

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ

УДК 519.6+538.9

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ НА СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ СИСТЕМ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПОЛИНОМИАЛЬНЫМ СЛАГАЕМОМ В ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОМ ОПЕРАТОРЕ

А.Ф. Полупанов, С.Н. Евдоченко

Представлен явный численно-аналитический метод решения задачи на собственные значения для некоторых систем обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с полиномиальным слагаемым в дифференциальном операторе, в частности, уравнений, описывающих связанные дырочные состояния в полупроводниковых квантовых ямах с полиномиальным профилем потенциала. Выполнен расчёт размерно-квантованных (связанных) состояний дырок в параболической GaAs квантовой яме. Вычислены законы дисперсии и волновые функции дырок для всех связанных состояний при изменении ширины квантовой ямы и величины потенциала.

An explicit numerical analytic method of solving the eigen-value problem for some systems of ordinary differential equations of second order with a polynomial summand in a differential operator is presented, in particular, for those systems which describe bound hole states in semiconductor quantum wells with the polynomial potential profile. Bound hole states in the parabolic GaAs quantum well are calculated. The dispersion laws of bound hole states and wavefunctions of holes for all bound states are calculated for various well widths and potential value.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА

Система обыкновенных дифференциальных уравнений, задача на собственные значения, размерно-квантованные состояния, полиномиальный потенциал, численный метод.

1. ВВЕДЕНИЕ

В работе рассматриваются системы обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка вида:

$$\left\{ a \frac{d^2}{dz^2} + b \frac{d}{dz} + c + V(z) \right\} \Psi(z) = E\Psi(z) \quad (1)$$

где a, b, c – это не зависящие от z $n \times n$ матрицы, матрица a – невырожденная эрмитова, матрица b – антиэрмитова, c – эрмитова; $V(z)$ – полиномиальная, вообще говоря, матричная функция (потенциал), Ψ – это n -компонентный вектор решений (волновая функция); E – параметр (энергия), который может быть действительным [1], или комплексным [2].

К решению задачи на собственные значения и задачи рассеяния для уравнения (1) сводятся многие прикладные проблемы квантовой механики, в частности – в рамках приближения эффективной массы [3] – проблема размерно-квантованных состояний и состояний рассеяния электронов и дырок в полупроводниковых квантовых ямах (КЯ) при наличии внешних полей. В данной работе мы будем рассматривать решение задачи на собственные значения для уравнения (1) и его применение к исследованию размерно-квантованных состояний дырок в КЯ. Следует отметить, что даже в простейшем случае одного уравнения ($n = 1$ в (1)), когда потенциал $V(z)$ не есть кусочно-постоянная функция, для нахождения энергий связанных состояний и соответствующих волновых функций используются различные, существенно приближённые численные методы. Например, приближение многоступенчатого потенциала [4], кусочно-линейного потенциала [5], методы конечных элементов [6], вариационный метод [7]. В случае системы уравнений ($n > 1$ в (1)) обычно использовались конечно-разностные методы [8], которые могут давать большую погрешность даже в случае одного уравнения. Значительно более эффективными и точными являются методы, основанные на численном интегрировании дифференциальных уравнений [9-10]. В настоящей работе представлен вариант явного численно-аналитического метода рекуррентных последовательностей решения задачи на собственные значения, предложенного в [9], развитого в случае сингулярной задачи на собственные значения в [11, 12] и систем вида (1) в [13].

2. ОБЩАЯ ФОРМУЛИРОВКА МЕТОДА

Для дальнейшего анализа удобно записать систему уравнений (1) в виде системы уравнений первого порядка, заменяя функцию $2n$ -компонентной функцией $y(z)$ следующего вида

$$y(z) = \begin{pmatrix} \Psi(z) \\ d\Psi(z)/dz \end{pmatrix}; \quad (2)$$

$$\frac{dy(z)}{dz} = A(z)y(z), \text{ где } A(z) = \begin{pmatrix} \hat{0} & \hat{1} \\ a^{-1}(E - c - V(z)) & -a^{-1}b \end{pmatrix},$$

$A(z)$ – это матричная функция размером $2n \times 2n$, построенная из матриц a , b , c , нулевой $\hat{0}$ и единичной $\hat{1}$ матриц, размером $n \times n$, функции $V(z)$ и энергии E .

