Моделирование и анализ данных
2020. Том 10. № 1. С. 110–128
DOI: 10.17759/mda.2020100107
ISSN: 2219-3758 (печатный)
ISSN: 2311-9454 (online)

Modelling and Data Analysis
2020. Vol 10, no. 1, pp. 110–128
DOI: 10.17759/mda.2020100107
ISSN: 2219-3758 (print)
ISSN: 2311-9454 (online)

◇◇◇◇◇◇◇◇ МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ ◇◇◇◇◇◇◇◇

УДК 519.85

Алгоритмизация и программная реализация метода исключения переменных в полиномиальных задачах оптимизации

Нефедов В.Н.*
МАИ, Москва, Россия,
e-mail: nefedovvn54@yandex.ru

Жарких А.В.**
МАИ, Москва, Россия,
e-mail: alexvzhar@gmail.com

Рассматривается метод последовательного исключения переменных в полиномиальных задачах оптимизации. Приводится ряд задач, решаемых с помощью этого метода. Описываются практически реализуемые шаги алгоритма, который сводит исходную полиномиальную задачу оптимизации к многоэтапному ветвящемуся процессу получения конечного числа альтернативных задач, на выходе которого получается конечная совокупность многочленов от одной переменной. В результате решение ряда полиномиальных задач сводится к перебору конечного числа векторов, компоненты которых являются действительными корнями многочленов.

Ключевые слова: полиномы, исключение переменных, задачи оптимизации, системы алгебраических уравнений.

Для цитаты:
Нефедов В.Н., Жарких А.В. Алгоритмизация и программная реализация метода исключения переменных в полиномиальных задачах оптимизации // Моделирование и анализ данных. 2020. Том 10. № 1. С. 110–128. DOI: 10.17759/mda.2020100107

****Нефедов Виктор Николаевич,*** кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математической кибернетики, Московский авиационный институт (МАИ), Москва, Россия, e-mail: nefedovvn54@yandex.ru

*****Жарких Алексей Владимирович,*** студент магистратуры факультета информационных технологий и прикладной математики, Московский авиационный институт (МАИ), Москва, Россия, e-mail: alexvzhar@gmail.com

1. ВВЕДЕНИЕ

В математическом программировании традиционно выделяются некоторые разделы (линейное, квадратичное, выпуклое программирование и т.д.), в которых используются специальные методы, развита специальная теория нахождения либо точного, либо приближенного решения. В настоящей работе рассматривается задача полиномиального программирования, т.е. задача вида

$$p_0(x) \to \min \text{ (или max)}, \tag{1}$$

$$p_i(x) \le 0,\ i = 1, 2, ..., l_1,\ p_j(x) = 0,\ j = l_1 + 1, ..., l\ , \tag{2}$$

где $x = (x_1, ..., x_m) \in \mathrm{R}^m$, p_i – полиномы, R – множество действительных чисел.

Будем рассматривать задачу (1), (2) в канонической форме:

$$x_1 \to extr \text{ (т.е. либо min, либо max)}, \tag{3}$$

$$p_i(x) = 0,\ i = 1, 2, ..., l\ , \tag{4}$$

к которой и будет применяться метод исключения переменных [1,2]. Задача (1), (2) может быть легко сведена к задаче вида (3), (4) введением дополнительных переменных и ограничений. Метод исключения переменных описывается в виде алгоритма, поэтому будем его также называть алгоритмом исключения переменных (АИП). Основная идея АИП заключается в следующем. За конечное число шагов строим конечное число многочленов от одной переменной x_1 таких, что любое значение локального экстремума задачи (3), (4) является действительным корнем хотя бы одного из этих многочленов.

Замечание 1. Поскольку шаги алгоритма будут основаны на элементарных операциях над полиномами: сложении, умножении, дифференцировании, то коэффициенты многочленов, получаемых на выходе алгоритма, являются элементами того же кольца, что и коэффициенты в полиномах задачи (3), (4). Например, это может быть кольцо действительных, рациональных, целых чисел или кольцо многочленов (например, $\mathrm{R}[t]$, где $t \in \mathrm{R}$ – параметр).

Полиномиальные задачи оптимизации нередко возникают при решении практических задач (см. пример 1).

Пример 1. [3]. Пусть требуется спроектировать контейнер в форме прямоугольного параллелепипеда объемом $V = 1$ м^3, причем желательно израсходовать на его изготовление как можно меньше материала. При постоянной толщине стенок последнее условие означает, что площадь полной поверхности контейнера должна быть минимальной. Если обозначить через x_1, x_2, x_3 длины ребер контейнера, то задача сведется к минимизации целевой функции $p_0(x_1, x_2, x_3) = 2(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)$, являющейся полиномом, при одном полиномиальном ограничении $p_1(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2x_3 - 1 = 0$, т.е. пришли к задаче вида (1), (2). Понятно, что выбор той или иной формы контейнера приведет к разнообразию подобных задач (например, это может быть цилиндр или сфера, обрезанная сверху и снизу и т.д.).

Работа алгоритма (АИП) основана на последовательном исключении переменных. Сначала исключается x_m , затем x_{m-1} и т.д. и на последнем этапе исключается x_2 .

На каждом шаге алгоритма имеем конечную систему альтернативных задач вида (3), (4) такую, что множество значений локального экстремума в исходной задаче является подмножеством множества значений локального экстремума в альтернативных задачах. Тогда после исключения последней переменной x_2 получаем конечное число многочленов от переменной x_1, присутствующих в ограничениях альтернативных задач, зависящих только от x_1. При этом любое значение локального экстремума задачи (3), (4) является действительным корнем хотя бы одного из этих многочленов.

2. ЗАДАЧИ, РЕШАЕМЫЕ С ПОМОЩЬЮ МЕТОДА ИСКЛЮЧЕНИЯ ПЕРЕМЕННЫХ

Перечислим некоторые задачи, которые можно решать методом исключения переменных в задачах (3), (4). При этом потребуется процедура нахождения всех действительных корней многочленов. Последняя задача является хорошо изученной. В литературе подробно описаны методы ее решения (см., например, [4]), эффективно применяемые на практике.

Задача 1. Нахождение множества изолированных решений системы полиномиальных уравнений (4). Заметим, что любое изолированное решение системы (4) является точкой локального экстремума каждой переменной $x_1, ..., x_m$ на множестве решений системы (4). Простейшим способом решения задачи 1, использующим АИП, является следующий. Для каждой задачи $x_i \to extr$ на множестве решений системы (4), используя АИП, находим конечную совокупность многочленов от одной переменной x_i, а затем множество X_i, включающее в себя все действительные корни этих многочленов, где $i = 1, 2, ..., m$. Затем подставляем каждый из наборов $(x_1, ..., x_m) \in X_1 \times ... \times X_m$ в систему (4) и отбираем в множество M те из них, которые удовлетворяют системе (4). В результате получим конечное множество M, включающее в себя все изолированные решения системы (4) и быть может некоторые другие. Если же множество решений системы (4) является конечным (а следовательно, все его решения изолированы), то M является совокупностью всех его решений.

