Моделирование и анализ данных
2021. Том 11. № 1. С. 33–39
DOI: https://doi.org/10.17759/mda.2021110103
ISSN: 2219-3758 (печатный)
ISSN: 2311-9454 (online)

Modelling and Data Analysis
2021. Vol. 11, no. 1, pp. 33–39
DOI: https://doi.org/10.17759/mda.2021110103
ISSN: 2219-3758 (print)
ISSN: 2311-9454 (online)

◇◇◇◇◇◇◇ МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ ◇◇◇◇◇◇◇

УДК 519.1

Алгоритм покрытия вершин ориентированного графа

Князятов М.О.*
Московский авиационный институт (МАИ),
г. Москва, Российская Федерация
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-2346-4364
e-mail: mike-99@bk.ru

Рассказова В.А.**
Московский авиационный институт (МАИ),
г. Москва, Российская Федерация
ORCID: https://orcid.org/0000-0003-4943-3133
e-mail: varvara.rasskazova@mail.ru

В статье представлен алгоритм решения прикладной задачи о назначении и перемещении локомотивов, основанный на решении теоретико–графовой задачи о покрытии вершин ориентированного графа множеством ориентированных путей. Приведён подробный пример для алгоритма покрытия вершин ориентированного графа множеством максимальных путей.

Ключевые слова: покрытие вершин графа, перемещение локомотивов, множество путей.

Для цитаты:
Князятов М.О., Рассказова В.А. Алгоритм покрытия вершин ориентированного графа // Моделирование и анализ данных. 2021. Том 11. № 1. С. 33–39. DOI: https://doi.org/10.17759/mda.2021110103

****Князятов Михаил Олегович,*** студент, Московский авиационный институт (МАИ), г. Москва, Российская Федерация, ORCID: https://orcid.org/0000-0002-2346-4364 , e-mail: mike-99@bk.ru

*****Рассказова Варвара Андреевна,*** кандидат физико-математических наук, Московский авиационный институт (МАИ), г. Москва, Российская Федерация, ORCID: https://orcid.org/0000-0003-4943-3133, e-mail: varvara.rasskazova@mail.ru

1. ВВЕДЕНИЕ

Задача о назначении и перемещении локомотивов лежит в основе процесса организации грузовых железнодорожных перевозок, как основная задача оптимального распределения и использования технических и экономических ресурсов. Актуальные средства для исследования и разработки в области организации грузовых железнодорожных перевозок предоставляет теория графов как основной инструмент математического моделирования транспортных сетей. В работе исследуется, в том числе посредством методов теории графов и комбинаторной оптимизации, задача моделирования и оптимального планирования железнодорожных перевозок и задачи теории расписаний.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим ориентированный граф зависимостей перевозок, где каждая вершина **s** – некоторое задание на перевозку, подлежащее исполнению. Будем рассматривать вершину как время отправления локомотива из точки А и прибытия в точку Б или наоборот. Каждый локомотив может отправиться в следующий рейс, не раньше, чем через 10 минут после прибытия его на данную точку. Таким образом получается, что данный граф (рис.1) является совокупностью всех возможных комбинаций прохождения всех рейсов. Рассмотрим модельный пример.

А→Б	Б→А
S1) 3:00 → 6:40	S2) 4:50 →10:00
S3) 5:10 → 9:20	S4) 5:30 → 9:40
S5) 9:50 →16:30	S7) 11:40 →18:30
S6) 11:10 →17:40	S8) 17:10 →21:40

Составим список смежности вершин.
(1; 7,8)
(2; 6)
(3; 7,8)
(4; 5,6)
(5; 8)