Мы рассматриваем случай кусочно-полиномиальной функции $V(z)$ (потенциала КЯ), тогда функция $V(z)$ – это полином степени n по z при $0 < z < d$ и $V(z) = 0$ при $z \geq 0$, $z \geq d$. Матричную функцию $A(z)$ можно представить в виде

$$A(z) = A_0 + A_1 z + A_2 z^2 + \dots + A_n z^n, \quad (3)$$

где A_i , ($i=0, 1, \dots, n$) – это постоянные $2n \times 2n$ матрицы (вообще говоря, различные при $0 \leq z \leq d$ и при $z < 0$, $z > d$).

Рассматривается следующая задача на собственные значения для уравнения (2) (а, значит, и (1)). Необходимо найти такие дискретные значения параметра E ($E = E_i$, $i=0, 1, \dots$), при которых выполняются следующие условия для соответствующих им решений:

- 1) $y(z) \rightarrow 0$ при $z \rightarrow \pm \infty$
- 2) $y(z)$ непрерывна при $z = 0$ и $z = d$.

Необходимо также найти соответствующие собственные функции – нормированные решения (1) $\Psi_{E(z)}$. Отметим, что в приложениях возможны и более общие граничные условия, чем 2), например, если матрицы a , b , c разрывно изменяются при прохождении точек $z = 0$, $z =$

d (см., например, [14]). Для определённости, но без потери общности, мы будем использовать условие 2).

Рассмотрим решения (фундаментальную систему решений) (2) по отдельности при $0 \leq z \leq d$, $z < 0$ и $z > d$.

Поскольку предполагается, что функция $V(z)$ – это многочлен (3) при $0 \leq z \leq d$, то следующий ряд для каждого отдельного решения из фундаментальной системы решений

$$y(z) = \sum_{k=0}^{\infty} y_k z^k, \quad (4)$$

где y_k – не зависящие от z $2n$ -векторы (столбцы из $2n$ элементов), сходится на этом отрезке (см. [15]), т.е. каждое решение уравнения (2) можно представить в виде сходящегося ряда (4). Подставляя (3) и (4) в уравнение (2), получаем следующие рекуррентные соотношения для векторов y_k :

$$(k+1)y_{k+1} = \sum_{l=0}^n A_l y_{k-l}, \quad k=0, 1, \dots \quad (5)$$

и y_0 – это некоторый заданный столбец из $2n$ элементов.

Поскольку рассматривается полиномиальная функция $V(z)$, то выражения (4) и (5) дают точные формулы для решений (2) при $0 \leq z \leq d$ и позволяют вычислить эти решения с любой требуемой точностью, обрывая соответствующие ряды при достаточно большой величине $k = k_{max}$.

С учетом того, что при $z < 0$ и $z > d$ функция $V(z) = 0$, имеем следующее уравнение при $z < 0$ и $z > d$:

$$\frac{dy(z)}{dz} = A_0 y(z), \quad A_0 = \begin{pmatrix} \hat{0} & \hat{1} \\ a^{-1}(E-c) & -a^{-1}b \end{pmatrix}, \quad (6)$$

Решения уравнения (6), удовлетворяющие граничным условиям при $z \rightarrow \pm \infty$, легко найти, поскольку они есть суперпозиции $2n$ -столбцов (собственных векторов матрицы A_0), умноженных на экспоненциальные функции с, вообще говоря, комплексными аргументами, соответствующими собственным значениям матрицы A_0 . В случае решения задачи на собственные значения нужно рассматривать те значения параметра E (энергии), при которых собственные значения матрицы A_0 имеют не равную нулю действительную часть и при этом следует учитывать только те экспоненциальные функции в решениях, которые убывают при $z \rightarrow \pm \infty$.

