

1

**МОДЕЛИРОВАНИЕ
И АНАЛИЗ ДАННЫХ**

НАУЧНЫЙ ЖУРНАЛ



2016

ISSN 2219-3758

МОДЕЛИРОВАНИЕ И АНАЛИЗ ДАННЫХ

MODELLING AND DATA ANALYSIS

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

Главный редактор – Л.С. Куравский

Члены редакционной коллегии – В.И. Алхимов, С.Л. Артёменков, В.А. Барабанщиков, С.Н. Баранов, М.В. Воронов, А.В. Горбатов, В.К. Захаров, Л.М. Либкин (*Великобритания*), О.В. Митина, Д.В. Ушаков, Х. Холлинг (*Германия*), Г.А. Юрьев, А.Д. Яшин

РЕДАКЦИОННЫЙ СОВЕТ

Председатель редакционного совета – А.В. Горбатов

Члены редакционного совета – В.А. Барабанщиков, П. Бентлер (*США*), Л.С. Куравский, Л.М. Либкин (*Великобритания*), А.А.Марголис, В.В. Рубцов, Д. Фрэнсис (*США*), Х. Холлинг (*Германия*)

Ответственный секретарь – Н.Е. Юрьева

Издаётся с 2011 года

Учредитель

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Московский государственный психолого-педагогический университет»

Адрес редколлегии:

г. Москва, ул. Сретенка, 29, факультет информационных технологий

Тел.: +7 (499) 167-66-74

E-mail: mad.mgppu@gmail.com

Журнал зарегистрирован в Государственном комитете РФ по печати.

Свидетельство о регистрации средств массовой информации

ПИ № ФС77-52058 от 7 декабря 2012 года

ISSN 2219-3758

© ФГБОУ ВО «Московский государственный психолого-педагогический университет», 2016

Все права защищены. Любая часть этого издания не может быть воспроизведена в какой бы то ни было форме и какими бы то ни было средствами без письменного разрешения редакционной коллегии.

Правила оформления рукописей, направляемых в редакцию журнала, высылаются по запросу по электронной почте.

СОДЕРЖАНИЕ CONTENTS

Оценка качества образовательных услуг: моделирование на базе теории нечетких множеств и нечеткой логики А.И. Митин, Т.А. Филичева Estimating of quality of educational services: modeling on the base of fuzzy sets theory and fuzzy logic A.I. Mitin, T.A. Filicheva	3
Параллельное определение информации и энергии. Параллелизм между информационными и энергетическими производящими системами В.К. Захаров Parallel definition of information and energy. Parallelism between information and energy producing systems V.K. Zakharov	21
Модель оперативного планирования деятельности предприятия М.В. Воронов, А.В. Аладко Model of operational planning of enterprise activity M.V. Voronov, A.V. Aladko	37
Аспекты моделирования и особые свойства сложных систем С.Л. Артеменков The aspects of modelling and specific characteristics of complex systems S.L. Artemenkov	47
Эрлангенская программа Клейна и геометрия треугольника (часть II) М.Е. Степанов Erlangen program of Klein and geometry of a triangle (part II) M.E. Stepanov	60
Эргономическое проектирование интегральной индикации в следящей систем Д.Н. Булгаков, Н.Н. Столяров The ergonomical projection of integrated display system in a tracking system D. N. Bulgakov, N.N. Stolyarov	116
АВТОРЫ AUTHORS	122

ОЦЕНКА КАЧЕСТВА ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫХ УСЛУГ: МОДЕЛИРОВАНИЕ НА БАЗЕ ТЕОРИИ НЕЧЕТКИХ МНОЖЕСТВ И НЕЧЕТКОЙ ЛОГИКИ

А.И. Митин, Т.А. Филичева

В статье представлены задачи оценки текущего состояния качества образовательных услуг, описана нечетко-логические и нечетко-множественные модели, положенные в основу информационно-аналитической системы мониторинга качества образовательных услуг, которая обеспечивает решение экспертно-аналитических задач, формирование рекомендаций по повышению качества для администрации образовательного учреждения.

The article presents the problem of estimating the current state of quality of educational services, describes the information-analytical system of monitoring of quality of educational services, which provides the solution of expert and analytical tasks, formulation of recommendations for quality improvement for the administration of educational institutions

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА

Нечеткое множество, информационно-аналитическая система, информационное обеспечение, система качества, образовательная система, иерархическая структура, производственная модель.

1. ВВЕДЕНИЕ

Затруднения в развитии отечественной системы профессиональной подготовки кадров отчасти объясняются сложностью данной социальной системы, состояние которой определяется не только результатами учебной деятельности (внутренними показателями), но и результатами внешних воздействий со стороны изменяющегося рынка труда [1]. Отдельной проблемой профессиональной подготовки кадров, актуализирующейся в настоящее время, является отсутствие действенной системы мониторинга ее качества и эффективности.

Основной сложностью мониторинга качества образовательных услуг является слабая формализованность многих оценок качества образовательной деятельности и недостаточность стандартных мониторинговых процедур (которые оценивают типовой набор лицензионно-аккредитационных показателей) для комплексной оценки качества образовательных услуг.

В некоторых работах (А.А. Добряков, В.М. Милова, В.И. Майорова, М.М. Поташник) описываются подходы к формализации таких оценок (в основном, на базе нечетко-множественного подхода) для подготовки специалистов инженерного профиля [2, 3, 4]. Однако напрямую распространять эти подходы на оценку качества профессиональной подготовки специалистов других отраслей затруднительно в силу особенностей, связанных с

необходимостью учета социальной активности выпускников, их карьерного роста, обучения на послеечебной фазе. Таким образом, формализация мониторинговых оценок и оптимизация мониторинговых процедур применительно к образовательной деятельности, а также их реализация в виде информационно-аналитических систем мониторинга качества образования требуют активного развития и постоянного совершенствования.

Анализ работ по исследованию факторов, влияющих на качество образовательных систем [2, 3, 4], приводит к выводу о необходимости применения в данной области методов теории нечетких множеств и нечеткой логики с возможностью осуществления перехода от классических вероятностных моделей и экспертных оценок к нечетко-множественным описаниям.

Эта необходимость обуславливается тем, что внешние факторы, не управляемые со стороны образовательного учреждения, создают дополнительную неопределенность анализируемой информации, которая порождает ограничения возможностей однозначной идентификации текущих состояний и прогнозирования будущих требований к специалистам.

Далее под мониторингом качества образовательных услуг будем понимать дискретный во времени процесс (включенный в информационную систему образовательного учреждения) обоснованного диагностико-прогностического слежения за степенью удовлетворенности качеством образовательных услуг, за степенью достижения целей в области качества, а также за потенциальными причинами рисков снижения качества. Полученные в результате мониторинга данные представляются администрации образовательного учреждения для принятия стратегических и оперативных решений.

2. МОДЕЛИРОВАНИЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ

В целях формализации мониторинга качества образовательных услуг и выполнения информационного моделирования образовательная деятельность рассматривается в виде *иерархической (древовидной) структуры* (рис. 1).

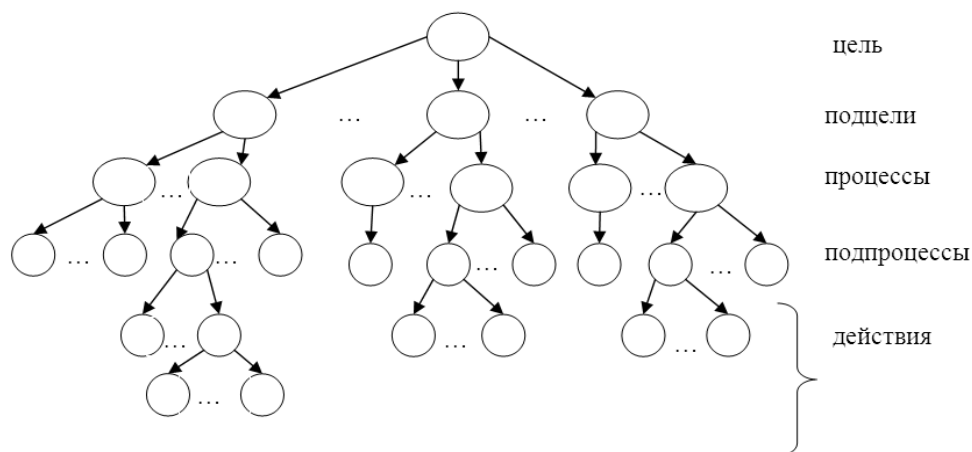


Рис. 1. Иерархическая структура образовательного процесса

В соответствии с правилом организации образовательной деятельности во всех вершинах дерева протекают определенные процессы, подпроцессы и действия (планирование, разработка программ, реализация программ, формирование отчетности по результатам образовательной деятельности и т.д.), измерение показателей которых позволяет оценить степень достижения поставленных подцелей в области качества образовательных услуг [5, 6]. Качество всей профессиональной подготовки при этом соответствует степени достижения цели в корне иерархической (древовидной) структуры.

В некоторый момент t функционирования образовательных процессов, который задан дискретно с учетом частоты измерений, каждая вершина v дерева с непосредственными по-

томками одного уровня $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ характеризуется своим состоянием, которое задаётся набором переменных $\{\alpha, \tau, \varphi\}$, где α – показатель степени завершенности процесса; τ – время, оставшееся до завершения процесса в вершине; φ – степень достижения цели процесса.

Показатель степени завершенности α количественно определяется как *доля соответствия показателям*, характеризующим качество образовательных услуг (прежде всего, лицензионно-аккредитационным). Показатель степени завершенности для какой-либо вершины текущего уровня вычисляется как сумма показателей элементов для предыдущего (ниже расположенного) уровня.

Для оценки степени достижения цели в подчиненной вершине v_i вводится лингвистическая переменная «Степень достижения цели процесса» с терм-множеством {«цель достигнута», «высокая степень достижения цели», «средняя степень достижения цели», «низкая степень достижения цели», «цель может быть не достигнута»}. Степень достижения цели в области качества образовательных услуг в корне иерархической (древовидной) структуры определяется на основании значений показателей подцелей, целей процессов, подпроцессов и действий у подчиненных вершин и рассчитывается в соответствии с *принципом обобщения*, введенным Л. Заде.

Показатели эффективности работы образовательных учреждений высшего образования сформированы с учетом аккредитационных показателей и составляют перечень *количественных* характеристик качества образовательных услуг, в котором учитываются уровень научных и научно-педагогических кадров, результаты учебной и научной деятельности, финансовые показатели [5, 6].

Следует учесть, что не каждой вершине дерева образовательных услуг может быть сопоставлен количественный показатель. В частности, удовлетворенность качеством образовательных услуг выпускников и работодателей может быть измерена только нечетко в виде понятий естественного языка (через анкетные опросы выпускников по удовлетворенности качеством образовательных услуг, анкетные опросы работодателей по удовлетворенности качеством подготовки выпускников, анкетные опросы сотрудников и ППС по удовлетворенности качеством образовательных услуг) в рамках стандартных мониторинговых процедур.

3. ПРОДУКЦИОННАЯ МОДЕЛЬ ОЦЕНКИ КАЧЕСТВА ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫХ УСЛУГ И СТЕПЕНИ ДОСТИЖЕНИЯ ЦЕЛИ

Для решения задачи оценки качества образовательных услуг и степени достижения цели в области качества используется нечеткая продукционная модель с набором правил, для формирования которых используются входные переменные t, τ, α и выходная переменная φ .

Входная переменная τ представляет время, оставшееся до завершения процесса, с терм-множеством $T1 = \{\text{«опережение»}, \text{«по плану»}, \text{«отставание»}\}$. Входная переменная t представляет этап выполнения процесса с терм-множеством $T2 = \{\text{«начало»}, \text{«в процессе»}, \text{«завершение»}\}$. Входная переменная α представляет долю соответствия показателям, характеризующим качество образовательных услуг с терм-множеством $T3 = \{\text{«полностью»}, \text{«более половины»}, \text{«соответствует»}, \text{«менее половины»}, \text{«не соответствует»}\}$. Выходной переменной φ является лингвистическая переменная «Степень достижения цели процесса» с терм-множеством $T4 = \{\text{«цель достигнута»}, \text{«высокая степень достижения цели»}, \text{«средняя степень достижения цели»}, \text{«низкая степень достижения цели»}, \text{«цель может быть не достигнута»}\}$. Графики функций принадлежности для переменных t и φ представлены на рис. 2 и 3. В зависимости от степени завершения действия, подпроцесса, процесса в соответствии с представлением образовательной деятельности в виде иерархической структуры (раздел 1) на основании функции принадлежности термов выходной переменной φ выдвигается предположение о завершении процесса и степени достижения цели в области качества.

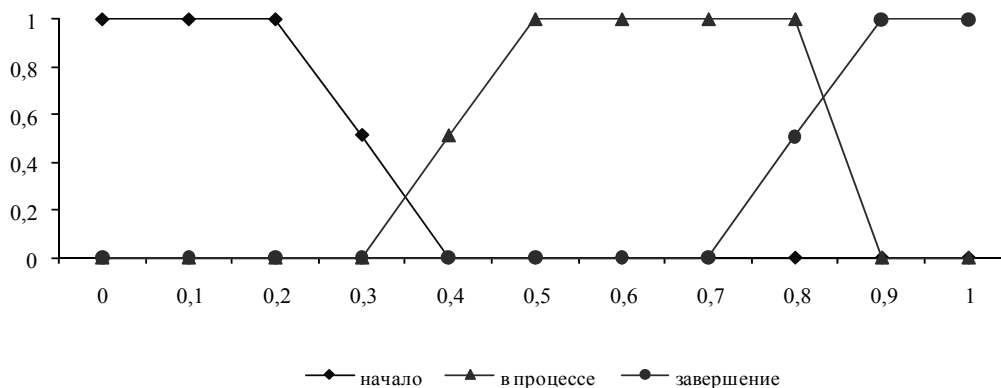


Рис. 2. Функции принадлежности термов входной переменной t

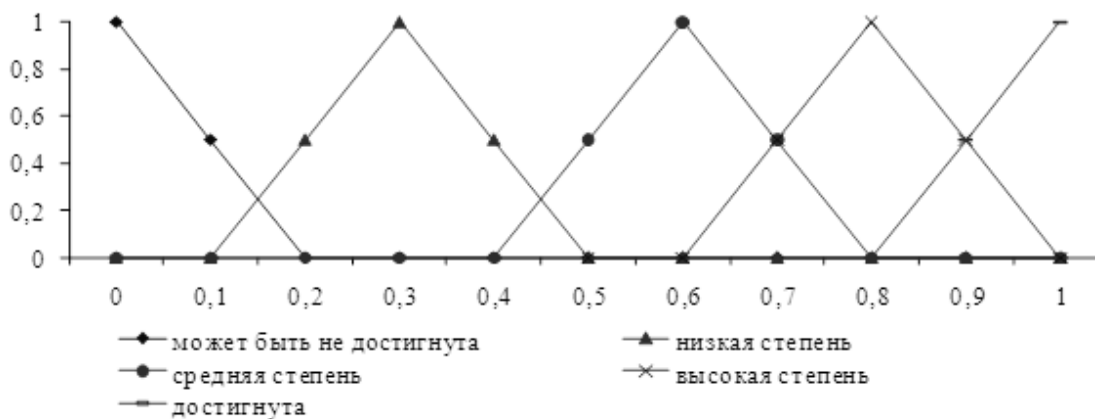


Рис. 3. Функции принадлежности термов выходной переменной ϕ

Построенная модель в виде совокупности нечетких продукционных правил позволяет по заданным значениям входных переменных t , τ и α определить выходное значение переменной ϕ и сделать вывод о степени завершения процесса в плане достижения его цели.

Для осуществления нечёткого логического вывода (определения взаимосвязей между входными и выходной переменными) используется совокупность продукционных правил, которая сформирована перебором всех допустимых условий / следствий. Всего сформировано 30 нечетких продукционных правил (типа *ЕСЛИ* <оценка производится на начальном этапе выполнения процесса> *И* <процесс выполняется по плану> *И* <значения основных показателей более половины> *ТО* <высокая степень достижения цели процесса>). При реализации применяется алгоритм нечёткого логического вывода Мамдани [7], поскольку значения как входных, так и выходной переменных заданы нечеткими множествами. База знаний (в виде совокупности нечетких продукционных правил) формируется экспертами предметной области, в качестве которых при апробации данной модели выступили уполномоченные по качеству и руководители учебно-методических отделов вузов.

4. МОДЕЛЬ ОЦЕНКИ УДОВЛЕТВОРЕННОСТИ КАЧЕСТВОМ ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫХ УСЛУГ

В современном подходе к содержанию качества образования одним из основных критериев выступает степень удовлетворенности различных участников образовательного процесса

предоставляемыми образовательным учреждением образовательными услугами и степень достижения поставленных в образовании стратегических целей, направленных на решение проблем с кадрами в соответствующей отрасли. Развитие информационно-аналитического обеспечения мониторинга качества образования призвано обеспечить гибкость и эффективность управления образовательным учреждением, оперативность реагирования на вызовы современного рынка – как со стороны работодателей, так и со стороны потребителей образовательных услуг (общества, государства).

При разработке данной модели определены субъекты удовлетворенности качеством образовательных услуг (рис. 4), классифицированные по двум укрупненным группам (потребители, сотрудники) с последующей детализацией. При детализации осуществляется дальнейшая классификация по виду потребностей (внутренние и внешние) и ожиданий (для потребителей), по типу или характеру выполняемой работы (для сотрудников).

Группа потребителей подразделяется в зависимости от интересов и методов, применяемых при измерении удовлетворенности, на *внутренних потребителей* (студенты, слушатели, аспиранты и т.д.) и *внешних потребителей* (родители, абитуриенты, работодатели, учебные заведения, выступающие в роли партнеров совместной деятельности и потенциальных поставщиков абитуриентов).

В целях получения наиболее полной информации по удовлетворенности качеством образовательных услуг при индивидуальном методе применяется заочный способ опроса экспертов (субъектов удовлетворенности качеством). Суть метода экспертных оценок заключается в усреднении различными способами мнений респондентов (экспертов по рассматриваемым вопросам). Построение иерархической структурной схемы комплексных критериев удовлетворенности качеством образовательных услуг также выполнено с привлечением экспертов. Для определения и проведения экспертной оценки использованы существующие методы в соответствии с ГОСТ 23554.1–79 [8].



Рис. 4. Классификация субъектов удовлетворенности качеством образовательных услуг

Из множества показателей, определяющих качество предоставляемых образовательных услуг, выделяется набор базовых критериев, которые являются наиболее существенными, и определяется их приоритетность. Приоритетность показателя определяется весовым коэффициентом.

Процесс анализа сводится к анализу соотношения требуемого, по мнению потребителя, уровня знаний или обладания тем или иным качеством и его самооценки по этой же характеристике. Таким образом, показатель удовлетворенности потребителя образовательной услугой можно формально представить в виде

$$Y_{ij} = \begin{cases} 1, & C_{ij} \geq T_{ij} \\ \frac{C_{ij}}{T_{ij}}, & C_{ij} < T_{ij} \end{cases},$$

где Y_{ij} – удовлетворенность i -го респондента j -й характеристикой;

C_{ij} – самооценка i -м респондентом уровня владения j -й характеристикой;

T_{ij} – требуемый уровень владения j -й характеристикой i -го респондента.

Существует несколько способов выражения обобщенного показателя эффективности:

1. Расчет интегрального показателя удовлетворенности потребителя образовательной услугой:

$$Y_i = \sum_{j=1}^k Y_{ij} N_{ij},$$

где Y_i – интегральная удовлетворенность i -го потребителя;

k – количество характеристик;

N_{ij} – нормированный уровень важности j -й характеристики для i -го респондента.

2. Свертывание (объединение) векторного критерия в некую скалярную *функцию полезности*. В этом случае функцию полезности можно представить в виде взвешенной суммы разностей показателей, отражающих фактическое состояние:

$$L_i = \sum_{j=1}^k \omega_j \cdot l_{ij},$$

где k – количество характеристик;

ω_j — априорная предпочтительность j -й характеристики в общем количестве ответов респондентов в общем списке характеристик (j -й весовой коэффициент);

$l_{ij} = T_j - Y_{ij}$ - частный параметр эффективности, характеризующий относительное отклонение реальной j -й характеристики от требуемой при выборе эффективного решения X_i из множества альтернативных вариантов решений.

Выполненные подобным образом вычисления позволяют составить матрицы отклонений текущих и потенциальных требований потребителей (табл. 1), которые, в свою очередь, являются основой для анализа показателей качества и предпринимаемых корректирующих и предупреждающих действий, обеспечивающих реализацию принципа постоянного совершенствования. Данный подход соответствует общей схеме решения поисковой задачи в «размытой» постановке и позволяет выбрать эффективное решение X_i из множества альтернативных вариантов решений и свести к минимуму функционал отклонений L_i . Суммарные отклонения определяются с помощью обобщенного показателя эффективности [3].

Таблица 1. Матрицы весовых коэффициентов ω_j и отклонений по характеристикам l_{ij}

Варианты отбора (X_i)	Характеристики (Y_i)							отклонения L_i
	Количественные				Качественные			
	Y_1	Y_2	...	Y_j	Y_{j+1}	...	Y_k	
X_1	l_{11}	l_{12}	...	l_{1j}	l_{1j+1}	...	l_{1k}	L_1
X_2	l_{21}	l_{22}	...	l_{2j}	l_{2j+1}	...	l_{2k}	L_2
X_3	l_{31}	l_{32}	...	l_{3j}	l_{3j+1}	...	l_{3k}	L_3
...
X_m	l_{m1}	l_{m2}	...	l_{mj}	l_{mj+1}	...	l_{mk}	L_m
ω_j	ω_1	ω_2	...	ω_j	ω_{j+1}	...	ω_k	

Для сведения задачи отбора к формально разрешимым задачам необходимо снять неопределенность. В целом отклонения L_i определяются как сумма детерминированной и неопределенной информационных составляющих:

$$l_{ij} = l_{ij}^D + l_{ij}^H.$$

Для каждой альтернативы $i=1, 2, \dots, m$ с учетом ω_j определяются суммарные взвешенные отклонения:

$$L_i^\omega = \sum_{j=1}^k \omega_j l_{ij}.$$

Для каждого $j=1, 2, \dots, k$ определяется уровень относительной неопределенности (Δ_j):

$$\Delta_j = L_i^H / L_i^D,$$

где $L_i^H = \sum_{j=1}^k \omega_j l_{ij}^H, L_i^D = \sum_{j=1}^k \omega_j l_{ij}^D$

Следовательно

$$L_i^\omega = \sum_{j=1}^k \omega_j l_{ij} = \sum_{j=1}^k \omega_j (l_{ij}^D + l_{ij}^H) = \sum_{j=1}^k \omega_j l_{ij}^D + \sum_{j=1}^k \omega_j l_{ij}^H = L_i^D + L_i^H$$

В результате выбирается альтернатива с наименьшим уровнем относительной неопределенности.

