Моделирование и анализ данных
2019. Том 09. № 4. С. 32–45
doi: 10.17759/mda.2019090402
ISSN: 2219-3758 (печатный)
ISSN: 2311-9454 (online)

Modelling and Data Analysis
2019. Vol. 09, no. 4, pp. 32–45
doi: 10.17759/mda.2019090402
ISSN: 2219-3758 (print)
ISSN: 2311-9454 (online)

УДК 519.61

Анализ модели выполнения производственного задания при нечеткой информации о коэффициентах прямых затрат и конечном спросе на продукцию

Пантелеев А.В.*
МАИ, Москва, Россия
avpanteleev@inbox.ru

Савельева В.С.**
МАИ, Москва, Россия
verassavel@mail.ru

В статье рассматривается формирование и исследование математической модели выполнения производственного задания при наличии нечеткой информации о матрицах прямых затрат и конечного спроса. Под решением задачи с нечеткой информацией понимается решение линейной системы уравнений с нечеткой матрицей и нечеткой правой частью, описываемых с помощью нечетких треугольных чисел в форме отклонений от среднего значения. В данной задаче поиска межотраслевого баланса применяется метод LU-разложения для матрицы прямых затрат, который далее используется для решения системы линейных уравнений. Описана программная реализация численного метода поиска сильного решения полностью нечеткой системы линейных алгебраических уравнений, состоящая из двух последовательных этапов. На первом этапе проверяются необходимые и достаточные условия существования сильного решения. На втором этапе находится решение системы, которое записывается в виде нечеткой матрицы. Проведено исследование влияния разброса параметров нечетких чисел на итоговый результат.

Ключевые слова: нечеткая логика, полностью нечеткая линейная система алгебраических уравнений, треугольные числа, программное обеспечение.

Для цитаты:
Пантелеев А.В., Савельева В.С. Анализ модели выполнения производственного задания при нечеткой информации о коэффициентах прямых затрат и конечном спросе на продукцию // Моделирование и анализ данных. 2019. Том 09. № 4. С. 32–45. doi: 10.17759/mda.2019090402

****Пантелеев Андрей Владимирович,*** доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой математической кибернетики факультета «Информационные технологии и прикладная математика» Московского авиационного института (национального исследовательского университета), Москва, Россия. E-mail: avpanteleev@inbox.ru

*****Савельева Вера Сергеевна,*** студент бакалавриата факультета «Информационные технологии и прикладная математика» Московского авиационного института (национального исследовательского университета), Москва, Россия. E-mail: verassavel@mail.ru

Введение

В процессе функционирования многоотраслевой экономики каждая отрасль выступает, с одной стороны, производителем некоторой продукции, а, с другой стороны, потребителем продукции, произведенной другими отраслями. При этом возникает проблема нахождения объема производства каждой из отраслей, достаточного для выполнения производственного задания. Для ее решения предложена математическая модель, сводящая проблему к решению системы линейных алгебраических уравнений [1]. При этом считается, что все параметры модели известны точно. Однако в практике экономических расчетов обычно имеется неопределенность параметров, описываемая интервалами возможных значений. Кроме того, численному значению из интервала может быть поставлена в соответствие степень уверенности, которая в теории нечетких множеств задается так называемыми функциями принадлежности [4; 5; 6]. Одним из возможных типов функций принадлежности являются треугольные, которые задают треугольные числа.

Предлагается сформировать нечеткий аналог математической модели выполнения производственного задания, в которой элементы матриц прямых затрат и вектора конечного спроса задаются треугольными числами. При этом система линейных уравнений трактуется как полностью нечеткая, решение которой ищется в классе треугольных нечетких чисел [4; 5]. Различные методы решения таких систем предложены в [6; 7; 8]. Авторами описан алгоритм решения полностью нечеткой системы уравнений, который реализован в виде программного обеспечения, эффективность которого продемонстрирована в ходе анализа нечеткой модели. В случае четкой матрицы системы, но нечеткого описания правых частей, могут быть использованы методы, описанные в [3].

Задача описания и анализа модели выполнения производственного задания при наличии четкой информации

Рассмотрим классическую задачу анализа взаимосвязи между различными секторами экономики, производящими товары и услуги [1]. В качестве единицы измерения объемов товаров и услуг каждого сектора выберем их стоимость. Произведенная каждой конкретной отраслью продукция разделяется на две части: промежуточную продукцию, которая продается отрасли–покупателю, использующей ее в дальнейшем для производства других видов продукции; конечную продукцию, которая продается покупателю, не использующему ее в сфере производства. В соответствии с этим делением спрос также подразделяется на промежуточный и конечный. Конечный спрос определяется личным потреблением, экспортом и т.д. Он оценивается в результате исследования рынка. Конечный спрос определяет объем конечной продукции во всех секторах. Регулирующий орган выдает производственное задание по каждому сектору.

Требуется найти, сколько продукции следует произвести в каждом секторе экономики, чтобы выполнить производственное задание.

Введем обозначения: n – количество секторов экономики; x_i – объем выпуска продукции i-го сектора; b_{ij} – объем товаров и услуг i-го сектора, потребляемых в j-м секторе; f_i – объем конечной продукции i-го сектора; t_i – объем производственного задания i-го сектора.

Составим уравнение выполнения производственного задания – равенство объема задания каждого сектора суммарному объему его продукции, потребляемой другими секторами производства, и конечной продукции: $t_i = \sum_{j=1}^{n} b_{ij} + f_i$, $i = 1, 2, ..., n$. Обозначая $a_{ij} = \dfrac{b_{ij}}{x_j}$ – объем продукции i-го сектора, который расходуется при производстве одной единицы продукции j-го сектора, перепишем уравнение в виде

$$t_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + f_i, \quad i = 1, 2, ..., n, \tag{1}$$

где коэффициенты a_{ij}, $i = 1, ..., n$; $j = 1, ..., n$ называются коэффициентами прямых затрат. Уравнение (1) описывает потоки товаров и услуг между секторами экономики в течение фиксированного промежутка времени, например, в течение года. Перепишем (1) в матричной форме. Для этого обозначим:

$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ – матрица-столбец объемов выпуска; $f = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}$ – матрица-столбец конечного спроса (конечной продукции); $t = \begin{pmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_n \end{pmatrix}$ – матрица-столбец производственного задания; $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$ – структурная матрица экономики (матрица прямых затрат). Используя эти обозначения, перепишем (1) в виде

$$t = Ax + f, \text{ или } Ax = t - f. \tag{2}$$

Требуется определить, каким должен быть объем выпуска продукции в каждом секторе экономики, чтобы выполнить производственное задание. Другими словами, требуется найти решение x системы уравнений (2) при заданной матрице A прямых затрат и заданным столбцам f конечного спроса и t производственного задания. Учитывая экономический смысл, допустимым считается решение x, все элементы которого неотрицательные.

