УДК 519.17

КОМПЛЕКС ПРОГРАММ ОПТИМАЛЬНОГО РАСКРАШИВАНИЯ МНОЖЕСТВА ВЕРШИН СВЯЗНОГО ГРАФА С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ МЕТОДА ВЕТВЕЙ И ГРАНИЦ

В.Н. Нефедов, А.В. Жарких

В статье рассматривается задача об оптимальном раскрашивании вершин графа с использованием метода ветвей и границ. Приводятся примеры практических задач, сводящихся к раскраске графа, а также приводится программа, с помощью которой можно находить оптимальную раскраску для связного графа.

The article discusses the branch and bound method, which is used to solve the problem of optimal coloring of graph vertices. Examples of practical problems that boil down to a graph coloring are given, and a program is given with which one can find the optimal coloring for a connected graph.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА
Теория графов, графы, раскраска графов, метод ветвей и границ.

ДЛЯ ЦИТАТЫ
В.Н.Нефедов, А.В. Жарких. Комплекс программ оптимального раскрашивания множества вершин связного графа с использованием метода ветвей и границ // Моделирование и анализ данных. 2019. №3. С. 94-98.
V.N. Nefedov, A.V Zharkikh. The complex program of optimal coloring of the set of vertices of a connected graph using the branch and bound method. Modelirovaniye i analiz dannykh=Modelling and data analysis *(Russia)*. 2019, no.3, pp.94-98.

ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время теория графов активно развивается, так как задачи, решаемые с ее помощью, находят широкое применение на практике. Графы служат удобным средством для визуализации связей между различными объектами и активно применяются в различных сферах человеческой деятельности. Например, схема линий метро является графом. Вершинами данного графа являются станции, а ребрами – пути движения поездов.

Одной из наиболее популярных тем теории графов является раскраска графов. Данная задача появилась в середине 19 века, когда в попытках раскрасить политическую карту была сформулирована проблема четырех красок. В наши дни задача о раскраске графов так же широко изучается, так как находит широкое применение при решении различных практических задач.

1. ПРАКТИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ, СВОДЯЩИЕСЯ К РАСКРАСКЕ ГРАФОВ

Задача о раскраске графа может широко применяться для решения различных прикладных задача, например:

1. Задача о минимальном числе помещений для хранения продуктов. Предположим, что необходимо распределить продукты по помещениям. В силу каких-то причин некоторые из продуктов не могут находиться в одном помещении. Требуется распределить продукты по помещениям так, чтобы для распределения продуктов потребовалось минимальное количество помещений.

2. Задача о частотных диапазонах в станциях сотовой сети. Имеется n вышек сотовой связи, которые расположены так, что у них есть общие зоны покрытия. Так как число диапазонов частот, которые используются в системе мобильной радиосвязи ограниченно, то могут возникать взаимные помехи из-за того, что различные базовые станции (например, с общей зоной покрытия) используют одинаковый диапазон частот. Требуется распределить частоты между базовыми станциями таким образом, чтобы минимизировать помехи, оказываемые станциями друг на друга.

3. Задача о проектировании коробки скоростей. Коробка скоростей – механизм для изменения частоты вращения ведомого вала при постоянной частоте вращения ведущего. Имеется n шестерней, которые размещаются на валах. Задача, стоящая перед конструктором коробки, заключается в минимизации ее размеров, а это часто сводится к поиску наименьшего числа валов, на которых размещаются шестерни.

4. Задача о составлении расписаний. Пусть необходимо прочитать несколько лекций за определенное время. Чтение каждой лекции в отдельности занимает один час, но некоторые лекции не могут читаться одновременно. Требуется составить расписание так, чтобы чтение всех лекций заняло минимально возможное время.

2. МЕТОД ВЕТВЕЙ И ГРАНИЦ

Для решения задачи о раскраске графов существует большое количество различных методов, однако не все из них позволяют находить оптимальную раскраску для графа.

Одним из методов, позволяющих найти оптимальную раскраску для графа, является метод ветвей и границ [1], один из вариантов изложения его применения к указанной задаче приведен в работе [6]. Данный метод является модификацией метода полного перебора. Его существенным преимуществом является то, что из рассмотрения исключаются подмножества решений, которые заведомо не дадут оптимального решения. Однако данный метод не подходит для решения задач с большим количеством вершин в графе. Если количество вершин в графе велико, то следует использовать эвристический алгоритм, одно из изложений которого приведено в работе [5], который позволяет находить раскраску для графа с практически неограниченным конечным множеством вершин, однако дает оптимальное решение только в некоторых случаях.

