

Методика определения свойств компонентов композиционного материала на основе миграционных алгоритмов глобальной оптимизации

Пантелеев А.В.*

Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет) (МАИ), г. Москва, Российская Федерация
ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-2493-3617>
e-mail: avpanteleev@inbox.ru

Ковтунов С.С.**

Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет) (МАИ), г. Москва, Российская Федерация
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-7264-0694>
e-mail: kovtunov.99@inbox.ru

Ракитянский В.М.***

Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет) (МАИ), г. Москва, Российская Федерация
ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-7894-7462>
e-mail: gymbelv@gmail.com

Сформирована математическая модель расчета упругих характеристик обобщенного материала на основе свойств поперечно-изотропного волокна и изотропной матрицы. Задача выбора параметров материалов сформулирована как проблема минимизации целевой функции на параллелепипедном множестве допустимых решений. Для ее решения применены классический и модифицированный самоорганизующиеся миграционные алгоритмы глобальной оптимизации, относящиеся к группе метаэвристических. Получены рекомендации по выбору наилучших значений параметров.

Ключевые слова: композитный материал, гомогенизация, волокно, матрица, миграционный алгоритм, метод оптимизации.

Для цитаты:

Пантелеев А.В., Ковтунов С.С., Ракитянский В.М. Методика определения свойств компонентов композиционного материала на основе миграционных алгоритмов глобальной оптимизации // Моделирование и анализ данных. 2023. Том 13. № 2. С. 123–141. DOI: [10.17759/mda.2023130207](https://doi.org/10.17759/mda.2023130207)



***Пантелеев Андрей Владимирович**, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой математической кибернетики института «Компьютерные науки и прикладная математика», Московский авиационный институт (Национальный исследовательский университет) (МАИ), г. Москва, Российская Федерация, ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-2493-3617>, e-mail: avpanteleev@inbox.ru

****Ковтунов Сергей Сергеевич**, аспирант института «Авиационная техника», Московский авиационный институт (Национальный исследовательский университет) (МАИ), г. Москва, Российская Федерация, ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-7264-0694>, e-mail: kovtunov.99@inbox.ru

*****Ракитянский Владислав Максимович**, студент магистратуры института «Компьютерные науки и прикладная математика», Московский авиационный институт (Национальный исследовательский университет) (МАИ), г. Москва, Российская Федерация, ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-7894-7462>, e-mail: rymbelvg@gmail.com

1. ВВЕДЕНИЕ

При проектировании и производстве композитных изделий важно учитывать их механические свойства. При этом у полимерных композитных материалов (ПКМ) свойства могут существенно отличаться от свойств отдельных компонентов. Из-за невозможности получения свойств составляющих композитного материала экспериментальным путем, необходимо прогнозировать их свойства с помощью математических моделей и численных методов.

Одним из основных подходов к прогнозированию свойств ПКМ является микро-механическое моделирование, которое позволяет учитывать особенности микро-структуры композита и предсказывать его общие упругие свойства.

На рис. 1 (слева) изображен представительный элемент объема (ПЭО) полимерного композитного материала в микромасштабе, который состоит из нескольких компонентов (в рассматриваемом случае это углеродное волокно и эпоксидная матрица). Волокно является армирующей (усиливающей) составляющей, так как оно намного прочнее и жестче полимерной матрицы. Матрица, в свою очередь, выступает связующим элементом для удержания волокон в определенной конфигурации. Справа представлен однородный сплошной материал с анизотропными свойствами (анизотропные свойства варьируются в зависимости от направления, изотропные свойства одинаковы в любом из направлений).

Подход гомогенизации – это математический метод для определения обобщенных упругих свойств ПКМ. Этот метод используется для расчета упругих свойств материалов, состоящих из двух или более компонентов, имеющих разные упругие свойства. При использовании подхода гомогенизации, микроструктура композитного материала рассматривается как периодическая среда, которая состоит из матрицы и включений. С помощью математических соотношений, справедливых на микроуровне, определяются эффективные упругие свойства на макроуровне.

Подход гомогенизации позволяет получить аналитические формулы для определения эффективных упругих свойств композитного материала на основе свойств его компонентов и микроструктуры. Это позволяет оптимизировать дизайн композитных

материалов, прогнозировать их механические свойства и улучшать производственные процессы.

Задача заключается в том, чтобы найти упругие характеристики обобщенного материала, зная свойства поперечно-изотропного (в поперечном направлении в любой из точек свойства будут одинаковыми) волокна и изотропной матрицы.

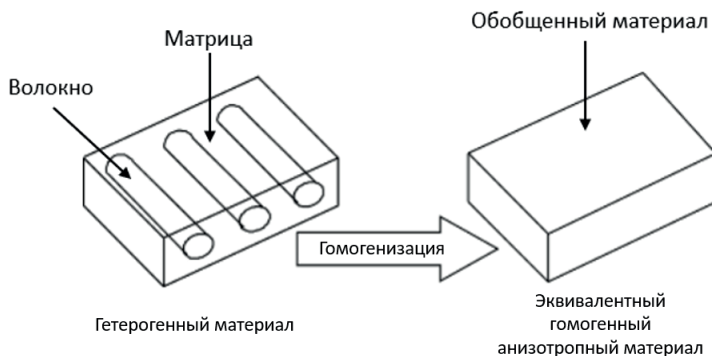


Рис. 1. Описание процесса гомогенизации

2. ФОРМИРОВАНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ПРОЦЕССА ГОМОГЕНИЗАЦИИ

Входными параметрами для реализации процесса гомогенизации являются упругие характеристики составляющих материала.

Упругие характеристики. На рис. 2 изображена диаграмма растяжения (зависимость напряжение-деформация). По закону Гука модуль упругости $E = \frac{\sigma}{\varepsilon}$ (его можно определить по рис. 2) равняется отношению действующего напряжения σ к деформации ε (для рассматриваемого далее прикладного примера в направлении 1 (см. рис. 7): $E_1 = \sigma_1 / \varepsilon_1$, где направление 1 – это направление вдоль волокон в однонаправленном материале).