Задача описания и анализа модели выполнения производственного задания при наличии нечеткой информации

На практике при задании элементов матриц, описывающих математическую модель, информация может быть размытой, т.е. представляться некоторым отрезком возможных значений. Более того, возможен случай, когда задается четкое значение и границы отрицательного и положительного изменений относительно четкого значения. В этом случае можно описать элементы матриц с помощью нечетких чисел и операций над ними, в частности треугольных чисел. Приведем основные определения, которые будут использоваться при составлении нечеткой математической модели выполнения производственного задания [4; 5].

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} 1 - \dfrac{m-x}{\alpha}, m-\alpha \le x < m,\ \alpha > 0, \\ 1 - \dfrac{x-m}{\beta}, m \le x \le m+\beta,\ \beta > 0, \\ \quad 0, \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

1. Треугольное нечеткое число $\tilde{A} = (m, \alpha, \beta)$ задается функцией принадлежности (рис. 1) Число $\tilde{0} = (0,0,0)$ считается нулевым треугольным нечетким числом.

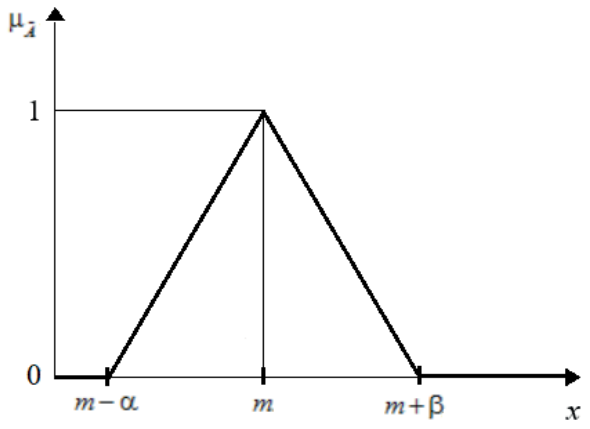

Рис. 1. Представление треугольного нечеткого числа

2. Нечеткое число $\tilde{A}$ называется положительным ($\tilde{A} > 0$), если его функция принадлежности $\mu_{\tilde{A}}(x) = 0\ \forall x \le 0$, и отрицательным ($\tilde{A} < 0$), если его функция принадлежности $\mu_{\tilde{A}}(x) = 0\ \forall x \ge 0$. Число $\tilde{A} = (m, \alpha, \beta)$ является положительным, если $m - \alpha \ge 0$.
3. Два нечетких треугольных числа $\tilde{M} = (m, \alpha, \beta)$ и $\tilde{N} = (n, \gamma, \delta)$ равны тогда и только тогда, когда $m = n, \alpha = \gamma, \beta = \delta$.
4. Суммой двух нечетких треугольных чисел $\tilde{M} = (m, \alpha, \beta)$ и $\tilde{N} = (n, \gamma, \delta)$ называется число
$$(m, \alpha, \beta) \oplus (n, \gamma, \delta) = (m+n, \alpha+\gamma, \beta+\delta). \quad (3)$$
5. Произведение двух положительных нечетких чисел $\tilde{M} = (m, \alpha, \beta) > 0$ и $\tilde{N} = (n, \gamma, \delta) > 0$ при малых значениях α, β по сравнению с m и малых γ, δ по сравнению с n приближенно определяется, как нечеткое число
$$(m, \alpha, \beta) \otimes (n, \gamma, \delta) \cong (mn, m\gamma + n\alpha, m\delta + n\beta). \quad (4)$$
В частном случае умножения на четкое число λ:
$$\lambda \otimes (m, \alpha, \beta) = \begin{cases} (\lambda m, \lambda\alpha, \lambda\beta), \lambda > 0, \\ (\lambda m, -\lambda\beta, -\lambda\alpha), \lambda < 0. \end{cases} \quad (5)$$

Когда разброс, характеризуемый α, β и γ, δ, не является малым, может быть использована более точная формула умножения

$$(m, \alpha, \beta) \otimes (n, \gamma, \delta) \cong (mn, m\gamma + n\alpha - \alpha\gamma, m\delta + n\beta + \beta\delta). \quad (6)$$

6. Матрица $\tilde{A} = (\tilde{a}_{ij})$ называется нечеткой, если каждый ее элемент представляется нечетким числом.

Нечеткая матрица называется положительной ($\tilde{A} > \tilde{0}$), если каждый ее элемент положителен.

Нечеткая матрица может быть представлена в форме $\tilde{A} = (\tilde{a}_{ij}) = ((a_{ij}, \alpha_{ij}, \beta_{ij}))$, или $\tilde{A} = (A, M, N)$, где $A = (a_{ij}), M(\alpha_{ij}), N(\beta_{ij})$ – три матрицы с четкими элементами.

7. Квадратная нечеткая матрица $\tilde{A} = (\tilde{a}_{ij})$ называется верхней треугольной, если $\tilde{a}_{ij} = \tilde{0} = (0,0,0)\ \forall i > j$, и нижней треугольной, если $\tilde{a}_{ij} = \tilde{0} = (0,0,0)\ \forall i < j$.