В методе ветвей и границ решается задача минимизации некоторой целевой функции $f(x)$ на конечном множестве допустимых решений P. Допустимыми решениями являются последовательности $(i_1, \dots, i_n)$, где $i_j \in \{1,2, \dots, n\}$ такие, что вершина v_j окрашивается цветом с номером i_j, $j = 1,2, \dots, n$, и при этом никакие две смежные вершины не окрашиваются одним цветом ($\{v_{j_1}, v_{j_2}\} \in X \Longrightarrow i_{j_1} \neq i_{j_2}$). Ищется последовательность, на которой достигается минимум целевой функции $f(i_1, \dots, i_n) = max\{i_1, \dots, i_n\}$ на множестве допустимых решений P. Эта последовательность и укажет оптимальное раскрашивание графа G.

Оптимальное раскрашивание вершин графа G ищется на дереве возможных решений (раскрасок). Это дерево состоит из n уровней: 1-й уровень соответствует вершине v_1 и каждый j-й уровень – вершине v_j, где $j \in \{1,2,\dots,n\}$. Совокупность вершин каждого j-го уровня соответствует допустимым номерам цветов для окрашивания j-й вершины.

3. ПРИМЕНЕНИЕ АЛГОРИТМА РАСКРАСКИ ГРАФОВ К РЕШЕНИЮ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

Для иллюстрации работы метода ветвей и границ для решения задачи о раскраске графов рассмотрим задачу о минимальном числе помещений для хранения продуктов.

Взаимодействие некоторых продуктов представляется в виде графа $G = (V, X)$, изображенного на рис. 1. В графе $G = (V, X)$, V – множество продуктов, X – множество ребер, где $x = \{v, w\} \in X$ тогда и только тогда, когда $(v, w) \in X$ или $(w, v) \in X$, и где $v, w \in V$. Если $x = (v, w) \in X$, то продукт v отрицательно воздействует на продукт w, т.е. продукты v, w нельзя хранить в одном помещении. В данном случае можно поставить задачу об определении минимального числа помещений для хранения продуктов из множества V.

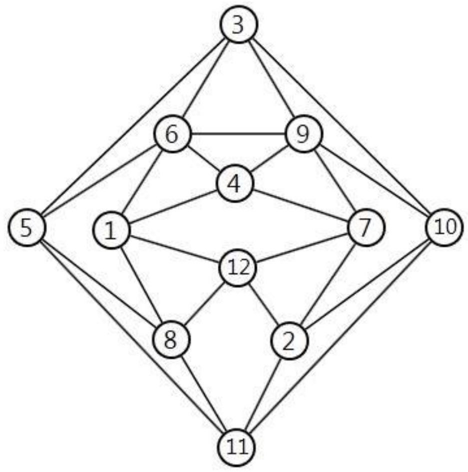

Рис. 1. Исходный граф

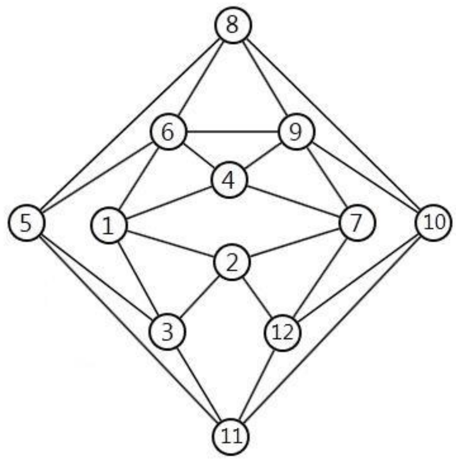

Рис. 2. Перенумерованный граф

Эта задача будет эквивалентна задаче о раскрашивании вершин графа. Требуется определить минимальное количество цветов p, необходимое для раскрашивания вершин неориентированного графа G, так чтобы никакие две смежные вершины не были окрашены одним цветом. Минимальное число цветов p покажет, какое количество помещений необходимо для хранения продуктов.

Перед началом решения задачи выделим в графе G полный подграф G_0 (это позволит уменьшить число вершин в дереве возможных решений) с множеством вершин $\{v_1, v_8, v_{12}\}$, после чего перенумеруем вершины графа так, чтобы вершина v_{12} стала вершиной v_2, а вершина v_8 стала вершиной v_3. Получаем граф G', изображенный на рис. 2.