Задача 2. Нахождение точки глобального экстремума в задаче *min* (или *max)* на множестве решений системы (4). Для решения этой задачи рассматриваем вспомогательную задачу (вида (3), (4))

$$u \to extr;\ u - p_0(x) = 0,\ p_i(x) = 0,\ i = 1, 2, ..., l. \tag{5}$$

Используя АИП, находим U – конечное множество действительных корней многочленов, полученных в результате применения АИП к задаче (5), в которое входят все значения локального экстремума задачи (5). Затем перебираем числа из U в порядке возрастания, начиная с минимального. Для каждого очередного $u^o \in U$ рассматриваем последовательность альтернативных задач, которая привела к многочлену от переменной u, действительным корнем которого является $u^{\hat{\imath}}$. Пусть этому многочлену предшествовала задача (результат последовательного исключения переменных $x_m, ..., x_2$):

$$\begin{aligned} & u \to extr \\ & g_i^{(1)}(u, x_1) = 0,\ i = 1, 2, ..., l_1, \end{aligned} \tag{6}$$

где $g_i^{(1)}(u, x_1)$ – полиномы. Пусть далее задаче (6) предшествовала задача (результат последовательного исключения переменных $x_m, ..., x_3$):

$$\begin{aligned} & u \to extr \\ & g_i^{(2)}(u, x_1, x_2) = 0,\ i = 1, 2, ..., l_2 \end{aligned} \tag{7}$$

(где $g_i^{(2)}(u, x_1, x_2)$ – полиномы) и т.д., пока не дойдем до исходной задачи (5). После подстановки в систему уравнений (6) $u = u^o$ получим систему уравнений относительно одной неизвестной x_1, решая которую, находим множество решений $X_1(u^o)$. Если $X_1(u^o) = \varnothing$, то переходим к следующему значению $u^o \in U$. В противном случае делаем подстановку $u = u^o$, $x_1 = x_1^o \in X_1(u^o)$ в систему уравнений задачи (7) и получаем систему уравнений относительно одной неизвестной x_2, решая которую, находим конечное множество $X_2(u^o, x_1^o)$ ее решений. Если $X_2(u^o, x_1^o) = \varnothing$, то переходим к следующему $x_1^o \in X_1(u^o)$. Если для всех $x_1^o \in X_1(u^o)$ $X_2(u^o, x_1^o) = \varnothing$, то переходим к следующему $u^o \in U$. Пусть для некоторых очередных $u^o \in U$, $x_1^o \in X_1(u^o)$ $X_2(u^o, x_1^o) \neq \varnothing$. Тогда делаем подстановку $u = u_0$, $x_1 = x_1^o \in X_1(u^o)$, $x_2 = x_2^o \in X_2(u^o, x_1^o)$ в систему уравнений для альтернативной задачи, предшествующей задаче (7) и т.д. Действуем так до тех пор, пока не найдем для текущего минимального $u^o \in U$ числа $x_1^o \in X_1(u^o)$, $x_2^o \in X_2(u^o, x_1^o), ..., x_m^o \in X_m(u^o, x_1^o, ..., x_{m-1}^o)$, удовлетворяющие системе уравнений в (5). Найденное решение $(x_1^o, ..., x_m^o)$ и будет точкой глобального минимума в задаче (5) со значением глобального минимума u^o. Если же указанная процедура не даст результата ни при одном $u^o \in U$, то в задаче (5) отсутствуют точки локального, а следовательно, и глобального минимума.

Задача 3. Получение ответа на вопрос, является ли система полиномиальных уравнений (4) совместной и в случае ее совместности – нахождение одного из ее решений. Эта задача сводится к предыдущей при $p_0(x) = x_1^2 + ... + x_m^2$.

Кроме того, АИП применялся в математической экологии для исследования матриц на *D*-Устойчивость (см. [5,6]).

Следует отметить, что метод исключения переменных был описан в работе [7] также для случая, когда в задаче (3), (4) $p_i(x),\ i = 1, 2, ..., l$, – произвольные аналитические функции и был применен в этой работе для получения необходимых и достаточных условий локального минимума в аналитических задачах оптимизации (а также необходимых и достаточных условий разрешимости этой задачи).

Замечание 2. Для решения некоторых полиномиальных задач может быть применен алгоритм Бухбергера, позволяющий за конечное число практически реализуемых шагов находить минимальный редуцированный базис Гребнера идеала, порожденного совокупностью полиномов $p_1(x), ..., p_l(x)$ (см. [8,9]). В частности, такой подход может быть эффективно использован для нахождения множества изолированных решений системы полиномиальных уравнений (4). Однако, наиболее значимые результаты получены (при таком подходе) для случая, когда основным полем является алгебраически замкнутое поле комплексных чисел, а в настоящей работе основным полем является поле действительных чисел (не являющееся алгебраически замкнутым). Следующий пример показывает существенное отличие в использовании этих двух полей.

Пример 2. Рассмотрим уравнение

$$p(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - 1)^2 + (x_2 - 2)^4 + (x_3 - 3)^6 = 0.$$

Это уравнение имеет в поле действительных чисел единственное решение $(x_1^o, x_2^o, x_3^o) = (1, 2, 3)$, которое легко может быть найдено с помощью АИП. Если же рассматривать это уравнение в поле комплексных чисел, то оно будет иметь бесконечное множество решений и решение $(1, 2, 3)$ не будет являться изолированным. Кроме того, минимальным редуцированным базисом Гребнера идеала, порожденного полиномом $p(x_1, x_2, x_3)$, будет сам этот полином, т.е. рассмотрение этого базиса даже в таком простейшем примере не даст какого-либо упрощения решаемой задачи.

3. АЛГОРИТМ ИСКЛЮЧЕНИЯ ПЕРЕМЕННЫХ В ПОЛИНОМИАЛЬНЫХ ЗАДАЧАХ ОПТИМИЗАЦИИ

Метод исключения переменных базируется на следующих простых утверждениях.

Лемма 1. Пусть $l = 1$, x^o – точка локального экстремума в задаче (3), (4). Тогда $\frac{\partial p_1}{\partial x_i}\Big|_{x^o} = 0,\ i = 2, ..., m.$

Лемма 2. Пусть x^o – точка локального экстремума в задаче (3), (4), $q_1(x), ..., q_l(x)$ – полиномы, $q_1(x^o) \neq 0$, $\tilde{p}_1(x) = q_1(x) p_1(x) + ... + q_l(x) p_l(x)$. Тогда

x^o – точка локального экстремума в задаче (3), (4) при $p_1(x) = \tilde{p}_1(x)$.

Лемма 3. Пусть $x^o = (x_1^o, ..., x_m^o)$ – точка локального экстремума в задаче (3), (4) и $p_i(x) = p_i(x_1, ..., x_{m-1})$, $i = 2, ..., l$ (т.е. все полиномы, кроме первого, не зависят от x_m). Тогда, если $\frac{\partial p_1}{\partial x_m}\Big|_{x^o} \neq 0$, то $(x_1^o, ..., x_{m-1}^o)$ – точка локального экстремума в задаче:

$$x_1 \to extr;\ \ p_i(x_1, ..., x_{m-1}) = 0,\ i = 2, ..., l.$$

Лемма 4. Пусть $x^o \in X_0 \subseteq X \subseteq \mathrm{R}^n$, функция $f(x)$ определена на множестве X, и x^o – точка ее локального экстремума на X. Тогда x^o – точка локального экстремума $f(x)$ на X_0.