8. Система вида

$$\tilde{A} \otimes \tilde{x} = \tilde{b} \tag{7}$$

с нечеткой квадратной матрицей $\tilde{A} = (\tilde{a}_{ij})$, $i = 1,\dots,n; j = 1,\dots,n$ и нечеткой матрицей $\tilde{b} = (\tilde{b}_j)$ размеров $n \times 1$ называется полностью нечеткой линейной системой. В расширенной форме ее можно переписать

$$(\tilde{a}_{11} \otimes \tilde{x}_1) \oplus \dots \oplus (\tilde{a}_{1n} \otimes \tilde{x}_n) = \tilde{b}_1,$$

$$(\tilde{a}_{21} \otimes \tilde{x}_1) \oplus \dots \oplus (\tilde{a}_{2n} \otimes \tilde{x}_n) = \tilde{b}_2,$$

$$\vdots$$

$$(\tilde{a}_{n1} \otimes \tilde{x}_1) \oplus \dots \oplus (\tilde{a}_{nn} \otimes \tilde{x}_n) = \tilde{b}_n.$$

Методы решения полностью нечетких линейных систем

В [4] предложен метод нахождения положительного решения $\tilde{x} = (x, y, z) > \tilde{0}$ полностью нечеткой линейной системы $\tilde{A} \times \tilde{x} = \tilde{b}$ с $\tilde{A} = (A, M, N) > \tilde{0}$, матрица A невырожденная, $\tilde{b} = (b, g, h) > \tilde{0}$ при выполнении предположений о малых значениях α, β по сравнению с m и малых γ, δ по сравнению с n:

$$\begin{aligned} x &= A^{-1}b, \\ y &= A^{-1}(g - Mx), \\ z &= A^{-1}(h - Nx). \end{aligned} \tag{8}$$

Для получения решения $\tilde{x} = (x, y, z) > \tilde{0}$ требуется последовательно применить формулы в (8).

В [7] сформулированы условия, при которых полностью нечеткая система имеет положительное решение:
матрица A невырожденная; $A^{-1}(E + MA^{-1})b \ge A^{-1}h;\ A^{-1}h \ge A^{-1}(MA^{-1})b;\ A^{-1}g \ge A^{-1}NA^{-1}b.$

Эти условия заменили более жесткие, предложенные в [8].

В [4] также предложен метод $LU-$ разложения в задаче

$$(A, M, N) \otimes (x, y, z) = (b, g, h)$$

с матрицей $\tilde{A} = (A, M, N) > \tilde{0}$, у которой $\mathrm{rg}A = n$ и при выполнении предположения о малых значениях α, β по сравнению с m и малых γ, δ по сравнению с n:

1. Найти $LU-$ разложение матрицы A, например, пользуясь алгоритмом из [2]: $A = L_1 U_1$, где L_1 – нижняя треугольная матрица с единичной главной диагональю, U_1 – верхняя треугольная матрица.

2. Найти $U_2 = L_1^{-1}M$, $U_3 = L_1^{-1}N$.
3. Найти решение $\tilde{x} = (x, y, z)$, где

$$\begin{aligned} x &= U_1^{-1}L_1^{-1}b, \\ y &= U_1^{-1}L_1^{-1}(g - L_1U_2x), \\ z &= U_1^{-1}L_1^{-1}(h - L_1U_3x). \end{aligned} \tag{9}$$

Авторами сформировано программное обеспечение в среде Microsoft Visual Studio Express 2012 на языке C#. Его применение продемонстрировано при решении рассмотренного далее примера.

Рассмотрим решение системы $(A, M, N) \otimes (x, y, z) = (b, g, h)$ в случае, когда не делается предположений о малых значениях α, β по сравнению с m и малых γ, δ по сравнению с n. В этом случае применим более точную формулу умножения вида $(m, \alpha, \beta) \otimes (n, \gamma, \delta) \cong (mn, m\gamma + n\alpha - \alpha\gamma, m\delta + n\beta + \beta\delta)$:

$$(Ax, Ay + Mx - My, Az + Nx + Nz) = (b, g, h)\,.$$

Применяя условия равенства нечетких чисел, получаем

$$\begin{aligned} Ax &= b, \\ Ay + Mx - My &= g, \\ Az + Nx + Nz &= h\,. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned} x &= A^{-1}b, \\ y &= (A - M)^{-1}(g - Mx), \\ z &= (A + N)^{-1}(h - Nx). \end{aligned} \tag{10}$$

Для получения решения $\tilde{x} = (x, y, z)$ требуется по заданной системе уравнений составить матрицы A, M, N и b, g, h, а затем последовательно применить формулы (10).

Пример анализа модели выполнения производственного задания при нечеткой информации о коэффициентах прямых затрат, конечном спросе и производственном задании

Рассмотрим задачу анализа модели

$$\tilde{A} \otimes \tilde{x} = \tilde{t} - \tilde{f}\,,$$

которая является нечетким аналогом уравнения $Ax = t - f$, где заданы матрицы $A = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,1 & 0,1 \\ 0,2 & 0,2 & 0,1 \\ 0,3 & 0,1 & 0,4 \end{pmatrix}$, $f = \begin{pmatrix} 40 \\ 60 \\ 30 \end{pmatrix}$, $t = \begin{pmatrix} 120 \\ 150 \\ 200 \end{pmatrix}$. Поскольку правой частью системы $\tilde{A} \otimes \tilde{x} = \tilde{b}$, для которой в предыдущем разделе описаны методы решения, является $\tilde{t} - \tilde{f}$, то в приведенных алгоритмах матрица $\tilde{b}$ заменяется на $\tilde{t} - \tilde{f}$.

1. Предельный разброс значений элементов матрицы $\tilde{A}$ составляет 1 %, а разбросы значений матриц $\tilde{t}, \tilde{f}$ составляют 5 %:

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 0,3; 0,003; 0,003 & 0,1; 0,001; 0,001 & 0,1; 0,001; 0,001 \\ 0,2; 0,002; 0,002 & 0,2; 0,002; 0,002 & 0,1; 0,001; 0,001 \\ 0,3; 0,003; 0,003 & 0,1; 0,001; 0,001 & 0,4; 0,004; 0,004 \end{pmatrix},$$

$$\tilde{t} = \begin{pmatrix} 120;6;6 \\ 150;7,5;7,5 \\ 200;10;10 \end{pmatrix}, \tilde{f} = \begin{pmatrix} 40;2;2 \\ 60;3;3 \\ 30;1,5;1,5 \end{pmatrix}, \text{ поэтому } A = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,1 & 0,1 \\ 0,2 & 0,2 & 0,1 \\ 0,3 & 0,1 & 0,4 \end{pmatrix},$$

$$M = \begin{pmatrix} 0,003 & 0,001 & 0,001 \\ 0,002 & 0,002 & 0,001 \\ 0,003 & 0,001 & 0,004 \end{pmatrix}, N = \begin{pmatrix} 0,003 & 0,001 & 0,001 \\ 0,002 & 0,002 & 0,001 \\ 0,003 & 0,001 & 0,004 \end{pmatrix};$$

$$t = \begin{pmatrix} 120 \\ 150 \\ 200 \end{pmatrix}, t_g = \begin{pmatrix} 6 \\ 7,5 \\ 10 \end{pmatrix}, t_h = \begin{pmatrix} 6 \\ 7,5 \\ 10 \end{pmatrix}; f = \begin{pmatrix} 40 \\ 60 \\ 30 \end{pmatrix}, f_g = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1,5 \end{pmatrix}, f_h = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1,5 \end{pmatrix}.$$