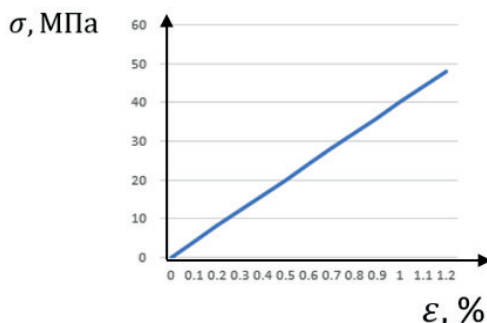


Рис. 2. График зависимости напряжение-деформация при растяжении



На рис. 3 показан типовой график зависимости продольной деформации от поперечной. Так как коэффициент Пуассона определяется отношением относительной поперечной деформации к продольной: $\nu_{12} = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}$, то на рис. 3 коэффициент Пуассона определяется тангенсом угла наклона изображенной кривой.

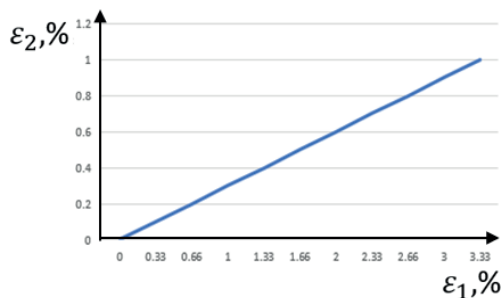


Рис. 3. График зависимости продольной деформации от поперечной

Механические характеристики составляющих композитного материала включают в себя упругие свойства поперечно-изотропного волокна и изотропной матрицы.

Упругие поперечно-изотропные волокна имеют осевой и поперечный модули упругости E_A, E_T, G_A, G_T , а также осевой и поперечный коэффициенты Пуассона ν_A, ν_T :

- осевой модуль упругости E_A (модуль упругости в продольном направлении):
$$E_A = \frac{\sigma_1}{\varepsilon_1};$$
- поперечный модуль упругости E_T (модуль упругости в поперечном направлении):
$$E_T = \frac{\sigma_2}{\varepsilon_2};$$
- осевой модуль сдвига G_A (зависимость касательного напряжения от сдвиговой деформации): $G_A = \frac{\tau_{12}}{\gamma_{12}}$. На рис. 4 показана диаграмма сдвига (зависимость линейная, т.е. угол сдвига пропорционален касательному напряжению).

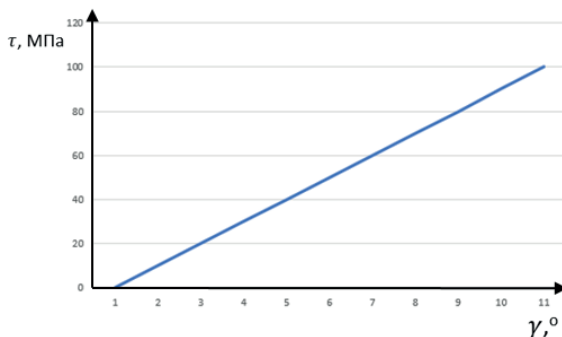


Рис. 4. Диаграмма сдвига

- поперечный модуль сдвига G_T : $G_T = \frac{E_2}{2(1+\nu_{23})}$;
- осевой коэффициент Пуассона ν_A : $\nu_A = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}$;
- поперечный коэффициент Пуассона ν_T : $\nu_T = \frac{\varepsilon_3}{\varepsilon_2}$.

Изотропную матрицу характеризуют:

- объемная доля волокна в материале V_f ; объемная доля (содержание) волокна в представительном элементе объема определяется отношением объема волокна (цилиндра) к объему куба: $V_f = \frac{\pi R^2 a}{abc}$. На рис. 5 изображен представительный элемент объема в виде куба для более наглядного изображения объемной доли волокна (синим цветом изображены волокна, зеленым цветом матрица).

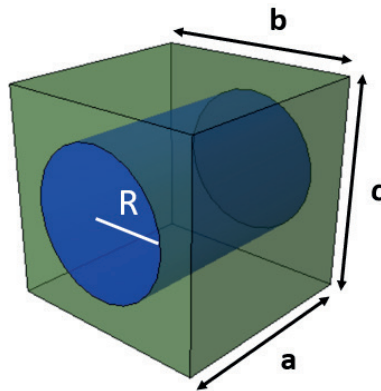


Рис. 5. Кубический представительный элемент объема (ПЭО)

- модуль упругости матрицы E_m ;
 - коэффициент Пуассона для матрицы ν_m .
- Например, в координатах 123 (см. рис. 9) у волокна индексу A соответствуют свойства $E_1, G_{12}, G_{13}, \nu_{12}, \nu_{13}$, а индексу $T - E_2, E_3, G_3, \nu_{23}$.

Напряжения. При деформировании в теле возникают силы, стремящиеся вернуть его в состояние равновесия. Эти силы называются внутренними напряжениями (нормальными и касательными), которые описываются тензором 2-го ранга – тензором напряжений. На рис. 6 изображен тензор напряжений кубического элемента. В описании формул используется сокращенная система обозначений Фохта для тензора второго ранга – индексы $11 \leftrightarrow 1, 22 \leftrightarrow 2, 33 \leftrightarrow 3, 12 \leftrightarrow 6, 13 \leftrightarrow 5, 23 \leftrightarrow 4$):

$$T_\Phi = (\sigma_1 \quad \sigma_2 \quad \sigma_3 \quad \sigma_4 \quad \sigma_5 \quad \sigma_6)^T,$$

где индексы тензора напряжений записаны исходя из двух принципов:



- повторяющиеся индексы записываются только один раз (например, 11 становится 1);
- если два индекса i и j отличаются, то для сокращенной записи можно использовать следующую формулу: $9 - i - j$ (например, 12 становится 6).