Введем теперь операцию R_1 элементарного понижения степени переменной x_m в полиноме

$$p(x) = p_{n_1}(\overline{x}) x_m^{n_1} + p_{n_1 - 1}(\overline{x}) x_m^{n_1 - 1} + ... + p_0(\overline{x})$$

посредством полинома

$$q(x) = q_{n_2}(\overline{x}) x_m^{n_2} + q_{n_2 - 1}(\overline{x}) x_m^{n_2 - 1} + q_o(\overline{x}),$$

где $x \in R^m$, $\overline{x} = (x_1, ..., x_{m-1})$, $m \geq 1$, $p_0(\overline{x}), ..., p_{n_1}(\overline{x})$, $q_0(\overline{x}), ..., q_{n_2}(\overline{x})$ – полиномы относительно переменных $x_1, ..., x_{m-1}$, $p_{n_1}(\overline{x}) \not\equiv 0$, $q_{n_2}(\overline{x}) \not\equiv 0$, $n_1 \geq n_2 \geq 1$. Результатом этой операции является полином:

$$R_1(p, q) = q_{n_2}(\overline{x}) p(x) - x_m^{n_1 - n_2} p_{n_1}(\overline{x}) q(x).$$

Обозначим $\tilde{p}(x) = R_1(p,q)$. Тогда

$$\tilde{p}(x) = \tilde{p}_{n_1-1}(\overline{x})x_m^{n_1-1} + \ldots + \tilde{p}_0(\overline{x}),$$

где $\tilde{p}_i(\overline{x}) = \begin{cases} q_{n_2}(\overline{x})p_i(\overline{x}) & i = 0,1,\ldots,n_1-n_2-1 \qquad n_1-n_2 \ge 1, \\ q_{n_2}(\overline{x})p_i(\overline{x}) - p_{n_1}(\overline{x})q_{i-(n_1-n_2)}(\overline{x}), & i = n_1-n_2,\ldots,n_1-1. \end{cases}$

Таким образом, степень переменной x_m в полиноме $\tilde{p}(x)$ не превосходит n_1-1.

В случае $n_1 \ge n_2+1$ к полиномам $p(x)$, $q(x)$ может быть также применена операция R_2 двукратного элементарного понижения степени переменной x_m в полиноме $p(x)$ посредством полинома $q(x)$, определяемая равенством $R_2(p,q) = R_1(R_1(p,q),q)$. Заметим, что степень переменной x_m в полиноме $\tilde{\tilde{p}}(x) = R_2(p,q)$ не превосходит n_1-2. Совершенно аналогично можно ввести операцию трехкратного, …, (n_1-n_2+1) – кратного элементарного понижения степени переменной x_m в полиноме $p(x)$ посредством полинома $q(x)$, которые будем обозначать через $R_3,\ldots,R_{n_1-n_2+1}$, соответственно. При этом степень переменных x_m в полиноме $R_j(p,q)$, где $1 \le j \le n_1-n_2+1$, не превосходит n_1-j.

Введенную операцию обобщим и на случай, когда $0 \le n_1 < n_2$ (т.е. даже допустимо, чтобы полином $p(x)$ вообще не зависел от переменной x_m); при этом полагаем $R_1(p,q) = p$, а следовательно, в этом случае $\forall k \in \mathrm{N} \quad R_k(p,q) = p$.

Пример 3. Пусть $m=2,\ x_1 = x,\ x_2 = y,$

$$p(x,y) = (x+1)y^3 - 4x^2y^2 + 3x^3y + 5, \quad q(x,y) = x^2y^2 - (3x+1)y - x^2 + 2.$$

Тогда
$$R_1(p,q) = x^2p(x,y) - y(x+1)q(x,y) = x^2(x+1)y^3 - 4x^4y^2 + 3x^5y + 5x^2 - $$
$$-x^2(x+1)y^3 + (3x+1)(x+1)y^2 + x^2(x+1)y - 2(x+1)y = (-4x^4 + 3x^2 + $$
$$+4x+1)y^2 + (3x^5 + x^3 + x^2 - 2x - 2)y + 5x^2,$$

$$R_2(p,q) = R_1(R_1(p,q)) = x^2R_1(p,q) - (-4x^4 + 3x^2 + 4x + 1)q(x,y) = $$
$$= (3x^7 - 11x^5 - 3x^4 + 7x^3 + 13x^2 + 7x + 1)y - 4x^6 + 11x^4 + 4x^3 - 5x^2 - 8x - 2.$$

Замечание 3. В дальнейшем операция R_1 будет применяться в АИП многократно с целью исключения переменной x_m (а затем и других переменных помимо x_1) из альтернативных задач. При этом степени остальных переменных могут быстро расти. Чтобы по возможности уменьшить скорость этого роста, можно дополнительно модифицировать операцию R_1 следующим образом. Если $g(\overline{x}) = \text{НОД}(p_{n_1}(\overline{x}), q_{n_2}(\overline{x})) \ne 1$, $p_{n_1}(\overline{x}) = \breve{p}_{n_1}(\overline{x})g(\overline{x}),\quad q_{n_2}(\overline{x}) = \breve{q}_{n_2}(\overline{x})g(\overline{x}),$ то полагаем $R_1(p,q) = \breve{q}_{n_2}(\overline{x})p(x) - x_m^{n_1-n_2}\breve{p}_{n_1}(\overline{x})q(x).$ Тогда в приведенных выше формулах для $\tilde{p}_i(\overline{x})$ следует заменить $q_{n_2}(\overline{x})$, $p_{n_1}(\overline{x})$ на $\breve{q}_{n_2}(\overline{x})$, $\breve{p}_{n_1}(\overline{x})$, соответственно.

Используя приведенные выше леммы 1–4, а также оператор R_1 (понижения степени переменной x_m), опишем вспомогательный для АИП алгоритм исключения переменной x_m из задачи (3), (4), т.е. алгоритм перехода от задачи (3), (4) к конечной совокупности альтернативных задач того же вида, в которых отсутствует переменная x_m и множество значений локального экстремума в задаче (3), (4) является подмножеством множества значений локального экстремума в альтернативных задачах.

Этот алгоритм основан на многоэтапном ветвящемся процессе применения нескольких простых переходов от каждой текущей альтернативной задачи к двум (или в одном случае – к одной) новым альтернативным задачам. При этом получена оценка для максимально возможного числа таких переходов, чтобы добиться исключения из альтернативных задач переменной x_m .

Чтобы сделать рассуждения более наглядными, рассмотрим случай, когда $m = 3,\ x_1 = x,\ x_2 = y,\ x_3 = z$, т.е. имеем задачу

$$x \to extr;\ p_i(x, y, z) = 0,\ i = 1, 2, ..., l. \tag{8}$$

Опишем алгоритм перехода от задачи (8) к нескольким альтернативным задачам того же вида и таким, что множество значений локального экстремума в задаче (8) содержится в множестве значений локального экстремума в альтернативных задачах, и в этих альтернативных задачах отсутствует переменная z .

Будем под степенью переменной z в задаче вида (8) понимать максимальную степень этой переменной в полиномах $p_i(x, y, z),\ i = 1, 2, ..., l.$

В соответствии с леммами 1–3 будем рассматривать следующие три случая.

Случай 1. Пусть $l = 1$, т.е. задача (8) имеет вид

$$x \to extr;\ p(x, y, z) = 0, \tag{9}$$

и степень переменной z в полиноме $p(x, y, z)$ равна $n \geq 1$. Воспользовавшись леммой 1, получаем, что для любой точки $(x^o, y^o, z^o) \in R^3$, являющейся точкой локального экстремума в задаче (9) выполняется $\frac{\partial p}{\partial z}\Big|_{(x^o, y^o, z^o)} = 0$, а следовательно, в силу леммы 4 (x^o, y^o, z^o) является точкой локального экстремума в задаче

$$x \to extr;\ p(x, y, z) = 0,\ \frac{\partial p}{\partial z} = 0,$$

которая эквивалентна задаче

$$x \to extr;\ np - z\frac{\partial p}{\partial z} = 0,\ \frac{\partial p}{\partial z} = 0 \tag{10}$$

(у этих задач одинаковые допустимые множества возможных решений). Заметим, что степень переменной z в задаче (10) на единицу меньше, чем в исходной задаче (9) (см. также замечание 5).

Случай 2. Пусть $l > 1$ и переменная z входит только в одно ограничение, т.е. задача (8) имеет вид

$$x \to extr;\ p_1(x, y, z) = 0,\ p_i(x, y) = 0,\ i = 2, ..., l. \tag{11}$$

Пусть далее степень переменной z полинома $p_1(x, y, z)$ равна n , где $n \geq 1$.