Так как $\tilde{b} = \tilde{t} - \tilde{f} = (b, g, h)$, то по формулам (3) и (5) при $\lambda = -1$ получаем

$$b = t - f = \begin{pmatrix} 80 \\ 90 \\ 170 \end{pmatrix}, \ g = t_g + f_g = \begin{pmatrix} 8 \\ 10.5 \\ 11.5 \end{pmatrix}, \ h = t_h + f_h = \begin{pmatrix} 8 \\ 10.5 \\ 11.5 \end{pmatrix}.$$

По формулам (8) находим

$$x = \begin{pmatrix} 100 \\ 200 \\ 300 \end{pmatrix} y = \begin{pmatrix} 9,83333 \\ 33,83333 \\ 8,66667 \end{pmatrix} z = \begin{pmatrix} 9,83333 \\ 33,83333 \\ 8,66667 \end{pmatrix}, \text{ или } \tilde{x} = \begin{pmatrix} 100;9,83333;9,83333 \\ 200;33,83333;33,83333 \\ 300;8,66667;8,66667 \end{pmatrix}.$$

Применение формул (10) дает

$$x = \begin{pmatrix} 100 \\ 200 \\ 300 \end{pmatrix}, \ y = \begin{pmatrix} 9,93266 \\ 34,17508 \\ 8,75421 \end{pmatrix}, \ z = \begin{pmatrix} 9,73597 \\ 33,49835 \\ 8,58086 \end{pmatrix}.$$

Результаты получены в среде Mathcad 14 (рис. 2).

$$A := \begin{pmatrix} 0.3 & 0.1 & 0.1 \\ 0.2 & 0.2 & 0.1 \\ 0.3 & 0.1 & 0.4 \end{pmatrix} \quad M := \begin{pmatrix} 0.003 & 0.001 & 0.001 \\ 0.002 & 0.002 & 0.001 \\ 0.003 & 0.001 & 0.004 \end{pmatrix} \quad N := \begin{pmatrix} 0.003 & 0.001 & 0.001 \\ 0.002 & 0.002 & 0.001 \\ 0.003 & 0.001 & 0.004 \end{pmatrix} \quad E := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$tb := \begin{pmatrix} 120 \\ 150 \\ 200 \end{pmatrix} \quad tg := \begin{pmatrix} 6 \\ 7.5 \\ 10 \end{pmatrix} \quad th := \begin{pmatrix} 6 \\ 7.5 \\ 10 \end{pmatrix} \quad fb := \begin{pmatrix} 40 \\ 60 \\ 30 \end{pmatrix} \quad fg := \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1.5 \end{pmatrix} \quad fh := \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1.5 \end{pmatrix}$$

$$b := tb - fb \qquad g := tg + fg \qquad h := th + fh$$

Проверка условий существования положительного решения

$$b = \begin{pmatrix} 80 \\ 90 \\ 170 \end{pmatrix} \qquad g = \begin{pmatrix} 8 \\ 10.5 \\ 11.5 \end{pmatrix} \qquad h = \begin{pmatrix} 8 \\ 10.5 \\ 11.5 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} \cdot \left[\left(E + M \cdot A^{-1} \right) \cdot b - h \right] = \begin{pmatrix} 90.16667 \\ 166.16667 \\ 291.33333 \end{pmatrix} \qquad A^{-1} \left(h - M \cdot A^{-1} \cdot b \right) = \begin{pmatrix} 9.83333 \\ 33.83333 \\ 8.66667 \end{pmatrix}$$

$$y := (A)^{-1}(g - M\cdot x) \qquad A^{-1}\cdot\left(g - N\cdot A^{-1}b\right) = \begin{pmatrix} 9.83333 \\ 33.83333 \\ 8.66667 \end{pmatrix}$$

$$x := A^{-1}b \qquad z := (A + N)^{-1}(h - N\cdot x)$$

$$x = \begin{pmatrix} 100 \\ 200 \\ 300 \end{pmatrix} \qquad y = \begin{pmatrix} 9.83333 \\ 33.83333 \\ 8.66667 \end{pmatrix} \qquad z = \begin{pmatrix} 9.83333 \\ 33.83333 \\ 8.66667 \end{pmatrix}$$

Применение более точных формул (10)

$$y := (A - M)^{-1}(g - M\cdot x) \qquad z := (A)^{-1}(h - N\cdot x)$$

$$x = \begin{pmatrix} 100 \\ 200 \\ 300 \end{pmatrix} \qquad y = \begin{pmatrix} 9.93266 \\ 34.17508 \\ 8.75421 \end{pmatrix} \qquad z = \begin{pmatrix} 9.73597 \\ 33.49835 \\ 8.58086 \end{pmatrix}$$

Рис. 2. Решение примера 1 в среде MathCad

Применение формул (9) и созданного программного обеспечения продемонстрировано на рис. 3.