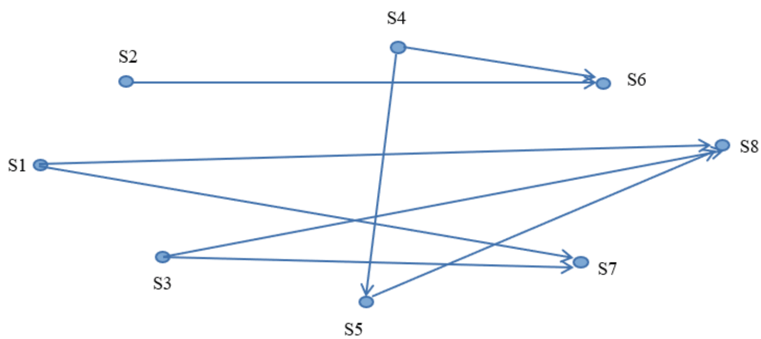

Рис.1. Ориентированный граф зависимостей перевозок

Как видно, на графе были задействованы все вершины. Наша задача состоит в том, чтобы «покрыть» все вершины, используя минимальное количество локомотивов.

3. АЛГОРИТМ

Перед использованием алгоритма для решения поставленной задачи, нам следует перенести списки смежности вершин в матричный вид, где 1 – это покрытая вершина, а 0 – нет, а каждая строка – это возможный путь локомотива.

Так выглядит матрица для вышерассмотренного примера:

1 0 0 0 0 0 1 0
1 0 0 0 0 0 0 1
0 1 0 0 0 1 0 0
0 0 1 0 0 0 1 0
0 0 1 0 0 0 0 1
0 0 0 1 1 0 0 1
0 0 0 1 0 1 0 0
0 0 0 0 1 0 0 1

Введем в рассмотрение следующие критерии выбора строки матрицы в строящееся решение:

Ind1 – количество путей, которое содержит вершину s_n.

Ind2 – значение для каждой строки, которые представляет собой количество непокрытых вершин на данном пути.

Ind3 – сумма всех **Ind1** для данного пути.

Ind4 – минимально значение **Ind1** на данном пути.

4. ШАГИ АЛГОРИТМА

1.1 Выбираем по второму индикатору **(Ind2)**, от большего значения к меньшему.

1.2 При равенстве значений по Ind 2 выбираем по третьему индикатору **(Ind3)**, от меньшего значения к большему.

1.3 При равенстве предыдущих индикаторов выбираем по четвёртому индикатору **(Ind4)**, от меньшего значения к большему.

2. Повторяем 1 пункт, пока не будут покрыты все точки.

5. ПРИМЕР

Рассмотрим матрицу путей:

0 1 1 0 0 0 1 0 0 0
1 1 0 0 0 0 0 1 0 0
0 0 0 1 0 1 0 0 1 1
0 0 0 0 0 0 1 0 0 1
0 0 0 0 1 0 0 0 0 0
1 1 0 1 0 0 0 1 0 0
1 1 1 0 0 0 0 0 1 0
0 0 1 0 0 1 0 0 0 1

Проделаем шаги алгоритма. Для удобства к матрице добавим «шапку», которая представляет собой массив из 0 и 1 длиною равною строке матрицы, где 1 – ещё не покрытая вершина, а 0 – покрытая.

«шапка»

1 1 1 1 1 1 1 1 1 1	**Ind2**	**Ind3**	**Ind4**
0 1 1 0 0 0 1 0 0 0	3	9	2
1 1 0 0 0 0 0 1 0 0	3	9	2
0 0 0 1 0 1 0 0 1 1	4v	9v	2
0 0 0 0 0 0 1 0 0 1	2	5	2
0 0 0 0 1 0 0 0 0 0	1	1	1
1 1 0 1 0 0 0 1 0 0	4v	11	2
1 1 1 0 0 0 0 0 1 0	4v	12	2
0 0 1 0 0 1 0 0 0 1	3	8	2

Выбираем 1-й путь, сохраняем его и убираем из матрицы. Далее исправлению подлежит «шапка» матрицы – убираем покрытые пути. Напомним, что вершины, которые в «шапке» равны 0, в расчет не принимаются.