Результат применения метода ветвей и границ для граф G' представлен на рис. 3. На этом рисунке продемонстрирован обход дерева возможных решений. Над каждой вершиной дерева указана соответствующая этой вершине оценка, а также пронумерованы все вершины в порядке обхода дерева.

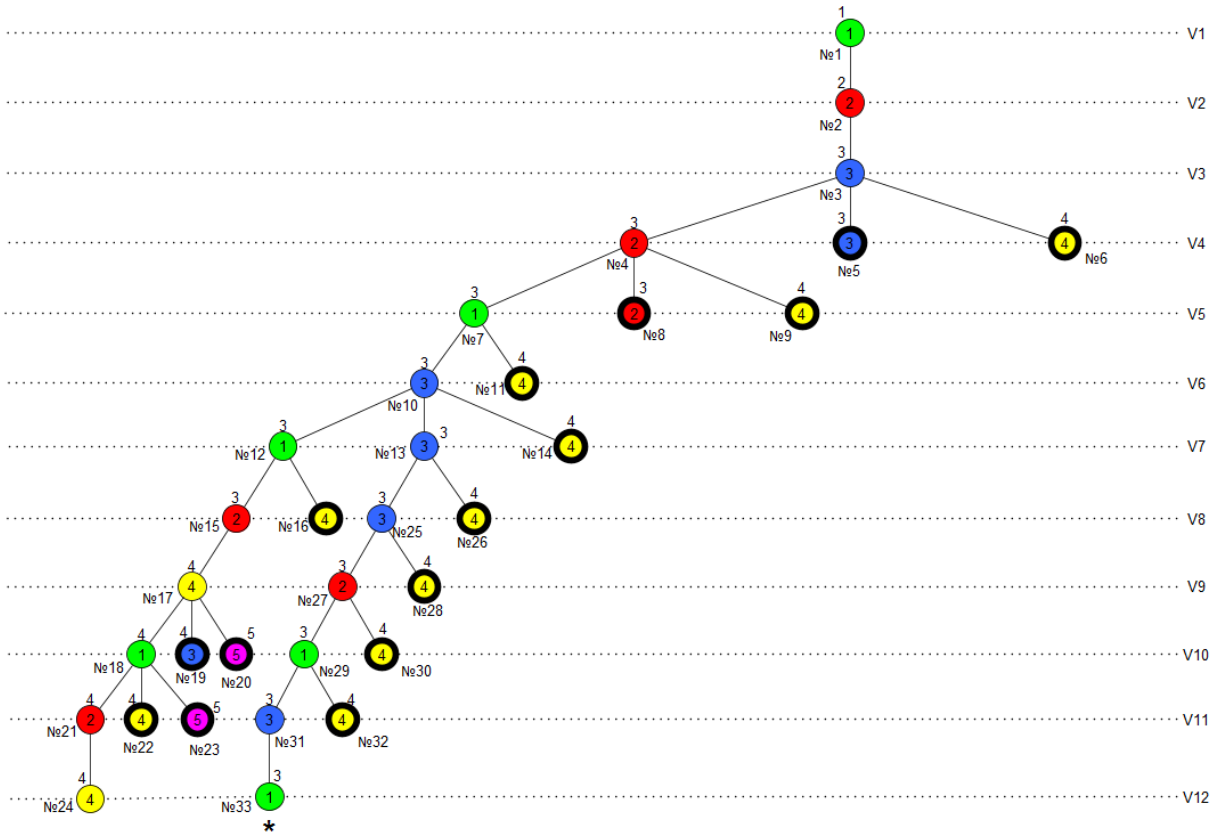

Рис. 3. Результат применения метода ветвей и границ

При обходе дерева при достижении вершины №24 получаем первое рекордное значение $\tilde{p} = 4$, необходимое для раскраски графа. В соответствии с правилом отсечений [6] при достижении вершин (на рисунке они выделены жирным цветом), значение которых больше или равно рекордному значению, отсекаются все продолжающиеся из них цепи. Оптимальное раскрашивание вершин графа соответствует цепи с минимальным значением целевой функции. Такое значение для графа G' было достигнуто в вершине №33. Таким образом, хроматическим число для графа G' будет $\tilde{p} = 3$. Оптимальное раскрашивание вершин исходного графа G представлено на рис. 4.