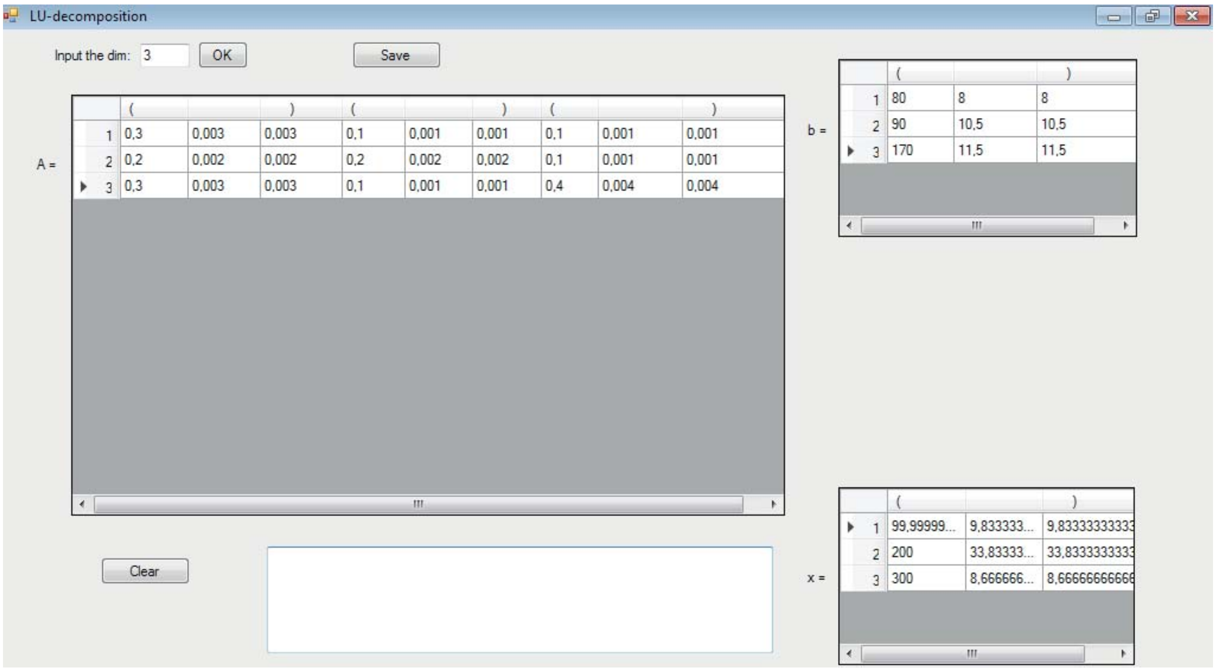

Рис. 3. Результаты расчетов в примере 1.

2. Предельный разброс значений элементов матрицы $\tilde{A}$ составляет 1 %, а разбросы значений матриц $\tilde{t}, \tilde{f}$ составляют 10 %, т.е. по сравнению со случаем 1:

$$t_g = \begin{pmatrix} 12 \\ 15 \\ 20 \end{pmatrix},\ t_h = \begin{pmatrix} 12 \\ 15 \\ 20 \end{pmatrix};\ f_g = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix},\ f_h = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}, \text{ поэтому } g = t_g + f_g = \begin{pmatrix} 16 \\ 21 \\ 23 \end{pmatrix},\ h = t_h + f_h = \begin{pmatrix} 16 \\ 21 \\ 23 \end{pmatrix}.$$

По формулам (8) находим $x=\begin{pmatrix}100\\200\\300\end{pmatrix}$, $y=\begin{pmatrix}20,66667\\69,66667\\20,33333\end{pmatrix}$, $z=\begin{pmatrix}20,66667\\69,66667\\20,33333\end{pmatrix}$, а применение формул (10) дает $x=\begin{pmatrix}100\\200\\300\end{pmatrix}$, $y=\begin{pmatrix}20,87542\\70,37037\\20,53872\end{pmatrix}$, $z=\begin{pmatrix}20,46205\\68,9769\\20,13201\end{pmatrix}$.

Результат применения LU-разложения показан на рис. 4.

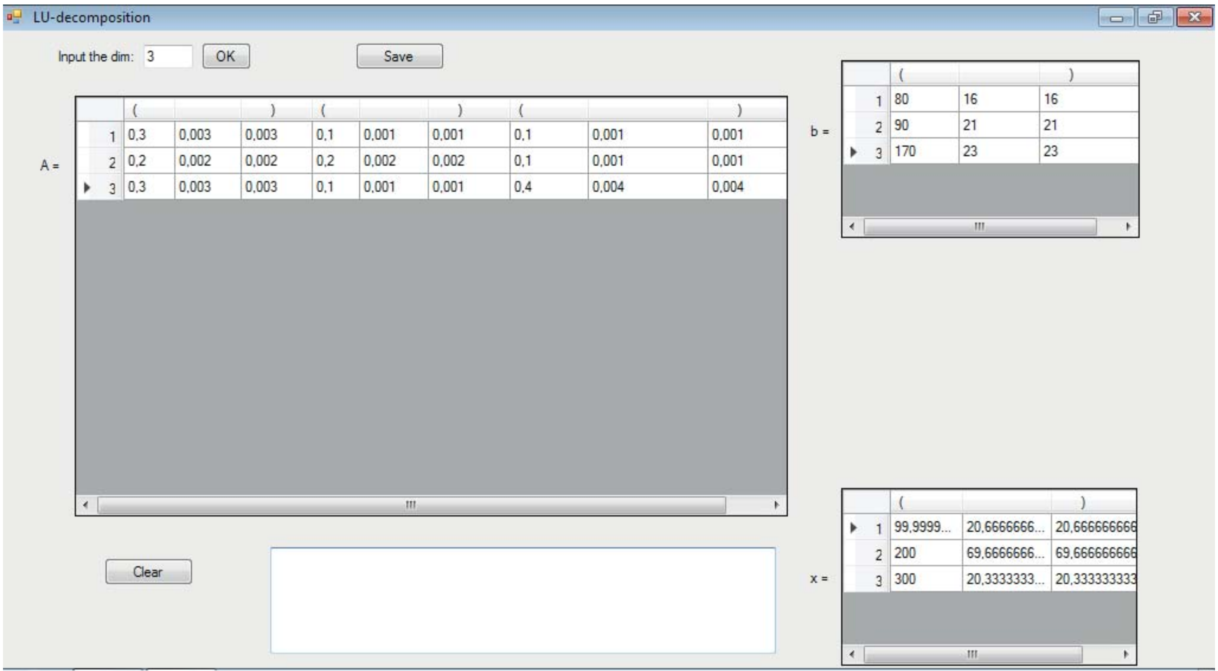

Рис. 4. Результаты расчетов в примере 2.