Отличительной особенностью мониторинга удовлетворенности предоставляемыми образовательными услугами является то, что информацию приходится извлекать из мнений экспертов или потребителей (студентов, выпускников, работодателей) как *неформализованную* характеристику.

Оценка удовлетворенности качеством образовательных услуг базируется на анализе информации, касающейся *всех* заинтересованных сторон образовательного процесса (внешних потребителей, внутренних потребителей, сотрудников), и выполняется с помощью глобального критерия K , вычисляемого по формуле:

$$K = \gamma^{\text{внеш}} K^{\text{внеш}} + \gamma^{\text{внут}} K^{\text{внут}} + \gamma^{\text{сотр}} K^{\text{сотр}},$$

где $\gamma^{\text{внеш}}$, $\gamma^{\text{внут}}$, $\gamma^{\text{сотр}}$ — весовые коэффициенты важности соответствующих комплексных оценок, которые удовлетворяют условию $\gamma^{\text{внеш}} + \gamma^{\text{внут}} + \gamma^{\text{сотр}} = 1$;
 $K^{\text{внеш}}$, $K^{\text{внут}}$, $K^{\text{сотр}}$ — комплексные оценки степени удовлетворенности качеством образовательных услуг, формируемые субъектами удовлетворенности (соответственно, внешними потребителями, внутренними потребителями, сотрудниками) и вычисляемые с помощью комплексного иерархического критерия по формуле:

$$K^c = \sum_{k=1}^n \gamma_k^c K_k^c,$$

где K^c — индекс (значение) комплексного иерархического критерия удовлетворенности c -го субъекта удовлетворенности качеством;

$c = (\text{внеш}, \text{внут}, \text{сотр})$ — обозначение субъекта удовлетворенности качеством образовательных услуг (соответственно, внешних потребителей, внутренних потребителей, сотрудников);

K_k^c — оценка (значение) k -го частного критерия на соответствующем уровне иерархии c -го субъекта удовлетворенности качеством;

$k = 1, 2, \dots, n$ — обозначение уровня иерархии комплексного критерия;

n — число частных критериев на k -ом уровне иерархии комплексного критерия;

γ_k^c — весовой коэффициент, показывающий важность на k -ом уровне иерархии комплексного критерия удовлетворенности для c -го субъекта удовлетворенности качеством образовательных услуг; сумма весовых коэффициентов на каждом уровне иерархии равна единице.

Для оценки удовлетворенности по критериям, с учетом иерархии субъектов удовлетворенности качеством образовательных услуг (каждой отдельной категории потребителей и сотрудников), используется вербальная шкала, включающая в себя следующие значения: 6 - *абсолютно удовлетворен*; 5 - *удовлетворен*; 4 - *скорее удовлетворен*; 3 - *частично удовлетворен и частично не удовлетворен*; 2 - *скорее не удовлетворен*; 1 - *не удовлетворен*; 0 - *абсолютно не удовлетворен*. Данные значения являются лингвистическими значениями лингвистической переменной «Удовлетворенность», то есть образуют ее терм-множество $A(X)$, представляющее множество названий лингвистических значений лингвистической переменной X , каждое из которых представляет собой нечеткую переменную со значениями из универсального множества U с базовой переменной u .

Для каждого нечеткого подмножества, характеризующего определенное лингвистическое значение лингвистической переменной, задана *функция принадлежности*. Функция принадлежности $\mu_A(u)$ каждому значению базовой переменной u ставит в соответствие число из интервала $[0, 1]$, символизирующее совместимость этого значения с нечетким ограничением.

Как правило, в теории нечетких множеств применяется несколько видов функций принадлежности, которые в основном представляют собой частные случаи функций типа $(L-R)$ [3, 9, 10]. Функции принадлежности нечетких множеств $(L-R)$ -типа задаются с помощью невозрастающих на множестве неотрицательных действительных чисел функций действительной переменной $L(u)$ и $R(u)$, удовлетворяющих свойствам:

- 1) $L(-u)=L(u)$, $R(-u)=R(u)$;
- 2) $L(0)=R(0)$.

В случае нечетких множеств (L - R)-типа общий вид функции принадлежности $\mu_A(u)$ следующий:

$$\mu_A(u) = \begin{cases} L\left(\frac{a_1 - u}{a_L}\right) & \text{при } u \leq a_1, a_L > 0; \\ R\left(\frac{u - a_2}{a_R}\right) & \text{при } u \geq a_2, a_R > 0; \\ 1 & \text{при } u \in [a_1, a_2]. \end{cases}$$

Здесь $[a_1, a_2]$ – интервал толерантности, где значение функции принадлежности равно 1, а точки a_L и a_R – соответственно левые и правые коэффициенты нечеткости; функция $\mu_A(u)$ изменяется от нуля до единицы.

Значение лингвистической переменной, которое определяет степень удовлетворенности, представляет собой ограничение на значения базовой переменной u в универсальном множестве U ($U = [0,6]$). При этом базовая переменная u лингвистической переменной «Удовлетворенность» рассматривается как некоторая числовая переменная *удовлетворенность*, которая принимает значения 0, 1, 2, ..., 6, а множество U представляет собой базовую шкалу оценок, по которой производится измерение степени удовлетворенности.

Функции принадлежности термов лингвистической переменной «Удовлетворенность» в обобщенном виде можно представить следующим образом:

$$\mu_{\text{удовлетворен}}(u) = \begin{cases} 0, & \text{если } 0 \leq u < a; \\ \frac{2(u-a)^2}{(1-a)^2}, & \text{если } a < u \leq \frac{a+1}{2}; \\ 1 - \frac{2(u-1)^2}{(1-a)^2}, & \text{если } \frac{a+1}{2} < u \leq a. \end{cases}$$

где $a \in [0, 1]$ - параметр, определяющий носители нечетких множеств «удовлетворен» и «не удовлетворен». Для нечеткого множества «удовлетворен» носителем будет интервал $(a,1]$, а для нечеткого множества «не удовлетворен»: $[0,a)$.

Вид функций принадлежности μ для каждого нечёткого подмножества, характеризующего определенное значение лингвистической переменной, и значения параметров этой функции определяются экспертным методом.

В частности, функция принадлежности для нечеткого множества A (удовлетворен) описывается формулой вида:

$$\mu_Y(u, \alpha, \beta, \gamma) = \begin{cases} 0, & \text{если } u \leq \alpha; \\ \frac{2(u-\alpha)^2}{(\gamma-\alpha)^2}, & \text{если } \alpha < u \leq \beta; \\ 1 - \frac{2(u-\gamma)^2}{(\gamma-\alpha)^2}, & \text{если } \beta < u \leq \gamma; \\ 1, & \text{если } u > \gamma, \end{cases}$$

где $\beta = \frac{\alpha + \gamma}{2}$ – точка перехода, то есть такое значение $u \in U$, степень принадлежности которого множеству $A(X)$ равна 0,5.

Установив экспертным путем значения $\alpha = 4,13$, $\gamma = 5,87$, можно найти $\beta = 5$.

Для установления вида функции принадлежности нечеткого множества A (*абсолютно удовлетворен*) было принято предположение, что модификатор «абсолютно» действует как оператор повышения «четкости» нечеткого подмножества A (*удовлетворен*) в виде двойного концентрирования, то есть:

$$A(\text{абсолютно удовлетворен}) = \text{CON}(\text{CON}(A(\text{удовлетворен}))) = (A(\text{удовлетворен}))^4,$$

или

$$\mu_{aY} = \mu_Y^4.$$

Функция принадлежности для нечеткого множества A (*скорее удовлетворен*) описывается формулой:

$$\mu_{cY} = \begin{cases} 1 - \frac{2(u - \gamma)^2}{(\gamma - \alpha)^2}, & \text{если } u > \beta; \\ \frac{2(u - \alpha)^2}{(\gamma - \alpha)^2}, & \text{если } \alpha \leq u \leq \beta; \\ 0, & \text{если } u < \alpha. \end{cases}$$

Экспертным путем определяются значения $\alpha = 1$, $\gamma = 5$ и $\beta = 3$.

Функция принадлежности для нечеткого множества A (*не удовлетворен*) описывается формулой вида:

$$\mu_{nY}(u, \alpha, \beta, \gamma) = \begin{cases} 1, & \text{если } u < \gamma; \\ 1 - \frac{2(u - \gamma)^2}{(\alpha - \gamma)^2}, & \text{если } \gamma \leq u < \beta; \\ \frac{2(u - \alpha)^2}{(\alpha - \gamma)^2}, & \text{если } \beta \leq u \leq \alpha; \\ 0, & \text{если } u > \alpha, \end{cases}$$

где $\beta = \frac{\alpha + \gamma}{2}$ – точка перехода.

Установив экспертным путем значения $\alpha = 2,2$, $\gamma = 1$, можно получить $\beta = 1,6$.

Для установления вида функции принадлежности нечеткого множества A (*абсолютно не удовлетворен*) было принято предположение, аналогичное предположению для нечеткого множества A (*абсолютно удовлетворен*), то есть:

$$\mu_{anY} = \mu_{nY}^4.$$

Функция принадлежности для нечеткого множества A (*скорее не удовлетворен*) описывается формулой вида:

$$\mu_{\text{снУ}} = \begin{cases} 1 - \frac{2(u - \gamma)^2}{(\gamma - \alpha)^2}, & \text{если } u \leq \beta; \\ \frac{2(u - \alpha)^2}{(\gamma - \alpha)^2}, & \text{если } \beta < u \leq \alpha; \\ 0, & \text{если } u > \alpha. \end{cases}$$

Экспертным путем установлены значения $\alpha = 4,5$, $\gamma = 0,9$ и $\beta = 2,7$.

Функция принадлежности для нечеткого множества A (*частично удовлетворен и частично не удовлетворен*) описывается формулой вида:

$$\mu_{\text{чУчнУ}} = \begin{cases} 0, & \text{если } u \leq \alpha; \\ \frac{2(u - \alpha)^2}{(\gamma - \alpha)^2}, & \text{если } \alpha \leq u < \beta; \\ 1 - \frac{2(u - \gamma)^2}{(\gamma - \alpha)^2}, & \text{если } u < \gamma; \\ 1, & \text{если } u = \gamma; \\ 1 - \frac{2(u - \gamma)^2}{(\gamma - \alpha)^2}, & \text{если } u < \delta; \\ \frac{2(u - \varepsilon)^2}{(\gamma - \alpha)^2}, & \text{если } \delta \leq u < \varepsilon; \\ 0, & \text{если } u \geq \varepsilon. \end{cases}$$

Установив экспертным путем значения $\alpha = 2$, $\gamma = 5$, $\varepsilon = 8$ и учитывая, что $\beta = \frac{\alpha + \gamma}{2}$ и

$\delta = \frac{\varepsilon + \gamma}{2}$, можно получить вид функции принадлежности для различных значений базовой переменной u .

Вся совокупность графиков функций принадлежности представлена на рис. 5. Следует отметить, что графики функций принадлежности термов «*абсолютно удовлетворен*» и «*абсолютно не удовлетворен*» представляют собой зеркальные отображения.

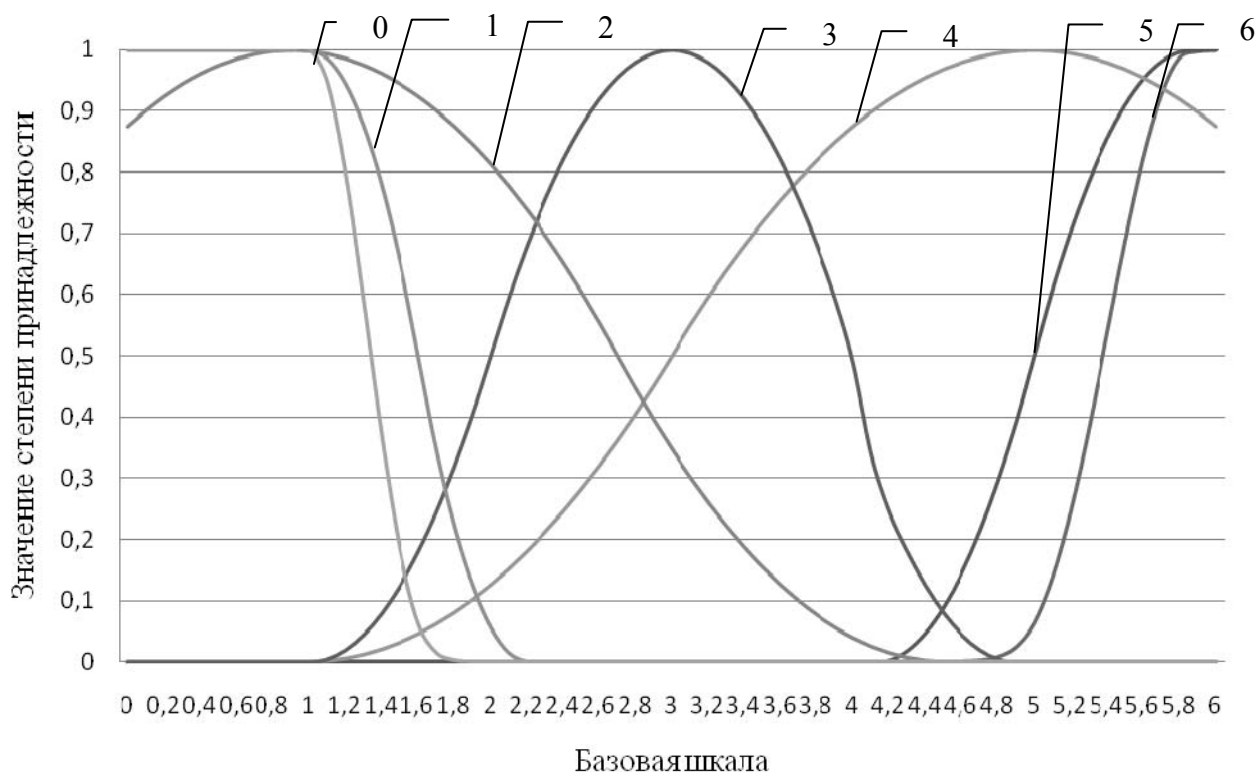


Рис. 5. *Функции принадлежности лингвистической переменной “Удовлетворенность” (6 – абсолютно удовлетворен; 5 – удовлетворен; 4 – скорее удовлетворен; 3 – частично удовлетворен и частично не удовлетворен; 2 – скорее не удовлетворен; 1 – не удовлетворен; 0 – абсолютно не удовлетворен)*

Введение комплексных критериев для субъектов удовлетворенности качеством образовательных услуг и глобального критерия удовлетворенности для всех групп субъектов позволяет провести анализ удовлетворенности качеством образовательных услуг, определить степень соответствия требованиям и ожиданиям субъектов с учетом различных категорий и групп, установить приоритетные направления для улучшения деятельности образовательного учреждения. После определения приоритетных направлений проводится планирование улучшений, которые необходимы для увеличения удовлетворенности качеством образовательных услуг.

5. ОЦЕНКА РИСКОВ СНИЖЕНИЯ КАЧЕСТВА ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫХ УСЛУГ

Современная теория сложных систем базируется на вероятностном описании процессов, в которые вовлечены объекты. Образовательная система как сложная система с программно-целевым управлением характеризуется воздействием на ее объекты как различных случайных факторов со стороны внешней среды, так и возникающих внутри случайных возмущений [10, 11]. Внешняя среда, в которой функционирует система, своим воздействием может вносить неопределенность, изменяя характер взаимодействия между объектами (или между составными частями рассматриваемого объекта), что влечет непредсказуемые изменения внутри объектов системы, которые могут отрицательно сказываться на развитии, создавая риски.

Учет рисков при анализе функционирования и развития системы в обобщенном варианте включает выполнение следующих процедур:

- *идентификацию рисков* – определение рисков, способных повлиять на достижение поставленных перед системой целей;
- *оценку рисков* – анализ качественных и количественных характеристик, условий и вероятности возникновения рисков с целью определения их влияния на достижение поставленных целей;
- *реагирование на риски* – определение процедур и методов по ослаблению отрицательных последствий рисков событий;
- *управление рисками* – выбор подходов и методов по снижению рисков.

В образовательной деятельности значительному количеству рисков подвержены все ее участники [12], но роль руководства вуза является центральной в этой деятельности, и качество образовательных услуг напрямую зависит от правильности принятых им решений на всех этапах образовательного процесса.

При принятии решений по управлению качеством образовательных услуг (как и образовательной деятельностью вуза в целом) возможно применение двух подходов. Первый подход предполагает (при множестве критериев, определяющих ситуацию) построение *числовой функции*, отражающей предпочтения руководства для конкретной задачи принятия решения. Второй подход основан на выявлении предпочтений одновременно с исследованием допустимого множества *действий* для отыскания эффективного решения. Совместное использование перечисленных подходов с методами нечеткой логики позволяет более эффективно проводить мониторинг качества образовательных услуг, характеризующийся как анализ слабо формализованных процессов, для которых свойственно отсутствие точной количественной информации. Качественный анализ сложной ситуации предусматривает определение *тенденций* протекающих процессов, их качественную оценку и выбор мер, способствующих развитию в соответствии с поставленными целями.

Метод анализа рисков, основанный на когнитивном подходе к моделированию и управлению, позволяет получить количественную оценку негативных последствий, влияющих на качество образовательных услуг. Для построения когнитивной модели анализа рисков снижения качества образовательных услуг применяется *когнитивная карта* [7, 13], отражающая субъективные представления эксперта об исследуемой проблеме (ситуации), связанной с функционированием и развитием слабо формализованных процессов. Когнитивная карта представляет собой взвешенный орграф, вершины которого соответствуют *концептам* (существенным факторам), а дуги – связям между концептами.

В целях исследования причин несоответствия качества образовательных услуг установленным лицензионным (аккредитационным) требованиям, а также требованиям работодателей, следует сформировать множество сравниваемых концептов.

На основе данных стандартных мониторинговых процедур и личного опыта экспертно-аналитики формируют список концептов когнитивной карты для исследования возможных причин несоответствия целям в области качества образовательных услуг (рис. 6): e_1 – количество абитуриентов; e_2 – платежеспособность общества; e_3 – качество учебных программ; e_4 – довузовская подготовка; e_5 – реклама и имидж вуза; e_6 – базовый уровень знаний абитуриента; e_7 – отчисления и переводы в другие вузы; e_8 – уровень финансирования; e_9 – количество НИР; e_{10} – трудоустройство выпускников; e_{11} – результаты ГЭК и защит выпускных квалификационных работ; e_{12} – карьера выпускников; e_{13} – обеспеченность соответствующей отрасли кадрами; e_{14} – качество профессиональной деятельности выпускников. Деление концептов на три группы проведено следующим образом: ($e_1 - e_7$) рассматриваются как факторы возникновения рисков, ($e_8 - e_{11}$) – базисные факторы, ($e_{12} - e_{14}$) – целевые факторы.

В целях повышения наглядности на рисунке концепты обозначены в виде цифр, которые соответствуют приведенной нумерации в наименовании. Положительное влияние концептов представлено дугой в виде сплошной стрелки, отрицательное – дугой в виде пунк-

тирной стрелки. Чем толще стрелка на рис. 6, тем сильнее влияние. Вес влияния указан числом со знаком вблизи стрелки.

Полученная от экспертов информация должна быть обработана на предмет устранения двусмысленностей и повторений, а также согласования используемой терминологии.

В связи с этим следует привести описание каждого из выделенных экспертами концептов.

1. *Количество абитуриентов.* Общая численность абитуриентов, поступивших в образовательное учреждение в текущем году.

2. *Платежеспособность общества.* Способность населения и организаций оплачивать образовательные услуги, а также заинтересованность организаций в выполнении НИР по соответствующим направлениям развития науки.

3. *Качество учебных программ.* Общее число недоработок учебных программ, выявленное за отчетный период.

4. *Довузовская подготовка.* Качество дополнительных образовательных услуг, оказываемых абитуриентам в виде подготовительных курсов, определяемое как соотношение общего числа абитуриентов, обучавшихся на подготовительных курсах к числу абитуриентов, поступивших в вуз после их успешного окончания.

5. *Реклама и имидж вуза.* Статус вуза в регионе и за его пределами, интенсивность рекламной деятельности, направленной на привлечение абитуриентов. Данный показатель является качественным и определяется на основании анкетирования абитуриентов, выпускников, населения, работодателей.