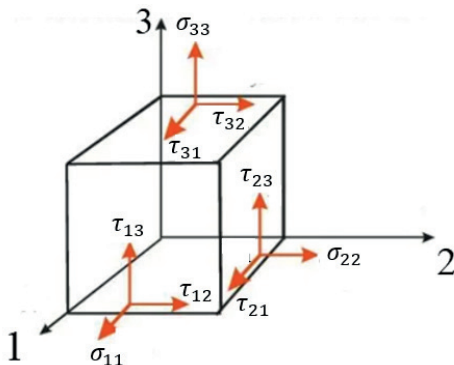


Рис. 6. Тензор кубического элемента

Тензор жесткости. Тензор жесткости – это математический объект, который описывает зависимость напряжений от деформаций в упругих материалах. Он является фундаментальной характеристикой упругих свойств материалов и используется в механике твердого тела для описания и предсказания поведения материалов при механических нагрузках.

Тензор жесткости определяет связь между деформациями и напряжениями в материале и может быть выражен через обратный тензор упругости \hat{N}^{-1} :

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl},$$

где σ_{ij} – компоненты тензора напряжений, ε_{kl} – компоненты тензора деформации, C_{ijkl} – компонент тензора жесткости. Тензор жесткости играет важную роль в механике



Рис. 7. Схематическое изображение того, как выглядит и выражается линейная деформация

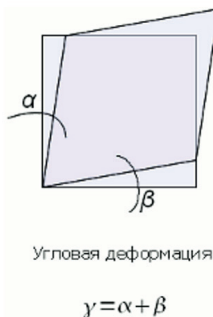


Рис. 8. Схематическое изображение того, как выглядит и выражается сдвиговая (угловая) деформация

твердого тела и используется для моделирования различных процессов, таких как деформации при растяжении, сжатии, изгибе, скручивании и т.д. [1].

Деформации. На рис. 7 показано, как выглядит и выражается линейная деформация.

На рис. 8 показано, как выглядит и выражается сдвиговая (угловая) деформация.

Опишем выходные параметры процесса гомогенизации. На рис. 9 слева показаны обозначения направлений ПКМ, которые взяты за основу при обозначении упругих характеристик материала. Справа показаны обозначения осей симметрии в ПКМ.

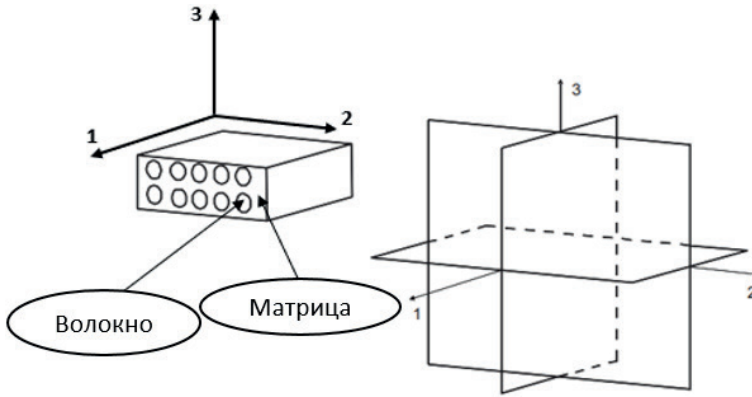


Рис. 9. Обозначение направлений и осей в ПКМ

В задаче рассматривается поперечно-изотропный материал гомогенизированного слоя (слоя с обобщенными свойствами), описываемый пятью константами:

$E_1, E_2, G_{12}, \nu_{12}, \nu_{23}$ (при этом $G_{13} = G_{12}, \nu_{13} = \nu_{12}$ и $G_{23} = \frac{1}{2} E_2 / (1 + \nu_{23})$):

- осевой модуль упругости слоя $E_1 = \sigma_1 / \varepsilon_1$ (физическая величина, характеризующая способность материала сопротивляться упругой деформации в продольном направлении 1);
- поперечный модуль упругости слоя $E_2 = \sigma_2 / \varepsilon_2$ (физическая величина, характеризующая способность материала сопротивляться упругой деформации в поперечном направлении);
- главный коэффициент Пуассона $\nu_{12} = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}$ (представляет собой отношение поперечных деформаций к продольным при действии напряжений вдоль направления 1);
- поперечный коэффициент Пуассона $\nu_{23} = \frac{\varepsilon_3}{\varepsilon_2}$ (представляет собой отношение деформаций в направлении 3 к деформации в направлении 2 при действии напряжений вдоль направления 1);
- модуль сдвига в плоскости слоя $G_{12} = \frac{\tau_{12}}{\gamma_{12}}$ равен отношению касательного напряжения τ_{12} к величине угла сдвига γ_{12} при действии касательных напряжений в плоскости 12 (на рис. 10 дана плоскость 12 с рис. 9).

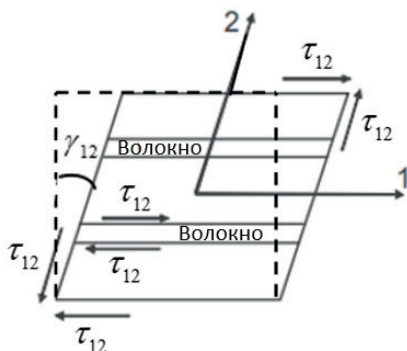


Рис. 10. Изображение сдвига в плоскости слоя

- модуль сдвига в плоскости слоя $G_{23} = \frac{\tau_{23}}{\gamma_{23}}$ равен отношению касательного напряжения τ_{23} к величине угла сдвига γ_{23} при действии касательных напряжений в плоскости 23 (на рис. 11 дана плоскость 23 с рис. 9).

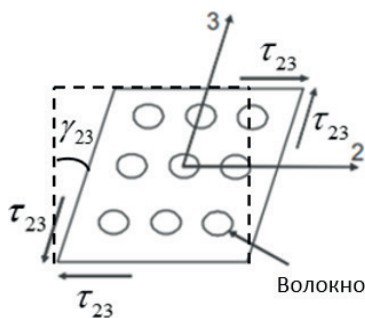


Рис. 11. Изображение поперечного сдвига

Для расчета гомогенизированных свойств однонаправленного слоя углепластика на основе свойств волокна и матрицы применяются формулы РММ (Periodic Microstructure Micromechanics). Это микромеханический метод, который используется для определения обобщенных механических свойств периодических микроструктур, который основывается на представлении периодической микроструктуры в виде повторяющейся единичной ячейки и на анализе поведения материала в этой ячейке [2]. Основные формулы РММ включают уравнения для эффективных упругих свойств (эффективный тензор жесткости и тензор релаксации).

