однородными и разнородными.

2. Не всякое свойство определяет величину. Однородные величины связаны между собой определенными отношениями и соответствующими действиями.

3. Эти отношения и действия могут быть представлены моделями разного вида: чертежами, стрелочными схемами и формулами. Каждый вид изображения имеет свои достоинства и недостатки.

4. Величины могут быть представлены непосредственно через объекты, которые они характеризуют, или заданы своими числовыми значениями. Числовое значение величины находится измерением ее с помощью другой однородной с ней величины, взятой в качестве мерки. Поэтому числовое значение зависит не только от самой величины, но и от выбранной мерки. Таким образом, число выражает отношение (связь) между величинами.

5. Представление величин числами позволяет заменить непосредственные предметные действия с величинами арифметическими действиями с числами, которые могут совершаться без участия самих величин. Это позволяет значительно расширить и упростить действия с величинами, что и объясняет необходимость введения чисел.

6. Переход от предметных действий с величинами к соответствующим действиям с числами будет корректным только в случае, когда все величины измерены одной меркой. Поэтому возникает задача измерения всех величин одного рода с помощью одной и той же мерки, которая может выбираться произвольно в зависимости от ситуации. Таким образом, необходимо иметь числа для выражения отношений между любыми двумя однородными величинами. Однако натуральных чисел для этого не хватает, поэтому нужно вводить новые числа.

7. Действия с числами (вычисления) возможны лишь в том случае, если известны способы измерения-отмеривания величин, определяемые этими числами (операторный аспект числа). Введение новых чисел поэтому означает открытие новых способов измерения-отмеривания величин (задача воспроизведения величин).

8. С натуральными числами связаны три способа измерения величин. Основным является последовательное прибавление мерки. Однако это не очень удобный способ. Его усовершенствование привело к двум другим. В первом была использована открытая система вспомогательных мерок, получаемых последовательно из основной, в которой отношение мерки к предыдущей остается постоянным (это основание системы счисления). Этот способ измерения величин отразился в форме многозначного числа. В другом способе измерения величины использовалась промежуточная мерка, которая сама измерялась основной. Этот способ описывался произведением двух чисел и привел к действиям умножения и деления.

Рефлексивный обзор проделанной в I—III классах работы позволяет строить дальнейшее обучение в V—VI классах как целенаправленную деятельность детей по построению других числовых систем — по расширению системы натуральных чисел, а в конечном счете – по построению системы действительных чисел.

Задача измерения всех величин одного рода с помощью одной и той же произвольной мерки требует рассмотрения ситуации воспроизведения величины, когда мерка в ней не укладывается целое число раз. В этом случае надо изобретать новые способы измерения величины. Анализ старых способов позволяет построить разные новые способы, а значит, и разные новые числа. Во-первых, можно использовать другую мерку для измерения величины, как и в случае произведения, однако эта новая мерка должна быть по-другому связана с основной, составлять ее правильную часть (долю). Этот способ приводит к новому виду чисел: обыкновенным дробям (рациональным числам). Во-вторых, использовать долю можно не сразу, а только для измерения остатка, получающегося после промеривания величины основной меркой. Этот способ приводит к смешанным числам (другой форме рациональных чисел). В-третьих, открытую систему вспомогательных мерок можно расширить, включив в нее мерки, которые меньше основной, выдерживая постоянным уже имеющееся отношение между соседними мерками. Этот способ приводит к позиционным дробям, частным случаем которых являются десятичные дроби. Темы 5 и 6 посвящены изучению этих новых видов чисел[1]. Они могут проходиться в любом порядке, одна из тем будет завершающей в VI классе, с другой начнется изучение математики в VI классе.

В теме 5 рассматриваются обыкновенные дроби и смешанные числа. Устанавливается, что это разные формы одних и тех же рациональных чисел. Анализируя в предметном и модельном планах отношения между величинами, значения которых выражены дробями или смешанными числами, дети открывают правила (алгоритмы) действий с этими числами.

[1] В темах 1—4 повторяется материал I—III классов.

Овладение этими алгоритмами требует умения раскладывать числители и знаменатели дробей в произведения множителей, а для этого необходимо знание элементов теории делимости натуральных чисел.

Тема посвящается позиционным дробям, на которые легко переносится позиционный принцип, освоенный ранее, при изучении многозначных чисел. Единственное усложнение вызвано тем, что в записи числа теперь обязательно должна присутствовать и быть выделена цифра, отвечающая разряду единиц.

В теме 7 ставится задача сравнения двух построенных классов — рациональных чисел и десятичных дробей. Оказывается, что десятичные дроби составляют лишь часть рациональных чисел. Исследование перевода обыкновенных дробей в десятичные позволяет выявить и снять неявное допущение о том, что процесс измерения с помощью системы вспомогательных мерок всегда конечен. Оказывается, могут быть процессы, которые не заканчиваются. Таким образом дети приходят к понятию бесконечной десятичной (позиционной) дроби. Теперь ситуация меняется: уже рациональные числа составляют лишь часть десятичных дробей. Они представляются только конечными и бесконечными периодическими десятичными дробями. В результате выявляется другое неявное допущение о том, что у любых двух однородных величин есть общая правильная часть, т. е. что они соизмеримы. Сторона и диагональ квадрата дают пример несоизмеримых величин.