В этом случае в силу леммы 3 для любой точки (x^o, y^o, z^o) являющейся точкой локального экстремума в задаче (8), выполняется:

(α) либо $\frac{\partial p}{\partial z}\Big|_{(x^o, y^o, z^o)} = 0,$ и тогда в силу леммы 4 (x^o, y^o, z^o) – точка локального экстремума в задаче

$$x \to extr;\ p_1(x, y, z) = 0,\ \frac{\partial p_1(x, y, z)}{\partial z} = 0,\ p_i(x, y) = 0,\ i = 2, ..., l,$$

которая эквивалентна задаче

$$x \to extr;\ np_1(x,y,z) - z\frac{\partial p_1(x,y,z)}{\partial z} = 0,$$
$$\frac{\partial p_1(x,y,z)}{\partial z} = 0,\ p_i(x,y) = 0,\ i = 2,...,l \qquad (12)$$

(у этих задач одинаковые допустимые множества возможных решений), степень переменной z в которой на единицу меньше, чем в задаче (11) (см. замечание 4);

(β) либо $\frac{\partial p}{\partial z}\Big|_{(x^o,y^o,z^o)} \neq 0,$ и тогда в силу леммы 3 (x^o, y^o) – точка локального экстремума в задаче

$$x \to extr;\ p_i(x,y) = 0,\ i = 2,...,l, \qquad (13)$$

в которой переменная z полностью исключена.

Таким образом, в случае 2 от единственной задачи (11) перешли к двум альтернативным задачам (12), (13) таким, что любое значение локального экстремума в задаче (11) является значением локального экстремума хотя бы в одной из задач (12) или (13) и степень переменной z в этих задачах либо на единицу меньше, чем в исходной задаче (11), либо равна 0 (т.е. переменная z исключена).

Приведем теперь более конкретный вид системы (12), что будет использовано в дальнейшем. Пусть

$$p_1(x,y,z) = q_n(x,y)z^n + q_{n-1}(x,y)z^{n-1} + ... + q_1(x,y)z + q_0(x,y).$$

Тогда

$$\frac{\partial p_1}{\partial z} = nq_n(x,y)z^{n-1} + (n-1)q_{n-1}(x,y)z^{n-2} + ... + 2q_2(x,y)z + q_1(x,y),$$

$$np_1 - z\frac{\partial p_1}{\partial z} = (n-n)q_n(x,y)z^n + [n-(n-1)]q_{n-1}(x,y)z^{n-1} +$$
$$+[n-(n-2)]q_{n-2}(x,y)z^{n-2} + ... + (n-1)q_1(x,y)z + nq_0(x,y) =$$
$$= q_{n-1}(x,y)z^{n-1} + 2q_{n-2}(x,y)z^{n-2} + ... + (n-1)q_1(x,y)z + nq_o(x,y),$$

а, следовательно, задача (12) имеет вид

$$x \to extr;\ p_i(x,y) = 0,\ i = 2,...,l,$$
$$\frac{\partial p_1}{\partial z} = nq_n(x,y)z^{n-1} + (n-1)q_{n-1}(x,y)z^{n-2} + ... + 2q_2(x,y)z + q_1(x,y) = 0, \qquad (14)$$
$$np_1 - z\frac{\partial p_1}{\partial z} = q_{n-1}(x,y)z^{n-1} + 2q_{n-2}(x,y)z^{n-2} + ... + (n-1)q_1(x,y)z + nq_0(x,y) = 0.$$

Будем переход от задачи (11) к альтернативной задаче (12) (или более конкретно – к задаче (14)) называть α -переходом, а переход к альтернативной задаче (13) – β -переходом. Заметим, что в случае 1 переход от задачи (9) к задаче (10) также является тем же α -переходом.

Замечание 4**.** Рассмотрим также в случае 2 возможный под случай, когда для полинома $p_1(x,y,z)$ выполняется

$$n \geq 2,\ q_1(x,y) \equiv 0, \ldots, q_{n-1}(x,y) \equiv 0\ . \tag{15}$$

Тогда задача (14), полученная в результате α -перехода от задачи (11), имеет вид $x \to extr;\ p_i(x,y)=0,\ i=2,...,l,\ q_n(x,y)z^{n-1}=0,\ q_0(x,y)=0$.

Пусть (x^0, y^0, z^0) – произвольная точка локального экстремума в этой задаче. Тогда

($\alpha\alpha$) либо $q_n(x^0, y^0)=0$, и тогда в силу леммы 4 (x^0, y^0, z^0) – точка локального экстремума в задаче

$$x \to extr;\ p_i(x,y)=0,\ i=2,...,l,\ q_n(x,y)z^{n-1}=0,\ q_n(x,y)=0,\ q_0(x,y)=0,$$

очевидно, не зависящей от переменной z и эквивалентной задаче

$$x \to extr;\ p_i(x,y)=0,\ i=2,...,l,\ q_n(x,y)=0,\ q_0(x,y)=0, \tag{16}$$

в которой (x^0, y^0) является точкой локального экстремума;

($\alpha\beta$) либо $q_n(x^0, y^0) \neq 0$, и тогда $z^0=0$, а (x^0, y^0) – точка локального экстремума в задаче

$$x \to extr;\ p_i(x,y)=0,\ i=2,...,l,\ q_0(x,y)=0\ . \tag{17}$$

Будем переход от задачи (11), удовлетворяющей (15), к задаче (16) называть $\alpha\alpha$ -переходом, а к задаче (17) – $\alpha\beta$ -переходом. При этом (16), (17) – задачи с исключенной переменной z. Таким образом, в случае 2 при выполнении (15) вместо α -перехода рассматриваем два перехода: $\alpha\alpha$ и $\alpha\beta$.

Замечание 5**.** В случае 2 при степени z в полиноме $p_1(x,y,z)$, равной 1, в любой из альтернативных задач (12) или (13) переменная z полностью исключена. Совершенно аналогично в случае 1, если степень переменной z в полиноме $p(x,y,z)$ равна 1, то в единственной для этого случая альтернативной задаче (10) переменная z отсутствует, т.е. исключена. Кроме того, если в случае 2 выполняется дополнительное условие (15), то в любой из альтернативных задач: (13) (после β -перехода), (16) (после $\alpha\alpha$ -перехода), (17) (после $\alpha\beta$ -перехода) переменная z исключена.

Замечание 6. Уже в случаях 1, 2 в задаче (10) (для случая 1) и в задачах (12), (13) (для случая 2) могут появиться значения локального экстремума, отсутствующие в исходной задаче (8), но мы изначально и не рассчитывали на равенство множества значений локального экстремума в исходной задаче и в объединении множеств значений локального экстремума в альтернативных задачах.

Пример 4. Рассмотрим задачу

$$x \to extr;\ x - y^3 = 0.$$

В этой задаче нет точек локального экстремума, т.к. множеством возможных решений является совокупность пар (x, y), где $x = y^3$, $y \in \mathrm{R}$, а функция y^3 не имеет точек локального экстремума на R. С другой стороны, эта задача соответствует случаю 1 (но с меньшим количеством переменных). И в этом случае мы рассматриваем альтернативную задачу $x \to extr;\ 3(x-y^3) - y\dfrac{\partial}{\partial y}(x-y^3)=0,\ \dfrac{\partial}{\partial y}(x-y^3)=0,$

т.е. задачу

$$x \to extr;\ 3x=0,\ -3y^2=0,$$

имеющую одно значение локального экстремума, равное 0.