Приступим к поиску следующего пути:

1 1 1 |0| 1 |0| 1 1 |0 0|	**Ind2**	**Ind3**	**Ind4**
0 1 1 |0| 0 |0| 1 0 |0 0|	3v	9v	2v
1 1 0 |0| 0 |0| 0 1 |0 0|	3v	9v	2v
0 0 0 |0| 0 |0| 1 0 |0 1|	1	2	2
0 0 0 |0| 1 |0| 0 0 |0 0|	1	1	1
1 1 0 |1| 0 |0| 0 1 |0 0|	3v	9v	2v
1 1 1 |0| 0 |0| 0 0 |1 0|	3	10	3
0 0 1 |0| 0 |1| 0 0 |0 1|	1	3	3

На этот раз введенным эвристическим критериям удовлетворяют сразу три пути, выбираем первый из них.

Ищем следующий:

1 |0 0 0| 1 |0 0| 1 |0 0|	**Ind2**	**Ind3**	**Ind4**
1 |1 0 0| 0 |0 0| 1 |0 0|	2v	5v	2v
0 |0 0 0| 0 |0 1| 0 |0 1|	0	0	0
0 |0 0 0| 1 |0 0| 0 |0 0|	1	1	1
1 |1 0 1| 0 |0 0| 1 |0 0|	2v	5v	2v
1 |1 1 0| 0 |0 0| 0 |1 0|	1	3	3
0 |0 1 0| 0 |1 0| 0 |0 1|	0	0	0

На этот раз критериям удовлетворяют два пути, выбираем первый из них и продолжаем. Осталась всего одна непокрытая вершина.

|0 0 0 0| 1 |0 0 0 0 0|	**Ind2**	**Ind3**	**Ind4**
|0 0 0 0| 0 |0 1 0 0 1|	0	0	0
|0 0 0 0| 1 |0 0 0 0 0|	1v	1	1
|1 1 0 1| 0 |0 0 1 0 0|	0	0	0
|1 1 1 0| 0 |0 0 0 1 0|	0	0	0
|0 0 1 0| 0 |1 0 0 0 1|	0	0	0

Когда последняя вершина оказывается покрытой, алгоритм завершает свою работу. Таким образом итоговая матрица путей выглядит следующим образом:

$$\begin{matrix} 0&0&0&1&0&1&0&0&1&1 \\ 0&1&1&0&0&0&1&0&0&0 \\ 1&1&0&0&0&0&0&1&0&0 \\ 0&0&0&0&1&0&0&0&0&0 \end{matrix}$$

Из представленного примера следует, что для покрытия всех вершин, то есть для исполнения всех перевозок, понадобится 4 локомотива.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В статье были приведена постановка общей задачи оптимизации планирования грузовых железнодорожных перевозок с минимизацией затрат на перевозки. Так же был рассмотрен алгоритм покрытия вершин ориентированного графа. Полученные результаты могут быть использованы при разработке автоматизированных систем управления грузовыми перевозками.

Литература

1. *Лазарев А.А.* Оценки абсолютной погрешности и схема приближенного решения задач теории расписаний // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2009. Т. 49. № 2. С. 14–34.
2. *Гафаров Е.Р., Лазарев А.А.* Преобразование сетевого графика задач теории расписаний с ограничениями предшествования // ДАН. 2008. Т. 424. № 2. С. 7–9.
3. *Burdett O., Kozan E. A* Disjunctive Graph Model and Framework for Constructing New Train Schedules // Eur. J. Oper. Res. 2010. V. 200. P. 85–98.
4. *Gholami O., Sotskov Y.N.* Mixed Graph Model and Algorithms for Parallel Machine Job shop Scheduling Problems // Int. J. Production Research. 2015. V. 8. P. 1–16.
5. *Lusby R., Ryan D.* Railway Track Allocation: Models and Methods // Oper. Res. Spektrum. 2011. V. 33. P. 843–883.
6. *Гайнанов Д.Н., Рассказова В.А. М*атематическое моделирование в зада-че оптимального назначения и перемещения локомотивов методами теории графов и комбинаторной оптимизации // Труды МАИ. 2017. № 92.
7. *Осипов С.И, Осипов С.С. О*сновы тяги поездов. М.: УМК МПС, 2000, 592 С.
8. *Гайнанов Д. Н.* Комбинаторная геометрия и графы в анализе несовместных систем и распознавании образов. М.: Наука, 2014, 152 С.
9. *Гайнанов Д.Н., Кибзун А.И., Рассказова В.А.* Теоретико-графовый алгоритм решения задачи о назначении и перемещении локомотивов // Вестник компьютерных и информационных технологий. 2017. № 5. С. 51–56.
10. *Гайнанов Д.Н., Рассказова В.А.* Алгоритм расшифровки монотонных булевых функций, порожденных неориентированными графами // Вестник ЮРГУ. 2016. Т. 9. № 3. С. 17–30.