Для определения эффективного тензора жесткости РММ использует теорию ячеек Хасена, которая описывает поведение материала внутри повторяющейся ячейки. Эффективный тензор жесткости определяется путем усреднения тензоров жесткости материалов, образующих ячейку, в соответствии с их объемными долями [3]. Эффективный тензор релаксации в РММ определяется путем анализа



релаксации напряжений в материале при малых деформациях. Тензор релаксации связывает временную зависимость деформаций в материале с временной зависимостью напряжений [4].

Получаемые с помощью формул РММ [6] характеристики являются предсказанными гомогенизированными свойствами однонаправленного слоя углепластика на основе свойств волокна и матрицы.

3. ФОРМАЛИЗАЦИЯ ПРОБЛЕМЫ КАК ЗАДАЧИ УСЛОВНОЙ ПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ ОПТИМИЗАЦИИ

Предполагается, что в результате эксперимента известны параметры

$$E_{1(\text{exp})}, E_{2(\text{exp})}, \nu_{12(\text{exp})}, \nu_{23(\text{exp})}, G_{12(\text{exp})}.$$

Объемная доля волокна V_f задана и не является искомым параметром.

Выбору подлежат следующие параметры: $E_A, E_T, E_m, G_A, G_T, \nu_A, \nu_T, \nu_m$. Множества их допустимых значений заданы отрезками.

В качестве целевой функции задачи используется

$$\Sigma = \lambda_1 \left(\frac{E_{1(\text{calc})} - E_{1(\text{exp})}}{E_{1(\text{exp})}} \right)^2 + \lambda_2 \left(\frac{E_{2(\text{calc})} - E_{2(\text{exp})}}{E_{2(\text{exp})}} \right)^2 + \lambda_3 \left(\frac{\nu_{12(\text{calc})} - \nu_{12(\text{exp})}}{\nu_{12(\text{exp})}} \right)^2 + \lambda_4 \left(\frac{\nu_{23(\text{calc})} - \nu_{23(\text{exp})}}{\nu_{23(\text{exp})}} \right)^2 + \lambda_5 \left(\frac{G_{12(\text{calc})} - G_{12(\text{exp})}}{G_{12(\text{exp})}} \right)^2,$$

характеризующая суммарное отклонение упругих характеристик слоя ПКМ $E_{1(\text{calc})}, E_{2(\text{calc})}, \nu_{12(\text{calc})}, \nu_{23(\text{calc})}, G_{12(\text{calc})}$, полученных расчетным путем от экспериментальных данных. Здесь $\lambda_1, \dots, \lambda_5$ – весовые коэффициенты, учитывающие важность учета каждого слагаемого и размерности входящих величин.

Требуется найти параметры $E_A, E_T, E_m, G_A, G_T, \nu_A, \nu_T, \nu_m$ сформированной модели материала, чтобы характеристики $E_1, E_2, \nu_{12}, \nu_{23}, G_{12}$ наилучшим образом совпали с результатами эксперимента, т.е. достигалось минимальное значение целевой функции на заданном параллелепипедном множестве допустимых решений.

Для решения задачи предлагается использовать самоорганизующиеся миграционные алгоритмы глобальной оптимизации, относящиеся к группе эволюционных метаэвристических методов [6–9].

Самоорганизующийся миграционный алгоритм (Self-Organizing Migrating Algorithm – SOMA) [7] может быть классифицирован, как эволюционный алгоритм оптимизации, основанный на самоорганизующемся поведении групп индивидов в социальном окружении. При решении задачи используются конечные наборы возможных решений, называемые популяциями, где x^j – индивид с номером j , NP – размер популяции. Самоорганизующийся миграционный алгоритм имитирует эволюцию начальной популяции и представляет собой итерационный



процесс, исследующий множество допустимых решений. Изначально популяция создается из индивидов со случайно сгенерированными координатами x_i из промежутка $[x_{i\min}, x_{i\max}]$ с помощью равномерного закона распределения. Далее начинаются миграционные циклы. Перед каждым циклом выявляется лидер – индивид с наилучшим значением целевой функции. В этих циклах все индивиды последовательно двигаются к лидеру по прямой их соединяющей, в том числе продвигаясь за него на некоторое расстояние вдоль той же прямой. При этом лидер остается неподвижным. Затем выбирается та позиция индивида, которой соответствует наилучшее значение целевой функции, полученное в процессе поиска, и она записывается в следующую популяцию. Алгоритм продолжается до того момента, пока разность значений целевой функции, соответствующих лидеру и худшему индивиду популяции, не станет меньше заранее заданного значения, или пока не реализуется максимальное число миграционных циклов.

При разработке модифицированного самоорганизующегося миграционного алгоритма оптимизации (MSOMA) использовалась базовая версия алгоритма SOMA [7–9]. Модификации заключаются в выделении среди индивидов, образующих популяцию, трех лидеров. Для каждого из членов популяции генерируются два клон с той же позицией. Тем самым порождаются три популяции, каждая из которых реализует миграционный цикл относительно своего лидера. Для всех членов популяции находятся наилучшие положения, достигнутые в течение цикла. В процессе поиска популяция регулярно обновляется за счет новых индивидов, генерируемых на множестве допустимых решений. Они замещают выбывающих индивидов с наихудшими значениями целевой функции. После выполнения условий окончания производится уточняющий поиск (миграционный цикл), в котором участвуют три оставшихся лидера популяции. В качестве решения предъявляется наилучший результат.

Для подсчета величины целевой функции предлагается использовать алгоритм, в котором использованы следующие обозначения:

V_f – заданная объемная доля волокна;

$E_{1(\text{exp})}, E_{2(\text{exp})}, \nu_{12(\text{exp})}, \nu_{23(\text{exp})}, G_{12(\text{exp})}$ – известные данные из эксперимента;

$E_A, E_T, \nu_A, \nu_T, G_A, G_T, E_m, \nu_m$ – изменяемые параметры;

$E_1, E_2, \nu_{12}, \nu_{23}, G_{12}$ – выходные параметры.