3. Предельный разброс значений элементов матрицы $\tilde{A}$ составляет 2 %, а разбросы значений матриц $\tilde{t},\tilde{f}$ составляют 10 %, т.е. по сравнению со случаем 2:

$$A=\begin{pmatrix}0,3 & 0,1 & 0,1\\ 0,2 & 0,2 & 0,1\\ 0,3 & 0,1 & 0,4\end{pmatrix}, M=\begin{pmatrix}0,006 & 0,002 & 0,002\\ 0,004 & 0,004 & 0,002\\ 0,006 & 0,002 & 0,008\end{pmatrix}, N=\begin{pmatrix}0,006 & 0,002 & 0,002\\ 0,004 & 0,004 & 0,002\\ 0,006 & 0,002 & 0,008\end{pmatrix}.$$

По формулам (8) находим $x=\begin{pmatrix}100\\200\\300\end{pmatrix}$, $y=\begin{pmatrix}19,66667\\67,66667\\17,33333\end{pmatrix}$, $z=\begin{pmatrix}19,66667\\67,66667\\17,33333\end{pmatrix}$, а применение формул (10) дает $x=\begin{pmatrix}100\\200\\300\end{pmatrix}$, $y=\begin{pmatrix}20,06803\\69,04762\\17,68707\end{pmatrix}$, $z=\begin{pmatrix}19,28105\\66,33987\\16,99346\end{pmatrix}$.

Результат применения LU-разложения показан на рис. 5.

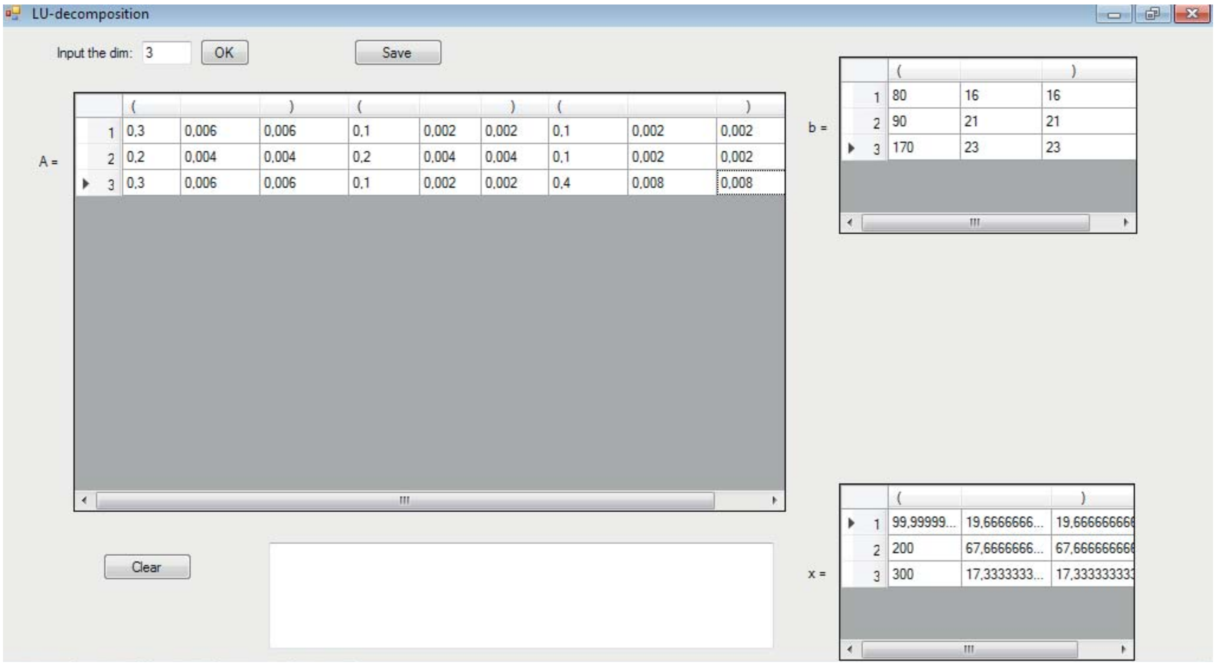

Рис. 5. Результаты расчетов в примере 3.

4. Предельный разброс значений элементов матрицы $\tilde{A}$ составляет 7 %, а разбросы значений матриц $\tilde{t}, \tilde{f}$ составляют 10 %, т.е. по сравнению со случаем 2:

$$A = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,1 & 0,1 \\ 0,2 & 0,2 & 0,1 \\ 0,3 & 0,1 & 0,4 \end{pmatrix}, M = \begin{pmatrix} 0,021 & 0,007 & 0,007 \\ 0,014 & 0,014 & 0,007 \\ 0,021 & 0,007 & 0,028 \end{pmatrix}, N = \begin{pmatrix} 0,021 & 0,007 & 0,007 \\ 0,014 & 0,014 & 0,007 \\ 0,021 & 0,007 & 0,028 \end{pmatrix}.$$

По формулам (8) находим $x = \begin{pmatrix} 100 \\ 200 \\ 300 \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} 14,66667 \\ 57,66667 \\ 2,33333 \end{pmatrix}, z = \begin{pmatrix} 14,66667 \\ 57,66667 \\ 2,33333 \end{pmatrix}$, а применение формул (10) дает $x = \begin{pmatrix} 100 \\ 200 \\ 300 \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} 15,77061 \\ 62,00717 \\ 2,50896 \end{pmatrix}, z = \begin{pmatrix} 13,70717 \\ 53,89408 \\ 2,18069 \end{pmatrix}$.

Результат применения LU-разложения показан на рис. 6.

Заметим, что при увеличении разброса элементов матрицы $\tilde{A}$ до 8 % система не имеет положительных нечетких решений.

5. Предельный разброс значений элементов матрицы $\tilde{A}$ составляет 10 %, а разбросы значений матриц $\tilde{t}, \tilde{f}$ заданы соответствующими матрицами:

$$A = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,1 & 0,1 \\ 0,2 & 0,2 & 0,1 \\ 0,3 & 0,1 & 0,4 \end{pmatrix}, M = \begin{pmatrix} 0,03 & 0,01 & 0,01 \\ 0,02 & 0,02 & 0,01 \\ 0,03 & 0,01 & 0,04 \end{pmatrix}, N = \begin{pmatrix} 0,03 & 0,01 & 0,01 \\ 0,02 & 0,02 & 0,01 \\ 0,03 & 0,01 & 0,04 \end{pmatrix};$$

$$t = \begin{pmatrix} 120 \\ 150 \\ 200 \end{pmatrix}, t_g = \begin{pmatrix} 6 \\ 7,5 \\ 10 \end{pmatrix}, t_h = \begin{pmatrix} 6 \\ 7,5 \\ 10 \end{pmatrix}; f = \begin{pmatrix} 104 \\ 132 \\ 166 \end{pmatrix}, f_g = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1,5 \end{pmatrix}, f_h = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1,5 \end{pmatrix}.$$