Тем самым из всех новых способов полным оказывается только способ измерения с помощью системы вспомогательных мерок при условии, что допускается бесконечное число шагов. Лишь с его помощью окончательно решается задача измерения всех однородных величин одной и той же меркой. Таким образом, числа, определяемые этим способом, образуют полную с точки зрения измерения систему. Это действительные числа (правда, пока только положительные).

Для введения отрицательных чисел (тема 8) необходимо расширить имеющееся у детей понятие величины. Это расширение связано с рассмотрением разностного отношения. Исследуя изменение величин, дети устанавливают, что разность как характеристика различия при изменении величин не полна, кроме нее надо учитывать и направление изменения (в какую сторону оно происходит: от меньшей к большей величине или наоборот). Таким образом, охарактеризовать изменения величин только с помощью обычных (скалярных) величин невозможно, необходимы направленные величины.

Другим случаем изменения является изменение положения (места) предмета в пространстве — перемещение предмета. Для него строится геометрическая модель, а роль места исполняет точка. Характеристиками изменения места выступают особые объекты — перемещения (связанные векторы), которые не зависят от пути, по которому движется предмет, а полностью определяются его начальным и конечным положениями. Изучение перемещений показывает, что они во многом ведут себя как обычные величины, но есть и существенные отличия.

Решая задачу поиска конца перемещения, если известно его начало (построения перемещения), дети выявляют такие важные характеристики перемещения, как модуль (длина) и направление. Таким образом, перемещения также характеризуются направленными величинами.

Сравнивая перемещения на прямой по модулю и направлению, дети выявляют различие между самим перемещением и его характеристикой — направленной длиной, которая выделяется в самостоятельный объект — вектор (свободный вектор). Ограничение задачи сравнения перемещений только перемещениями на прямой объясняется тем, что сравнение направлений на плоскости значительно труднее, а рассмотрение векторов на плоскости не требуется для введения отрицательных чисел. Кроме того, векторы на прямой моделируют именно случай изменения обычной (скалярной) величины, где также имеются только два противоположных направления (увеличение и уменьшение).

Выделение векторов в качестве самостоятельных объектов позволяет перенести на них предметные способы действий, которые были открыты для перемещений. Уже здесь устанавливаются многие свойства, которые затем переносятся на положительные и отрицательные числа. Например, возможность замены вычитания сложением.

Само введение отрицательных и положительных чисел происходит при решении задачи воспроизведения вектора по другому вектору — мерке. Ее решение требует установления такого отношения между векторами, которое включает в себя два отношения: между модулями векторов и их направлениями. Отношения между модулями, т. е. обычными величинами, естественно, задается «старым» числом, а отношение между направлениями — знаками «+» (в случае одинаковых направлений) и «-» (в случае противоположных направлений). Таким образом, отношение между векторами задается числом со знаком, т. е. положительным или отрицательным числом. Если ограничиться только векторами с одним и тем же направлением (любым из двух), то векторы будут различаться лишь модулями, т. е. будут вести себя как обычные величины. Поэтому положительные числа — это просто «старые» числа и знак «+» можно не писать.

Моделирование положительных и отрицательных чисел на числовой прямой позволяет рассмотреть их как самостоятельные объекты и перенести на них действия с векторами: сложение, вычитание, взятие противоположного. Особой задачей является установление для них отношения порядка.

Умножение и деление положительных и отрицательных чисел, как и всех других видов чисел, определяются через ситуацию измерения величины (в данном случае направленной) с помощью промежуточной мерки.

В VI классе заканчивается построение системы действительных чисел[2].

В целом весь курс математики для I—VI классов можно охарактеризовать как арифметический, центральное место в котором занимает построение системы действительных чисел. Однако с самого начала обучения в нем используется буквенная символика. Каждый раз, знакомясь с новыми числами и действиями с ними, дети начинают работать и с соответствующими алгебраическими выражениями: одночленами, многочленами, алгебраическими дробями. Так закладываются основы для дальнейшего изучения алгебры.

Геометрический материал в течение всего обучения связывается с изучением величин и действий с ними.

Литература

1. *Давыдов В. В.* Виды обобщения в обучении. М., 1972.
2. *Давыдов В. В.* Проблемы развивающего обучения. М., 1986.
3. *Давыдов В. В., Горбов С. Ф., Микулина Г. Г., Савельева О. В.* Обучение математике. I класс: Методическое пособие для учителей трехлетней начальной школы. М., 1994.
4. Математика. I класс: Учебник-тетрадь. М., 1995.
5. Обучение математике. II класс: Методическое пособие для учителей трехлетней начальной школы. М., 1995. Математика. II класс: Учебник-тетрадь. М.,1995.
6. Программа развивающего обучения (система Д. Б. Эльконина — В. В. Давыдова).— I—VI классы. Математика. М., 1996.
7. *Давыдов В. В., Горбов С. Ф., Микулина Г. Г., Савельева О. В., Табачникова Н. Л.* Математика. III класс: Учебник-тетрадь (экспериментальные материалы). М., 1996.

[2] В настоящее время готовится учебный комплект по математике для V класса. В перспективе будет подготовлен такой же комплект и для VI класса.