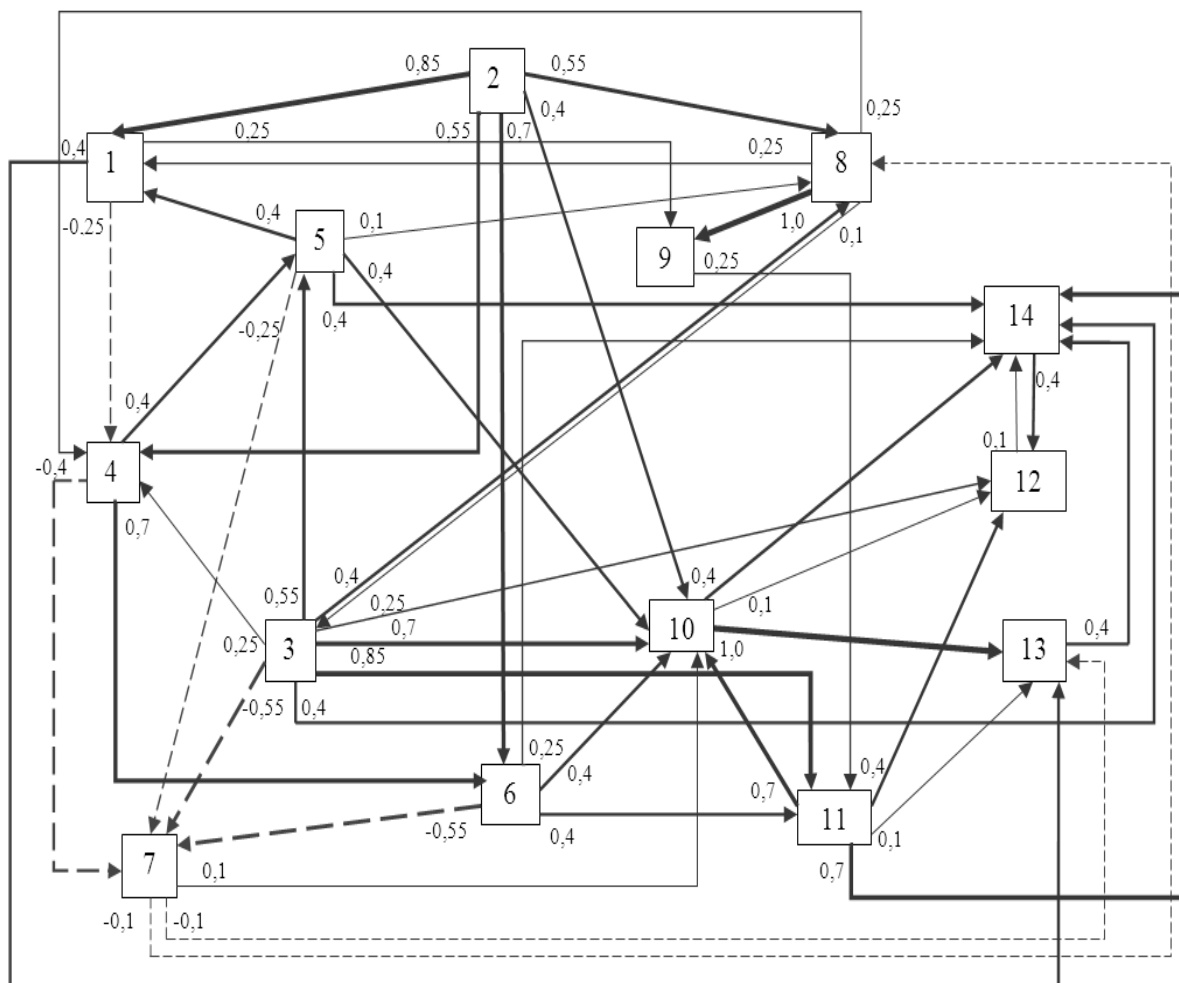


Рис. 6. Визуальное представление когнитивной карты оценки рисков снижения качества образовательных услуг

6. *Базовый уровень знаний абитуриента.* Уровень знаний, полученный на стадиях начального, среднего и высшего образования; определяется на основе оценок ЕГЭ или внутреннего экзамена вуза в соответствии с правилами приема.

7. *Отчисления и переводы в другие вузы.* Число студентов, отчисленных и переведенных в другие вузы за отчетный период.

8. *Уровень финансирования.* Объем средств из бюджетных и внебюджетных источников, направленный на обеспечение образовательного процесса.

9. *Количество НИР.* Общее число выполненных НИР на конец отчетного периода по источникам финансирования.

10. *Трудоустройство выпускников.* Процент выпускников вуза, трудоустроенных по его окончании, который определяется как количество выпускников, устроившихся на работу после окончания вуза, отнесенное к общему количеству выпускников вуза.

11. *Результаты ГЭК и защит выпускных квалификационных работ.* Качество подготовки специалистов, определенное средним баллом по вузу, на основании знаний, показанных при сдаче государственного междисциплинарного экзамена и защиты квалификационной работы.

12. *Карьера выпускников.* Общее число выпускников вуза, получивших продвижение по службе, повышение заработной платы в течение 1-3 лет после окончания образовательного учреждения.

13. *Обеспеченность соответствующей отрасли кадрами.* Общее число вакантных мест, выставляемых на конкурс замещения должностей в рассматриваемый период.

14. *Качество профессиональной деятельности выпускников.* Уровень качества профессиональной деятельности, оцениваемый по удовлетворенности общества данной деятельностью; определяется посредством проведения социологических опросов в регионе, а также как отношение количества рекламаций от работодателей за предыдущий и последующий отчетные периоды.

При построении когнитивной карты экспертами оценивалась интенсивность влияния установленных связей между концептами, которая ранжировалась по семибалльной шкале («очень низкое», «низкое», «ниже среднего», «среднее», «выше среднего», «высокое», «очень высокое»).

Общее состояние качества образовательных услуг, с учетом дискретности измерения, определяется набором значений *всех* концептов. Целевое состояние задается вектором значений множества *целевых* концептов, которые определяются на основе мнений экспертов. Задание весов связей, которое учитывает мнения нескольких экспертов при условии согласованности ответов, позволяет снизить субъективность экспертной оценки. Вес связи при оценке несколькими экспертами определялся как среднее арифметическое оценки силы i -ой связи j -ым экспертом. Для проверки согласованности оценок экспертов использован метод ранговой корреляции. Коэффициент конкордации рассчитывается по формуле Кендалла. На этапе апробации данного метода был получен коэффициент согласованности $\Theta_c = 0,7$, что позволяет считать мнение экспертов в достаточной степени согласованным.

После формирования и анализа когнитивной модели оценки рисков снижения качества осуществляется моделирование динамики поведения выделенных экспертами концептов в момент внесения значения *возмущения*, зависящим от периода мониторинга значений выделенных концептов [5]. Так, если мониторинг осуществляется один раз в квартал при периоде исследования один год, то значение шага возмущения принимается равным 4. Далее по каждому из выделенных экспертами концептов вносятся начальные значения возмущений, зависящие от показателей, выбранных в качестве целевых на планируемый промежуток времени (один год), и их значений.

Следует отметить, что на каждый планируемый период могут быть выбраны разные целевые показатели в зависимости от стратегических целей образовательного учреждения, а

также целевых значений измеряемых показателей. Числовое значение возмущения устанавливается в зависимости от планируемого целевого уровня и применяемой шкалы оценок влияния связей между концептами. В данном случае числовое значение возмущения взято в интервале от -1 до 1 . Глубина расчета для данной когнитивной модели зависит от рассматриваемого периода оценки; например, если период исследования составляет один год, то глубина расчета равна 12. Глубина расчета связана с понятием *модельного времени*, под которым понимается время, являющееся имитацией, прообразом времени реальной системы. Для моделирующей системы модельное время – это переменная, значение которой в системе дискретно изменяется. Его протекание определяет моменты наступления определенных событий, продолжительность выполнения определенных действий. В предложенной модели понятие «глубина расчета» характеризует протекание процесса в когнитивной карте и незначительно соотносится с реальным временем моделируемой системы. Кроме того в модели не учитываются временные задержки при передаче воздействия между концептами, и предполагается, что каждое воздействие происходит за единичное время.

При моделировании оценки рисков снижения качества образовательных услуг был выбран шаг возмущения 4 (ежеквартальный мониторинг), и возмущения по каждому из концептов определены с учетом силы влияния на достижение поставленных целей.

Графическое отображение результатов моделирования представлено на рис. 7; имеется возможность вывести графическое отображение динамики поведения каждого концепта когнитивной модели в отдельности.

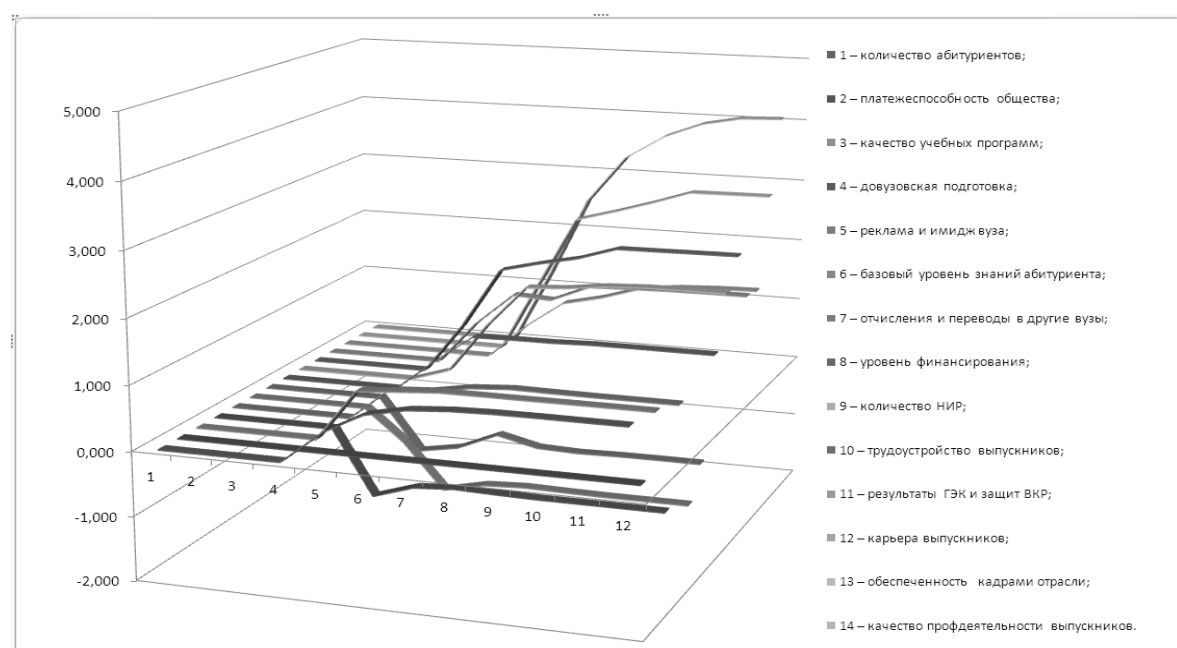


Рис. 7. Графики результатов моделирования оценки рисков снижения качества образовательных услуг

Расчет результатов моделирования позволяет получить табличное представление результатов (*когнитивную матрицу*) со всеми выделенными концептами и их поведением в исследуемый период. Устойчивое снижение значения весового коэффициента по концепту в исследуемый период рассматривается как риск снижения качества образовательных услуг и является основанием формирования рекомендаций администрации для принятия управленческих решений.

После получения моделей и их анализа для определения путей снижения рисков и улучшения качества образовательных услуг выделяются *наиболее проблемные* концепты, имеющие неудовлетворительные качественные оценки или значения, не соответствующие

целевым. На основании анализа моделей при учете производственных правил, которые формируются экспертами (например, *ЕСЛИ* <количество абитуриентов меньше установленных контрольных цифр> *ТО* <активизировать проведение рекламных мероприятий> *ИЛИ* <повысить информированность общества> *ИЛИ* <повысить имидж вуза> *ИЛИ* <снизить стоимость обучения>; *ЕСЛИ* <снижился имидж вуза> *ТО* <повысить рекламную деятельность> *ИЛИ* <увеличить количество социально-значимых проектов> *ИЛИ* <повысить качество реализуемых программ> *ИЛИ* <увеличить число выполненных НИР>), определяются способы улучшения, совершенствования и оптимизации рассматриваемого процесса. Производственные правила вносятся специалистами службы качества или аналитиками в совокупность производственных правил, которая позволяет получать рекомендации для администрации при принятии управленческих решений.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Применение нечетко-множественного и нечетко-логического подхода к анализу образовательных систем и оценке качества образовательных услуг (конкретно, представление качественных показателей через лингвистические переменные с учетом особенностей образовательной системы и использование механизмов нечеткого логического вывода) позволяет:

1. Перейти от классических вероятностных моделей и экспертных оценок к нечетко-множественным описаниям, снизив долю субъективизма, и более полно учесть специфику образовательной системы.

2. Проанализировать образовательную деятельность с учетом требований потребителей (и вообще всех заинтересованных сторон) и предложить альтернативные варианты принятия управленческих решений на основе фактически достигнутых результатов и мнений экспертов.

3. При принятии управленческих решений снизить долю неопределенности, обусловленной недостаточным количеством информации и субъективизмом экспертов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Данчул А.Н., Корнеенко В.П. Системный анализ управления экономическими процессами: учеб.-метод. пособие. М.: Изд-во РАГС, 2001. 140 с.
2. Добряков, А.В. Экспертно-аналитический метод оценки качества образовательных систем на основе нечетко-множественного подхода / А.В.Добряков, В.М.Милова // Качество. Инновации. Образование. 2007. №1. С. 36 -41.
3. Майорова, В.И. Системный анализ проблем и моделирование процесса подготовки элитных специалистов инженерного профиля (на примере ракетно-космических специальностей). В двух частях. Часть 2. М.: Издательство МГОУ, 2007. 222 с.
4. Поташник М.М. Качество образования: проблемы и технологии управления (В вопросах и ответах). М.: Педагогическое общество России, 2002. 352 с.
5. Митин, А.И. Мониторинг качества профессиональной подготовки: информационно-аналитический подход / А.И. Митин, Т.А. Филичева // Информатизация образования и науки. - 2014. - №1 - С. 82–100.
6. Митин, А.И. Производственная модель оценки качества профессиональной подготовки и степени достижения целей в области качества / А.И. Митин, Т.А. Филичева // Открытое образование, 2013, №6. С. 31-35.
7. Федулов Ю.Г., Юсов А.Б., Матвеев А.А. Исследование социально-экономических и политических процессов с помощью когнитивных моделей: учебно-методическое пособие. М.: РАГС, 2004. 60 с.

8. ГОСТ 23554.1–79 Система управления качеством продукции. Экспертные методы оценки качества промышленной продукции. Организация и проведение экспертной оценки качества продукции. М.: Издательство стандартов, 1980. 70 с.
9. Штовба С.Д. Введение в теорию нечетких множеств и нечеткую логику. [Электронный ресурс] – URL: <http://matlab.exponenta.ru/fuzzylogic/book1/index.php> (дата обращения 05.08.2016).
10. Рыжов А.П. Элементы теории нечетких множеств и ее приложений. [Электронный ресурс] – URL: <http://intsys.msu.ru/staff/ryzhov/FuzzySetsTheoryApplications.htm> (дата обращения 05.08.2016).
11. Казаков И.Е., Мальчиков С.В. Анализ стохастических систем в пространстве состояний. М.: Наука, 1983. 384 с.
12. Костюкова Т.П., Лысенко И.А. Система управления рисками в образовательной деятельности – неперенная часть менеджмента качества // Информационные технологии в образовании/ III Международная научно-практическая конференция «Информационная среда вуза XXI века» 21-25 сентября 2009 г., г. Петрозаводск. [Электронный ресурс] – URL: <http://ito.edu.ru/2009/Petrozavodsk/I/I-0-17.html> (дата обращения 22.08.2016).
13. Силов, В.Б. Принятие стратегических решений в нечёткой обстановке / Силов В.Б. - М.: ИНПРО-РЕС, 1995. 228 с.

Работа поступила 02.11.2016г.

ПАРАЛЛЕЛЬНОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ИНФОРМАЦИИ И ЭНЕРГИИ. ПАРАЛЛЕЛИЗМ МЕЖДУ ИНФОРМАЦИОННЫМИ И ЭНЕРГЕТИЧЕСКИМИ ПРОИЗВОДЯЩИМИ СИСТЕМАМИ

В.К. Захаров

В статье излагается общее **соединённое** (синтетичное) **замкнутое в себе** представление о материальном мире, которое позволяет дать параллельные определения **энергии** и **информации**, не выходя за пределы материального мира. Это позволяет ввести достаточно общее понятие *производящей (консервативно-динамичной средовой потоковой) системы*, описываемой соответствующей системой *эволюционных уравнений*. В качестве важных частных случаев таких систем вводятся понятия *энергетической производящей системы* и *информационной производящей системы*. На подробно разобранных примерах отопительной печи (как энергетической производящей системы) и персонального компьютера (как информационной производящей системы) показывается применимость предложенной концепции для обобщённого и формализованного описания широкого класса систем, существующих наяву.

Some **joint** (synthetic) **closed in itself** idea about the material world is expounded in the paper, which gives the opportunity to invent the parallel definitions of the **energy** and the **information** not exceeding the bounds of the material world. This allows us to introduce some sufficiently general notion of the *productive (conservatively-dynamic medium stream) system*, described by the proper system of *evolutional equations*. In the capacity of important partial cases of such systems the proper notions of the *energy productive system* and the *information productive system* are introduced. The explicitly analyzed examples of the heating stove (as the energy productive system) and the personal computer (as the information productive system) expose the applicability of proposed idea to a generalized and formalized description of some wide class of systems really existing.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА

Материя, вещество, мысль, материальный мир, энергия и материя как материальные предметы, вмещения предметов, потоки вмещений, система, система со средами, консервативно-динамичная система, потоковая система, производящая система, энергетическая производящая система, информационная производящая система.

1. ВВЕДЕНИЕ

Прикладная и теоретическая информатика достигли необыкновенных высот в своём развитии. Однако удовлетворительного твёрдого теоретического фундамента для этих наук до сих

пор не было создано. Причина состоит в отсутствии удовлетворительных¹ общих определений понятий **информации** и **информационной системы**.

Отмеченная особенность присуща не только информатике. В физике, несмотря на её более длительное существование, положение с твёрдым теоретическим фундаментом обстоит точно таким же образом: отсутствуют удовлетворительные[†] общие определения понятий **энергии** и **энергетической системы**.

Из этого неслучайного, по-видимому, совпадения можно сделать вывод, что причина описанного положения коренится не в самой информатике и не в самой физике, а в отсутствии удовлетворительного **общего** твёрдого теоретического **представления** о мире и его бытии, в котором понятия информации и энергии появлялись бы естественным дедуктивным путём.

Данная статья предназначена для того, чтобы попытаться заполнить указанный пробел в научном мировоззрении.

Статья состоит из трёх частей. В первой части излагается общее **соединённое** (синтетичное) **замкнутое в себе** представление о материальном мире, которое позволяет дать параллельные определения энергии и информации, не выходя за пределы этого мира.

Во второй части статьи на основе представления, изложенного в первой части, вводится достаточно общее понятие *производящей (консервативно-динамичной средовой потоковой) системы*, описываемой соответствующей системой *эволюционных уравнений*. В качестве важных частных случаев таких систем вводятся понятия *энергетической производящей системы* и *информационной производящей системы*.

В третьей части статьи на подробно разобранных примерах отопительной печи (как энергетической производящей системы) и персонального компьютера (как информационной производящей системы) показывается применимость предложенной концепции для обобщённого и формализованного описания широкого класса систем, существующих наяву.

Из сказанного следует, что данная статья может послужить научным **мировоззренческим** слоем для подведения твёрдого теоретического фундамента и под физику, и под информатику.

2. ПАРАЛЛЕЛЬНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ОБ ЭНЕРГИИ И ИНФОРМАЦИИ

Синтетичность (соединенность) материального мира

Под **человечеством** понимается совокупность всех людей, живших и живущих на нашей планете.

¹ Например, даются такие поверхностные определения информации: *информация* – отражение окружающего мира посредством сигналов и знаков; *информация* – сведения, воспринимаемые человеком или специальным устройством как отражение фактов материального мира в процессе коммуникаций.

[†] Например, даётся такое внешне красивое определение: *энергия* – скалярная физическая величина, являющаяся единой мерой различных форм движения и взаимодействия материи, мерой перехода движения материи из одних форм в другие. К сожалению, после этого определения остаётся неясным, являются ли «величина», «мера», «движение», «взаимодействие», «переход» и пр. **материей** или какими-то иными, внешними по отношению к материи сущностями.

Материальный* (т.е. *вещественный и мысленный*) мир (на данный момент времени) можно обобщённо определить как совокупность, включающую в себя: 1) *природный мир* (как *вещественный*, так и *мысленный*) Земли и Вселенной; 2) *надприродный (артеприродный) мир* (как *вещественный*, так и *мысленный*), созданный **человечеством** в процессе его бытия. Ясно, что само человечество является частью и природного, и надприродного мира. При этом провести чёткую однозначную границу между природным и надприродным мирами иногда довольно затруднительно. Вместо *мира* можно говорить о *вселенной, среде, космосе* и т.п. Вместо пары – *природный мир* и *надприродный мир* – можно использовать пару – *естественный мир* и *искусственный мир*.

Мысленный (природный и надприродный) мир включает в себя *мысленный мир живых существ Земли* и, в частности, *мысленный мир людей*.

Мысленный мир людей подразделяется на *сознательный (ведательный)* и *подсознательный* (иначе *наивный, бессознательный, внесознательный, надсознательный* и пр.) *миры*. Это подразделение восходит к Карлу Роберту Эдуарду фон Хартманну, опубликовавшему в 1869 году книгу «Философия подсознательного».

Сознательный мир воссоздаётся как путём поднятия из подсознательного мира, так и путём общественного вменения одной частью сознательного мира другой части сознательного мира. Сознательный мир добавочно создаётся путём общественного познания¹. Подсознательный мир воссоздаётся путём биологического рождения. Подсознательный мир добавочно создаётся путём постепенного перехода устойчивой во времени части сознательного мира в подсознательный мир.

Сознательный и подсознательный миры неоднородны внутри всего человечества. Сознательный мир преимущественно однороден внутри каждой долго существующей мысленно обменной человеческой общности по причине мысленного перемешивания. Подсознательный мир преимущественно однороден внутри каждой очень долго существующей кровнородственной человеческой общности по причине биологического перемешивания. Поэтому подсознательный мир гораздо менее изменчив во времени, чем сознательный мир [2-4], [6, стр. 11].

Круговорот вещественного, мысленного, сознательного и подсознательного миров

Связь во времени между определёнными выше мирами можно описать следующим образом.

Бытие (существование во времени) вещественного мира называется *овеществлением*. Бытие во времени мысленного, сознательного и подсознательного миров людей называется *мышлением, сознанием (веданием) и подсознанием (наитием) мира людей*, соответственно.

Вещественный и мысленный миры не переходят друг в друга. Овеществление и мышление миров людей невозможны друг без друга. А именно, овеществление мира людей направляет его сознание, а подсознание и сознание (т.е. мышление) мира людей направляет его овеществление [2-4], [6, стр. 12].

Сознательный и подсознательный миры людей не отделены строго друг от друга: происходит переход из одного мира в другой. Не забывающийся сознательный мир посте-

* «Материя» – обобщающее слово, восходящее к словам «мать», «матерь» и пр. А у матери невозможно **отделить** вещество от мысли. Поэтому разделение мира на «материю» и «дух», на «материю» и «сознание» является грубо искусственным.

¹ Сознательный мир ребёнка начинает наполняться и создаваться из подсознательного мира ещё во время созревания плода в утробе матери и, по-видимому, особенно сильно наполняется в первые годы роста ребёнка. Одновременно после рождения ребёнка его сознательный мир наполняется и создаётся и из окружающей среды.

пенно пополняет подсознательный мир. А забывающийся сознательный мир в случае необходимости пополняется подсознательным миром.