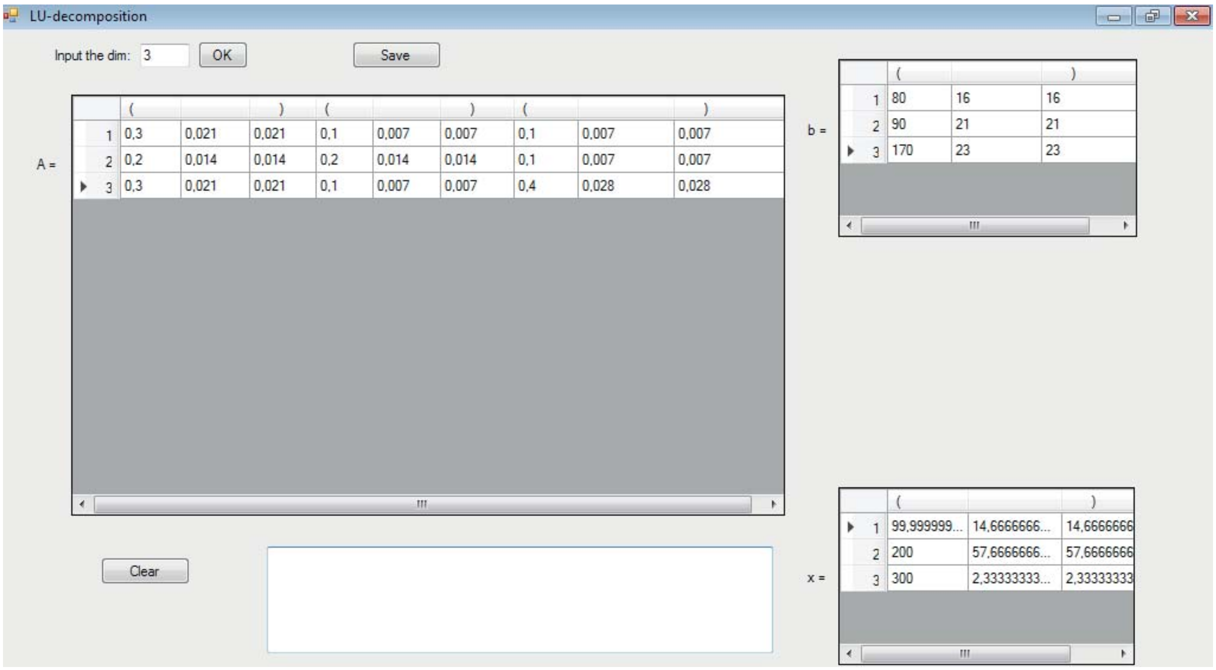

Рис. 6. Результаты расчетов в примере 4.

Так как $\tilde{b} = \tilde{t} - \tilde{f} = (b, g, h)$, то по формулам (3) и (5) при $\lambda = -1$ получаем

$$b = t - f = \begin{pmatrix} 16 \\ 18 \\ 34 \end{pmatrix},\ g = t_g + f_g = \begin{pmatrix} 8 \\ 10.5 \\ 11.5 \end{pmatrix},\ h = t_h + f_h = \begin{pmatrix} 8 \\ 10.5 \\ 11.5 \end{pmatrix}.$$

По формулам (8) находим $x = \begin{pmatrix} 20 \\ 40 \\ 60 \end{pmatrix},\ y = \begin{pmatrix} 8,83333 \\ 31,83333 \\ 5,66667 \end{pmatrix},\ z = \begin{pmatrix} 8,83333 \\ 31,83333 \\ 5,66667 \end{pmatrix}.$

Результат применения LU-разложения показан на рис. 7.

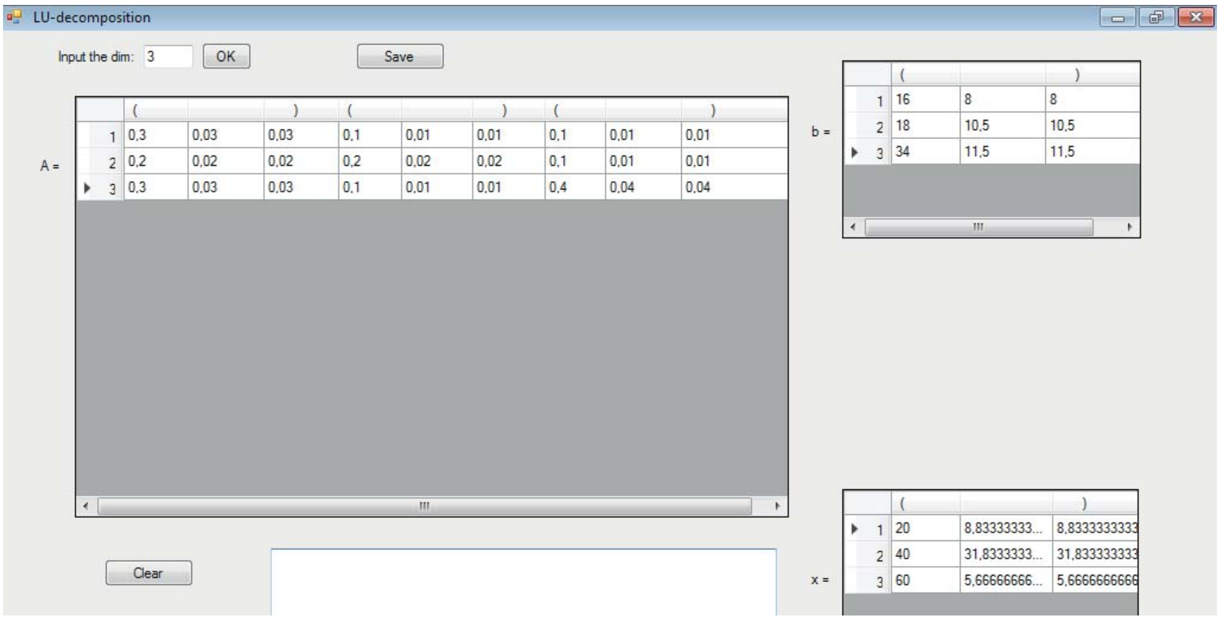

Рис. 7. Результаты расчетов в примере 5.