Значения используемых индексов: m – свойства матрицы, f – свойства волокна, A – осевой (Axial), T – поперечный (Transversal).

4. АЛГОРИТМ ВЫЧИСЛЕНИЯ ЗНАЧЕНИЯ ЦЕЛЕВОЙ ФУНКЦИИ

Шаг 1. Вычисление констант матрицы:

$$\lambda_m = \frac{E_m \nu_m}{(1 + \nu_m)(1 - 2\nu_m)} - \text{коэффициент Ламе}; \quad \mu_m = G_m = \frac{E_m}{2(1 + \nu_m)}.$$



Шаг 2. Вычисление коэффициентов (коэффициенты s_3, s_6, s_7 учитывают геометрию микроструктуры, включая геометрию включений и их геометрическое расположение). Используются формулы для цилиндрических волокон:

$$\begin{aligned} s_3 &= 0.49247 - 0.47603V_f - 0.02748V_f^2; \\ s_6 &= 0.36844 - 0.14944V_f - 0.27152V_f^2; \\ s_7 &= 0.12346 - 0.32035V_f + 0.23517V_f^2. \end{aligned}$$

Шаг 3. Вычисление коэффициентов \tilde{N}'_{ij} в тензоре жесткости поперечно-изотропного материала:

$$\tilde{N}' = \begin{pmatrix} \tilde{N}'_{11} & \tilde{N}'_{12} & \tilde{N}'_{13} & 0 & 0 & 0 \\ \tilde{N}'_{12} & \tilde{N}'_{22} & \tilde{N}'_{23} & 0 & 0 & 0 \\ \tilde{N}'_{13} & \tilde{N}'_{23} & \tilde{N}'_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \tilde{N}'_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \tilde{N}'_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \tilde{N}'_{66} \end{pmatrix}.$$

$$3.1. \Delta = \frac{1 - 2\nu_A^2 E_T / E_A - 2\nu_T^2 - 2\nu_A \nu_T E_T / E_A}{E_A E_T^2};$$

$$3.2. C'_{11} = \frac{1 - \nu_T^2}{E_T^2 \Delta};$$

$$3.3. C'_{22} = C'_{33} = \frac{1 - \nu_A^2 E_T / E_A}{E_A E_T \Delta};$$

$$3.4. C'_{12} = C'_{13} = \frac{\nu_A E_T / E_A + \nu_A \nu_T E_T / E_A}{E_T^2 \Delta};$$

$$3.5. C'_{23} = \frac{\nu_T + \nu_A^2 E_T / E_A}{E_A E_T \Delta};$$

$$3.6. C'_{44} = G_T = \frac{E_T}{2(1 + \nu_T)} = (C'_{22} - C'_{23}) / 2;$$

$$3.7. C'_{55} = C'_{66} = G_A.$$

Шаг 4. Вычислить коэффициенты a_1, \dots, a_4 для упрощенной записи компонент тензора жесткости:

$$\begin{aligned} 4.1. a_1 &= 4\mu_m^2 - 2\mu_m C'_{33} + 6\lambda_m \mu_m - 2C'_{11} \mu_m - 2\mu_m C'_{23} + C'_{23} C'_{11} + 4\lambda_m C'_{12} - \\ &- 2C'_{12}{}^2 - \lambda_m C'_{33} - 2C'_{11} \lambda_m + C'_{11} C'_{33} - \lambda_m C'_{23}; \end{aligned}$$



$$4.2. \quad a_2 = 8\mu_m^3 - \mu_m^2 C'_{33} + 12\mu_m^2 \lambda_m - 4\mu_m^2 C'_{11} - 2\mu_m C'^2_{23} + 4\mu_m \lambda_m C'_{23} + 4\mu_m C'_{11} C'_{33} - \\ - 8\mu_m \lambda_m C'_{33} - 4\mu_m C'^2_{12} + 2\mu_m C'^2_{33} - 4\mu_m C'_{11} \lambda_m + 8\mu_m \lambda_m C'_{12} + 2\lambda_m C'_{11} C'_{33} + 4C'_{12} C'_{23} \lambda_m - \\ - 4\lambda_m C'_{12} C'_{33} - 2\lambda_m C'_{11} C'_{23} - 2C'_{23} C'^2_{12} + C'^2_{23} C'_{11} + 2C'_{33} C'^2_{12} - C'_{11} C'^2_{33} + \lambda_m C'^2_{33} - \lambda_m C'^2_{23};$$

$$4.3. \quad a_3 = \frac{4\mu_m^2 + 4\lambda_m \mu_m - 2C'_{11} \mu_m - 2\mu_m C'_{33} - C'_{11} \lambda_m - \lambda_m C'_{33} - C'^2_{12} + C'_{11} C'_{33} + 2\lambda_m C'_{12}}{a_2} - \\ - \frac{s_3 - \frac{s_6}{2 - 2\nu_m}}{\mu_m};$$

$$4.4. \quad a_4 = - \frac{-2\mu_m C'_{23} + 2\lambda_m \mu_m - \lambda_m C'_{23} - C'_{11} \lambda_m - C'^2_{12} + 2\lambda_m C'_{12} + C'_{11} C'_{23}}{a_2} + \\ + \frac{s_7}{\mu_m (2 - 2\nu_m)}.$$