Пусть при некотором $E = E_0$ у матрицы $A_0 = A_0(E)$ имеется n собственных значений с положительной действительной частью и n собственных значений с отрицательной действительной частью, которые мы перенумеруем следующим образом:

$$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n : \operatorname{Re} \lambda_i > 0, i = 1, \dots, n; \quad \lambda_{n+1}, \lambda_{n+2}, \dots, \lambda_{2n} : \operatorname{Re} \lambda_j < 0, j = n+1, \dots, 2n, \quad (7)$$

При $z < 0$ интересующее нас (стремящееся при $z \rightarrow \pm \infty$ к нулю) решение уравнения (6) имеет вид следующей $2n \times n$ матричной функции:

$$F(z) \equiv (u_1 \exp(\lambda_1 z), u_2 \exp(\lambda_2 z), \dots, u_n \exp(\lambda_n z)). \quad (8)$$

Здесь столбцы из n элементов u_1, \dots, u_n – это собственные векторы матрицы A_0 , соответствующие её собственным значениям $\lambda_1, \dots, \lambda_n$:

$$u_1 = \begin{pmatrix} u_{11} \\ u_{21} \\ \vdots \\ u_{2n1} \end{pmatrix}, \dots, u_n = \begin{pmatrix} u_{1n} \\ u_{2n} \\ \vdots \\ u_{2nn} \end{pmatrix}.$$

Используя матрицу $F(0) = F(z=0)$ как «начальную» матрицу, составленную из вектор y_0 в (5) и выражения (4), (5), мы находим $2n \times n$ матричную функцию $\Phi(z)$, состоящую из n решений уравнения (2) при $0 \leq z \leq d$.

$$Y(z) = \begin{pmatrix} y_{11}(z) & y_{1n}(z) \\ y_{21}(z) & \dots & y_{2n}(z) \\ \vdots & & \vdots \\ y_{2n1}(z) & y_{2nn}(z) \end{pmatrix}, \quad (9)$$

где первый индекс нумерует компоненту в векторе решения, а второй – нумерует решения. Первые n строк – это решения (1) $\Psi(z)$, вторые n строк – производные решений $d\Psi(z)/dz$.

При $z \geq d$ имеется $2n \times n$ – размерная матричная функция $\Gamma(z)$ – решение уравнения (6), стремящееся при $z \rightarrow \pm \infty$ к нулю:

$$\Gamma(z) = (u_{n+1} \exp(\lambda_{n+1}z), u_{n+2} \exp(\lambda_{n+2}z), \dots, u_{2n} \exp(\lambda_{2n}z)), \quad (10)$$

где u_{n+1}, \dots, u_{2n} – собственные векторы матрицы A_0 , соответствующие её собственным значениям $\lambda_{n+1}, \dots, \lambda_{2n}$ с отрицательной действительной частью (см. (9)).

Ясно, что можно вычислить $2n \times n$ – матричные функции $\Phi(z)$ (9) и $\Gamma(z)$ (10) в точке $z = d$ при любом значении параметра E . Для существования собственной функции уравнения (2) необходимо и достаточно (см., например, [Fed]) , чтобы существовал такой ненулевой $2n$ -мерный вектор сшивки $\Xi = \Xi(E)$:

$$\Xi(E) = \begin{pmatrix} \Xi_1(E) \\ \Xi_2(E) \end{pmatrix}, \quad (11)$$

что выполняется следующее условие

$$Y(d) \Xi_1 = \Gamma(d) \Xi_2. \quad (12)$$

Отсюда следует, что при некотором значении $E = E_0$ должно выполняться равенство

$$(Y(d), -\Gamma(d)) \Xi \equiv M \Xi = 0. \quad (13)$$

Это обозначает, что E_0 есть собственное значение энергии, если для матрицы $M = M(E)$ размером $2n \times n$, определённой в (13), выполняется равенство

$$\det M(E) = 0. \quad (14)$$

Вычисляя два n -мерных вектора Ξ_1 и Ξ_2 из (12), получим следующее выражение для решений (2) (т.е. решений (1) и их производных), соответствующих данному собственному значению E_0

$$y_{E_0}(z) = \begin{cases} F(z)\Xi_1, z \leq 0, \\ Y(z)\Xi_1, 0 \leq z \leq d, \\ \Gamma(z)\Xi_2, z \geq d \end{cases} \quad (15)$$

Задача нахождения собственных значений сводится к численному решению уравнения (14). Соответствующие собственные функции определяются, после вычисления векторов Ξ_1 и Ξ_2 из (12) и нормировки, выражением (15).

3. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ НА СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ В СЛУЧАЕ СИСТЕМЫ ДВУХ ОДУ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Как указывалось выше, к решению задачи на собственные значения для уравнения (1) сводятся многие прикладные проблемы квантовой механики, в частности, задача о размерно-квантованных (дискретных) состояниях дырок в полупроводниковых квантовых ямах (КЯ) при наличии внешних полей. Состояния тяжёлых и легких дырок в полупроводниках описываются матричным гамильтонианом Латтинджера размером 4×4 . Выбираем систему координат, где ось квантования z перпендикулярна поверхностям раздела в структуре с квантовой ямой. С помощью унитарного преобразования [16] можно привести гамильтониан к блочно-диагональному виду с двумя блоками размером 2×2 . Тогда, после подстановки $k_z \rightarrow -i\hbar\partial/\partial z$ у

$$a = \begin{pmatrix} -1+\mu & 0 \\ 0 & -1-\mu \end{pmatrix}, b = k_l \begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{3}\mu \\ \sqrt{3}\mu & 0 \end{pmatrix}, c = k_l^2 \begin{pmatrix} (1+\frac{1}{2}\mu) & \frac{\sqrt{3}}{2}\mu \\ \frac{\sqrt{3}}{2}\mu & (1+\frac{1}{2}\mu) \end{pmatrix}. \quad (16)$$

Здесь $\mu = (6\gamma_3 + 4\gamma_2)/5\gamma_1$, где $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ - безразмерные параметры Латтинджера полупроводника [3], энергия (параметр E в (1)) и длина измеряются в единицах $m_0e^4/2\hbar^2\gamma_1$ and $\hbar^2\gamma_1/m_0e^2$ соответственно, где m_0 - масса свободного электрона. Мы будем рассматривать случай функции $V(z)$ в (1) такой, что $V(z) < 0$ - это полином степени n по z при $0 < z < d$ (потенциал квантовой ямы) и $V(z) = 0$ при $z \leq 0, z \geq d$. Поскольку функция $V(z)$ зависит только от координаты z , величина k_l - поперечная компонента квазиимпульса ($k_l^2 = k_x^2 + k_y^2$) остаётся постоянной при пересечении поверхностей раздела (это хорошее квантовое число, т.е. параметр). Рассматривая модель удобна тем, что содержит только один параметр μ , характеризующий конкретный полупроводник (материальный параметр, известный из опыта), реалистический диапазон изменения которого $0 \leq \mu < 1$, и учитывает взаимодействие тяжёло- и легко-дырочных состояний в структуре с КЯ: (1) - это система двух связанных ОДУ второго порядка, где коэффициенты при второй производной (матрица a в (16)) обратно пропорциональны эффективным массам соответственно тяжёлой и лёгкой дырок, т.е. $\frac{1}{1 \mp \mu}$. При $k_l = 0$ уравнения (1) расцепляются на два независимых уравнения -

два одномерных уравнения Шредингера для двух частиц с существенно разными массами - массами тяжёлой и легкой дырки, поскольку параметр μ меньше единиц, но близок к ней во всех реалистических случаях (в расчетах мы используем значение $\mu = 0,753$, что соответствует GaAs). При $k_l \neq 0$ уравнения становятся связанными, т.е. нельзя говорить об отдельных состояниях тяжёлой и лёгкой дырки, но собственные значения принято обозначать согласно их «происхождению». Кроме того, при $\mu = 0$, уравнения (1) расцепляются и переходят в уравнение Шредингера, описывающее состояния электрона в квантовой яме (задача из учебника в случае $V(z) = V_0 < 0$).