Случай 3. Пусть в задаче (8) $l \geq 2$, положительную степень переменной z имеют $k \geq 2$ полиномов из $p_i(x, y, z),\ i = 1, ..., l,$ и максимальная степень переменной z в этих полиномах равна $n \geq 1$. Кроме того, пусть для определенности переменная z входит в $p_1(x, y, z)$ с наименьшей положительной степенью n_1 (см. замечание 7 о возможности однозначного выбора полинома $p_1(x, y, z)$), где $1 \leq n_1 \leq n$, т.е.

$$p_1(x, y, z) = p_{1,n_1}(x, y)z^{n_1} + p_{1,n_1-1}(x, y)z^{n_1-1} + ... + p_{1,1}(x, y)z + p_{1,0}(x, y),$$
$$p_{1,n_1}(x, y) \not\equiv 0.$$

Пусть далее (x^o, y^o, z^o) – произвольная точка локального экстремума в задаче (8). Тогда выполняется:

(γ) либо $p_{1,n_1}(x^o, y^o) \neq 0,$ и тогда в силу леммы 2 (x^o, y^o, z^o) – точка локального экстремума в задаче

$$x_1 \to extr;\ p_1(x, y, z) = 0,\ \tilde{p}_i(x, y, z) = R_{n-n_1+1}(p_i, p_1) = 0,\ i = 2, ..., l \tag{18}$$

(здесь операция R_{n-n_1+1} применяется в отмеченном ранее обобщенном смысле, так что она оставляет без изменения полиномы, не зависящие от z, а также со степенью переменной z, меньшей n_1, а все полиномы со степенью, большей или равной n_1, преобразует в полиномы со степенью, меньшей или равной $n_1 - 1$);

(δ) либо $p_{1,n_1}(x^o, y^o) = 0$, и тогда в силу леммы 4 (x^o, y^o, z^o) – точка локального экстремума в задаче

$$\begin{aligned} &x_1 \to extr;\ \tilde{p}_1(x, y, z) = p_{1,n_1-1}(x, y)z^{n_1-1} + ... + p_{1,1}(x, y)z + p_{1,0}(x, y) = 0, \\ &p_{1,n_1}(x, y) = 0,\ \mathrm{p}_i(x, y, z) = 0,\ i = 2, ..., l. \end{aligned} \tag{19}$$

Будем переход от исходной задачи (8) в рассматриваемом случае 3 к альтернативной задаче (18) называть γ - переходом, а к альтернативной задаче (19) – δ -переходом.

Итак, в рассматриваемом случае 3 действуем следующим образом. Осуществляем оба перехода, т.е. γ - переход и δ -переход от исходной задачи (8) к двум альтернативным задачам вида (8), каждая из которых снова соответствует одному из перечисленных трех случаев.

Таким образом, в каждом из случаев 1–3 осуществляем переход от исходной задачи (8) к новым альтернативным задачам вида (8) (к одной – в случае 1, к двум или трем в случае 2 и к двум в случае 3), от которых в свою очередь можем перейти к новым альтернативным задачам и т.д., т.е. можем организовать процесс многоэтапного ветвления исходной задачи (8) на множество альтернативных задач того же вида (т.е. вида (8)). При этом на каждом этапе этого процесса (в силу выбора в каждом из трех случаев соответствующих альтернативных задач) имеем конечную совокупность альтернативных задач таких, что объединение множеств значений локального экстремума в этих задачах содержит множество значений локального экстремума в исходной задаче (8). Целью этого многоэтапного процесса является получение совокупности альтернативных задач с исключенной переменной z. Аналогичный процесс позволит затем исключить переменную y, и мы получим совокупность альтернативных задач вида (8) с одной переменной x, т.е. задач вида

$$x \to extr;\ p_i(x) = 0,\ i = 1, 2, ..., l,$$

где $p_i(x)$ – многочлены, $i = 1, 2, ..., l$. При этом множеством решений этой задачи является множество общих действительных корней многочленов $p_i(x), \ i = 1, 2, ..., l$, равное множеству действительных корней многочлена $p(x) = \text{НОД}(p_1(x), ..., p_l(x))$

Замечание 7. Если имеется несколько полиномов с наименьшей положительной степенью переменной z, равной n_1, то выбираем среди них полином с наименьшей степенью переменной y в полиноме $p_{1,n_1}(x, y)$ (чтобы минимизировать максимальную степень переменной y в альтернативных задачах, получаемых в результате исключения переменной z), а если и таких полиномов несколько, то выбираем среди них полином с наименьшей степенью x в полиноме $p_{1,n_1}(x, y)$ и т.д.

4. ОБОСНОВАНИЕ АИП

Покажем, что указанный процесс ветвления является конечным. Более того, получим оценку сверху для числа возможных переходов вида $\alpha, \ \beta, \alpha\alpha, \ \alpha\beta, \ \gamma, \ \delta$, чтобы из исходной задачи (8) в результате цепочки этих переходов получалась альтернативная задача с исключенной переменной z.

Нам понадобятся некоторые обозначения, связанные с задачей (8). Обозначим через n_i степень переменной z в полиноме $p_i(x, y, z), \ i = 1, 2, ..., l, \ n_\Sigma = \sum_{i=1}^{l} n_i$. Заметим, что для любого из случаев 1–3 $n_\Sigma > 0$. Пусть в ограничениях задачи (8) имеются $k \ge 1$ полиномов с положительной степенью переменной z и для простоты обозначений они расположены в ограничениях задачи (8) таким образом, что

$$1 \le n_1 \le ... \le n_k, \ 1 \le k \le l. \tag{20}$$

Приведем сначала следующую вспомогательную оценку для произвольного $k \ge 2$. Как будет показано далее (см. утверждение 4), для любой последовательности переходов вида γ или δ от задачи (8), удовлетворяющей (20) при $k \ge 2$, в результате не более $n_\Sigma - n_0$ таких переходов, где $1 \le n_0 \le n_k$, будет получена альтернативная задача, в которой переменная z будет либо отсутствовать, либо присутствовать только в одном ограничении с положительной степенью n_0.

Для случая $k = 2$ приведем уточнение вспомогательной оценки, приведенной для произвольного $k \ge 2$. В этом случае (см. утверждение 6) для любой последовательности переходов вида γ или δ от задачи (8), удовлетворяющей (20) при $k = 2$, в результате не более n_1 таких переходов будет получена альтернативная задача, в которой переменная z будет либо отсутствовать, либо присутствовать только в одном ограничении с некоторой положительной степенью n_0, где $1 \le n_0 \le n_2$.

Используя приведенные вспомогательные оценки, получим теперь некоторые оценки для числа переходов от задачи (8) к альтернативным задачам с исключенной переменной z. Будем задачу вида (8) с одним ограничением с положительной степенью переменной z, не превосходящей $n \in \mathrm{N}$, кратко называть $(1, n)$-задачей, а задачу вида (8) с двумя ограничениями с положительными степенями переменной z, не превосходящими $n \in \mathrm{N}$, кратко называть $(2, n)$-задачей.