Подсознательный мир передаётся из поколения в поколение по индивидуальному биолого-генетическому наследованию. Сознательный мир передаётся из поколения в поколение как поднятием из унаследованной подсознательной части, так и социо-культурным вменением и образно-словесным обучением.

В совокупности имеется следующий временной *круговорот вещественного и мысленного миров людей в материальном мире*:

1) вещественный мир людей устраивает (в частности, обустроивает, надстраивает, перестраивает, подавляет, пробуждает, возбуждает и пр.) сознательный мир людей,

2) не забывающийся сознательный мир людей постоянно «опускается вниз» и устраивает (в частности, обустроивает, надстраивает, перестраивает и пр.) подсознательный мир людей,

3) подсознательный мир людей потребно «поднимается вверх» и устраивает (в частности, воспроизводит, обустроивает, надстраивает, перестраивает, пробуждает, возбуждает и пр.) забывающийся сознательный мир людей,

4) и сознательный, и подсознательный миры людей устраивают (в частности, воспроизводят, обустроивают, надстраивают, перестраивают, подавляют, пробуждают, возбуждают и пр.) вещественный мир людей.

Синтетичность материальных предметов

Любую мысленно отмеченную людьми в данный момент времени часть материального мира будем далее называть (*материальным*) *предметом, достоянием* или *объектом* (в данный момент времени). Это общее понятие включает в себя предметы, обозначающие бытие во времени других предметов, такие как **явление, состояние, благополучие, равновесие** и пр.

В некоторых предметах есть и *вещественная (составляющая) часть*, и *мысленная (составляющая) часть*; их можно назвать *синтетичными* или *вещественно-мысленными предметами*. Примером является любой созданный человеком вещественный предмет, поскольку он имеет в себе и мысленную часть, показывающую некоторые обстоятельства придумывания и создания этого предмета. Из этого примера следует, что даже мысленный мир людей располагается не только в людских головах.

В некоторых предметах есть только *вещественная (составляющая) часть*; их можно назвать *чисто вещественными предметами*. Примером является любой косный, т.е. не живой, природный предмет.

Наконец, в некоторых предметах есть только *мысленная (составляющая) часть*; их можно назвать *чисто мысленными предметами*. Примером является любой предмет, **непосредственно не обнаруживаемый органами чувств человека**, такой как сверхъестественное существо, душа, число и т.д.

С предметом в данный момент времени людьми мысленно соединены некоторые мысленные предметы, называемые *свойствами* или *способностями предмета*. Предмет с отмеченным людьми свойством называется *освоенным предметом*.

С двумя предметами в данный момент времени может быть соединён другой предмет, называемый *связью между предметами*.

Замечание. Из приведённого выше определения следует, что свойства материальных предметов сами являются материальными предметами. Обобщённо можно сказать, что разделение материи на вещество и мысль позволило понятие материи сделать **замкнутым в себе**.

Энергия и информация как особые свойства материальных предметов

Синтетичное представление о материальном мире позволяет единообразно определить понятия энергии и информации как особых **свойств материальных предметов*** [6, стр. 13].

В каждое мгновение времени предмету присуще его свойство, называемое *состоянием предмета в данное мгновение времени*. Соответственно вещественной части предмета присуще *состояние вещественной части предмета в данное мгновение времени*, а мысленной части предмета присуще *состояние мысленной части предмета в данное мгновение времени*. Состояния предметов *изменяются* во времени под воздействием других предметов, называемых *внутренними* и *внешними побудителями*.

Способность в некоторый момент времени **некоторых предметов** воздействовать на другие предметы и вызывать изменение в состоянии их **вещественных частей** в этот момент времени называется *энергией*. А **способность** в некоторый момент времени **некоторых предметов** воздействовать на другие предметы и вызывать изменение в состоянии их **мысленных частей** в этот момент времени называется *информацией*. Указанные **воздействующие** предметы будем называть *энергетическими* и *информационными предметами*, соответственно. Ясно, что они представляют собой частные случаи освоенных предметов.

Из данного определения следует, что энергия и информация, будучи способностями, являются мысленными материальными предметами.

Выделяя разные виды воздействующих предметов и разные виды их воздействий на другие предметы, **наблюдатели** выделяют *особенные виды энергии этих предметов* и *особенные виды информации в этих предметах*. При этом наблюдатели отмечают, что *данный предмет обладает данным особенным видом энергии или данным особенным видом информации*.

Например, катящийся по поверхности шар обладает *кинетической (двигательной) энергией*, а также *зрительной информацией*. Другой пример: пища, принимаемая людьми, обладает *химической энергией*, а также *зрительной, обонятельной и осязательной информацией*. Третий пример: книга, изданная на каком-либо языке, обладает *знаковой информацией*, а также *тепловой энергией*. Четвёртый пример: солнечное излучение обладает *солнечной энергией*, а также *зрительной информацией* и *осязательной информацией*.

Вмещения предмета и потоки вмещений

Любую мысленно отмеченную людьми в данный момент времени часть предмета будем называть *подпредметом предмета*. Подпредмет, обладающий данным **свойством**, будем называть *свойственным подпредметом предмета*.

Совокупность всех свойственных подпредметов данного предмета, обладающих **данным свойством**, будем называть *предметно-свойственным вмещением предмета*. Среди всех таких вмещений выделим два **главных вида воздействующих вмещений**. Совокупность всех энергетических подпредметов данного предмета будем называть *энергетическим вмещением предмета*. Совокупность всех информационных подпредметов данного предмета будем называть *информационным вмещением предмета*.

Выделяя разные виды воздействующих вмещений в предметах и разные виды их воздействий на другие предметы, **наблюдатели** выделяют **особенные** виды энергетических и информационных вмещений. Например, катящийся по поверхности шар обладает *кинетическим (двигательным) энергетическим вмещением*. При этом не любая часть шара способна

* Из сказанного следует, что встречающееся в литературе перечисление материи, энергии и информации, как отдельных самостоятельных сущностей мира, является излишним.

воздействовать на препятствия: поверхность шара, как одна из мысленных вещей шара, такой способностью не обладает. Другой пример: пища, принимаемая людьми за едой, обладает *химическим энергетическим вмещением*. При этом не любая часть пищи способна вступать в химические реакции внутри человеческого тела; некоторые вещи пищи просто выбрасываются. Третий пример: книга, изданная на каком-либо языке, обладает *знаковым информационным вмещением*. При этом не любая часть книги способна воздействовать на читателей и вызывать изменение в состоянии их мысленных частей: произвольные совокупности букв, слов и даже предложений такой способностью не обладают. Четвёртый пример: солнечное излучение обладает *солнечным энергетическим вмещением*, а также *зрительным информационным вмещением* и *осязательным информационным вмещением*. При этом разные части солнечного спектра способны по-разному воздействовать на людей.

Трём указанным выше видам вмещения соответствуют три *вида передаточного потока* (или *передвижения*) *подпредметов из одного предмета в другой предмет в данное мгновение времени*: 1) поток свойственных подпредметов с данным свойством (*предметно-свойственный поток*); 2) поток энергетических подпредметов (*энергетический поток*); 3) поток информационных подпредметов (*информационный поток*).

Для того чтобы избежать использования петлеобразных **преобразовательных** потоков подпредметов с изменением свойств, мы среди всех предметов выделим особенный мысленный предмет ∞ , называемый *мнимой средой*. Это даёт возможность вместо одного петлеобразного потока, который одновременно является и **выходящим** из предмета, и **входящим** в предмет (что составляет непреодолимое препятствие при составлении эволюционных уравнений для предмета (см. далее)), рассмотреть два (*мнимо*) *передаточных потока*: *изводный поток одних свойственных подпредметов из предмета в мнимую среду ∞ и производный поток других свойственных подпредметов из мнимой среды ∞ в предмет*.

Это позволяет изведение и произведение вмещения в предмете рассматривать как частные виды передачи вмещения между разными предметами.

Замечание. Одна из задач физики (как первичной науки о вещественном мире) состоит в том, чтобы выделять **качественно особенные** виды энергетических вмещений и для этих вмещений и потоков этих вмещений определять их **количества**. Сходным образом, одна из задач информатики (как первичной науки о мысленном мире) состоит в том, чтобы выделять **качественно особенные** виды информационных вмещений и для этих вмещений и потоков этих вмещений определять их **количества**.

Временная преемственность вмещений («закон сохранения материи»)

Далее мы рассмотрим некоторые ограничения возможностей относительно **изменения** вмещений во времени. Введём их в виде некоторой аксиомы, т.е. первичной ценности.

Аксиома временной преемственности вмещений: **любое новое предметно-свойственное вмещение** в данном производящем предмете может производиться **только** посредством: 1) изведения части **старого энергетического** вмещения хотя бы в одном **энергетически-значимом** изводящем предмете, и 2) посредством изведения части **старого информационного** вмещения хотя бы в одном **информационно-значимом** изводящем предмете.

В этой аксиоме изводящий предмет называется **значимым** для производящего предмета, если после удаления изводящего предмета производство нового вмещения в производящем предмете прекращается.

Отметим, что всё описанное в этой аксиоме может происходить в одних и тех же предметах и даже в одном и том же предмете.

Приведём примеры, поясняющую эту аксиому.

Пример 1. Рассмотрим Луну как производящий предмет. В качестве одного из изводящих предметов выступает окологрунтовое пространство. На Луну падают метеориты, кото-

рые создают новое вещественное вмещение Луны и меняют вид её поверхности. При этом в окололунном пространстве изводятся не только метеориты, обладающие кинетической энергией, но и исчезают зрительные видимости этих метеоритов на небе, ранее доступные наблюдателям и обладавшие зрительной информацией.

Пример 2. Рассмотрим человечество как производящий предмет. В качестве одного из изводящих предметов выступает Земля. Считается, что информационное вмещение человечества с течением времени увеличивается. Это явление можно объяснить за счёт увеличивающегося во времени **изведения** людьми энергетического вмещения Земли.

3. ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЕ И ИНФОРМАЦИОННЫЕ ПРОИЗВОДЯЩИЕ СИСТЕМЫ

Система (составной предмет, устроенный предмет, организованный объект)

Под *системой (составным предметом, устроенным предметом, организованным объектом)* будем понимать предмет материального мира, обладающий следующими свойствами:

1) он является совокупностью нескольких (не менее двух) других предметов материального мира, называемых далее *детальями*, и нескольких других предметов материального мира, называемых далее *связями между детальями*;

2) (*свойство внутренней составленности*) деталь сама может быть совокупностью нескольких (не менее двух) других деталей и нескольких связей между ними, называемых далее *составляющими детальями детали* и *составляющими связями детали*; такая деталь называется *сложной*; деталь, не являющаяся сложной, называется *простой*, или *первичной*, или *атомарной*, или *элементарной*, или *элементом*;

3) (*свойство внешнего обустройства*) предмет [сложная деталь] первоначально во времени устраивается (организуется) из составляющих деталей **обязательно** при наличии некоторых связей некоторых составляющих деталей хотя бы с одним внешним по отношению ко всем составляющим деталям предметом мира; такой внешний предмет можно назвать *обустривающим данный предмет [данную сложную деталь]*;

4) (*свойство внутренней необоснованности*) и сам предмет, и каждая сложная деталь **обязательно** имеет хотя бы одно новое свойство, которого не было ни у одной из составляющих деталей; такое свойство называется далее *внутренне необоснованным*;

5) (*свойство внешнего обоснования*) каждое внутренне необоснованное свойство предмета [сложной детали] **обязательно основано** на наличии некоторых связей предмета [сложной детали] хотя бы с одним внешним по отношению к предмету [к сложной детали] предметом мира; такой внешний предмет можно назвать *обосновывающим данное свойство предмета [сложной детали]*;

6) (*свойство внешнего переустройства*) предмет [сложная деталь] **вторично во времени** перестраивается (достраивается) **обязательно** при наличии некоторых связей предмета [сложной детали] хотя бы с одним внешним по отношению к предмету [к сложной детали] предметом мира; такой внешний предмет можно назвать *перестраивающим данный предмет [данную сложную деталь]*.

Грубо говоря, никакого чисто внутреннего самоустроения (автоэмергентности) системы из какой-либо совокупности предметов, которые могут стать порождающими деталями этой системы, не существует. Также не существует никакого чисто внутреннего появления (эмергентности) новых свойств у системы. Также не существует никакого чисто внутреннего переустройства (реэмергентности) системы. Для этого должны существовать **внешние обу-**

страивающие, обосновывающие, перестраивающие предметы, соответственно [1], [6, стр. 15-16]. Отметим, что согласно разделу 1 обстоятельства тоже являются предметами.

Из перечисленных выше свойств следует, что каждая сложная деталь системы сама является системой, называемой далее *подсистемой системы*. Отметим, что для сложной детали внешними деталями могут быть и детали самой системы.

Замечание. Во избежание прихода к противоречию нежелательно применять понятие системы ко всему материальному миру, т.е. нежелательно рассматривать всю вселенную как систему или как предмет «большой» системы. То же самое относится к вещественному, мысленному, сознательному и подсознательному мирам, соответственно.

Консервативно динамичные средовые системы

Мы будем рассматривать далее только системы со **сложными** деталями.

В такой системе U выделим *максимальные* сложные детали M , т.е. такие сложные детали, которые не являются деталями других сложных деталей. Назовём их *основными устройствами* или *подсистемами системы*. Слово «основные» далее будем опускать. Будем рассматривать далее только системы с конечным числом устройств. Совокупность всех устройств системы U обозначим через $тах U$. Для каждого устройства системы будем отделять его имя от его предметно-свойственных вместилищ.

Будем считать, что между **некоторыми** устройствами системы имеются связи и все устройства системы охвачены этими связями, т.е. в системе U нет изолированных устройств.

Пусть с некоторыми устройствами системы U связана конечная совокупность предметов A_f , называемых *входными средами*, и конечная совокупность предметов B_g , называемых *выходными средами для системы U* . Тройку S , состоящую из системы U и совокупностей входных и выходных сред A_f и B_g , будем называть *средовой системой*. Для сред также будем отделять их имена от их предметно-свойственных вместилищ.

Средовую систему S будем называть *консервативно-динамичной* на промежутке времени T , если: 1) имена и связи устройств не изменяются на промежутке T , а их предметно-свойственные вместилища изменяются во времени на промежутке T ; и 2) имена сред и их связи с устройствами не изменяются на промежутке T , а предметно-свойственные вместилища сред изменяются во времени на промежутке T .

Потоковые системы

Будем далее считать, что консервативно-динамичная средовая система S с системой U и средами A_f и B_g обладает предметно-свойственными вместилищами разных особенных видов и имена этих видов составляют конечную *совокупность имён вместилищ $ind S$* . Подсовокупности *имён вместилищ устройств* и *сред* обозначим соответственно через $ind M$, $ind A_f$ и $ind B_g$.

Вместилища устройств и сред соответствующих особенных видов в данный момент времени t из временного промежутка T обозначим через $V_M^i(t)$ для i из $ind M$, $V_{A_f}^i(t)$ для i из $ind A_f$ и $V_{B_g}^i(t)$ для i из $ind B_g$, соответственно. Далее указание на момент времени будем опускать.

Согласно сказанному ранее указанные вместилища из одних устройств и сред могут *передаваться* в другие устройства и среды, а в самих устройствах ещё *вдобавок* могут *изводиться* и *производиться*. Напомним, что использование мнимой среды ∞ позволяет извлечение и производство рассматривать как частные виды вышеупомянутой передачи.

Рассмотрим *основной временной промежуток* $[T_1, T_2]$. На этом промежутке будем брать момент времени t и временное приращение Δt , такие, что $T_1 \leq t - \Delta t \leq t \leq t + \Delta t \leq T_2$.

Объединение всех вмещений $V_M^i(t)$, $V_{A_f}^i(t)$ и $V_{B_g}^i(t)$ по всем устройствам M и средам A_f и B_g системы S и по всем особенным видам i из $ind S$ обозначим через $V(t)$. Рассмотрим *полную совокупность* $V(T_1, T_2)$ всех предметов x , принадлежащих всем совокупностям $V(t)$ для всех t из основного промежутка $[T_1, T_2]$.

Будем предполагать, что для системы S имеются вещественно-числовые аддитивные по разным предметам оценивания на всех вмещениях всех видов. Пусть $c(t)x$ обозначает величину предмета x в момент времени t . Число $W_M^i(t)$, равное сумме величин $c(t)x$ всех предметов x из совокупности $V_M^i(t)$, назовём *оценённым вмещением вида i устройства M в момент времени t* .

Совокупность $R_{MN}^{ii}(t - \Delta t, t + \Delta t)$, состоящую из всех предметов x из полной совокупности $V(T_1, T_2)$, таких, что x входит в $V_M^i(t - \Delta t)$, и x не входит в совокупность $V_N^i(t - \Delta t)$, и x не входит в совокупность $V_M^i(t + \Delta t)$, и x входит в совокупность $V_N^i(t + \Delta t)$, назовём *поток на промежутке времени от $t - \Delta t$ до $t + \Delta t$ из устройства M в устройство N предметов вида i* .

Число $S_{MN}^{ii}(t - \Delta t, t + \Delta t)$, равное сумме величин $c(t)x$ всех предметов x из потока $R_{MN}^{ii}(t - \Delta t, t + \Delta t)$, назовём *оценённым потоком на промежутке времени от $t - \Delta t$ до $t + \Delta t$ из устройства M в устройство N предметов вида i* .

Число $S_{MN}^{ii}(t)$, равное пределу при Δt , стремящемся к нулю, от оценённого промежуточного потока $S_{MN}^{ii}(t - \Delta t, t + \Delta t)$, делённого на число $2\Delta t$, назовём *оценённым потоком в момент времени t из устройства M в устройство N предметов вида i* .

Подобные рассмотрения проведём и для вмещений сред, и для потоков предметов с участием сред.

Далее будем рассматривать **только** оценённые вмещения и оценённые потоки предметов; при этом слово «оценённый», слово «предмет» и указание на момент времени t будем в основном опускать.

Потоковой системой назовём консервативно-динамичную средовую систему S с системой U , средами A_f и B_g и вмещениями $W_M^i(t)$, $W_{A_f}^i(t)$ и $W_{B_g}^i(t)$, обладающую следующими свойствами:

1) для некоторых связанных пар $A_f \approx M$, $M \approx N$ и $N \approx B_g$ имеются *входные потоки* $S_{A_f M}^{ii}$ для $i \in ind A_f \cap ind M$, *передаточные потоки* S_{MN}^{jj} для $j \in ind M \cap ind N$ и $M \neq N$ и *выходные потоки* $S_{NB_g}^{kk}$ для $k \in ind N \cap ind B_g$;

2) для некоторых устройств M имеются *изводные потоки* $S_{M\infty}^{ii}$ для $i \in ind M$;

3) для некоторых устройств N имеются *производные потоки* $S_{\infty N}^{jj}$ для $j \in indN$.

Составление эволюционных уравнений для потоковых систем

Напомним, что число $\dot{W}_M^i(t)$, равное пределу при Δt , стремящемся к нулю, от разности $W_M^i(t + \Delta t) - W_M^i(t - \Delta t)$ (оценённых) вложений в моменты времени $t - \Delta t$ и $t + \Delta t$, делённой на число $2\Delta t$, называется *скоростью изменения (оценённого) вложения вида i устройства M в момент времени t* .

Система эволюционных уравнений потоковой системы составляется по следующему **принципу сохранения**: в каждом устройстве M для вложения каждого вида $i \in indM$ скорость изменения вложения этого вида в этом устройстве в момент времени t равна сумме всех входящих потоков предметов этого вида в это устройство в момент времени t минус сумма всех выходящих потоков предметов этого вида из этого устройства в момент времени t .

Производящие системы

Опираясь на аксиому временной преемственности вложений, приведённую в первой части, введём один важный класс систем.

Производящей системой назовём потоковую систему S с системой U , средами A_f и B_g и вложениями $W_M^i(t)$, $W_{A_f}^i(t)$ и $W_{B_g}^i(t)$, обладающую следующими дополнительными свойствами:

1) обязательно имеется хотя бы одна *входно-передаточно-изводная цепочка энергетических потоков* $S_{A_f L_0}^{ii}$, $S_{L_0 L_1}^{ii}$, ..., $S_{L_{p-1} L_p}^{ii}$, $S_{L_p \infty}^{ii}$ для $i \in indA_f \cap indL_0 \cap \dots \cap indL_p$, $L_0, \dots, L_p \in \max U$ и $p \geq 0$;

2) обязательно имеется хотя бы одна *входно-передаточно-изводная цепочка информационных потоков* $S_{A_g M_0}^{jj}$, $S_{M_0 M_1}^{jj}$, ..., $S_{M_{q-1} M_q}^{jj}$, $S_{M_q \infty}^{jj}$ для $j \in indA_g \cap indM_0 \cap \dots \cap indM_q$, $M_0, \dots, M_q \in \max U$ и $q \geq 0$;

3) обязательно имеется хотя бы одна *производно-передаточно-выходная цепочка предметно-свойственных потоков* $S_{\infty N_0}^{kk}$, $S_{N_0 N_1}^{kk}$, ..., $S_{N_{r-1} N_r}^{kk}$, $S_{N_r B_h}^{kk}$ для $k \in indN_0 \cap \dots \cap indN_r \cap indB_h$, $N_0, \dots, N_r \in \max U$ и $r \geq 0$.

Примерами производящих систем являются государство и его учреждения, рассмотренные в работах [5], [6, Приложения 1 и 2], [7-9].

Рассмотрим важные частные случаи производящих систем.

Энергетические и информационные производящие системы

Производящую систему назовём *энергетической*, если среди всех производно-передаточно-выходных цепочек потоков имеются (не менее одной) цепочки **энергетических** потоков и именно они **объявляются основными в деятельности системы**.

Производящую систему назовём *информационной*, если среди всех производно-передаточно-выходных цепочек потоков имеются (не менее одной) цепочки **информационных** потоков и именно они **объявляются основными в деятельности системы**.

Далее мы подробно рассмотрим примеры указанных систем.

4. ПРИМЕРЫ ЭНЕРГЕТИЧЕСКОЙ И ИНФОРМАЦИОННОЙ ПРОИЗВОДЯЩИХ СИСТЕМ

Для того, чтобы показать применимость развитых выше понятий для обобщённого описания систем, существующих в действительной жизни, выделим две широко распространённые системы и дадим их обобщённое и формализованное описание на развитом выше понятийном языке.