Шаг 5. Вычисление компонент тензора жесткости \tilde{N}^* для композита с цилиндрическими волокнами и объемной долей волокон V_f (использован метод разложения Фурье):

$$\tilde{N}^* = \begin{pmatrix} \tilde{N}_{11}^* & \tilde{N}_{12}^* & \tilde{N}_{13}^* & 0 & 0 & 0 \\ \tilde{N}_{12}^* & \tilde{N}_{22}^* & \tilde{N}_{23}^* & 0 & 0 & 0 \\ \tilde{N}_{13}^* & \tilde{N}_{23}^* & \tilde{N}_{33}^* & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \tilde{N}_{44}^* & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \tilde{N}_{55}^* & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \tilde{N}_{66}^* \end{pmatrix}.$$

$$5.1. \quad A = \left(\frac{(2\mu_m + 2\lambda_m - C'_{33} - C'_{23})(a_3^2 - a_4^2)}{a_1} + \frac{2(a_4 - a_3)(\lambda_m - C'_{12})^2}{a_1^2} \right)^{-1}.$$

$$5.2. \quad C_{11}^* = \lambda_m + 2\mu_m - \\ - V_f (-a_4^2 + a_3^2) \left(- \frac{(2\mu_m + 2\lambda_m - C'_{33} - C'_{23})(a_4^2 - a_3^2)}{a_1} + \frac{2(a_4 - a_3)(\lambda_m - C'_{12})^2}{a_1^2} \right)^{-1}.$$

$$5.3. \quad C_{12}^* = \lambda_m + V_f \left(\frac{(\lambda_m - C'_{12})(a_4 - a_3)}{a_1} \right) A.$$

$$5.4. \quad C_{22}^* = \lambda_m + 2\mu_m - V_f \left(\frac{(2\mu_m + 2\lambda_m - C'_{33} - C'_{23})a_3}{a_1} + \frac{(\lambda_m - C'_{12})^2}{a_1^2} \right) A.$$

$$5.5. \quad C_{23}^* = \lambda_m + V_f \left(\frac{(2\mu_m + 2\lambda_m - C'_{33} - C'_{23})a_4}{a_1} + \frac{(\lambda_m - C'_{12})^2}{a_1^2} \right) A.$$



$$5.6. C_{44}^* = \mu_m - V_f \left(\frac{2}{2\mu_m - C'_{22} + C'_{23}} - \left(2S_3 - \frac{4S_7}{2 - 2\nu_m} \right) \mu_m^{-1} \right)^{-1}.$$

$$5.7. C_{66}^* = \mu_m - V_f \left((\mu_m - C'_{66})^{-1} - \frac{S_3}{\mu_m} \right)^{-1}.$$

Шаг 6. Вычисление элементов матрицы: $\tilde{N} = \begin{pmatrix} \tilde{N}_{11} & \tilde{N}_{12} & \tilde{N}_{13} & 0 & 0 & 0 \\ \tilde{N}_{12} & \tilde{N}_{22} & \tilde{N}_{23} & 0 & 0 & 0 \\ \tilde{N}_{13} & \tilde{N}_{23} & \tilde{N}_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \tilde{N}_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \tilde{N}_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \tilde{N}_{66} \end{pmatrix}$

$$6.1. C_{11} = C_{11}^*;$$

$$6.2. C_{12} = C_{13} = C_{12}^*;$$

$$6.3. C_{22} = C_{33} = \frac{3}{4}C_{22}^* + \frac{1}{4}C_{23}^* + \frac{1}{4}C_{44}^*;$$

$$6.4. C_{23} = \frac{1}{4}C_{22}^* + \frac{3}{4}C_{23}^* - \frac{1}{4}C_{44}^*;$$

$$6.5. C_{44} = C_{44}^* = \frac{1}{2}(C_{22} - C_{23});$$

$$6.6. C_{55} = C_{66} = C_{66}^*.$$

Шаг 7. Нахождение обратной матрицы вида:

$$S = C^{-1} = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & 0 & 0 & 0 \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} & 0 & 0 & 0 \\ S_{13} & S_{23} & S_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_{66} \end{pmatrix}$$

(далее используются значения $S_{12}, S_{22}, S_{23}, S_{44}, S_{55}$).

Шаг 8. Вычисление выходных параметров:

$$8.1. E_{1(calc)} = 1/S_{11};$$

$$8.2. E_{2(calc)} = E_{3(calc)} = 1/S_{22};$$

$$8.3. \nu_{12(calc)} = \nu_{13(calc)} = -S_{12}/S_{11};$$

$$8.4. \nu_{23(calc)} = -S_{23}/S_{22};$$



$$8.5. G_{12(calc)} = G_{13(calc)} = 1 / S_{55} ;$$

$$8.6. G_{23(calc)} = \frac{E_2}{2(1 + \nu_{23})} = 1 / S_{44} .$$

Шаг 9. Вычисление значения целевой функции

$$\Sigma = \lambda_1 \left(\frac{E_{1(calc)} - E_{1(exp)}}{E_{1(exp)}} \right)^2 + \lambda_2 \left(\frac{E_{2(calc)} - E_{2(exp)}}{E_{2(exp)}} \right)^2 + \lambda_3 \left(\frac{\nu_{12(calc)} - \nu_{12(exp)}}{\nu_{12(exp)}} \right)^2 + \lambda_4 \left(\frac{\nu_{23(calc)} - \nu_{23(exp)}}{\nu_{23(exp)}} \right)^2 + \lambda_5 \left(\frac{G_{12(calc)} - G_{12(exp)}}{G_{12(exp)}} \right)^2 .$$

5. ПРИКЛАДНАЯ ЗАДАЧА

Предполагается, что в результате эксперимента известны параметры

$$E_{1(exp)}, E_{2(exp)}, \nu_{12(exp)}, \nu_{23(exp)}, G_{12(exp)},$$

и объемная доля волокна V_f (таблица 1).

Ограничения на искомые переменные (параметры) заданы в виде отрезков изменения их возможных значений:

$$E_A \in [200000, 600000] \text{ МПа}; E_T \in [8000, 30000] \text{ МПа}; G_A \in [5000, 90000] \text{ МПа};$$

$$\nu_A \in [0,15; 0,4]; \nu_T \in [0,2; 0,4]; E_m \in [3000, 10000] \text{ МПа}; \nu_m \in [0,2; 0,4].$$

Таблица 1

Экспериментальные значения параметров					Объемная доля волокна
E_1 , МПа	E_2 , МПа	ν_{12}	ν_{23}	G_{12} , МПа	V_f
337682	6918	0,3	0,52	4755	0,62

Известно решение поставленной задачи, полученное эмпирически [10].