Пусть сначала в задаче (8) условие (20) имеет вид

$$k = 2\ ,\ 1 \le n_1 \le n_2 \le n\ , \tag{21}$$

т.е. рассматривается произвольная $(2, n)$-задача. Тогда согласно приведенной вспомогательной оценке (для $k = 2$) через $\le n$ $(\gamma \vee \delta)$-переходов от задачи (8), удовлетворяющей (21), произведенных в любой последовательности, будет получена либо альтернативная задача без z, либо альтернативная $(1, n)$-задача. От последней задачи $(\beta \vee \alpha\alpha \vee \alpha\beta)$-переходы сразу дают задачу без z, а α-переход приводит к альтернативной $(2, n-1)$-задаче. От $(2, n-1)$-задачи согласно приведенной вспомогательной оценке (для $k = 2$) через $\le n-1$ $(\gamma \vee \delta)$-переходов будет получена альтернативная $(1, n-1)$-задача, от которой $(\beta \vee \alpha\alpha \vee \alpha\beta)$-переходы сразу дают задачу без z, а α-переход приводит к альтернативной $(2, n-2)$-задаче. От $(2, n-2)$-задачи согласно приведенной вспомогательной оценке (для $k = 2$) через $\le n-2$ $(\gamma \vee \delta)$-переходов будет получена альтернативная $(1, n-2)$-задача, из которой $(\beta \vee \alpha\alpha \vee \alpha\beta)$-переходы сразу дают задачу без z, а α-переход приводит к альтернативной $(2, n-3)$-задаче и т.д. Из этих рассуждений следует, что для полного исключения переменной z из задачи (8) в случае (21) потребуется не более

$$n + (n-1) + (n-2) + \ldots + 2 + 1 = n(n+1)/2$$

переходов вида γ или δ, а также не более n переходов вида $\alpha \vee \beta \vee \alpha\alpha \vee \alpha\beta$, т.е. в общей сложности не более $n(n+1)/2 + n$ переходов вида $\gamma \vee \delta \vee\ \alpha \vee \beta \vee \alpha\alpha \vee \alpha\beta$. Обозначим $N(2, n) = n(n+1)/2 + n$ – верхняя оценка для числа переходов от задачи (8), удовлетворяющей (21), к альтернативным задачам с исключенной переменной z. Очевидно, что $N(2, n)$ монотонно возрастает по переменной n.

Пусть далее в задаче (8) условие (20) имеет вид

$$k = 1\ ,\ 1 \le n_1 = n\ . \tag{22}$$

Тогда имеют место случаи 1 или 2. В случае 2 $(\beta \vee \alpha\alpha \vee \alpha\beta)$-переходы сразу приводят к альтернативной задаче с исключенной переменной z. Если $n = 1$, то α-переход также приводит к альтернативной задаче с исключенной переменной z (см. замечание 5). Если $n \ge 2$, то α-переход приводит к альтернативной $(2, n-1)$-задаче. Но тогда, учитывая рассмотренный ранее случай (21), получаем, что верхняя оценка $N(1, n)$ для числа переходов от задачи (8), удовлетворяющей (22), к альтернативным задачам с исключенной переменной z может вычисляться по формуле (в ней учтены все перечисленные случаи)

$$N(1, n) = 1 + N(2, n-1) = 1 + n(n-1)/2 + n - 1 = n(n+1)/2\ .$$

Пусть теперь в задаче (8) условие (20) имеет вид

$$k \ge 3\ ,\ 1 \le n_1 \le \ldots \le n_k = n,\ k \le l\ . \tag{23}$$

Тогда, используя приведенную ранее вспомогательную оценку (для произвольного $k \ge 2$), получаем, что верхняя оценка $N(k, n)$ для числа переходов от задачи (8), удовлетворяющей (23), к альтернативным задачам с исключенной переменной z может вычисляться по формуле

$$N(k, n) = \max_{1 \le n_0 \le n} \{n_\Sigma - n_0 + N(1, n_0)\} = \max_{1 \le n_0 \le n} \{n_\Sigma - n_0 + n_0(n_0 + 1)/2\} =$$

$$= \max_{1 \le n_0 \le n} \{ n_\Sigma + n_0(n_0 - 1)/2 \} = n_\Sigma + n(n-1)/2 \le kn + n(n-1)/2 \,.$$

Заметим теперь, что во всех рассмотренных случаях (21) – (23) можем верхнюю оценку для числа переходов от задачи (8), к альтернативным задачам с исключенной переменной z вычислять по общей формуле

$$N(k,n) = kn + n(n-1)/2 \,. \tag{24}$$

Приведем теперь вспомогательные утверждения, которые нам потребовались для получения формулы (24).

Утверждение 1. Пусть задача (8) удовлетворяет введенному выше условию (20), $n_\Sigma = \sum_{i=1}^{l} n_i = \sum_{i=1}^{k} n_i$, $n = n_k$, $k \ge 2$ (т.е. эта задача относится к случаю 3). Тогда для задачи (18), полученной из (8) в результате γ-перехода, выполняется

$$\tilde{n}_\Sigma = \sum_{i=1}^{l} \tilde{n}_i \le n_\Sigma - (k-1) \le n_\Sigma - 1 \,,$$

где $\tilde{n}_1 = n_1$, $\tilde{n}_i$ – степень переменной z в полиномах $\tilde{p}_i(x,y,z)$, $i = 2,...,l$.

Доказательство. По определению обобщенной операции R_j , где $j \in \mathrm{N}$, для степени $\tilde{n}_i$ переменной z в полиноме $\tilde{p}_i(x,y,z) = R_{n_k - n_1 + 1}(p_i, p_1)$ выполняется: $\tilde{n}_i \le n_1 - 1$, $i = 2,...,k$; $\tilde{n}_i = 0$, $i = k+1,...,l,$ откуда

$$\tilde{n}_\Sigma = \sum_{i=1}^{l} \tilde{n}_i = n_1 + \sum_{i=2}^{k} \tilde{n}_i \le n_1 + \sum_{i=2}^{k} n_1 - (k-1) = \sum_{i=1}^{k} n_1 - (k-1) \le n_\Sigma - (k-1) \le n_\Sigma - 1 \,.$$

Следствие 1. Пусть для задачи (8) имеет место случай 3. Тогда в результате γ-перехода от этой задачи к альтернативной задаче сумма степеней переменной z в полиномах, входящих в ограничения, уменьшается не менее, чем на 1.

Следующие утверждения очевидны (непосредственно следуют из определений переходов вида γ и δ).

Утверждение 2. Пусть для задачи (8) имеет место случай 3. Тогда в результате δ-перехода от этой задачи к альтернативной задаче (см. задачу (19)) сумма степеней переменной z в полиномах, входящих в ограничения, уменьшается не менее, чем на 1.

Утверждение 3. Пусть для задачи (8) имеет место случай 3. Тогда в результате γ-перехода или δ-перехода от этой задачи к альтернативной задаче количество ограничений k с положительной степенью переменной z, а также максимальная степень переменной z в этих ограничениях не увеличиваются.

Из утверждений 2, 3, а также следствия 1 получаем, что справедливо

Утверждение 4. Пусть для задачи (8), ограничения которой удовлетворяют (20), имеет место случай 3, т.е. $k \ge 2$. Тогда для любой последовательности переходов вида γ или δ от этой задачи в результате не более $n_\Sigma - n_0$ таких переходов, где $1 \le n_0 \le n_k$, будет получена альтернативная задача, в которой переменная z будет либо отсутствовать, либо присутствовать только в одном ограничении с положительной степенью n_0 .

Кроме того, нам понадобится следующее очевидное

Утверждение 5. Пусть для задачи (6), ограничения которой удовлетворяют (20), имеет место случай 3, т.е. $k \ge 2$. Тогда

1) если в задаче (18), полученной из (8) в результате γ-перехода, $\tilde{k}$ – количество полиномов с положительной степенью переменной z, $\tilde{n}_i$ – степени переменной z в полиномах $\tilde{p}_i(x,y,z)$, $i=2,...,k$, то
   а) в случае $\tilde{k}=1$ единственным полиномом с положительной степенью переменной z является $p_1(x,y,z)$ и эта степень равна n_1;
   б) в случае $\tilde{k}>1$ минимальная положительная степень переменной z не превосходит n_1-1;
2) если в задаче (19), полученной из (8) в результате δ-перехода, $\tilde{k}$ – количество полиномов с положительной степенью переменной z, то
   в) в случае $\tilde{k}=k$ минимальная положительная степень переменной z в ограничениях задачи (19) не превосходит n_1-1;
   г) в случае $\tilde{k}=k-1$ (очевидно, что других случаев кроме $\tilde{k}=k$ или $\tilde{k}=k-1$ быть не может, т.к. при δ-переходе меняется только одно ограничение с положительной степенью переменной z) минимальная положительная степень переменной z в ограничениях задачи (19) равна n_2.