4.1. Отопительная печь как производящая энергетическая система

Устройства и среды печи и их вмещения

В отопительной печи U в качестве устройств выделим *топку* (M) и *нагреваемый проход* (N). В качестве внешних входных сред для печи выделим *дровяник* (A_1) и *воздушную среду* (A_2). В качестве внешних выходных сред для печи выделим *двор* (B_1), *трубу* (B_2) и *помещение дома* (B_3). Рассмотрим указанную средовую систему S .

Совокупность $ind S$ имён видов вмещений системы S состоит из следующих имён: дровяное химико-энергетическое вмещение (1), воздушное химико-энергетическое вмещение (2), пламенное тепло-энергетическое вмещение (3), зольное вмещение (4), дымовое вмещение (5), дровяное число-информационное вмещение (6), излучательное тепло-энергетическое вмещение (7).

Для упрощения записи имени вмещений заменим на *числовые коды имён вмещений*, которые проставлены в круглых скобках правее имён.

Совокупность $ind M$ имён видов вмещений топки M состоит из следующих имён: дровяное химико-энергетическое вмещение (1), воздушное химико-энергетическое вмещение (2), пламенное тепло-энергетическое вмещение (3), зольное вмещение (4), дровяное число-информационное вмещение (6).

Совокупность $ind N$ имён видов вмещений нагреваемого прохода N состоит из следующих имён: пламенное тепло-энергетическое вмещение (3), дымовое вмещение (5), излучательное тепло-энергетическое вмещение (7).

Совокупность $ind A_1$ имён видов вмещений дровяника A_1 состоит из следующих имён: дровяное химико-энергетическое вмещение (1), дровяное число-информационное вмещение (6).

Совокупность $ind A_2$ имён видов вмещений воздушной среды A_2 состоит из следующих имён: воздушное вмещение (2).

Совокупность $ind B_1$ имён видов вмещений двора B_1 состоит из следующих имён: зольное вмещение (4).

Совокупность $ind B_2$ имён видов вмещений трубы B_2 состоит из следующих имён: дымовое вмещение (5).

Совокупность $ind B_3$ имён видов вмещений помещения дома B_3 состоит из следующих имён: излучательное тепло-энергетическое вмещение (7).

Потоки в системе

В системе S имеются следующие потоки подпредметов.

Входной поток $S_{A_1M}^{11}$ дров с их химической энергией из дровяника в топку.

Входной поток $S_{A_1M}^{66}$ поленьев дров с их числовой информацией из дровяника в топку.

Передаточный поток $S_{A_2M}^{22}$ воздуха с его химической энергией из воздушной среды в топку.

Изводный поток $S_{M\infty}^{11}$ сгорания дров с изведением их химической энергии.

Изводный поток $S_{M\infty}^{66}$ сгорания поленьев дров с изведением их числовой информации.

Изводный поток $S_{M\infty}^{22}$ сгорания кислорода с изведением его химической энергии.

Производный поток $S_{\infty M}^{33}$ образования пламени с его тепловой энергией.

Производный поток $S_{\infty M}^{44}$ образования золы в топке.

Передаточный поток $S_{MB_1}^{44}$ золы из топки во двор.

Передаточный поток S_{MN}^{33} пламени с его тепловой энергией из топки в нагреваемый проход.

Изводный поток $S_{N\infty}^{33}$ исчезновения пламени в нагреваемом проходе с изведением его тепловой энергии.

Производный поток $S_{\infty N}^{55}$ образования дыма.

Выходной поток $S_{NB_2}^{55}$ выхода дыма из нагреваемого прохода в трубу.

Производный поток $S_{\infty N}^{77}$ образования теплового излучения с его тепловой энергией в нагреваемом проходе.

Выходной поток $S_{NB_3}^{77}$ передачи теплового излучения с его тепловой энергией из нагреваемого прохода в помещение дома.

Эволюционные уравнения для системы

Рассматриваемая система S является производящей энергетической системой для помещения дома B_3 , поскольку в ней имеются: 1) входно-изводные цепочки энергетических потоков $S_{A_1M}^{11}$, $S_{M\infty}^{11}$ и $S_{A_2M}^{22}$, $S_{M\infty}^{22}$; 2) входно-изводная цепочка информационных потоков $S_{A_1M}^{66}$, $S_{M\infty}^{66}$; 3) **производно-выходная** цепочка энергетических потоков $S_{\infty N}^{77}$, $S_{NB_3}^{77}$.

Все перечисленные выше вложения и потоки связаны следующей системой эволюционных уравнений:

$$\dot{W}_M^1 = S_{A_1M}^{11} - S_{M\infty}^{11} \text{ — уравнение для дров с энергией в топке.}$$

$$\dot{W}_M^2 = S_{A_2M}^{22} - S_{M\infty}^{22} \text{ — уравнение для воздуха в топке.}$$

$$\dot{W}_M^6 = S_{A_1M}^{66} - S_{M\infty}^{66} \text{ — уравнение для дров с информацией в топке.}$$

$\dot{W}_M^3 = S_{\infty M}^{33} - S_{MN}^{33}$ – уравнение для пламени в топке.

$\dot{W}_M^4 = S_{\infty M}^{44} - S_{MB_1}^{44}$ – уравнение для золы в топке.

$\dot{W}_N^3 = S_{MN}^{33} - S_{N\infty}^{33}$ – уравнение для пламени в нагреваемом проходе.

$\dot{W}_N^5 = S_{\infty N}^{55} - S_{NB_2}^{55}$ – уравнение для дыма в нагреваемом проходе.

$\dot{W}_N^7 = S_{\infty N}^{77} - S_{NB_3}^{77}$ – уравнение для теплового излучения в нагреваемом проходе.

3.2. Персональный компьютер как производящая информационная система

Устройства и среды компьютера

Персональный компьютер является многофункциональной системой, способной работать в разных режимах, задаваемых пользователем. Режим задаётся выбором программы. В выбранном режиме задействуется только подсистема, составленная из некоторого набора возможных (основных) устройств.

Перечислим возможные (основные) устройства персонального компьютера: клавиатура, мышь, сканер, микрофон, модем (по телефонным, оптоволоконным, радио каналам связи), дисководы с дисками, флешки с разъёмами, зрительная камера, монитор, принтер, звуковые колонки, факс, устройства хранения информации, основной процессор для обработки информации, местные процессоры для обработки информации в устройствах ввода и вывода, электропитание.

Далее рассмотрим только работу персонального компьютера в *режиме набора текста пользователем через клавиатуру и вывода его на монитор*. В этом режиме персональный компьютер U задействует следующие устройства: *клавиатура* (G), *память* (M), *процессор* (N), *монитор* (H). В качестве внешних входных сред для такого компьютера U выделим *пользователя с мнимой панелью клавиатуры в его сознании* (A_1) и *источник электропитания* (A_2). В качестве внешних выходных сред для такого компьютера U выделим *пользователя с мнимым экраном монитора в его сознании* (B_1) и *воздушную среду* (B_2). Рассмотрим указанную средовую систему S . Электропитание будем рассматривать только для процессора, поскольку электропитание остальных устройств компьютера точно таким же образом.

Вмещения устройств и сред

Совокупность *ind* S имён видов вложений системы S состоит из следующих имён: *вмещение клавиатурных знаковых состояний* (1), *вмещение клавиатурных цифровых состояний* (2), *вмещение мониторных цифровых состояний* (3), *вмещение мониторных световых состояний* (4), *вмещение разностей электронных потенциалов* (5), *излучательное тепло-энергетическое вмещение* (6). Отметим, что указанные состояния являются **информационными** подпредметами устройств и сред.

Для упрощения записи имени вложений заменим на *числовые коды имён вложений*, которые проставлены в круглых скобках правее имён.

Совокупность *ind* G имён видов вложений клавиатуры G состоит из следующих имён: *вмещение клавиатурных знаковых состояний* (1), *вмещение клавиатурных цифровых состояний* (2).

Совокупность *ind* M имён видов вложений памяти M состоит из следующих имён: *вмещение мониторных цифровых состояний* (3).

Совокупность $ind N$ имён видов вложений процессора N состоит из следующих имён: вложение клавиатурных цифровых состояний (2), вложение мониторных цифровых состояний (3), вложение разностей электронных потенциалов (5), излучательное тепло-энергетическое вложение (6).

Совокупность $ind H$ имён видов вложений монитора H состоит из следующих имён: вложение мониторных цифровых состояний (3), вложение мониторных световых состояний (4).

Совокупность $ind A_1$ имён видов вложений пользователя с мнимой панелью клавиатуры A_1 состоит из следующих имён: вложение клавиатурных знаковых состояний (1).

Совокупность $ind A_2$ имён видов вложений источника электропитания A_2 состоит из следующих имён: вложение разностей электронных потенциалов (5).

Совокупность $ind B_1$ имён видов вложений пользователя с мнимым экраном монитора B_1 состоит из следующих имён: вложение мониторных световых состояний (4).

Совокупность $ind B_2$ имён видов вложений воздушной среды B_2 состоит из следующих имён: излучательное тепло-энергетическое вложение (6).

Потки в системе

В системе S имеются следующие потоки подпредметов.

Входной поток $S_{A_1G}^{11}$ клавиатурных знаковых состояний из мнимой панели клавиатуры пользователя в клавиатуру.

Входной поток $S_{A_2N}^{55}$ разностей электронных потенциалов из источника электропитания в процессор.

Исходный поток $S_{G\infty}^{11}$ стирания клавиатурных знаковых состояний в клавиатуре.

Производный поток $S_{\infty G}^{22}$ создания клавиатурных цифровых состояний в клавиатуре.

Передаточный поток S_{GN}^{22} клавиатурных цифровых состояний из клавиатуры в процессор.

Исходный поток $S_{N\infty}^{22}$ стирания клавиатурных цифровых состояний в процессоре.

Производный поток $S_{\infty N}^{33}$ создания мониторных цифровых состояний в процессоре.

Передаточный поток S_{NM}^{33} мониторных цифровых состояний из процессора в память на хранение.

Передаточный поток S_{NH}^{33} мониторных цифровых состояний из процессора в монитор.

Исходный поток $S_{H\infty}^{33}$ стирания мониторных цифровых состояний в мониторе.

Производный поток $S_{\infty H}^{44}$ создания мониторных световых состояний в мониторе.

Выходной поток $S_{HB_1}^{44}$ мониторных световых состояний из монитора в мнимый экран монитора пользователя.

Исходный поток $S_{N\infty}^{55}$ расходования разностей электронных потенциалов в процессоре.

Производный поток $S_{\infty N}^{66}$ образования теплового излучения с его тепловой энергией в процессоре.

Выходной поток $S_{NB_2}^{66}$ передачи теплового излучения с его тепловой энергией из процессора в воздушную среду.

Эволюционные уравнения для системы

Рассматриваемая система S является производящей информационной системой для пользователя (с мнимым экраном монитора в его сознании) B_I , поскольку в ней имеются: 1) входно-изводная цепочка энергетических потоков $S_{A_2N}^{55}$, $S_{N\infty}^{55}$; 2) входно-изводная цепочка информационных потоков $S_{A_1G}^{11}$, $S_{G\infty}^{11}$; 3) **производно-выходная** цепочка информационных потоков $S_{\infty H}^{44}$, $S_{HB_1}^{44}$.

Все перечисленные выше вмещения и потоки связаны следующей системой эволюционных уравнений:

$$\dot{W}_G^1 = S_{A_1G}^{11} - S_{G\infty}^{11} \text{ — уравнение для клавиатурных знаковых состояний в клавиатуре.}$$

$$\dot{W}_G^2 = S_{\infty G}^{22} - S_{GN}^{22} \text{ — уравнение для клавиатурных цифровых состояний в клавиатуре.}$$

$$\dot{W}_N^2 = S_{GN}^{22} - S_{N\infty}^{22} \text{ — уравнение для клавиатурных цифровых состояний в процессоре.}$$

$\dot{W}_N^3 = S_{\infty N}^{33} - S_{NM}^{33} - S_{NH}^{33}$ — уравнение для мониторных цифровых состояний в процессоре.

$$\dot{W}_H^3 = S_{NH}^{33} - S_{H\infty}^{33} \text{ — уравнение для мониторных цифровых состояний в мониторе.}$$

$$\dot{W}_H^4 = S_{\infty H}^{44} - S_{HB_1}^{44} \text{ — уравнение для мониторных световых состояний в мониторе.}$$

$$\dot{W}_N^5 = S_{A_2N}^{55} - S_{N\infty}^{55} \text{ — уравнение для разностей электронных потенциалов в процессоре.}$$

$$\dot{W}_N^6 = S_{\infty N}^{66} - S_{NB_2}^{66} \text{ — уравнение для теплового излучения в процессоре.}$$

Отметим, что входной энергетический поток $S_{A_2N}^{55}$ больше выходного энергетического потока $S_{NB_2}^{66}$. Разность между ними показывает количество старого энергетического вмещения, извлекаемого при создании нового информационного вмещения в процессоре (см. аксиому временной преемственности вмещений из первой части).

ЛИТЕРАТУРА

1. Захаров В.К. Трудовое восполнение как архетипический антиэнтропийный процесс: излишество или необходимость? // Национальные интересы: приоритеты и безопасность. 2011. № 2. С. 54-64.
2. Захаров В.К. Психологические предпосылки устойчивого существования российского общества // Национальные интересы: приоритеты и безопасность. 2013. № 36. С. 2-12.
3. Захаров В.К. Исконная синтетичность общества и устойчиво-успешная государственная идеология // Всероссийская конференция «Государственная идеология и современная Россия» (28 марта 2014г.). Материалы. – М.: Наука и политика, 2014. С. 336-352.
4. Захаров В.К. Психологические предпосылки создания устойчивой постсоветской идентичности // Россия: тенденции и перспективы развития. Ежегодник. – М.: ИНИОН РАН, 2014. Вып. 9. Часть 2. С. 251-258.
5. Захаров В.К. Оптимальное управление в модели артели // Моделирование и анализ данных. 2013. № 1. С. 29-48.
6. Захаров В.К. Номология. Воспроизведение и обновление человеческого бытия. – М.: «Onebook.ru», 2016. – 396 с.
7. Захаров В.К., Капитанов Д.В., Кузенков О.А. Оптимальное управление в модели государства II // Моделирование и анализ данных. 2014. № 1. С. 4-31.
8. Захаров В.К., Кузенков О.А. Оптимальное управление в модели государства // Моделирование и анализ данных. 2011. № 1. С. 55-75.
9. Захаров В.К., Кузенков О.А. Оптимальное управление в математической модели государства // Журнал средневожского математического общества. 2015. Т. 17, № 2. С. 34-38.

Работа поступила 14.02.2017г.

МОДЕЛЬ ОПЕРАТИВНОГО ПЛАНИРОВАНИЯ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ ПРЕДПРИЯТИЯ

М.В. Воронов, А.В. Аладко

Рассматривается задача формирования оперативного плана работы предприятия с заказчиками. Изложен конструктивный процесс решения этой задачи.

We consider the problem of formation of the operational plan of work of the enterprise with customers. Outlines a constructive process of solving this problem.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА

Предприятие, план, заявка, модель, решение, лингвистическая переменная.

1. ВВЕДЕНИЕ

Планирование деятельности значительной части предприятий (в первую очередь массового спроса) базируется, как правило, на внешних заказах. При этом развитие технологий позволяет во все большей мере переходить к исполнению индивидуальных заказов, которые становятся уникальными (индивидуальными). Даже при выпуске стандартизованного спектра продукции заявки отличаются по количеству, времени, способам отгрузки, финансированию и т.п.

С другой стороны, наличие свободных мощностей обуславливает необходимость борьбы за заказы. В такой ситуации, получив заявку на изготовление партии товара, предприятие стремится выполнить ее с наибольшим эффектом. Для этого органы управления предприятием должны оперативно оценить возможность и целесообразность исполнения этого заказа. Получить же обоснованное решение этой задачи можно только в том случае, если с достаточной степенью детальности будет спланирована деятельность предприятия, которая учитывает актуальное состояние ситуации, будет ориентирована на выполнение данного заказа. Соответствующий план назовем планом на выполнение конкретного заказа (далее просто план). Только на основе показателей такого плана и может быть принято обоснованное решение.

Такого рода план должен отражать содержать скоординированные действия практически всех подразделений предприятия, что связано с необходимостью проведения огромного числа логических построений и поддержанных соответствующими вычислениями. С другой стороны, на выработку такого плана и принятия решения отводится все меньше. В идеале общение, поскольку в ходе обсуждения и планирования обычно возникает огромное число альтернативных ситуаций, целесообразно обеспечить возможность ведения диалога с заказчиком практически «в режиме реального времени». В этой связи органы управления предприятием должны иметь возможность ведения оперативного прогнозирования ресурсно и

технологически допустимых способов выполнения заявок, получения развернутых планов с указанием значений всех необходимых для принятия решений показателей.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Представим предприятие в виде следующих четырех подсистем: блок реализации продукции (назовем его складом готовой продукции), блок собственно производства продукции, блок обеспечения производства различного рода материалами и комплектующими (назовем его складом материалов), блок финансового обеспечения деятельности предприятия (рис.1.). На предприятии создана и функционирует системы информационной поддержки управления, которая содержит весь спектр информации о его возможностях, прошедшей деятельности, актуальном состоянии, а также зафиксированных сведений о ряде предстоящих операций. В частности, для каждого из блоков известны состояния соответствующих подразделений в каждый данный момент рассматриваемого периода (функционирует система мониторинга предприятия) и сформулированы правила, в соответствии с которыми принимаются так называемые частные решения (решения, касающиеся конкретного частного вопроса).

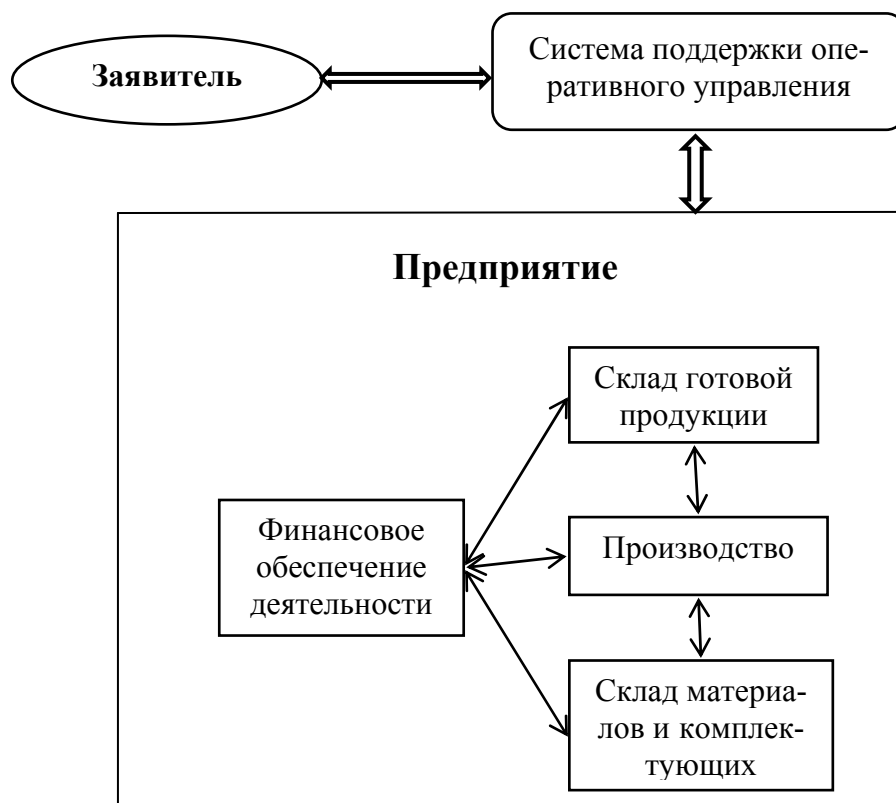


Рис.1. Обобщенная модель предприятия

Пусть в данный момент времени предприятие получает заявку на поставку известного количества продукции содержащую ряд параметров: ассортименту, количеству, цене, времени исполнения и др.

Уполномоченный орган управления должен рассчитать план выполнения заявки с учетом интересов предприятия, состояния и возможностей всех задействованных подразделений и служб. Этот план, представленный в удобной форме, должен сопровождаться представлением набором значений характеристик необходимых для принятия решения.

Ставится задача разработки модели оперативной выработки обоснованного решения как реакции на поданную предприятию заявки. Эту модель, совместно с алгоритмом реали-

зации и программно-техническим комплексом назовем системой поддержки оперативного управления предприятием (СПОУ).

Примечание. В целях простоты изложения ограничимся рядом упрощений: в данный момент рассматривается одна заявка на производство одного вида продукции, собственно производство характеризуется интегральной производительностью, для изготовления единицы продукции используется обобщенное понятие материал и свободные финансовые возможности (на каждый настоящий и последующие интервалы времени). Как показывает анализ, расширение этих условий приводит к усложнению описания и к увеличению размерности задачи, но не сказывается на сути предлагаемых подходов.

3. КОНСТРУКТИВНО-ИМИТАЦИОННЫЙ МЕТОД ПЛАНИРОВАНИЯ

В теории принятия решений видное место занимает проблематика моделирования различного рода организационных систем, где часто возникают так называемые слабоструктурированными проблемы. Существенной особенностью этих проблем является недостаточность знаний о предмете моделирования и, как следствие, наличие различного рода неопределенностей, препятствующих построению формальных моделей описания возможных траекторий функционирования этих систем [1]. К слабоструктурированным относятся и проблемы, возникающие при планировании деятельности предприятий в целом и оперативном планировании в частности.

В сфере управления организационными системами важное место принадлежит сформулированному руководством замыслу, как правило, в вербальной форме, где определена основная цель объекта управления, схематично указан путь ее достижения и совокупность значений основных показателей его деятельности. Однако замысел определяет лишь канву для последующих управленческих действий, в первую очередь разработки различного рода планов.

При планировании (в традиционном его понимании) могут использоваться самые различные математические модели, в основе которых лежат гипотезы о конкретном варианте развития ситуаций с определенными значениями параметров и схемами реализации отдельных действий. Если для прогнозирования и разработки планов на достаточно длительную перспективу применение традиционных математических методов себя оправдывает, то для задач оперативного планирования ситуация иная.

Схема формирования оперативных решений обычно не фиксирована, поскольку существенно зависит от складывающейся ситуации. Так рассматривая возможность исполнения заявки, можно часть продукции взять со склада (какую?), а другую часть изготовить специально под данный заказ (в какие сроки?). Поскольку объем заказа на изготовление продукции варьируется во времени, то может быть сформировано большое число вариантов потенциальной деятельности собственно производства. Отсюда следует возрастание вариативности ситуаций по обеспечению производства (материального, людского, финансового). Более того, исходя из своих возможностей и предпочтений, предприятие может выступить с предложением изменить некоторые условия заявки (сроки, объем, цены, порядок и способы отправки). Все эти обстоятельства вызывают крайне высокую размерность пространства возможных решений поставленной задачи и трудности формализации.