An Algorithm for Covering the Vertices of a Directed Graph

Mikhail O. Knyazyatov*
Moscow aviation Institute (MAI), Moscow, Russia
https://orcid.org/0000-0002-2346-4364
mike-99@bk.ru

Varvara A. Rasskazova**
Moscow aviation Institute (MAI), Moscow, Russia
https://orcid.org/0000-0003-4943-3133
varvara.rasskazova@mail.ru

The article presents an algorithm for solving the applied problem of assigning and moving locomotives, based on the solution of the graph–theoretic problem of covering the vertices of a directed graph with a set of oriented paths. A detailed example is given for an algorithm for covering the vertices of a directed graph with a set of maximal paths.

Keywords: covering the vertices of the graph, moving locomotives, set of paths.

For citation:
Knyazyatov M.O., Rasskazova V.A. An Algorithm for Covering the Vertices of a Directed Graph. *Modelirovanie i analiz dannykh = Modelling and Data Analysis*, 2021. Vol. 11, no. 1, pp. 33–39. DOI: https://doi.org/10.17759/mda.2021110103 (In Russ., abstr. in Engl.).

References

1. Lazarev A.A. Estimates of the absolute error and a scheme for an approximate solution to scheduling problems // Computational Mathematics and Mathematical Physics volume49, p. 373–386 (2009).
2. Lazarev A.A., Gafarov E.R. Transformation of the network graph of scheduling problems with precedence constraints to a planar graph // Doklady Mathematics. 2009. T. 79. № 1. C. 1–3.
3. Burdett O., Kozan E. *A Disjunctive Graph Model and Framework for Constructing New Train Schedules* // Eur. J. Oper. Res. 2010. V. 200. P. 85–98.
4. Gholami O., Sotskov Y. N. *Mixed Graph Model and Algorithms for Parallel Machine Job shop Scheduling Problems* // Int. J. Production Research. 2015. V. 8. P. 1–16.
5. Lusby R., Ryan D. *Railway Track Allocation: Models and Methods* // Oper. Res. Spektrum. 2011. V. 33. P. 843–883.
6. Gainanov D.N., Rasskazova V.A. Mathematical modelling of locomotives' traffic problem by graph theory and combinatorial optimization methods // Moscow Aviation Institute. 2017. № 92.

****Mikhail O. Knyazyatov,*** student of Moscow aviation Institute (MAI), Moscow, Russia, ORCID: https://orcid.org/0000-0002-2346-4364 , e-mail: mike-99@bk.ru

*****Varvara A. Rasskazova***, candidate of Physical and Mathematical Sciences, Moscow aviation Institute (MAI), Moscow, Russia, ORCID: https://orcid.org/0000-0003-4943-3133, e-mail: varvara.rasskazova@mail.ru

7. Gainanov D.N. Combinatoirial geometry and graphs in an analysis of infeasible systems and pattern recognition. M.: Nauka=M.: Science, 2014, 152 p.
8. Gainanov D.N., Kibzun A.I., Rasskazova V.A. Theoretical-graph Algorithm in the Problem on the Assignments and Transportations of Locomotives // Vestnik computernykh I informatsionnykh tekhnologiy= Bulletin of Computer and Information Technologies. 2017. № 5. p. 51–56.
9. Gainanov D.N., Rasskazova V.A.. An inference algorithm for monotone boolean functions associated with undirected graphs // Bulletin of the South Ural State University Series Mathematical Modelling Programming and Computer Software. 2016. T. 9. № 3. p. 17–30.