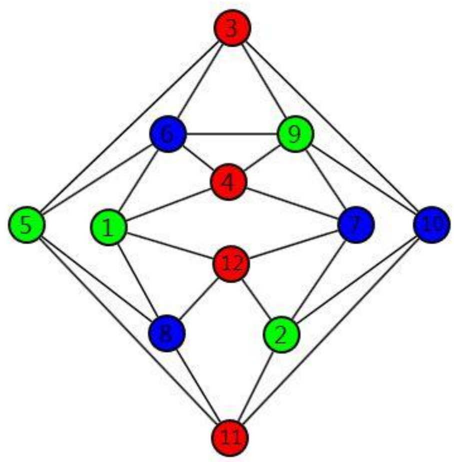

Рис. 4. Раскраска графа

Соответствующий список размещения продуктов по помещениям представлен в таблице. В первом помещении хранятся продукты 1, 2, 5, 9; во втором – 3, 4, 11, 12; в третьем – 6, 7, 8, 10.

Результаты решения задачи

Помещение	Цвет	Вершины
1		1, 2, 5, 9
2		3, 4, 11, 12
3		6, 7, 8, 10

4. ПРОГРАММА ДЛЯ РАСКРАСКИ ГРАФА

Интерфейс программы для раскраски графов представлен на рис. 5. С помощью данной программы можно рисовать разнообразные графы в заданной области, а также находить оптимальную раскраску для этих графов. Для раскраски графов используется метод ветвей и границ.

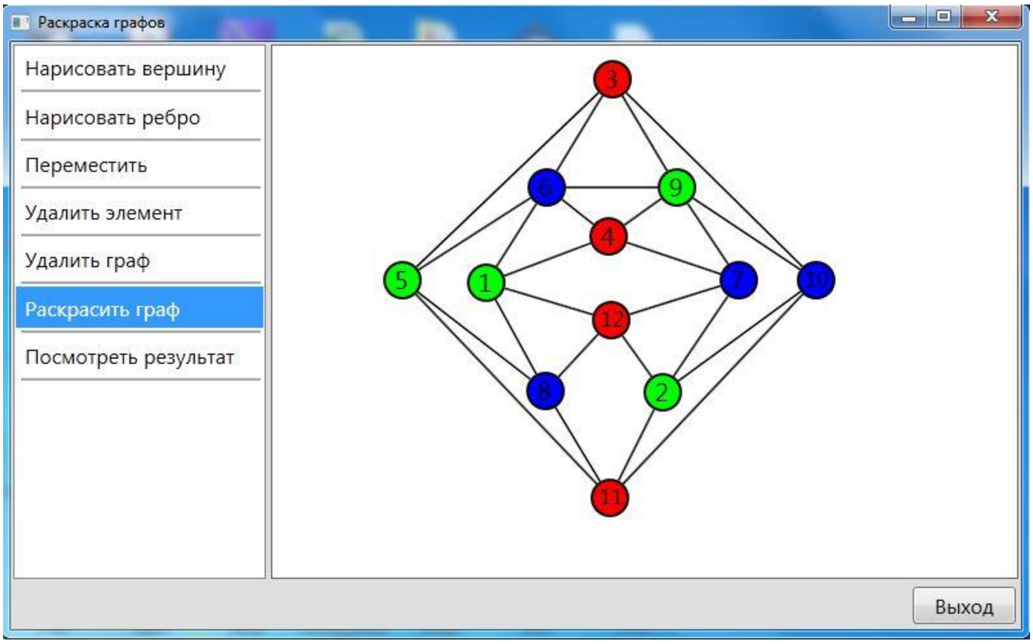

Рис. 5. Интерфейс программы

ЛИТЕРАТУРА

1. Кристофидес Н. Теория графов. Алгоритмический подход. –М.: Мир, 1978. – 432 с.
2. Конвей Р.В., Максвелл В.Л., Миллер Л.В. Теория расписаний. –М.: Наука, 1975. –360 с.
3. Липский В. Комбинаторика для программистов. –М.: Мир, 1988. –200
4. Шкурба В.В. Задача о трёх станках –М.: Наука, 1976. –92 с.
5. Нефедов В.Н. Методические указания к выполнению расчетных работ по теории графов и сетей. –М.: Доброе слово, 2015. –59 с.
6. Нефедов В.Н. Дискретные задачи оптимизации: Учебное пособие. – М.: Изд-во МАИ, 1994. –59 с.
7. Нефедов В.Н., Осипова В.А. Курс дискретной математики. – М.: Изд-во МАИ, 1992. – 264 с.

Работа поступила 19.02.2019г.