Встречаясь с такого рода препятствиями, на практике обычно используются весьма примитивные балансные методы, когда схемы действий объекта управления, его подсистем и элементов считают фиксированными (руководствуются заранее написанными правилами и инструкциями), либо их формирование отдают на нижестоящие уровни управления, оперируя в дальнейшем предъявленными им запросам, как безусловно выполнимыми (действие по принципу «они должны», значит выполняют). Очевидно, что для организационных систем такой подход приводит к построению планов не высокого качества, что по мере ускорения

процессов взаимодействия хозяйственных субъектов становится все большей помехой в их успешной деятельности. Как следствие, повышается актуальность решение задачи по предоставлению органам управления возможности оперативной разработки детальных ресурсно и технологически реализуемых планов, что предполагает переход к принципиально новым схемам математического моделирования [2].

Предположим, что известны состояние системы на данный момент времени и все потенциально возможные схемы деятельности ее компонентов. Требуется сформировать план функционирования предприятия в интересах выполнения полученной заявки. Для построения модели выработки плана исполнения заявки на поставку продукции предлагается использовать конструктивно-имитационный метод [3]. Его основу (ядро) составляет цикл: ситуация (состояние) – формирование полного множества потенциально возможных частных решений – выбор одного из них в качестве исполняемого частного решения – исполнение решения – переход объекта моделирования в новое (обусловленное этим частным решением) состояние. Заметим, что объектом моделирования, что крайне важно, здесь выступает пространственно-временной управляемый процесс функционирования рассматриваемого предприятия.

Основная идея метода заключается в том, что реализация такого цикла осуществляется только в актуальной ситуации, когда ситуация достоверно известна. Действительно, на данный момент орган управления знает о рассматриваемом объекте моделирования практически все. В данной полностью определенной обстановке (каковой, например, является исходное состояние системы) конструируется полная совокупность актуальных на данный момент вариантов ресурсно и технологически допустимых частных решений. Каким-то образом одно из них принимается и становится элементом плана (конструируется очередной элемент плана). Затем производится имитация процессов реализации этого элемента плана. В результате система приходит в новое вполне определенное состояние (наступает «завтра»), и процедура повторяется вновь. Именно поэтому метод назван нами конструктивно-имитационным методом (КИМ-методом).

Отметим два важных момента. Плановый период целесообразно разбить на некоторые интервалы, которые назовем временными квантами, по которым и производятся временные шаги. Размер последних зависит от специфики рассматриваемого объекта. Однако он должен быть таким (это правило должно неукоснительно выполняться), чтобы в рамках одного кванта времени не осуществляются два или более противоречащих друг другу частных решения, например, принять и отменить одно и то же решение (в последующие же временные интервалы такое в принципе возможно). Это условие не слишком обременительно (всегда можно сузить временной квант), но оно обеспечивает внутреннюю непротиворечивость процесса формирования решения задачи и резко сокращает размер пространства возможных альтернатив. В данном случае за элементарный временной промежуток времени целесообразно брать сутки (рабочий день).

В рамках данного промежутка времени рассматриваются все без исключения компоненты системы, при этом относительно каждого из них может либо исполняться ранее принятое частное решение (причем, как относительно начала исполнения нового действия, так и на продолжение действия, которое уже осуществлялось в ходе предыдущего временного кванта), либо формироваться полное множество альтернатив нового частного решения, которое может быть и пустым. При этом относительно данного компонента формируются только ресурсно и технологически возможные в данной сложившейся ситуации варианты решений. Тем самым обеспечивается полнота рассматриваемого множества вариантов решения задачи и потенциальная исполнимость плана.

Основные этапы КИМ – метода таковы.

1. На данном временном интервале для каждого компонента формируется полное множество возможных альтернативных частных решений. Если оно пусто, то переходят к следующему временному интервалу. Инициатива формирования проекта решения для дан-

ного компонента принадлежит либо другому компоненту (ему, что-то надо и это что-то входит в компетенцию данного компонента), либо предписано условиями задачи, например, отгрузить на данную дату заказчику определенный объем готовой продукции.

2. Каждое из сформированного множества потенциально возможных частных решений взвешивается. Вес, как и обычно, призван учесть все «за» и «против» данного варианта решения. Вес G_j каждой j -ой альтернативы формируется, как некоторая свертка учитываемых в модели факторов. Для этих целей нами обычно применялась и рекомендуется следующая формула

$$G_j = \frac{\sum_{\forall h} c_h g_{jh}}{\sum_{\forall r} c_r q_{jr}},$$

где g_{jh} - значение h -ого параметра, увеличение значения которого в целом соответствует поставленным перед объектом управления целям. Это, например, прибыль, качество продукции, имидж фирмы и т.п.;

q_{jr} - значение r -ого показателя, уменьшение значения которого в целом соответствует поставленным перед системой целям. Это такие показатели как время, себестоимость продукции, количество отходов и другие;

c_h, c_r - коэффициенты настройки модели, о которых будет сказано ниже.

3. На множестве весов $\{G_j\}$ производится выбор одного из них в качестве компонента формируемого плана. Этот выбор целесообразно осуществлять методом рандомизированного розыгрыша, схема которого такова. Пусть ξ - случайное значение равномерно распределенной на отрезке $[0,1]$ величины. Тогда выбранной является та альтернатива j^* , которая первая (по мере возрастания j) удовлетворяет условию

$$j^* = \min_k \frac{\sum_{j=1}^k G_j}{\sum_{j=1}^{j_0} G_j} > \xi,$$

где k - число сформированных альтернатив, j_0 - количество сформированных альтернатив.

Возможным критикам использования такой, в общем-то «слепой», процедуры поясним, что по крайней мере на этапе построения модели рандомизированный розыгрыш на полном множестве альтернатив принципиально необходим, поскольку исключение любых ресурсно и технологически возможных частных решений может приводить (кстати, что мы и видим при использовании других механизмов) к неэффективному решению задачи в целом (частное решение с малым весом иногда может вести к наилучшему общему решению поставленной задачи). Для более тонкого учета особенностей рассматриваемых систем или условий их функционирования на этапе эксплуатации модели служат коэффициенты настройки c_h, c_r .

4. После выбора частного решения осуществляется процедура его фиксации: в определенные моменты времени в отношении все участвующих в исполнении выбранного частного решения компонентов системы должны быть осуществлены (в соответствии с формируемым планом) вполне определенные действия. Кроме того, что очень важно, вносятся изменения в состояние объекта, например, фиксируются изменения в наличии ресурсов.

Отметим, что в течение рассматриваемого кванта времени принятые решения не исполняются, они реализуются лишь в последующие кванты времени. Кроме того, поскольку формируются только ресурсно и технологически реализуемые на данном этапе частные решения, то выбранное решение, безусловно, может быть исполнено. Продолжительность реализации решения может захватывать несколько временных квантов. В этом случае соответствующие изменения также фиксируются.

5. После приведения объекта в конечное состояние (в данном случае получении плана действий всех компонентов предприятия по выполнению рассматриваемого заказа) совокупность всех выбранных частных решений и образует искомый план деятельности предприятия по выполнению данного заказа. Поскольку при его построении использовался рандомизированный розыгрыш, то формируется лишь один из возможных технологически и ресурсно выполнимых планов, показатели которого есть возможный набор значений характеристик. Иначе говоря, мы формируем лишь один из возможных планов. В этой связи процедуру формирования плана следует повторить многократно (провести серию реализаций описанных процедур) и на полученном множестве планов выбрать наиболее в смысле принятых критериев подходящий.

Используемые в модели коэффициенты настройки могут играть несколько ролей. Так, с их помощью можно регулировать важность того или иного фактора, т.е. менять тактику планирования и переходить к иным критериям эффективности W . С их помощью можно трансформировать функцию распределения сгенерированных планов. Последнее позволяет за (см. рис.2) сравнительно небольшое число прогонов модели получить вариант достаточно близкий к оптимальному W^* .

Здесь уместно привести аналогию с телевизионным приемником. Его назначение – преобразовывать электромагнитные волны в переносимых ими зрительное изображение и звук. Наличие регулировочных устройств на приемнике позволяет вести настройку по изображению и звук, а также переключаться на иные каналы. При этом сам телевизионный приемник не изменяется, изменяются лишь некоторые из регулируемых параметров. КИМ-модель также описывает процесс построения плана функционирования рассматриваемого объекта, корректировать который (настраивать) позволяет механизм подбора значений коэффициентов настройки.

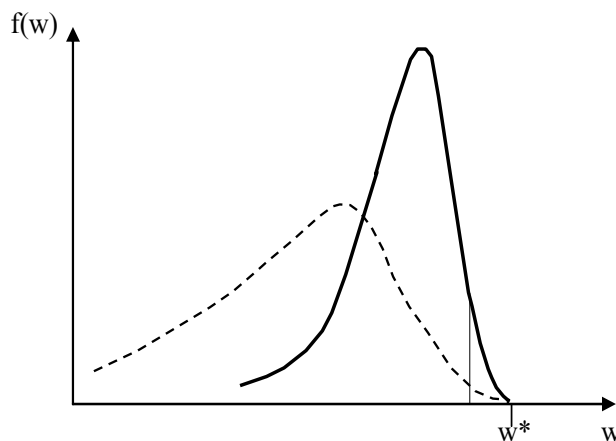


Рис. 2. Настройка модели

4. МОДЕЛЬ РАСЧЕТА ПЛАНА ДЕЯТЕЛЬНОСТИ ПРЕДПРИЯТИЯ ПО ИСПОЛНЕНИЮ ПОЛУЧЕННОЙ ЗАЯВКИ

Опишем упрощенную схему формирования возможного технологически и ресурсно допустимого плана исполнения предприятием одной полученной от заказчика одной заявки. Пусть заявка на производство продукции (в самом упрощенном виде) представляет собой следующий вектор $Z = (m, Tz)$, где: m – объем заказываемой продукции, Tz – время исполнения заказа (рассматривается однопродуктовая заявка).

Прогнозируя развитие ситуации, предприятие может изготавливать продукцию независимо от наличия заявок (работать на склад). Для этого оно закупает необходимые расходные материалы, производит продукцию, содержит определенный запас как материалов, так и готовой продукции. Вся соответствующая информация на каждый текущий день и перспективу (что уже запланировано и утверждено) содержится в базе информационной поддержки деятельности предприятия. Для нашего изложения потребуются:

$n(t)$ - объем нераспределенных по заказчикам запасов на складе готовой продукции на день t ;

$h(t)$ - объем продукции, которое может изготовить предприятие в день t (характеризует свободные мощности производства);

$s(t)$ - объем нераспределенных для производственного задания запасов расходных материалов, которые имеет предприятие на день t ;

$l(t)$ - объем нераспределенных финансовых ресурсов, которые может израсходовать предприятие на приобретение расходных материалов в день t

Органы управления предприятия на основе результатов опыта работы, анализа обстановки и прогнозирования развития ситуации, исходя из поставленных целей формулируют правила своего поведения при ведении диалога с заказчиком и разработке плана выполнения заявок. В первую очередь это стремление держать некоторый запас ресурсов и возможностей. Поэтому в общем случае целесообразно формировать решения, в соответствии с которыми: не весь заказ исполняется за счет продукции, находящейся на складе (часть заказа следует целенаправленно изготовить), производственные мощности не задействовать в полную силу и желательно загружать их, например, равномерно, не все материалы берутся с соответствующего склада, часть их может закупаться и др.

Такого рода правила могут быть формализованы с использованием лингвистических переменных. В данном изложении мы будем использовать:

$\mu_i(x)$ - функцию принадлежности, описывающую возможность выдавать изделия со склада готовой продукции, руководствуясь одним из следующих правил: если $i=1$, то берем небольшую часть запасов, если $i=2$ или $i=3$ то близкую к половине и большую часть запасов соответственно. Выбор одного из этих трех правил осуществляется заблаговременно при настройке модели. По существу, каждое значение $\mu_i(x)$ - мера целесообразности, с которой со склада берется соответствующая часть запасов ($0 \leq x \leq 1$). В практических целях эти сведения удобно представлять в виде решетчатой функции $\mu_i(x_k)$, где x_k - фиксированная доля запасов продукции, которая может изыматься со склада в интересах удовлетворения части данной заявки (см. рис.3).

Аналогичные функции вводятся и для всех остальных подсистем:

$v_i(x)$ - функция принадлежности, описывающая целесообразность задействовать часть свободных мощностей производства для удовлетворения рассматриваемой;

$\phi_i(x)$ - функция принадлежности, описывающая целесообразность обеспечить производство имеющимися запасами материалов;

$\varphi_i(x)$ - функция принадлежности, описывающая целесообразность финансировать закупку необходимых материалов.

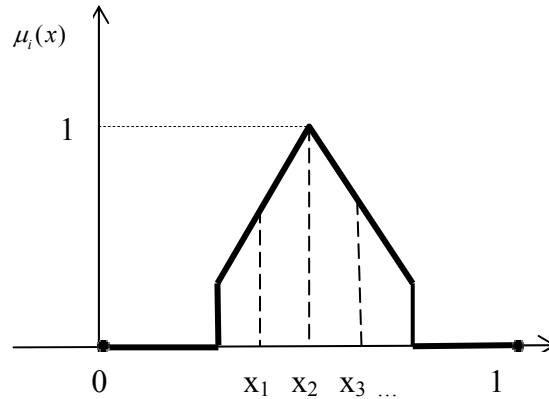


Рис. 3. Решетчатая функция принадлежности

Естественно, что формирование плана выполнения заявки следует начинать с определения потенциальной возможности удовлетворения заявки в указанных объемах и сроки (в данном изложении вопросы рентабельности считаются фиксированными и не рассматриваются). Для этого необходимо проверить выполнение условия

$$\max_{t \leq \tau \leq T_z} n(\tau) + \sum_{\tau=t}^{T_z-1} h(\tau) \geq m$$

Если оно не выполнено, это означает, что у предприятия нет возможностей исполнить данную заявку ни за счет запасов, ни за счет целевого изготовления продукции. В этом случае заявка отвергается либо начинают переговоры о корректуре заявленных условий, что можно рассматривать, как формулировка новой задачи. В случае удовлетворения этого условия приступают к формированию плана, схему расчетов которого иллюстрирует рис.4.

Построим логику расчета возможного плана выполнения заявки, используя следующую идею КИМ-метода: на каждом шаге построения плана рассматриваем частное решение относительно только одной подсистемы.

Если начинаем с рассмотрения склада готовой продукции, то необходимо принять решение о том, какая часть заявленного объема продукции берется с этого склада. Для этих целей при зафиксированном заранее i реализуется рандомизированный розыгрыш на множестве всех значений функции принадлежности $\mu_i(x_k)$, одного из ее аргументов - x_k , что позволяет сформировать решение о выдаче со склада готовой продукции в количестве $u = \min(n(t) \cdot x_k, m)$ единиц.

Примечание. Подобные вычисления могут быть проведены не только на день подачи заявки, а по более сложной схеме, рассматривая все дни на промежутке $[t+1, T_z-1]$. Здесь этот вариант не рассматривается.

При выборе такого частного решения остальную часть заказа в количестве $r = m - u$ единиц уже необходимо удовлетворить за счет собственно производства. Очевидно, что это можно реализовать за несколько производственных дней. Каких и сколько изделий изготовить в каждый из них? Дни производства должны укладываться в интервал $[t+1, T_z-1]$, где учтено условие, что результаты изготовления продукции могут быть выданы заказчику на

следующий день после их производства. Определение того, сколько единиц продукции и в какой день следует изготовить для выполнения рассматриваемой заявки, реализуется в два этапа. Вначале разыгрывается один из аргументов функции принадлежности $v_i(x_k)$, определяющий какую часть свободных мощностей можно задействовать, т.е. x_k . Затем разыгрывается день τ из интервала $[t+1, T_z - 1]$ (этот розыгрыш может учитывать, например, объем свободных мощностей). Для выбранного дня τ назначается объем производства, предназначенного для выполнения рассматриваемой заявке в количестве $r_\tau = \min(h(\tau) \cdot x_k, r)$ единиц. После этого производится фиксация принятого решения: $P(\tau) = r_\tau$, $h(\tau) = h(\tau) - r_\tau$. Затем $r = r - r_\tau$ и описанная процедура продолжается, причем до тех пор, пока не выполнится условие $r_\tau = 0$. В итоге получаем множество заказов на производство в интересах рассматриваемой заявки $P(\tau) \forall \tau \in [t+1, T_z - 1]$.

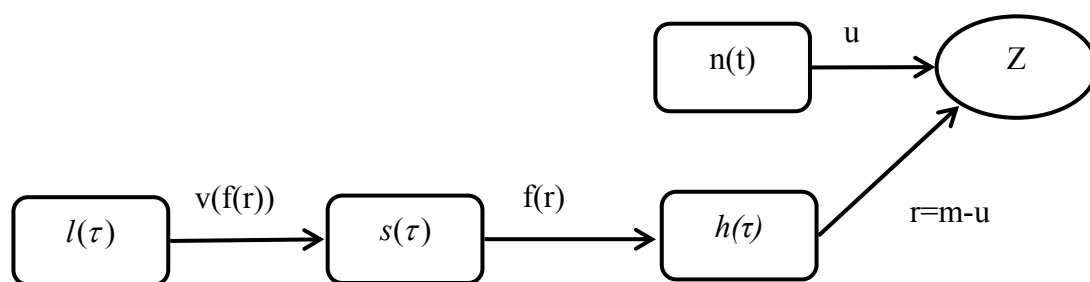


Рис.4. Схема расчета плана выполнения заявки

Запланированное производство нуждается в обеспечении расходуемыми материалами. Определение того, какой объем материалов берем со склада материалов, а какой закупаем на рынке, предлагается осуществлять по аналогичной схеме, но с учетом времени, необходимого для доставки закупаемых материалов.

Описанная процедура позволяет получить план действий предприятия по исполнению данной заявки

$$Pz = (u(Tz), P(\tau), Ps(\tau - 1), Pl(\tau - \alpha) \forall \tau \in [t + 1, Tz - 1]), \quad (1)$$

где $Ps(\tau - 1)$, $Pl(\tau - \alpha)$ - фрагмент плана для деятельности склада материалов и финансовых органов соответственно, α - временное упреждение, необходимое для проведения закупок материалов.

Отметим, что план (1) всегда ресурсно и технологически допустим, поэтому процедура его формирования занимает центральное место в схемах выработки решений по управлению предприятием в части исполнения заявок на приобретение выпускаемой им продукции.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

На предприятие поступает поток заявок, который является случайным. В этой связи предприятие заинтересовано в успешной деятельности на определенном промежутке времени, т.е. исполняя серию заявок. Эффективность же выполнения нескольких заявок существенно зависит от принятых решений относительно каждой из них. Однако, рассматривая данную

заявку, характеристики каждой из будущих заявок неизвестны, как неизвестны и характеристики потока заявок в целом.

Изложенный подход позволяет проводить исследования, выявлять некоторые закономерности и настраивать модель проводить, отталкиваясь как от интересов предприятия, так и характеристик внешней среды

ЛИТЕРАТУРА

1. Воронов М.В. Введение в системный анализ. - Тирасполь: Полиграфист, 2011. - 224 с.
2. Воронов М.В., Шпак В.Ф. Концепция конструктивно-имитационного моделирования операций. //Военная мысль №10. - 1990. С.92-94.
3. Воронов М.В. Конструктивно-имитационное моделирование слабоструктурированных систем. //Известия МАН ВШ, №4(42). - 2007г. С.156-165.

Работа поступила 10.01.2017г.

АСПЕКТЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ И ОСОБЫЕ СВОЙСТВА СЛОЖНЫХ СИСТЕМ

С.Л. Артеменков

Рассмотрены особые свойства строения сложных (сверхсложных) систем и некоторые аспекты возможности их моделирования в искусственных системах. Показаны такие важные характеристики сложности, как: сложный атомизм, нелокальные взаимодействия, наличие циклов действующей причины, семантика и контекстная чувствительность, поддерживаемые иерархией внутренних циклических процессов, обусловленность внутренними состояниями и отношениями, возможности самоизменения, самоподдержания и самовосстановления, связанные с трансцендентальными структурно-порождающими процессами. Сверхсложные системы являются невычислимыми (в машине Тьюринга) и принципиально соотносимы со множеством невыводимых друг из друга формальных моделей.

We consider the special properties of the structure of complex (highly complex) systems and some aspects of their simulation capabilities in artificial systems. Showing such important characteristics of complexity, how complicated atomism, non-local interactions, the presence of cycles of efficient cause, semantics and context sensitivity, supported by the hierarchy of internal cyclic processes, conditioning by internal states and relationships, the self-transformation, self-sustaining and self-healing capabilities, associated with the transcendental structure-generating processes. Highly complex systems are uncomputable (in Turing machine) and fundamentally correlated with a variety of non-printing from one another formal models.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА

Сложность, сверхсложность, сложная система, открытая система, синтаксическая система, семантическая система, моделирование, структурно-порождающие процессы, формопорождение, постановление, энактивизм, иерархия, причинно-следственные отношения, M-R система, конструкция мозга.

1. ВВЕДЕНИЕ

В современном информационно-технологическом мире на первый план часто выходят проблемы разработки и построения разнообразных адаптивных автоматизированных систем и механизмов, которые могут взять на себя часть свойственных человеку интеллектуальных функций и других способностей, которыми обладают живые организмы. Интеллектуализация технических систем требует исследования и внедрения качественно новых подходов, которые должны позволить создавать функционально гибкие системы с необходимыми интеллектуальными и полифункциональными возможностями.

Важную роль в этих исследованиях играют направления работ, связанные с воссозданием в искусственных системах тех механизмов, которыми обладают люди и животные, их телесные органы и системы их жизнедеятельности. Сделать это в действительности нелегко, поскольку относительно простым свойствам и конструктивному строению современных машин

и механизмов противостоит сложная системная организация живых систем, чье интегративное строение пока еще в недостаточной степени понято современной наукой.