После замены функции $\Psi(z) = \begin{pmatrix} \Psi_{hh}(z) \\ \Psi_{lh}(z) \end{pmatrix}$ 4-х-компонентной функцией $y(z)$: $y(z) = \begin{pmatrix} \Psi(z) \\ d\Psi(z)/dz \end{pmatrix}$, получаем систему четырёх уравнений (2) с матричной функцией $A(z)$: $A(z) = A_0 + A_1z + A_2z^2 + \dots + A_nz^n$, где A_i , ($i=0,1,\dots,4$) - это постоянные 4×4 матрицы. Собственные значения матрицы A_0 равны:

$$\lambda_{1,3} = \pm \sqrt{\frac{-E}{1-\mu} + k_l^2}, \quad \lambda_{2,4} = \pm \sqrt{\frac{-E}{1+\mu} + k_l^2} \quad (16)$$

Из выражений (17), в частности, видно, что в отличие от случая одного уравнения (1), собственные значения E (т.е. связанные состояния) могут существовать и при $0 < E < k_l^2(1 - \mu)$. (Заметим, что в интервале $k_l^2(1 - \mu) \leq E \leq k_l^2(1 + \mu)$ имеется одно или несколько резонансных состояний [2]). Соответствующие (17) собственные векторы A_0 могут быть выбраны, например, в виде:

$$\Phi_{1,3} = \begin{pmatrix} 1 \\ \phi_2^{1,3} \\ \lambda_{1,3} \\ \lambda_{1,3}\phi_2^{1,3} \end{pmatrix}, \quad \phi_2^{1,3} = -\frac{\sqrt{3}k_l^2}{k_l^2 \mp 2k_l\lambda_1}; \quad \Phi_{2,4} = \begin{pmatrix} \phi_1^{2,4} \\ 1 \\ \lambda_{2,4}\phi_1^{2,4} \\ \lambda_{2,4} \end{pmatrix}, \quad \phi_1^{2,4} = -\frac{\sqrt{3}k_l^2}{k_l^2 \pm 2k_l\lambda_2}. \quad (18)$$

Таким образом, матрица $F(z)$ из (8) есть

$$F(z) = (\Phi_1 \exp(\lambda_1 z), \Phi_2 \exp(\lambda_2 z))$$

и, используя её значение при $z = 0$, находим необходимую 4×2 матрицу решений уравнения (2) при $z=d$

$$Y(d) = \sum_{k=0}^{k_{\max}} Y_k d^k, \quad \text{где } Y_{k+1} = \left(\sum_{l=0}^n A_l Y_{k-l} \right) / (k+1), \quad k = 0, 1, \dots, k_{\max}, \quad \text{а } Y_0 = F(0).$$

При $z \geq d$ имеется 4×2 - размерная матричная функция $\Gamma(z)$ решений (2), стремящихся при $z \rightarrow +\infty$ к нулю:

$$\Gamma(z) = (\Phi_3 \exp(\lambda_3 z), \Phi_4 \exp(\lambda_4 z))$$

Таким образом, задача на собственные значения имеет решения, если имеются такие дискретные значения E , при которых в точке $z = d$ выполняется условие сшивки решений уравнения (2)

$$Y(d) \Xi_1 = \Xi_2(d) \Xi_2. \quad (19)$$

Это возможно, когда выполняется равенство

$$\det M(E) = 0, \quad (20)$$

где $M(E) = (Y(d), -\Gamma(d))$ – матрица размером $4n \times 4$. После нахождения некоторого собственного значения $E = E_0$ для вычисления соответствующей собственной функции необходимо найти векторы $\Xi_1 = \Xi_1(E_0)$ и $\Xi_2 = \Xi_2(E_0)$. Их легко вычислить с точностью до постоянного коэффициента C_{E_0} с помощью (19). Константа C_{E_0} определяется условием нормировки

$$C_{E_0} = \frac{1}{I}, \quad I = \sqrt{\int_{z=-\infty}^{z=\infty} (y_{E_0}^2(1) + y_{E_0}^2(2)) dz}, \quad (21)$$

где $y_{E_0}(1)$, $y_{E_0}(2)$ – первая и вторая компоненты векторной функции (15) $y_{E_0}(z)$ (решения (1)). Интегрирование в (21) можно выполнить аналитически, поскольку при $z \leq 0$, $z \geq 0$

подынтегральная функция – линейная комбинация экспонент, а при $0 \leq z \leq d$ – квадрат степенного ряда, интеграл от которого есть двойная сумма. Окончательно, для собственной функции имеем

$$y_{E_0}(z) = C_{E_0} \begin{cases} F(z)\Xi_1, z \leq 0, \\ Y(z)\Xi_1, 0 \leq z \leq d, \\ \Gamma(z)\Xi_2, z \geq d \end{cases} \quad (22)$$

4. РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТОВ И ОБСУЖДЕНИЕ

Представленный метод применён для решения задачи на собственные значения, т.е. вычисления собственных значений энергии E и соответствующих собственных функций для системы двух ОДУ второго порядка (1) в случае матриц a , b и c (16) коэффициентов уравнений и функции $V(z)$, имеющей вид $V(z) = -U_0[1 - (2z - 1)^2]$ при $0 < z < d$ и $V(z) = 0$ при $z \leq 0$, $z \geq d$. Эта модель соответствует задаче о размерно-квантованных (связанных) состояниях дырок в полупроводниковой квантовой яме с усечённым параболическим потенциалом [10]. Вычислены все собственные значения - энергии всех связанных дырочных состояний в квантовой яме как функции величины k_x , т.е. законы дисперсии дырочных состояний и соответствующие собственные функции (волновые функции) для различных параметров (величины U_0 и d) КЯ с усечённым параболическим потенциалом. Использовались следующие материальные параметры:

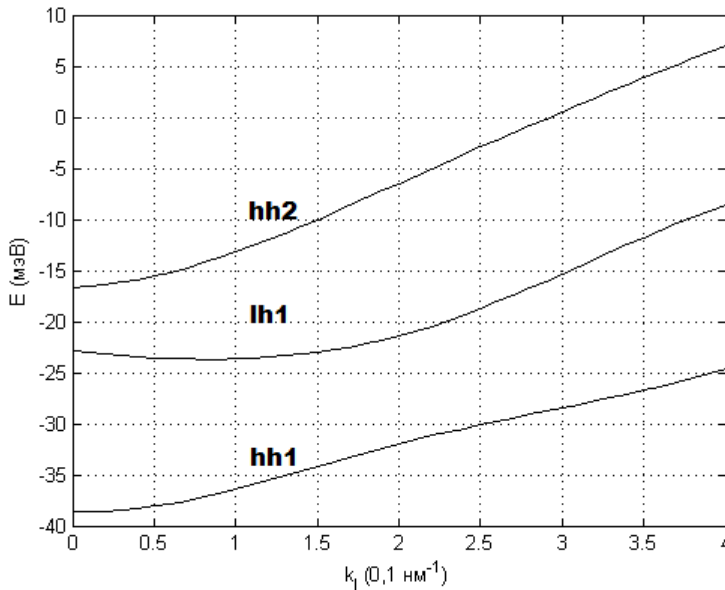


Рис. 1. Закон дисперсии связанных дырочных состояний в GaAs КЯ. $d = 10$ нм, $U_0 = 0,05$ эВ. hh1, 2 – тяжело-дырочные состояния, lh1 – легко-дырочное состояние

$\gamma_1 = 6,85$, $\gamma_2 = 0,753$, что соответствует параметрам GaAs КЯ. Некоторые результаты расчётов закона дисперсии и волновых функций приведены на рис. 1-4. В этих расчётах использовались значения $U_0 = 0,05$ эВ, $d = 10$ нм.

Следует отметить, что характер состояний, в частности, поведение собственных функций сильно изменяется при увеличении величины k_l : если при малых k_l : $k_l < 0,1$ собственные энергии и функции примерно соответствуют чередующимся состояниям тяжелых и легких дырок (на представленных рисунках нижайшее состояние – основное тяжело-дырочное, второе – основное легко-дырочное, третье – первое возбужденное тяжело-дырочное), т.е. соответствующая компонента решения существенно превалирует внутри КЯ, ведёт себя подобно собственной функции для одного уравнения, в частности, имеет «нужное» число узлов (соответствующее осцилляционной теореме), то при больших k_l компоненты решения ведут себя совершенно другим образом, в частности, могут иметь узел вне ямы (суперпозиция экспонент с разными показателями). Отметим также, что используемый подход к решению задачи (метод рекуррентных последовательностей) требует вычисления функций только в одной точке и позволяет получить аналитическое выражение для волновой функции, в отличие от подходов, основанных на конечно-разностных методах, либо использующих численное интегрирование дифференциальных уравнений, требующих вычисления функций на сетке точек. Кроме того, этот метод принципиально более точен, в чём легко убедиться, используя сравнение с точно решаемыми моделями (например, когда $k_l = 0$).