Введем следующее определение. Будем задачу (8), удовлетворяющую условиям (20), (21), называть $(2,\overline{n}_1,\overline{n}_2)$-задачей, если

$$n_1 \le \overline{n}_1, n_2 \le \overline{n}_2,\ \overline{n}_1,\overline{n}_2 \in \mathrm{N}, \overline{n}_1 \le \overline{n}_2 .$$

Следствием утверждения 5 является

Утверждение 6. Пусть для задачи (8), ограничения которой удовлетворяют (20), имеет место случай 3, и при этом $k=2$, т.е. выполняется (21). Тогда для любой последовательности переходов вида γ или δ в результате не более n_1 таких переходов будет получена альтернативная задача, в которой переменная z будет либо отсутствовать, либо присутствовать только в одном ограничении с некоторой положительной степенью n_0, где $1 \le n_0 \le n_2$.

Доказательство. Заметим, что исходная задача является $(2,n_1,n_2)$-задачей и в силу утверждения 5 после первого ($\gamma \vee \delta$)-перехода от нее получим либо альтернативную $(1,n_2)$-задачу (т.е. удовлетворяющую требованиям доказываемого утверждения), либо $(2,n_1-1,n_2)$-задачу. Следующий $(\gamma \vee \delta)$-переход от $(2,n_1-1,n_2)$-задачи в силу утверждения 5 приведет либо к альтернативной $(1,n_2)$-задаче (т.е. удовлетворяющей требованиям доказываемого утверждения), либо к $(2,n_1-2,n_2)$-задаче и т.д. Из этих рассуждений становится очевидным, что после $\ge n_1$ $(\gamma \vee \delta)$-переходов от исходной задачи получение в качестве альтернативной $(2,n_2)$-задачи невозможно, а может быть получена только $(1,n_2)$-задача.

5. ПРОГРАММНАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ

Для решения перечисленных в разделе 1 полиномиальных задач был разработан программный комплекс на высокоуровневом языке Python с использованием библиотеки SymPy, предназначенной для символьных вычислений. В этом программном комплексе используется алгоритм исключения переменных, для которого были реализованы операции перехода от канонической задачи полиномиальной оптимизации вида (3), (4) к альтернативным задачам.

На вход основной программы подается система полиномов, входящих в ограничения задачи вида (3), (4), после чего в соответствии со случаями 1–3, описанными в разделе 2, осуществляется переход к альтернативным задачам. При этом для каждой очередной альтернативной задачи запоминается информация о предшествующей ей задаче. Таким образом, осуществляется описанный в разделе 2 многоэтапный процесс ветвления, который завершается построением совокупности альтернативных задач, в ограничения которых входят многочлены от одной переменной. При этом для каждого из этих многочленов может быть восстановлена вся цепочка предшествующих ему (или порождающих его) альтернативных задач вида (3), (4), что позволяет последовательно находить значения неизвестных переменных.

Программное обеспечение АИП было реализовано для случая двух и трех переменных.

Пример 3. Программный комплекс был протестирован на следующем примере. Рассматривается задача (вида (8))

$$\begin{gathered} x \to extr;\ p_1(x,y) = y^3 + 2xy^2 - 3xy + x - 1 = 0, \\ p_2(x,y) = y^3 + x^3 - x^2y + y^2 - 2 = 0. \end{gathered} \tag{25}$$

Применим к задаче (25) АИП. Для этого построим цепочку переходов от задачи (25) к нескольким альтернативным задачам с исключенной переменной y. Задача (25) относится к случаю 3, поэтому осуществляем γ-переход (здесь δ-переход невозможен) от задачи (25) к альтернативной задаче (вида (18))

$$\begin{gathered} x \to extr;\ p_1(x,y) = y^3 + 2xy^2 - 3xy + x - 1 = 0, \\ \tilde{p}_2(x,y) = R_1(p_2,p_1) = p_2 - p_1 = y^2(-2x+1) - y(x^2 - 3x) + x^3 - x - 1 = 0. \end{gathered} \tag{26}$$

Задача (26) (эквивалентная задаче (25)) также относится к случаю 3. Здесь возможны оба перехода: δ и γ. Альтернативной задачей, получаемой из (26) с помощью δ-перехода, является

$$\begin{gathered} x \to extr;\ p_1(x,y) = y^3 + 2xy^2 - 3xy + x - 1 = 0, \\ -2x + 1 = 0, -y(x^2 - 3x) + x^3 - x - 1 = 0. \end{gathered} \tag{27}$$

Из последних двух ограничений задачи (27) следует, что единственным ее решением является $x = 0.5,\ y = 1.1$, однако, это решение не удовлетворяет первому ограничению, т.е. задача (27) не имеет решений.

Альтернативной задачей, получаемой из (26) с помощью γ-перехода, является

$$\begin{gathered} x \to extr;\ q_1(x,y) = R_2(p_1,\tilde{p}_2), \\ \tilde{p}_2(x,y) = y^2(-2x+1) - y(x^2 - 3x) + x^3 - x - 1 = 0. \end{gathered} \tag{28}$$

Заметим, что при этом

$$\begin{aligned} & R_1(p_1,\tilde{p}_2) = (-2x+1)p_1 - y\tilde{p}_2 = \\ & = (-2x+1)y^3 + 2(-2x+1)xy^2 - 3(-2x+1)xy + x(-2x+1) + 2x - 1 - \\ & - y^3(-2x+1) + y^2(x^2 - 3x) - yx^3 + yx + y = \\ & = y^2(-3x^2 - x) + y(-x^3 + 6x^2 - 2x + 1) - 2x^2 + 3x - 1 = 0, \end{aligned}$$

$$q_1(x,y) = R_2(p_1,\tilde{p}_2) = R_1(R_1(p_1,\tilde{p}_2),\tilde{p}_2) = (-2x+1)R_1(p_1,\tilde{p}_2) - (-3x^2 - x)\tilde{p}_2 =$$
$$= y(-x^4 - 5x^3 + 13x^2 - 4x + 1) + 3x^5 + x^4 + x^3 - 12x^2 + 4x - 1,$$

т.е. задача (28) имеет вид

$$\begin{aligned} &x \to extr;\ q_1(x,y) = y(-x^4 - 5x^3 + 13x^2 - 4x + 1) + \\ &+3x^5 + x^4 + x^3 - 12x^2 + 4x - 1 = 0, \\ &\tilde{p}_2(x,y) = y^2(-2x+1) - y(x^2 - 3x) + x^3 - x - 1 = 0. \end{aligned} \tag{29}$$

Задача (29) (эквивалентная задаче (25)) также относится к случаю 3. Здесь возможны оба перехода: δ и γ. Альтернативной задачей, получаемой из (29) с помощью δ-перехода, является

$$\begin{aligned} &x \to extr;\ -x^4 - 5x^3 + 13x^2 - 4x + 1 = 0, \\ &3x^5 + x^4 + x^3 - 12x^2 + 4x - 1 = 0, \\ &\tilde{p}_2(x,y) = y^2(-2x+1) - y(x^2 - 3x) + x^3 - x - 1 = 0. \end{aligned} \tag{30}$$

Действительными корнями первого уравнения в (30) являются: 1.64595, -6.95486, а у второго единственный корень – 1.29617, т.е. задача (30) не имеет решений.