Например, такие процессы, как процессы метаболизма клеток или психические процессы восприятия и мышления, остаются во многом слабо изученными и понятыми, а закономерности строения и функционирования этих систем во многом неясными. В частности, в психологических исследованиях мы имеем дело с действительно сложной реальностью психических явлений. С системной точки зрения исследуемая психологическая реальность сложна в своем устройстве онтологически, а в фило- и онтогенезе определяется не менее, если не более сложным образом. Характерным примером может служить описание механизмов и стадий развития ребенка [6; 13]. На практике эта сложность может приводить как к ситуациям практически полной неопределенности, так и наоборот непредсказуемой определенности.

Если эти процессы и связанные с ними системы являются по-настоящему сложными, то, по всей видимости, их также и сложно научно исследовать. Психологические исследования, направленные на понимание сущности психических процессов, определяющих основу возможности существования самого этого понимания и соответствующих научных концепций, оказываются в особом положении, поскольку «человеческое мышление способно осмысливать психику только опосредованно – опять же через продукты психического процесса, а сам психический процесс, порождающий эти продукты, остается за пределами логико-понятийной структуры человеческого мышления» [11].

Таким образом, можно утверждать, что сложность и неопределенность имманентны процессу психологического исследования, а изучаемые в психологии системы обладают действительно сложными свойствами и проявлениями. Характерным примером общего представления о такой сложности является положение о формопорождении, которое лежит в основе иерархической объяснительной модели строения восприятия в теории трансцендентальной психологии, предложенной проф. А.И. Миракяном [5; 9]. Данная теория представляет собой опыт построения новой аксиоматической методологии психологии восприятия на основе определения универсальных общеприродных принципов и условий возможности осуществления формопорождающих процессов психического отражения. В этих процессах выделяется структурно-процессуальная часть, обеспечивающая бессознательные процессы непосредственно-чувственного восприятия, которые основаны на иерархической системе образования анизотропных отношений [4]. Следует отметить, что идея формопорождения методологически является важной в плане ее более широкого обобщения и выделения в общей системологии отдельного класса структурно-порождающих процессов, механизмы которых не зависят от свойств их частей или продуктов и являются характерными для процессов перехода между системообразующими структурами, изучаемыми разными иерархически взаимосвязанными науками [2].

Естественно возникает вопрос в чем, по сути, состоит представленная выше сложность и как она может быть определена? Есть ли в этой «сложности» какие-либо общие свойства или характеристики, которые важны для ее моделирования в искусственных системах?

Здесь следует заметить, что как специальная дисциплина «сложные системы» являются относительно новой большой областью науки [16]. Задачей этой науки является изучение того, как части системы и их взаимосвязи обеспечивают особое функционирование и коллективное поведение систем и как эти системы взаимодействуют с их окружением. Поскольку эти вопросы относятся к очень многим системам самого разного рода, включая социальные, нейронные, молекулярные, мультиагентные и другие системы, то вопросы, относящиеся к этой дисциплине, пронизывают многие теоретические и практические сферы науки и имеют отношение к инженерному конструированию, системотехнике, робототехнике и другим направлениям научно-технического развития.

Обычное определение «сложности» связано с представлением о частях, которые взаимосвязаны и переплетены. Поскольку из частей состоят и «простые» системы, то взаимосвязи и «сплетения» частей в результате представляют собой важную характеристику сложности. При таком понимании сложности существует тенденция исследования свойств и качеств сложности систем, представляющих собой в первую очередь различные сетевые образования [22]. Вместе с тем анализ биологических, психофизиологических и психологических исследований показывают, что такое понимание сложности недостаточно [3].

В этой связи, одной из важнейших фундаментальных задач является задача исследования строения и развития по-настоящему сложных (сверхсложных) систем, структура и динамика процессов в которых существенным образом отличаются от процессов в широко известных механизмах и машинах. В данной работе представлен ряд направлений исследования сложных систем и показаны некоторые из важных особенностей их строения.

2. СЛОЖНОСТЬ СИСТЕМ И ЯВЛЕНИЙ ДЕЙСТВИТЕЛЬНОСТИ

Основные направления исследования сложных систем относятся к самым разным разделам науки: общая теория систем, кибернетика, искусственный интеллект, теория динамических систем и теория глобальных сетей, синергетика, мультиагентские системы и др. Понятно, что представления о структурной, динамической и иной «сложности» систем формировались в самых разных науках, включая физику, химию и биологию. В существенной мере они так или иначе связаны с процессами «живого мира» и системами, относящимися к миру живых существ.

Следует отметить, что «сложность» и «простота» на самом деле одновременно присущи системам и явлениям действительности, которые являются предметом научного исследования. В принципе «простота» является важным началом и результатом науки, что, в частности связано с широким применением методов аналитической редукции и поведенческой имитации, а также с требованием «не множить сущее без необходимости». В контексте стремления к такому упрощению сложность явлений мира оказывается менее заметной еще и потому, что она просто меньше встречалась и встречается в повседневной практике человека. При этом потенциальная сложность и неопределенность внутренне присущи (имманентны) процессу научного исследования и естественно зависят от объекта и предмета исследования. В этом научный подход в целом отличается от нашего повседневного опыта. Наука ставит и пытается просто решать проблемы, которые в повседневной жизни человек может не замечать.

Характерным примером является история развития теории чисел. В частности, обыденная практика создает представление о редкости иррациональных чисел по отношению к множеству рациональных чисел. Основными числами житейского опыта долгое время являлись рациональные числа, связанные с отношениями между целыми числами. Если в геометрической практике человека появляется число «пи», которое не является рациональным, то оно является действительно редким в контексте рациональных чисел. Однако, как нам известно, эта редкость обманчива и множество иррациональных чисел является более мощным, чем множество рациональных чисел. Иначе говоря, редкость иррациональных чисел есть результат ограниченной выборки.

В биологии таким же образом может быть поставлен вопрос: «является ли живой мир незначительными (специальным) по отношению к миру не живых систем и явлений? Должны ли мы согласиться со следующим положением [21]: биология является незначительной, поскольку – живой мир образует очень малую и очень специальную часть вселенной – не похоже, что изучение живых существ когда-либо откроет общие законы, которые будут действительны вне биосферы?

В физикальной классификации материальных систем класс организмов содержится в классе машин, класс машин содержится в классе материальных систем. В этой классификации систем фон Нейман и ряд других исследователей обратили внимание на понятие сложности систем. При этом в качестве основы сложности рассматривали размер (количество) и полагали, что критический размер системы приводит к возникновению сложности. Системные качества имеют порог в зависимости от количества элементов, которые содержит система и/или количества связей между ними. Определенное системное качество (свойство) будет отсутствовать при малом количестве элементов и связей и появится только при достаточно большом их количестве [8].

По фон Нейману биологические качества: самовоспроизведение, возможность роста, эволюционирования и развития, и психические качества: обучаемость, запоминание, мышление, познание и сознание, могут быть ассоциированы с такими порогами сложности. Все организмы находятся по другую сторону порога сложности. Но при этом онтология и эпистемология совпадают. Понимание того как работает система говорит также и о том, как ее можно построить и наоборот.

Следствием такого рассмотрения является то, что конструирование и вычисление, фактически, совпадают. Вне зависимости от уровня сложности система есть совокупность своих подсистем. Функция всегда локализована в структуре. Одна функциональная активность в машине может быть пространственно отделена от другой с использованием искусственных средств, без нарушения функции (каждой из таких частей).

Обычный подход к конструированию искусственных систем вполне естественно может ставить задачу воссоздания функциональных возможностей живых организмов. Например, если вы хотите построить самолет, то вы смотрите на птицу, которая может летать и обладает крыльями. Однако, общая идея выделения и воссоздания отдельных специальных свойств оказывается главенствующей. Поэтому функцию полета вполне естественно отделить от материальной структуры (птицы и самолета).

Действительно, что делает самолет и птицу столь разными? Крыло птицы есть неразделимая комбинация двигателя и аэродинамической поверхности. Мы не можем физически разделить их на две пространственно разнесенные структуры. В самолете двигатель и крыло отделимы одно от другого потому, что так он построен по самой сути своей неоднородной онтологии, которая определяется гетерогенной эпистемологией исследователей.

При более широком рассмотрении можно утверждать, что независимо от количественного порога система является простой или только усложненной, если все ее модели являются воспроизводимыми таким гетерогенным способом разделений и соединения частей и функций (в том числе с помощью синтаксического конструирования). Соответственно непростая система, которая должна иметь невозпроизводимую модель, является по настоящему сложной. Ее нельзя построить с использованием с помощью чисто синтаксических средств. Необходимо включать семантические элементы, трансцендентальные по отношению к синтаксису (как, например, взятие предела в математике) или использовать два или более несоизмеримых временных процесса.

Если эпистемология равна онтологии - формализация, вычисление и конструирование совпадают. Конструирование сводится к манипуляции символами и является приложением механических синтаксических операций (правил вывода) в заданной последовательности (в единственной фиксированной временной рамке). Это собственно и есть алгоритм. Все, что «производится» таким образом, называется еще предикативным.

Соответственно то, что нельзя сконструировать путем приложения правил из конечного набора синтаксических продуктов, прилагаемых в определенном порядке к символам, взятым из фиксированного набора, может быть названо импредикативным и определяется через общность, которой оно само должно принадлежать. Фактически не существует «обычного» алгоритма построения того, что является импредикативным (возможно, в этом случае можно говорить о «необычных» алгоритмах, но этот вопрос требует дополнительного исследова-

дования). Импредикативность и неразложимость на части тесно связаны друг с другом. Неразложимость является онтологической характеристикой импредикативности. Например, аэродинамическую поверхность нельзя отделить от крыла птицы – она определяется через крыло и наоборот.

В этом смысле изучение организации живых существ выводит нас из специального физикалистского мира (где вещи следуют закономерным принуждениям частных, которые в результате определяют все) в более сложный мир, где: частные особенности не обязательно определяют общности, а знание о том, как система работает, не определяет то, как она создана. Если нашей проблемой является воссоздание (т.е. онтология) мы просто не можем ее решить с использованием ограниченных эпистемологических средств в мире, в котором онтология и эпистемология существенно отличаются и существует реляционная иерархия (взаимное вложение) разных уровней существования и сущности (организм, личность, социум и др.).

3. САМООРГАНИЗАЦИЯ В НЕРАВНОВЕСНЫХ СИСТЕМАХ

На основании представленных выше аргументов можно утверждать, что наличие сложности в организации живых существ является общим случаем, а простые системы (механизмы и машины) - это вырожденный случай сложных систем. Известно, что поведению и состояниям живых существ свойственны особые качества и явления: порождение, реактивность, адаптивность, ситуативность, проявление новых системных свойств и состояний (например, эмергентность) и др. Идеи порождения в настоящее время достаточно основательно исследуются в науке. В частности, синергетика, как наука о развитии и самоорганизации сложных систем произвольной природы, занимается нахождением общих закономерностей эмерджентных процессов, каким-либо образом проявляющих новые качества целостности, которых нет в составляющих эти процессы частях. Эмерджентные явления включают с себя большие количества разных возможностей, включая: приспособительный успех, который выступает из сложных взаимодействий между организмом и миром; поведение, которое не централизованно контролируется (или создается) и является результатом взаимодействия множества простых компонентов или агентов; неожиданные, непредсказуемые, поразительные ситуации или действия; поведение, возникающее в результате взаимодействия агента с окружением, которое эксплицитно не запрограммировано; проявления интеллекта, который определяется динамикой взаимодействия с миром, и др.

В частности, эмергентность предполагает наличие порождаемых интегральных системных качеств и свойств, специфичных именно для системы в целом и не выводимых из известных свойств ее элементов и способов их соединения. К этому относится и представление о том, что психические свойства возникают (проявляются) из сложных материальных образований, но не сводятся к совокупности всех их физических характеристик.

Понятие эмергентности или «проявления» в первую очередь связано с возможностью самоорганизации и порождения нового качества организации целого. Однако, интегральные системные качества самоорганизации характерны не только для живых существ. Как показывает современная наука, появление новых системных качеств возможно, например, в результате кооперативных явлений в неравновесных диссипативных системах, где во многих случаях проявляется самоорганизация и имеет место спонтанное рождение динамических структур. Таким образом, синергетические эффекты согласованного взаимодействия частей системы имеют место, как в живых, так и в неживых системах. Например, это могут быть процессы самоорганизации фосфолипидных молекул при их смешивании с водой.

Согласно диссипативной структурной модели самоорганизация происходит в условиях далеких от равновесных, когда в результате увеличения энергетических потоков, проходящих через систему, могут внезапно появиться пространственно-временные образования

глобального масштаба. Знаменитый австрийский физик Э. Шрёдингер в публичных лекциях, прочитанных в Дублине в 1943 году, рассмотрел конкретные вопросы применения физических идей в биологии (в том числе общие проблемы физического подхода к различным явлениям жизни, причины макроскопичности, многоатомности организма, механизма наследственности и мутаций) и пришел к заключению, что новая физика должна осуществить переход от «частного к общему». В минимальном случае это означает переход от закрытых систем к открытым системам [12]. Это, по сути, означает, что живые организмы являются более общим классом систем, чем неживые системы, рассматриваемые в традиционной физике.

Открытые системы в целом обладают большим многообразием возможных состояний и свойств. Примером достаточно сложной картины возможных процессов в открытой физической системе является спонтанное образование структур и возникновение упорядоченности в виде конвективных ячеек в форме цилиндрических валов или правильных шестигранных структур в слое вязкой жидкости с вертикальным градиентом температуры, то есть равномерно подогреваемой снизу (конвекция Бенара). В условиях без нагрева имеет место обычное случайное движение частиц жидкости. С модельной точки зрения единственными свойствами этих частиц (атомов Ньютона) являются масса и их координаты движения в конфигурационном и тангенциальном пространствах (положение и скорость). При нагревании в условиях, далеких от равновесных, в жидкостной системе возникает совокупное глобальное поведение, которое подчинено определенной кооперативности (за счет распределения градиентов и автоподстройки фаз): кооперативное состояние при этом включает только несколько макроуровневых степеней свободы.

Эти кооперативные синергетические явления связаны с глобальным поведением физических или иного типа систем, которые при всей усложненности имеющихся явлений достаточно просты. Важно отметить, что указанные выше простые частицы Ньютона, которые образуют новые атрибуты структуры системного целого, сами не претерпевают изменений и не зависят от условий или контекста. Свойства (состояний) этих простых «атомов» являются основой для образования объединенного состояния. Кооперативные явления в этом случае это сложное агрегирование простых (контекстно-независимых) «атомов». Добавление неравновесных зависимостей (градиентов) не добавляет каких-либо новых свойств к вектору состояний этих «атомов».

4. ВОЗРАСТАЮЩАЯ СЛОЖНОСТЬ КАК ОБЩЕЕ СВОЙСТВО

Математический анализ структурной стабильности системных свойств в целом тоже указывает на то, что возрастающая сложность является общим свойством их изменения. В частности, это имеет место для случая изменения свойств состояний динамических систем [24].

Общность (или качественное постоянство) свойства P может быть выражена в таком виде, что $P(x)$ включает $P(dx)$, где d некоторое малое возмущение x , т.е. dx всегда или, по крайней мере, почти всегда является заменителем x . Применим такой же подход к системе дифференциальных уравнений:

$$dx/dt = f_i(x_1, \dots, x_n), \quad i = 1, \dots, n. \quad (1)$$

Для определения малого изменения df_i функций f_i уравнение (1) можно представить в виде:

$$df_i = \sum u_{ij} dx_j, \quad \text{где } u_{ij} = \partial f_i / \partial x_j. \quad (2)$$

Функция u_{ij} отражает возбуждение или торможение роста x_i под воздействием x_j . Для выявления структурной стабильности динамической системы можно ввести возмущение в произвольной форме в виде:

$$df_i = f_i + e_g, \quad \text{где } e \text{ малая величина, а } g \text{ произвольно.}$$

Это образует общее возмущение f_i . С другой стороны, каждое такое возмущение в точности сохраняет дифференциальную форму (системы). Но, точность является совершенно не общим свойством дифференциальных форм и, конечно, не сохраняемым при произвольном малом изменении таких форм.

Таким образом, то, что выглядит расширенным контекстом для понимания структурной стабильности f_i , не является таковым для df_i . Иными словами, для возмущения df_i существует больше способов, чем мы можем найти с помощью возмущения f_i . У df_i как формы существует намного больше «окрестностей», чем у f_i как функции [24].

Это образует общее возмущение \tilde{f}_i . С другой стороны, каждое такое возмущение в точности сохраняет дифференциальную форму (системы). Но, точность является совершенно не общим свойством дифференциальных форм и, конечно, не сохраняемым при произвольном малом изменении таких форм.

Таким образом, то, что выглядит расширенным контекстом для понимания структурной стабильности \tilde{f}_i , не является таковым для $d\tilde{f}_i$. Иными словами, для возмущения $d\tilde{f}_i$ существует больше способов, чем мы можем найти с помощью возмущения \tilde{f}_i . У $d\tilde{f}_i$ как формы существует намного больше «окрестностей», чем у \tilde{f}_i как функции [24].

Рассмотренная ситуация в свою очередь является общей. В целом существует гораздо больше возможностей возмущения чего-либо, чем количество этих вещей как таковых. И затем мы можем помыслить о возмущении возмущений и так далее. Таким образом, можно заключить, что возрастающая сложность является общим свойством. То, что понимается под произвольным возмущением, зависит от более широкого контекста и является очень непростой сущностью, что невольно приводит к идее сложных систем, более «общих», чем простые.

В связи с этим для динамических систем актуальной является математическая теория катастроф [1]. Эта теория изучает и классифицирует явления, характеризующиеся внезапными изменениями поведения, связанными с малыми изменениями обстоятельств. Катастрофы здесь связаны с бифуркациями различных устойчивых (и неустойчивых) траекторий (предельных циклов и предельных точек). Тип катастрофы зависит от количества одновременно изменяющихся параметров.

5. ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЕ И БИОЛОГИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ

Рассматривая принципы конструирования современных технологических систем легко понять, что биологические и искусственные «роботические» системы являются очень разными по своим свойствам. Последние являются преимущественно синтаксическими, имеют простой атомизм и контекстно-независимые части. Целое при этом так или иначе является суммой его частей, анализ равен синтезу, в системе имеются выделенные причинные связи. Система, естественно не является родовой, имеет наибольшую формальную модель и, как правило, основана на вычислениях или является вычислимой.

В отличие от этого в биологии или психологии мы в принципе имеем дело с родовыми системами, разложение которых на части невозможно без разрушения системной целостности. Целое здесь оказывается больше суммы его частей, анализ не равен синтезу, у рассматриваемой естественной системы может не быть наибольшей модели, и она в результате может быть невычислимой (в машине Тьюринга).

Сложность в данном случае является следствием собственно системных качеств (включая богатые и переплетенные причинные отношения), а не увеличения размера системы. «Настоящая сложность» появляется не в результате бифуркации динамики системы, а за счет бифуркации описания. Для более полного их понимания сложные системы требуют создания более чем одной формальной системы.

В этом отношении, сложность можно определить, как качество систем реального мира, заключающееся в невозможности отображения всех их свойств в рамках любой формальной системы. Это качество предполагает наличие принципиально разных путей взаимодействия с этими системами. Принципиально разных в том смысле, что формальные системы, как модели, необходимые для описания каждого отдельного аспекта явлений в естественных системах, оказываются невыводимыми одна из другой.

Свойство невычислимости сложной системы связано с ее эндогенностью и импредикативностью: богатыми и переплетенными циклическими причинными отношениями с наличием обратной связи и иерархической спецификации механизмов. Вполне понятно, что не все формы циклической причинности являются по своему существу невычислимыми. Например, линейные сервомеханизмы являются вполне вычислимыми и при этом имеют циклическую круговую причинность, которая ограничена кругом Аристотелевской материальной причины.

Более сложная форма цикличности возникает, когда два отдельных процесса одновременно «модулируют» один другой. Эти процессы можно представить, как процессы, взаимно обновляющие свои операционные характеристики. При этой цикличности частями петли являются как Аристотелевская материальная причина, так формальная причина. Эта та цикличность, которая возникает при традиционном кибернетическом подходе [14] и она также вполне вычислима.

Интересная радикальная идея автономной цикличности представлена в теории Автопоззиса [7]. Автопоззийная система определена в терминах своей организации. В простейшем виде суть автопоззиса состоит в самовоспроизведении организмом своей границы, что необходимо для существования в качестве единой системы в разнообразной окружающей среде. В этом смысле, «живая система», такая как живая клетка организма, есть автопоззийная машина, чья основная функция состоит в создании и поддержании ее целостности - мембраны, отделяющей ее от среды, в которой она существует как когнитивная единица. Автопоззийная машина является специальным типом машины с особым гомеостазисом. Фундаментальной переменной, которую надо поддерживать, в ней является своя собственная структурно-процессуальная организация.

При перенесении этого кибернетического подхода на анализ психологических и социальных систем обычно подчеркивается идея всецелотелесности и вводится понятие «постановления» или «энактивизма», как порождения когнитивных возможностей в циклическом действии. При этом исследователи выделяют свой подход в отдельное научное направление, дифференцируя его как, от традиционного когнитивизма, так и от коннекционизма [10; 26]. Согласно этому подходу процесс взаимодействия автономного организма со средой поддерживается внутренними циклическими процессами, которые образуют иерархию ее порождающих возможностей, обеспечивающих, в частности, создание и перемещение соответствующих перцептивных «интерфейсов».

Например, в процессе научения при сенсорном замещении или при использовании новых орудий функциональный «интерфейс» восприятия перемещается далее во вне организма в то время, как психический «интерфейс» наоборот движется вовнутрь. При этом «психическое расстояние» до предмета становится короче, а «физиологическое расстояние» становится процессуально более сложным и обособленным. То, что функционально означает освоение действительности в виде движения «вовне», трансцендентально означает движение «вовнутрь» и наоборот. В этом смысле можно утверждать, что перцептивный процесс имеет особую порождающую (моделирующую) природу [5; 17].

6. МЕТАБОЛИЗМ И СИСТЕМНАЯ КОНСТРУКЦИЯ МОЗГА

Отмеченные выше порождающие возможности психики могут быть связаны с работой третьего вида циклической причинности, относящейся к образованию циклов Аристотелевской

действующей причины. Эти причины также могут взаимодействовать друг с другом и образовывать иерархически замкнутые системы с обратной связью. В таком процессе одинаково необходимы, как цикличность, так и иерархия. Результирующие процессы по самому своему существу являются неоднозначными. Поскольку как таковая неоднозначность запрещена в вычислениях, то такой вид циклических причинных процессов является, по сути, невычислимым (в машине Тьюринга).