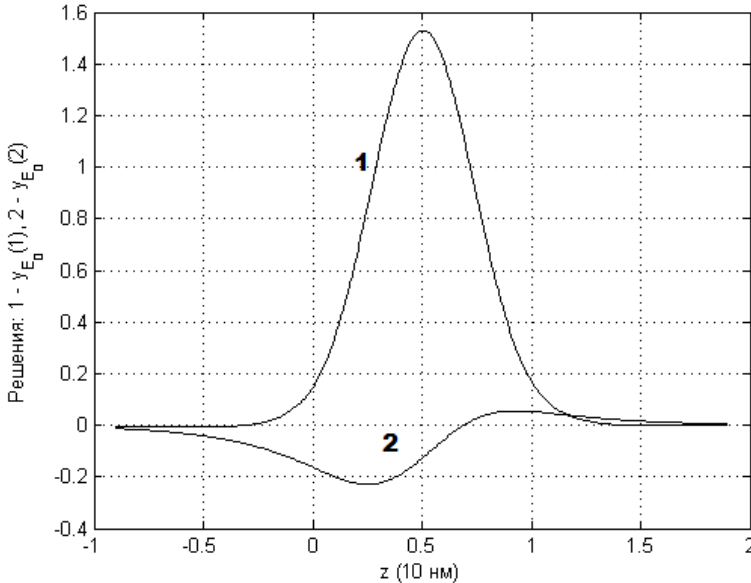


Рис. 2. Волновая функция основного связанного состояния (hh1) в GaAs КЯ.

$U_0 = 0,05$ эВ, $d = 10$ нм. $E_0 = -36,416$ мэВ, $k_l = 0,1$ (1/нм).

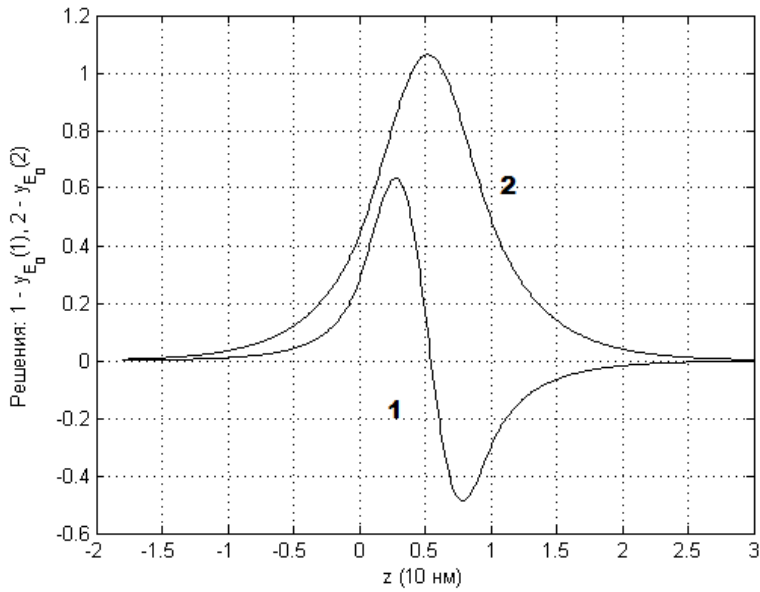


Рис. 3. Волновая функция связанного состояния lh1 в GaAs КЯ.
 $U_0 = 0,05$ эВ, $d = 10$ нм. $E_0 = -23.656$ мэВ, $kl = 0,1$ (1/нм).