Применение формул (10) дает

$$x = \begin{pmatrix} 20 \\ 40 \\ 60 \end{pmatrix}, \; y = \begin{pmatrix} 9,81481 \\ 35,37037 \\ 6,29630 \end{pmatrix}, \; z = \begin{pmatrix} 8,0303 \\ 28,93939 \\ 5,15152 \end{pmatrix}.$$

Результаты расчетов демонстрируют, что неопределенности задания элементов матриц коэффициентов прямых затрат, конечного спроса и производственного задания существенно влияют на результат. При малых разбросах значений параметров могут применяться формулы (8), при более значимых разбросах – выведенные в работе формулы (10). Существуют наборы начальных данных, при которых не существует положительное нечеткое решение полностью нечеткой линейной системы уравнений.

Заключение

Сформирована математическая модель выполнения производственного задания при нечеткой информации о коэффициентах прямых затрат, конечном спросе и производственном задании с помощью аппарата треугольных нечетких чисел и полностью нечетких линейных систем уравнений. Описаны три приближенных метода решения полностью нечеткой линейной системы. Приведены примеры анализа влияния неопределенности задания коэффициентов матрицы прямых затрат, матрицы-столбца конечного спроса, матрицы-столбца производственного задания на изменение объемов выпуска продукции в различных секторах экономики при помощи сформированной полностью нечеткой линейной модели.

Литература

1. *Бортаковский А.С., Пантелеев А.В.* Линейная алгебра и аналитическая геометрия. Практикум. – М.: ИНФРА–М, 2015.
2. *Киреев В.И., Пантелеев А.В.* Численные методы в примерах и задачах. – СПб.: Лань, 2015.
3. *Пантелеев А.В., Савельева В.С.* Алгоритмическое и программное обеспечение исследования математической модели межотраслевого баланса при нечеткой информации о конечном спросе // Моделирование и анализ данных. 2019. № 3. С. 11–23.
4. *Dubois D., Prade H.* Fuzzy sets and systems: theory and applications, Academic Press, New York, 1980.
5. *Matinfar M., Nasseri S.H., Sohrabi M.* Solving fuzzy linear system of equations by using Housholder decomposition method // Applied Mathematical Sciences. 2008. V.51. P. 2569–2575.
6. *Nasseri S.H., Sohrabi M., Ardil E.* Solving fully fuzzy linear systems by use of a certain decomposition of the coefficient matrix // World Academy of Science, Engineering and Technology. 2008. V.19. P. 784–786.
7. *Malkawi G., Ahmad N., Ibrahim H.* Solving Fully Fuzzy Linear System with the Necessary and Sufficient Condition to have a Positive Solution //Appl. Math. Inf. Sci. 2014. V. 8, No. 3, P. 1003–1019.
8. *Dehghan M., Hashemi B., Ghatee M.* Computational Methods for Solving Fully Fuzzy Linear Systems// Alied Mathematics and Computation. 2006. V. 179. P. 328–343.

Analysis of the production task model with fuzzy information about direct cost factors and the final product demand

Panteleev A.V.*
MAI (National Research University), Moscow, Russia
avpanteleev@inbox.ru

Saveleva V.S.**
MAI (National Research University), Moscow, Russia
verassavel@mail.ru

The article discusses the study of a mathematical model of execution of the production task in the presence of fuzzy information about the matrixes of direct costs and final demand. By solving a problem with fuzzy information we mean the solution of a linear system of equations with a fuzzy matrix and a fuzzy right-hand side described by fuzzy triangular numbers in a form of deviations from the mean. In this task of search of inter-sectoral balance the LU-decomposition method for the matrix of direct cost which is further used for solving the system of linear equations is applied. A software implementation of a numerical method for finding a strong solution of a fuzzy system of linear equations consisting of two successive stages is described. At the first stage, the necessary and sufficient conditions for the existence of a strong solution are verified. At the second stage, the solution of the system is found, which is written in the form of a fuzzy matrix. The influence of the fuzzy numbers parameters on the final result was studied.

Keywords: fuzzy logic, triangular numbers, fully fuzzy linear system of equations, strong solution, parametric form of a triangular number.

References

1. Bortakovskii A.S.,Panteleev A.V. Lineynaya algebra i analiticheskaya geometriya. Practicum [Linear algebra and analytic geometry. Practicum]. – Moscow: Publ. INFRA–M, 2015.
2. Kireev V.I., Panteleev A.V. Chislennye metody v primerah i zadachah [Numerical methods in examples and problems].– St. Petersburg: Publ. Lan’, 2015.

For citation:
Panteleev A.V., Saveleva V.S. Analysis of the production task model with fuzzy information about direct cost factors and the final product demand. *Modelirovanie i analiz dannykh = Modelling and Data Analysis*, 2019. Vol. 09, no. 4, pp. 32–45. doi: 10.17759/mda.2019090402 (In Russ., abstr. in Engl.)

***Panteleev Andrei Vladimirovich,** Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Head of the Department of Mathematical Cybernetics, Faculty of Information Technologies and Applied Mathematics, Moscow Aviation Institute (National Research University), Moscow, Russia. E-mail: avpanteleev@inbox.ru

****Saveleva Vera Sergeevna,** undergraduate student of the Faculty of Information Technology and Applied Mathematics, Moscow Aviation Institute (National Research University), Moscow, Russia. E-mail: verassavel@mail.ru

3. Panteleev A.V., Saveleva V.S. Algorithmic support and software for analysis of input-output mathematical model with fuzzy information about the final demand. Modelirovaniye i analiz dannykh=Modelling and data analysis (Russia). 2019, no.3, P.11–23.
4. Dubois D., Prade H. Fuzzy sets and systems: theory and applications, Academic Press, New York, 1980.
5. Matinfar M., Nasseri S.H., Sohrabi M. Solving fuzzy linear system of equations by using Housholder decomposition method // Applied Mathematical Sciences. 2008. V.51. P. 2569–2575.
6. Nasseri S.H., Sohrabi M., Ardil E. Solving fully fuzzy linear systems by use of a certain decomposition of the coefficient matrix // World Academy of Science, Engineering and Technology. 2008. V.19. P. 784–786.
7. Malkawi G., Ahmad N., Ibrahim H. Solving Fully Fuzzy Linear System with the Necessary and Sufficient Condition to have a Positive Solution //Appl. Math. Inf. Sci. 2014. V. 8, No. 3, P. 1003–1019.
8. Dehghan M., Hashemi B., Ghatee M. Computational Methods for Solving Fully Fuzzy Linear Systems// Alied Mathematics and Computation. 2006. V. 179. P. 328–343.