Альтернативной задачей, получаемой из (26) с помощью δ-перехода, является

$$\begin{aligned} &x \to extr;\ q_2(x,y) = R_2(\tilde{p}_2, q_1), \\ &q_1(x,y) = y(-x^4 - 5x^3 + 13x^2 - 4x + 1) + 3x^5 + x^4 + x^3 - 12x^2 + 4x - 1 = 0, \end{aligned} \tag{31}$$

которая после соответствующих преобразований имеет вид

$$\begin{aligned} &x \to extr; \\ &q_1(x,y) = y(-x^4 - 5x^3 + 13x^2 - 4x + 1) + 3x^5 + x^4 + x^3 - 12x^2 + 4x - 1 = 0, \\ &q_2(x,y) = R_2(\tilde{p}_2, q_1) = -20x^{11} + 71x^9 - 77x^8 + 170x^7 - 328x^6 + 275x^5 - \\ &-114x^4 + 26x^3 - 3x^2 = 0. \end{aligned} \tag{32}$$

Задача (32) относится уже к случаю 2. Здесь возможны два перехода: α и β. Заметим, что

$$\frac{\partial}{\partial y} q_1(x,y) = -x^4 - 5x^3 + 13x^2 - 4x + 1,$$

$$q_1(x,y) - \frac{\partial}{\partial y} q_1(x,y) = 3x^5 + x^4 + x^3 - 12x^2 + 4x - 1,$$

и при этом, как было показано при рассмотрении задачи (30), система

$$\frac{\partial}{\partial y} q_1(x,y) = -x^4 - 5x^3 + 13x^2 - 4x + 1 = 0,$$

$$q_1(x,y) - \frac{\partial}{\partial y} q_1(x,y) = 3x^5 + x^4 + x^3 - 12x^2 + 4x - 1 = 0,$$

не имеет решений. Но тогда и альтернативная задача, получаемая при α-переходе от задачи (32), не имеет решений. Альтернативной задачей, получаемой из (32) с помощью δ-перехода, является $x \to extr;\ -20x^{11} + 71x^9 - 77x^8 + 170x^7 - 328x^6 + 275x^5 - 114x^4 + 26x^3 - 3x^2 = 0.$

Эта задача имеет решения (действительные корни единственного многочлена в ограничениях этой задачи): -2.69841961, 1, 1.28513433, 0.5, 0. Подставляя найденные решения в систему ограничений исходной задачи (25) получаем множество точек локального экстремума этой задачи: $x = 0,\ y = 1$; $x = 1,\ y = 1$; $x = 1.28513433,\ y = 0.07815279$; $x = -2.69841961,\ y = 3.26360934$. Приведением системы полиномов в ограничениях задачи (25) к минимальному редуцированному базису Гребнера нетрудно убедиться, что эта система имеет конечное множество изолированных решений в поле комплексных чисел, а тем более и в поле действительных чисел, а, следовательно, найдено множество всех действительных решений системы равенств в задаче (25), т.е. полностью решена указанная в разделе 1 задача 1.

Литература

1. *Нефедов В.Н.* Метод исключения переменных в полиномиальных задачах оптимизации – Деп. в ВИНИТИ, 1984, № 7590–84.
2. *Нефедов В.Н.* Полиномиальные задачи оптимизации // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1987. Т. 27. № 5. С. 661–675.
3. *Губарь Ю.В.* Введение в математическое программирование. – ИНТУИТ (национальный открытый университет), 2016. – 227 с.
4. *Вержбицкий В.М.* Основы численных методов. – М.: Высшая школа, 2002. – 840 с.
5. *Кановей Г.В., Логофет Д.О.* *D*-Устойчивость матриц 4×4 // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1998. Т. 38. № 9. С. 1429–1435.
6. *Logofet D.O.* Stronger-than-Lyapunov notions of matrix stability, or how “flowers” help solve problems in mathematical ecology // *Linear Algebra Appl*, 398 (2005), 75–100.
7. *Нефедов В.Н.* Об одном достаточном условии экстремума для полиномов и степенных рядов – Деп. в ВИНИТИ, 1990, № 2666-В90.
8. *Бухбергер Б.* Алгоритмический метод в теории полиномиальных идеалов // Компьютерная алгебра. Символьные и алгебраические вычисления. – М.: Мир, 1986.
9. *Аржанцев И.В.* Базисы Гребнера и системы алгебраических уравнений. – М.: МЦНМО, 2003. – 68 с.

Algorithmization and Software Implementation of the Method of Eliminating Variables in Polynomial Optimization Problems

Nefedov V.N.*
MAI, Moscow, Russia,
e-mail: nefedovvn54@yandex.ru

Zharkikh A.V.**
MAI, Moscow, Russia,
e-mail: alexvzhar@gmail.com

The method of sequential exclusion of variables in polynomial optimization problems is considered. A number of problems are solved using this method. The practical steps of an algorithm are described, which reduces the initial polynomial optimization problem to a multi-stage branching process of obtaining a finite number of alternative problems, the output of which gives a finite set of polynomials in one variable. As a result, solving a number of polynomial problems reduces to sorting out a finite number of vectors whose components are the real roots of polynomials.

Keywords: polynomials, exclusion of variables, optimization problems, systems of algebraic equations.

References

1. Nefedov V.N. Metod isklyucheniya peremennykh v polinomial'nykh zadachakh optimizatsii – Dep. v VINITI, 1984, № 7590–84.
2. Nefedov V.N. Polinomial'nyye zadachi optimizatsii. ZH. vychisl. matem. i matem. fiz. 1987. T. 27. № 5. pp. 661–675.
3. Gubar' YU.V. Vvedeniye v matematicheskoye programmirovaniye. – INTUIT (natsional'nyy otkrytyy universitet), 2016. – 227 p.
4. Verzhbitskiy V.M. Osnovy chislennykh metodov. – Moscow: Vysshaya shkola, 2002. – 840 p.
5. Kanovey G.V., Logofet D.O. D-Ustoychivost' matrits 4×4. ZH. vychisl. matem. i matem. fiz. 1998. T. 38. № 9. p. 1429–1435.

For citation:
Nefedov V.N., Zharkikh A.V. Algorithmization and Software Implementation of the Method of Eliminating Variables in Polynomial Optimization Problems. *Modelirovanie i analiz dannykh = Modelling and Data Analysis*, 2020. Vol. 10, no. 1, pp. 110–128. DOI: 10.17759/mda.2020100107 (In Russ., abstr. In Engl.)

***Nefedov Viktor Nikolayevich,** Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Department of Mathematical Cybernetics, Moscow Aviation Institute (MAI), Moscow, Russia, e-mail: nefedovvn54@yandex.ru

****Zharkikh Aleksey Vladimirovich,*** Master's degree student at the Faculty of Information Technology and Applied Mathematics, Moscow Aviation Institute (MAI), Moscow, Russia, e-mail: alexvzhar@gmail.com

6. Logofet D.O. Stronger-than-Lyapunov notions of matrix stability, or how "flowers" help solve problems in mathematical ecology. Linear Algebra Appl, 398 (2005), pp. 75–100.
7. Nefedov V.N. Ob odnom dostatochnom uslovii ekstremuma dlya polinomov i stepennykh ryadov – Dep. v VINITI, 1990, № 2666-V90.
8. Bukhberger B. Algoritmicheskiy metod v teorii polinomial'nykh idealov. Komp'yuternaya algebra. Simvol'nyye i algebraicheskiye vychisleniya. – Moscow: Mir, 1986.
9. Arzhantsev I.V. Bazisy Grebnera i sistemy algebraicheskikh uravneniy. – Moscow: MTSNMO, 2003. – 68 p.