Таблица 2

Свойства волокна					Свойства матрицы	
E_A , МПа	E_T , МПа	G_A , МПа	ν_A	ν_T	E_m , МПа	ν_m
517000	11158	10636	0,269	0,306	4629,558	0,363

Случай 1. Положим, что все слагаемые в целевой функции имеют равную важность, т.е. $\lambda_1 = \dots = \lambda_5 = 1$. Из-за разного масштаба параметров, от которых зависит целевая функция, и особенностей работы миграционных алгоритмов применяется метод нормализации. Предполагается, что значения всех независимых переменных $x_i^{norm}, i = 1, \dots, n$, принадлежат универсальному отрезку $[0,1]$. Процедура поиска производится на параллелепипедном множестве допустимых решений, размерность



которого определяется числом независимых переменных (в решаемой задаче $n = 7$). При подсчете величины целевой функции значения всех переменных преобразуются к исходным масштабам:

$$x_i = x_{\min} + x_i^{norm} (x_{\max} - x_{\min}), i = 1, \dots, n.$$

Результаты, полученные при помощи алгоритма SOMA (табл. 3): минимальное значение целевой функции $1,767 \cdot 10^{-17}$, затраченное время 283,7 с.

Таблица 3

Свойства волокна					Свойства матрицы	
E_A , МПа	E_T , МПа	G_A , МПа	ν_A	ν_T	E_m , МПа	ν_m
512146	13116	20442	0,269	0,228	3838,357	0,363

Результаты, полученные при помощи алгоритма MSOMA (табл. 4): минимальное значение целевой функции $1,433 \cdot 10^{-18}$, затраченное время: 935,5 с.

Таблица 4

Свойства волокна					Свойства матрицы	
E_A , МПа	E_T , МПа	G_A , МПа	ν_A	ν_T	E_m , МПа	ν_m
484359	13030	80527	0,235	0,311	3232,095	0,385

Заметим, что полученные значения параметра G_A сильно отличаются от эмпирического решения и друг от друга, поэтому в случае 2 предлагается использовать подход, связанный с добавлением регуляризирующего слагаемого в целевую функцию, влияние которого последовательно уменьшается.

Случай 2. Добавим регуляризирующее слагаемое с весовым коэффициентом λ_6 . Тогда целевая функция имеет вид $\Sigma^{reg} = \Sigma + \lambda_6 [G_A - G_A^{zad}]^2$, где $\lambda_6 = 0,1$; $G_A^{zad} = 10636$ МПа.

Результаты, полученные при помощи алгоритма SOMA (табл. 5): минимальное значение целевой функции $9,709 \cdot 10^{-24}$, затраченное время 1062 с.

Таблица 5

Свойства волокна					Свойства матрицы	
E_A , МПа	E_T , МПа	G_A , МПа	ν_A	ν_T	E_m , МПа	ν_m
455936	9111	10635	0,260	0,369	5017,922	0,347

Результаты, полученные при помощи алгоритма MSOMA (табл. 6): минимальное значение целевой функции $1,625 \cdot 10^{-20}$, затраченное время 1851,7 с.

Таблица 6

Свойства волокна					Свойства матрицы	
E_A , МПа	E_T , МПа	G_A , МПа	ν_A	ν_T	E_m , МПа	ν_m
485647	10237	10635	0,278	0,305	4997,997	0,342



Случай 3. Также исследован подход, при котором лучшая особь мигрирующей популяции из предыдущего запуска алгоритмов SOMA и MSOMA добавляется в начальную популяцию для следующего запуска, а значение коэффициента $\lambda_0 = 0,01$ на пяти последовательных итерациях каждый раз уменьшается в 3 раза.

Результаты, полученные при помощи алгоритма SOMA (табл. 7): минимальное значение целевой функции $3,919 \cdot 10^{-32}$, затраченное время 8301 с.

Таблица 7

Свойства волокна					Свойства матрицы	
E_A , МПа	E_T , МПа	G_A , МПа	ν_A	ν_T	E_m , МПа	ν_m
512495	11418	10636	0,291	0,225	4971,129	0,335

Результаты, полученные при помощи алгоритма MSOMA (табл. 8): минимальное значение целевой функции: $1,139 \cdot 10^{-17}$, затраченное время 4157,7 с.

Таблица 8

Свойства волокна					Свойства матрицы	
E_A , МПа	E_T , МПа	G_A , МПа	ν_A	ν_T	E_m , МПа	ν_m
505776	11102	10636	0,288	0,248	4979,134	0,337

Случай 4. Предположим, что значение параметра $G_{12} = 4755$ МПа задано (найде-но предварительно с помощью других подходов к решению задачи гомогенизации).

Результаты, полученные при помощи алгоритма SOMA (табл. 9): минимальное значение целевой функции $3,459 \cdot 10^{-31}$, затраченное время 1049,5 с.

Таблица 9

Свойства волокна					Свойства матрицы	
E_A , МПа	E_T , МПа	G_A , МПа	ν_A	ν_T	E_m , МПа	ν_m
516018	11591	10636	0,293	0,212	4966,414	0,333

Результаты, полученные при помощи алгоритма MSOMA (табл. 10): минимальное значение целевой функции $1,709 \cdot 10^{-25}$, затраченное время 2703,2 с.

Таблица 10

Свойства волокна					Свойства матрицы	
E_A , МПа	E_T , МПа	G_A , МПа	ν_A	ν_T	E_m , МПа	ν_m
504938	11065	10636	0,288	0,251	4980,057	0,337

Выполненные исследования позволяют сделать вывод о том, что определение параметра G_A является математически некорректной задачей. Использование априорной информации о значении этого параметра позволяет получить решение с применением идей регуляризации. При фиксировании значения G_A решение задачи



различными методами оптимизации становится устойчивым к изменению начальных данных и дает удовлетворительный по точности результат при приемлемых вычислительных затратах.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Получение упругих свойств отдельных компонентов ПКМ позволяет решить проблему моделирования материала в микромасштабе, что в свою очередь позволяет учитывать особенности микроструктуры ПКМ и предсказывать их общие упругие свойства.

Кроме того, знание упругих свойств отдельных компонентов важно для эффективного выбора компонентов ПКМ при проектировании и производстве композитных изделий.

Упругие свойства отдельных компонентов могут быть использованы для определения наилучших условий изготовления композита и для контроля качества при производстве композитных изделий.