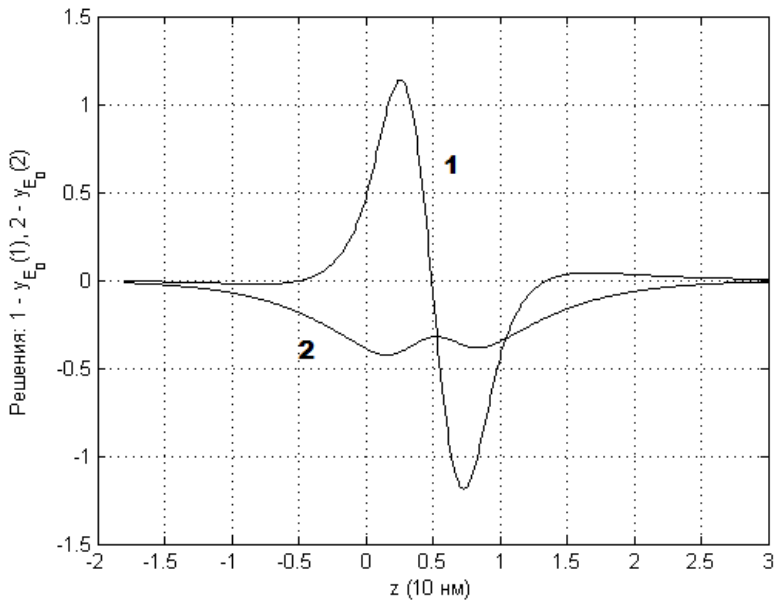


Рис. 4. Волновая функция связанного состояния hh2 в GaAs КЯ.
 $U_0 = 0,05$ эВ, $d = 10$ нм. $E_0 = -13.174$ мэВ, $kl = 0,1$ (1/нм).

ЛИТЕРАТУРА

1. Galiev V.I., Kruglov A.N., Polupanov A.F., Goldys E., Tansley T., Multichannel carrier scattering at quantum-well heterostructures, *Semiconductors*, 2002, 36 (5), pp. 546-551.
2. Polupanov A.F., Galiev V.I., Kruglov A.N. The over-barrier resonant states and multi-channel scattering by a quantum well. *Int. Jnl. of Multiphysics*, 2008, 2 (2), pp. 171-177
3. Luttinger J.M., Quantum theory of cyclotron resonance in semiconductors: General Theory. *Phys. Rev.*, 1956, 102 (4), pp. 1030-1041.
4. Ando Y., Itoh T., *J. Appl. Phys.*, 1987, Vol. 61, pp. 1497-1501
5. Lui W.W., Fukuma M., *J. Appl. Phys.*, 1986, Vol. 60, pp. 1555-1561
6. Nakamura K., Shimizu A., Koshiba M., Hayata K., *IEEE J. Quant. Electr.*, 1989, Vol. 25, pp. 889-894
7. Bastard G., Mendez E.E., Chang L., Esaki L., *Phys. Rev.*, 1983, Vol. B28, pp. 3241-3245
8. Ahn D., Chuang S.L., *J. Appl. Phys.*, 1988, Vol. 64, pp. 4056-4060
9. Polupanov A.F., Energy spectrum and wave functions of an electron in a surface energy well in a semiconductor, *Sov. Phys. Semicond.*, 1985, Vol. 19 (9), 1013-1015.
10. Ikonic Z., Milanovic V., Hole-bound-state calculation for semiconductor quantum wells. *Phys. Rev.*, 1992, Vol. B45, pp. 8760-8762
11. Galiev V.I., Polupanov A.F., Shparlinski I.E., On the construction of solutions of systems of linear ordinary differential equations in the neighbourhood of a regular singularity, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 1992, Vol. 39, pp. 151 - 163.
12. Galiev V.I., Polupanov A.F., Accurate solutions of coupled radial Schrödinger equations, *J.Phys. A: Math. Gen.*, 1999, Vol. 32, pp. 5477-5492.
13. Galiev V.I., Goldys E., Novak M.G., Polupanov A.F., Tansley T. Superlattices and Microstructures. 1995, Vol. 17, pp. 389-481.
14. Chuang S.L., Efficient band-structure calculations of strained quantum wells. *Phys. Rev. B*, 1991, Vol. 43 (12), pp. 9649-9661.
15. Федорюк М.В. Асимптотические методы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений. М. Наука, 1985.
16. Broido D.A., Sham L.J., Effective masses of holes at GaAs-AlGaAs heterojunctions. *Phys. Rev. B*, 1985, Vol. 31 (2), pp. 888-892.

Работа поступила 27.11.2012