Получение таких параметров, как E_A , E_T , G_A , G_T , ν_A , ν_T , на данном этапе развития научно-технического прогресса невозможно. Предложенная методика математического моделирования и параметрической оптимизации с помощью миграционных метаэвристических алгоритмов позволяет прогнозировать характеристики композитного материала с приемлемой точностью.

Литература

1. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теория упругости. М.: Наука, 1987. – 247 с.
2. Hill, R. The elastic behavior of a crystalline aggregate. Proc. Phys. Soc. London, 65:349–354, 1952.
3. Torquato S. Random Heterogeneous Materials: Microstructure and Macroscopic Properties. Springer, 2002.
4. Sanchez-Palencia E. Non-Homogeneous Media and Vibration Theory. Springer-Verlag, 1980.
5. Barbero E.J. Introduction to Composite Materials Design, Second Edition. CRC Press, 2018. ISBN 978-1-4987-5983-9.
6. Davendra D., Zelinka I. Self-organizing migrating algorithm. Methodology and implementation // Studies in Computational Intelligence, Springer, 2016, Vol. 626.
7. Пантелеев А.В., Скавинская Д.В. Метаэвристические стратегии и алгоритмы глобальной оптимизации. - Факториал, 2023. – 564 с.
8. Pantelev A.V., Rakitianskii V.M. Application of the modified self-organizing migration algorithm MSOMA in optimal open-loop control problems // Journal of Physics: Conference Series. – 2021. Vol. 1925. Id 012017.
9. Пантелеев А.В., Ракитянский В.М. Разработка модифицированного самоорганизующегося миграционного алгоритма оптимизации (MSOMA) // Моделирование и анализ данных. – 2020. № 2. – С. 62–73.
10. Cabrera Barbero, Javier, “Thermal-Fatigue and Thermo-Mechanical Equivalence for Transverse Cracking Evolution in Laminated Composites” (2018). Graduate Theses, Dissertations, and Problem Reports. 3715.



Methodology for Determining the Properties of Composite Material Components Based on Migration Algorithms of Global Optimization

Andrey V. Panteleev*

Moscow Aviation Institute (National Research University) (MAI), Moscow, Russia

ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-2493-3617>

e-mail: avpanteleev@inbox.ru

Sergei S. Kovtunov**

Moscow Aviation Institute (National Research University) (MAI), Moscow, Russia

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-7264-0694>

e-mail: kovtunov.99@inbox.ru

Vladislav M. Rakitianskii***

Moscow Aviation Institute (National Research University) (MAI), Moscow, Russia

ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-7894-7462>

e-mail: rymbelv@gmail.com

A mathematical model has been formed for calculating the elastic characteristics of a generalized material based on the properties of a transversely isotropic fiber and an isotropic matrix. The problem of choosing the parameters of materials is formulated as the problem of minimizing the objective function on a parallelepiped set of admissible solutions. To solve it, classical and modified self-organizing migration algorithms of global optimization belonging to the group of metaheuristic are applied. Recommendations on the selection of the best parameter values are obtained.

Keywords: composite material, homogenization, fiber, matrix, migration algorithm, optimization method.

For citation:

Panteleev A.V., Kovtunov S.S., Rakitianskii V.M. Methodology for Determining the Properties of Composite Material Components Based on Migration Algorithms of Global Optimization. *Modelirovanie i analiz dannykh = Modelling and Data Analysis*, 2023. Vol. 13, no. 2, pp. 123–141. DOI: 10.17759/mda.2023130207 (In Russ., abstr. in Engl.).

***Andrey V. Panteleev**, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Head of the Department of Mathematics and Cybernetics, Institute “Computer Science and Applied Mathematics”, Moscow Aviation Institute (National Research University) (MAI), Moscow, Russia, ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-2493-3617>, e-mail: avpanteleev@inbox.ru

****Sergei S. Kovtunov**, Postgraduate Student of the Institute “Aviation Engineering”, Moscow Aviation Institute (National Research University) (MAI), Moscow, Russia, ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-7264-0694>, e-mail: kovtunov.99@inbox.ru

*****Vladislav M. Rakitianskii**, Master’s Degree Student of the Institute “Computer Science and Applied Mathematics”, Moscow Aviation Institute (National Research University) (MAI), Moscow, Russia, ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-7894-7462>, e-mail: rymbelv@gmail.com



References

1. Landau L.D., Lifshits E.M. Theory of elasticity. Moscow: *Nauka*, 1987. – 247 p. (In Russ.).
2. Hill, R. The elastic behavior of a crystalline aggregate. *Proc. Phys. Soc.* London, 65:349–354, 1952.
3. Torquato S. Random Heterogeneous Materials: Microstructure and Macroscopic Properties. *Springer*, 2002.
4. Sanchez-Palencia E. Non-Homogeneous Media and Vibration Theory. *Springer-Verlag*, 1980.
5. Barbero E.J. Introduction to Composite Materials Design, Second Edition. *CRC Press*, 2018. ISBN 978-1-4987-5983-9.
6. Davendra D., Zelinka I. Self-organizing migrating algorithm. Methodology and implementation // *Studies in Computational Intelligence, Springer*, 2016, Vol. 626.
7. Pantelev A.V., Skavinskaya D.V. Metaheuristic strategies and algorithms of global optimization. *Factorial*, 2023.– 564 p. (In Russ.).
8. Pantelev A.V., Rakitianskii V.M. Application of the modified self-organizing migration algorithm MSOMA in optimal open-loop control problems // *Journal of Physics: Conference Series*. – 2021. Vol. 1925. Id 012017.
9. Pantelev A.V., Rakityansky V.M. Development of a modified self-organizing migration optimization algorithm (MSOMA) // *Modeling and data analysis*. – 2020. No. 2. – pp. 62–73. (In Russ.).
10. Cabrera Barbero, Javier, “Thermal-Fatigue and Thermo-Mechanical Equivalence for Transverse Cracking Evolution in Laminated Composites” (2018). Graduate Theses, *Dissertations and Problem Reports*. 3715.

Получена 21.04.2023

Received 21.04.2023

Принята в печать 19.05.2023

Accepted 19.05.2023