В эндогенной биологической системе иерархии причинных связей составляют кольцевые структуры. Эта «петлевая иерархия» имеет одновременно как нисходящую, так и восходящую связи, основанные на действующей причине. В такой системе организация неотделима от субстрата и физический субстрат имеет критическое значение. Будучи импредикативной, такая система обеспечивает определение по отношению к самой себе [25].

Представление о сложном строении биологических процессов в принципе, так или иначе, может и должно быть подтверждено на практике при рассмотрении соответствующих процессов в живых организмах и их моделях. В действительности такие модели относительно слабо разработаны.

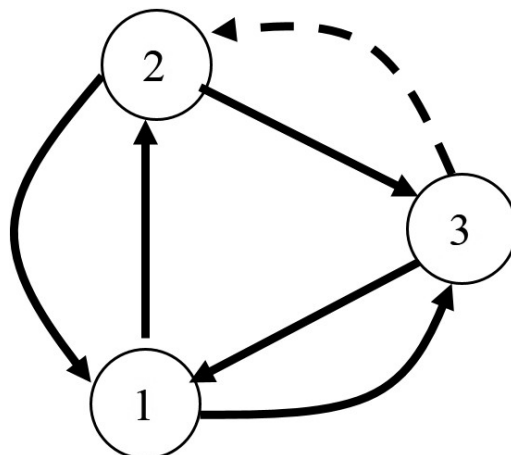
В частности, в реляционной биологии Николая Рашевского изучалась причинная организация всего спектра биологических функций. Он показал, что критические функции живой системы: метаболизм, восстановление и размножение, все внутренне причинно определены, т.е. причины берут начало в отношениях внутри системы [23]. Минимальная реляционная модель для «жизни как таковой» была представлена в виде M-R системы, которая в сжатом виде показывает организацию процессов метаболизма и восстановления в живой клетке. Эта модель является невычислимой сложной системой с внутренними петлями действующей причинной обусловленности [25]. Предложенное Р. Розеном математическое представление такой системы весьма абстрактно и представляет собой когерентное существование и трехчастное преобразование гипермножества $\Phi = \{\{\{\Phi\}\}\}$ ($\Phi \rightarrow \{\Phi\} \rightarrow \{\{\Phi\}\} \rightarrow \{\{\{\Phi\}\}\}$), где Φ есть множество функциональных преобразований допустимых внутри данной системы.

В настоящее время есть исследования, в которых утверждается, что подобную сложную организацию можно проследить в морфологии (причинных) отношений внутри эндогенной системы мозга [18; 19]. В принципе известно, что физиологические процессы мозга не заключаются только в активности нейронов и их сетей. На практике это обычно не учитывается и многочисленные современные теории оперируют в основном представлениями о различных нейросетевых процессах. Вместе с тем эти процессы в существенной мере основаны на синаптических взаимодействиях между нейронами мозга и опосредуются другими системами [18].

Кроме нейронной системы, основанной на сером веществе, в мозге активно функционирует также нейроглии (которая, по-видимому, также имеет сетевую организацию). Кроме того, в отдельную систему можно выделить систему, обеспечивающую процессы Несинаптического Диффузного Нейропереноса (НДН). Вполне вероятно, что, как показано на рисунке ниже, все эти три системы находятся между собой в двухсторонних причинных отношениях, поскольку в настоящее время все действующие причинные связи между ними (за исключением влияния НДН на нейроглию) можно выявить экспериментально [19]. Это создает круговую структуру действующих причинных связей между тремя специфическими системами мозговых процессов (см. рисунок ниже). Она обеспечивает также самоизменение действующей причины, что предполагает возможности качественной смены механизмов и закономерностей процессов в зависимости от рабочих параметров и состояния системы, а также возможности управления качественным и количественным изменением субстрата материальных носителей. Это управление представляет сложность по многим причинам, две из которых достаточно очевидны.

Во-первых, известно, что замена материала процесс много более консервативный, чем изменение отдельных свойств, формальных параметров или условий. В качестве примера

можно привести гипотетически сложную задачу замены химического состава и структуры



полупроводников в микросхемах компьютера в зависимости от результатов производимых вычислений.

**Рис. 1. Морфологические (причинные) отношения между системами мозга
(1 – синаптическая активность нейронов, 2 – нейроглия,
3 – несинаптический диффузный нейротранспорт)**

Во-вторых, замена материала требует управления скоростью его переноса. В механической системе для того, чтобы управлять скоростями нужно уметь развивать большие ускорения. Для этого нужно иметь большие мощности и соответствующие системы управления ими. Биологические процессы здесь также являются весьма энергозатратными, поскольку они имеют дело с управлением скоростями и качеством соответствующих химических реакций.

7. СТРОЕНИЕ И РАЗВИТИЕ СЛОЖНЫХ СИСТЕМ

На основе представленного выше обзора можно заключить, что системные качества сложности не всегда сразу ясны и понятны, являются весьма многообразными и при этом сложны также в их исследовании и изучении. В системном отношении можно говорить о достаточно большом количестве разных признаков сложности: открытость и нелокальность (причинные связи не сосредоточены локально) вместе с автономностью и самосоотнесенностью, характеризующейся переплетенностью причинных связей и соотношением многих со многими более, чем каждого с каждым; непредсказуемость и зависимость от контекста вместе с финальностью, выражающейся во внутренне определенном поиске целей; наличие сложных причинных зависимостей не только в связях и иерархии отношений, но и в системных частях, которые изменяются и проявляют разные свойства в разных отношениях. В результате «целое» в таких системах оказывает влияние на структуру, функции и поведение частей (если таковые можно выделить), а система является контекстно-чувствительной, т.е. в принципе может ме-

нять свои системные качества и функциональные возможности в зависимости от контекста, в котором она находится.

Свойства системной контекстной чувствительности при этом являются, по сути, весьма чудесными и радикально отличаются от качеств искусственных машин и механизмов, которые может производить современная техника. Принцип дизайна современных технических устройств как правило заключается в том, чтобы сделать отдельное устройство, которое функционирует одинаково в различном окружении, т.е. обладает функциональной автономностью и функционирует как контекстно-независимое устройство. Если производится, например, электрочайник, то он остается таковым и на заводе, и в магазине, и на кухне у потребителя. В этой связи трудно представить себе электрочайник, который, попав на конкретную кухню и «поняв», что там уже есть один такой чайник, самостоятельно превращается в тостер, которого на этой кухне нет. Однако, по существу превращение такого рода как раз и является основой той контекстной чувствительности, которой в той или иной мере обладают сверхсложные системы, и которую во многом демонстрируют различные живые существа, меняя свои свойства и функции в зависимости от окружающих условий и в той или иной мере приспособляя свое поведение и материальные структуры к изменяющемуся взаимодействию с окружающей средой.

Кроме того, одно из важных отличий многих живых систем от искусственных систем заключается в том, что искусственные системы работают с синтаксической информацией. В то же время биологические системы так или иначе «знают» о том, с чем они имеют дело, и являются интенциональными и семантическими, т.е. могут выделять значения, которые включаются в систему их отдельного внутреннего мира и имеют направленности, обусловленные как родовыми, так и средовыми зависимостями. При этом одно из важных свойств семантической системы, которое принципиально отличает ее от синтаксической системы, связано с ее «внешней соотнесенностью» - предметностью значений. Семантика - это нечто, что говорит о чем-то ином вне той системы, к которой оно само относится.

Строить или моделировать семантические системы мы можем пока путем имитации их частичных возможностей с помощью синтаксических систем. Вместе с тем можно также ориентироваться на физическое конструирование. Например, для имитации предметности можно использовать такие сложные части системы, состояния которых, определяются по отношению к не локальным воздействиям, в поле которых «существует» данная система [20]. Наряду с наличием локальных чувствительных элементов, в этом случае система в целом может также сохранять и использовать информацию о внешней среде и соответственно меняться и изменять свои функциональные возможности, учитывая не только конкретное воздействие, но и общий контекст взаимодействия с внешней средой.

8. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Можно заключить, что сложные (сверхсложные) системы в целом характеризуются рядом положений, которые могут быть полезны как для понимания происходящих в них процессов, так и для попыток их моделирования и искусственного воссоздания.

1. Эти системы в той или иной мере обладают сложным атомизмом. Элементы или части, из которых система построена, сами в своей основе являются сложными в том смысле, что они способны изменяться (развиваться) в процессе функционирования (эволюционирования) системы.

2. Структура связей сложной системы предполагает наличие нелокальных взаимодействий, которые обеспечивают в том числе открытый внутренней и внешней среде характер отношений системы, что создает условия для ее развития.

3. Причинно-следственные отношения между элементами или подсистемами имеют характер действующей причины и предполагают управление скоростью изменения материального субстрата, из которого эти части состоят.

4. Причинно-следственные отношения выстраиваются в замкнутые кольца, что обеспечивает автономность системы и обязательную многозначность ее состояний и соответствующих неоднозначных возможностей реагирования на изменение окружающей среды.

5. Семантические отношения со средой в автономной живой системе предполагают, как минимум, два взаимосвязанных уровня циклических процессов, когда внешнее циклическое взаимодействие поддерживается иерархией внутренних циклических процессов.

6. Иерархия процессов в сложной системе имеет такое строение, в которой обратные связи могут присутствовать внутри одного уровня и между уровнями системной иерархии, а также между системами разных иерархий. Это предполагает также вложенность процессов, имеющих разные временные характеристики.

7. Существо (динамика и сложность) строения процессов в системе обусловлено возможностями образования взаимодействий и отношений между процессами в не меньшей мере, чем между структурами (частями или фиксированными связями между ними).

8. Сложные системы предполагают постоянное самоизменение, связанные с самоподдержанием активности, самовосстановлением, самовоспроизведением, развитием, эволюцией, ростом и др.

9. В отличие от процессов информационного преобразования сложные системы могут включать структурно-порождающие (формопорождающие) процессы, которые по своей природе отличаются трансцендентальным характером. Эти процессы можно назвать структурно-порождающими «адиафорами», поскольку они порождают новые структуры и формы особым образом, безразличным к этим своим продуктам.

10. Формализация сверхсложных систем предусматривает множественность принципиально разных формальных моделей, которые не являются выводимыми одна из другой. Эта множественность связана с представленными выше свойствами и предполагает такую неоднозначность процессов, которая, по сути, делает процессы в этих системах невычислимыми в машине Тьюринга.

ЛИТЕРАТУРА

4. Арнольд В.И. Теория катастроф. М.: Едиториал УРСС, 2004. 128 с.
5. Артеменков С.Л. Реализация методологического принципа научного обобщения Выготского в современной трансцендентальной психологии // Научная школа Л.С. Выготского: традиции и инновации / Материалы международного симпозиума. М.: ФГБОУ ВО МГППУ, 2016. С. 154-157.
6. Артеменков С.Л. Реляционное моделирование психических функций (тезисы) // XIV Всероссийская научная конференция «Нейрокомпьютеры и их применение». М.: МГППУ, 2016. С. 128-129.
7. Артеменков С.Л. Трансцендентальная психология как изменение образа мышления // А.И.Миракян и современная психология восприятия: сборник материалов научной конференции. М.: ПИРАО, 2010. С. 324–358.
8. Артеменков С.Л. Методология трансцендентальной психологии и проблемы моделирования и экспериментального исследования порождающих процессов // Моделирование и анализ данных. Труды фак-та ИТ (выпуск 2). М.: РУСАВИА, 2005. С. 37-57.
9. Выготский Л.С. Лекции по педологии. Ижевск: Удмуртский университет, 2001. 304 с.
10. Матурана У.Р., Варела Ф.Х. Дерево познания. М.: Прогресс-Традиция, 2001, 224 с.
11. Медников Б.М. Аксиомы биологии. М.: Знание, 1982. 136 с.
12. Миракян А.И. Контуры трансцендентальной психологии. Книга 2. М.: ИП РАН, 2004. 384 с.

13. Ноэ А. Является ли видимый мир великой иллюзией? // Логос. №1 (97). 2014. С. 61-78.
14. Панов В.И. Парадоксы изучения психики и возможность их преодоления // Национальный психологический журнал. 2011. №1 (5). С. 50-54.
15. Шредингер Э. Что такое жизнь с точки зрения физики. М.: Римис, 2009. 176 с.
16. Эльконин Д.Б. К проблеме периодизации психического развития в детском возрасте // Избранные психологические труды. М.: Педагогика, 1989. 560 с.
17. Эшби Р. Конструкция мозга. М.: Иностранная литература, 1962. 399 с.
18. Artemenkov S.L. Embodied Cognition & Transcendental Psychology: Understanding the underlying processes of embodied cognition plasticity requires a new methodological paradigm // 2005 International Symposium on Body and Cognition: A Multidisciplinary Perspective. Taipei, Taiwan: NTU, 2005. P. 9-1 – 9-22.
19. Bar-Yam Y. General Features of Complex Systems // Encyclopedia of Life Support Systems. Oxford, UK: EOLSS UNESCO Publishers, 2002.
20. Brown-VanHoozer S.A., Kercel S.W., VanHoozer W.R. The Model-Based Mind // In Proceedings of SMC 2000: IEEE International Conference on Systems, Man, and Cybernetics. 2000.
21. Kercel S.W. The Endogenous Brain // Journal of Integrative Neuroscience. 2004. Vol. 3 (1). P. 61–84.
22. Kercel S.W. The Role of Volume Transmission in an Endogenous Brain // Journal of Integrative Neuroscience. 2004. Vol. 3 (1). P. 7–18.
23. Kugler P. Emergence in 'Complex Parts': A Semantic approach to Modeling Complex Systems // Abstracts of the “7th Understanding Complex Systems” Symposium. University of Illinois at Urbana-Champaign. 2007.
24. Monod J. Chance and Necessity: An Essay on the Natural Philosophy of Modern Biology. NY.: Vintage Books, 1971. 199 p.
25. Newman M.E.J. The Structure and Function of Complex Networks // Society for industrial and applied mathematics Review. 2003. Vol. 45 (2). P. 167–256.
26. Rashevsky N. Mathematical principles in biology and their applications. Springfield, Illinois: Charles Thomas, publisher, 1961. 128 p.
27. Rosen R. Essays on the life itself. NY.: Columbia University Press, 1999. 361 p.
28. Rosen R. Life Itself: A Comprehensive Inquiry into the Nature, Origin, and Fabrication of Life. NY.: Columbia University Press, 1991. 285 p.
29. Varela F., Thompson E., Rosch E. The Embodied Mind. Cambridge MA: MIT Press, 1991. 308 p.

Работа поступила 02.10.2016г.

ЭРЛАНГЕНСКАЯ ПРОГРАММА КЛЕЙНА И ГЕОМЕТРИЯ ТРЕУГОЛЬНИКА (ЧАСТЬ ВТОРАЯ)

М. Е. Степанов

В данной статье сопоставляются геометрия треугольника и Эрлангенская программа Ф. Клейна, в результате чего выявляется ошибочность распространённой трактовки планиметрии Евклида как учения об инвариантах группы движений плоскости. Автор рассматривает один из возможных способов устранения данной ошибки с помощью построения иной группы преобразований. В статье излагаются необходимые сведения, относящиеся к геометрии циклоидальных кривых и геометрии треугольника. Большой объём статьи потребовал её разбиения на две части.

In this article is compared triangle's geometry and Felix Klein's Erlangen Program. As a result it revealed mistake wide-spread interpretation Euclid's planimetry as the doctrine about invariants of group motions of plane. Author considers one of possible ways of removal this mistake with the help of construction another group of transformations. The necessary information related to geometry of cycloidal curves and triangle's geometry are stated in the article. The article is published in two parts in view of great volume.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА

Геометрия треугольника, Эрлангенская программа, планиметрия Евклида.

8. ГИПОЦИКЛОИДЫ

Гипоциклоиды возникают при качении подвижной окружности по внутреннему ободу неподвижной окружности. При этом перо находится непосредственно на ободке подвижной окружности.

При переходе от изучения эпициклоид к изучению гипоциклоид проявляется одно интересное обстоятельство. Процесс порождения эпициклоид и гипоциклоид определяется нами как результат некоей кинематической процедуры, которая может быть воспроизведена в реальном мире. Как физическое действие он предстаёт перед наблюдателем в предельно конкретном виде. При этом вычерчивание эпициклоиды обнаруживает значительное сходство с вычерчиванием гипоциклоиды – и там, и там происходит качение кругов друг по другу. Однако и имеющиеся отличия весьма значительны. В частности это проявляется в форме, которую имеют эпициклоиды и гипоциклоиды.

Но, как мы скоро увидим, математическое описание и тех, и других кривых сходно. Для получения гипоциклоид достаточно допустить использование отрицательных параметров. В результате появляется возможность детального анализа двух процессов, отличающихся на физическом уровне. При этом мы можем сделать упор на созерцание геометрических образов. Целью же нашего созерцания является объяснение тождественности аналитического описания двух различных процессов. По крайней мере, с педагогической точки зрения такие размышления могут быть весьма полезными.

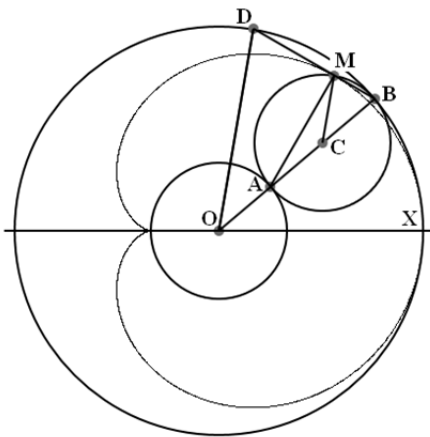
По этому поводу следует дать небольшой исторический комментарий. Подобно тому, как неевклидова геометрия, можно сказать, самочинно вошла в математику, не обращая ни малейшего внимания на предшествующие её появлению взгляды и теории, иррациональные, отрицательные и мнимые числа заставили признать себя, хотя их выталкивало из математики чуть ли не всё учёное сообщество. Иррациональные числа принесли с собой кризис пифагорейской философии, но их появление привело к созданию теории Евдокса, повторённой только в девятнадцатом веке. Что же касается отрицательных и мнимых чисел, то они окончательно получили гражданство в математике в том же веке.

И хотя Даламбер и Лазарь Карно отрицали объективное существование отрицательных величин [1], формулы Кардано и Эйлера своей незыблемой эффективностью заставляли расширить понятие числа, признав недавних изгоев полноправными числами.

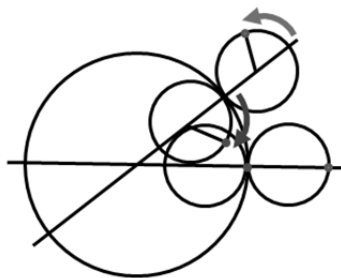
Особый интерес представляет использование отрицательных и мнимых чисел в геометрии. Штейнер их избегал, как только мог, что в целом ему навредило, а Ламберт сумел предсказать осуществление новой геометрии на сфере мнимого радиуса. Однако до работ Бельтрами никому и в голову не могло прийти, что такая сфера может существовать в трёхмерном пространстве в виде реальной поверхности. Именно по этой причине хотелось бы обратить внимание на то, что элементарная по своим методам теория циклоидальных кривых позволяет проследить один из вариантов «самовольного» вхождения отрицательных чисел в геометрию, приводящий к единой теории.

Приступая к изучению гипоциклоид, мы по мере возможности сохраним обозначения из первой части статьи. Прежде всего, речь идёт о том, что r_0 – радиус неподвижной окружности и r_1 – радиус подвижной окружности, где $r_1 = k_1 \cdot r_0$. Кроме того, мы сохраним на чертежах обозначение важных точек: O – центр неподвижной окружности, C – подвижной, A – точка их соприкосновения.

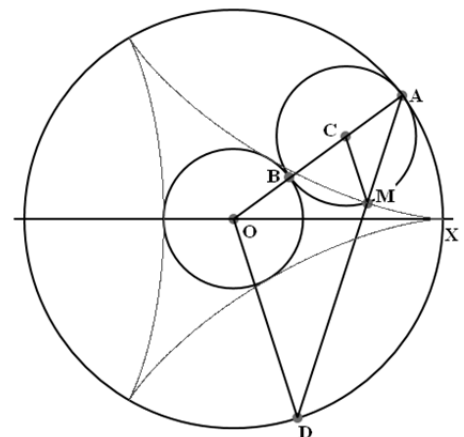
Для того, чтобы сходства и различия в построении эпициклоид и гипоциклоид проявились особенно наглядно расположим рядом чертежи, связанные с построением кардиоиды и кривой Штейнера ($k_1 = \frac{1}{3}$).



Кардиоиды (эпициклоиды)



Отклонения радиуса с пером



Кривая Штейнера (гипоциклоиды)

На чертеже показано главное различие, возникающее при построении эпициклоид и гипоциклоид. При построении эпициклоиды радиус подвижной окружности с пером вращается в том же направлении, что и линия центров подвижной и неподвижной окружностей. При построении гипоциклоиды радиус подвижной окружности с пером вращается в противоположном направлении от направления вращения линии центров подвижной и неподвижной окружностей. Тут мы видим первую причину появления знака минус. Действительно, важнейшая интерпретация положительных и отрицательных величин основывается на ис-

пользование противоположных направлений. Мы ещё вернёмся к этому вопросу, а пока докажем очередную теорему.

Теорема 17. Пусть точка А движется по неподвижной окружности с постоянной единичной угловой скоростью, а точка D в противоположном направлении со скоростью $1-1/k_1$, тогда точка M ($AM = k_1 \cdot AD$) вычерчивает гипоциклоиду.

Доказательство. Несмотря на то, что почти всё доказательство является повторением доказательства аналогичной теоремы об эпициклоидах, приведём его полностью. Гипоциклоида строится с помощью неподвижной окружности радиуса r_0 с центром O и подвижной окружности радиуса r_1 с центром C ($r_1 = k_1 \cdot r_0$). При этом качение осуществляется по внутренней стороне обода.

Пусть линия центров OC, на которой лежит точка A, движется против часовой стрелки и $\angle AOX = u$. Длина дуги неподвижной окружности, по которой прокатилась подвижная окружность, равна $r_0 \cdot u$. Такова же и длина дуги подвижной окружности, пришедшей в соприкосновение с неподвижной. Центральный угол, опирающийся на эту дугу, равен

$$u_1 = \frac{u \cdot r_0}{r_1} = \frac{u}{k_1}.$$

Выберем точку D так, чтобы $\angle AOD = u - u_1$. Пусть из исходного положения X перо переместится в точку M. Мы уже установили, что радиус CM вращается по часовой стрелке. При этом горизонтальная линия OX переходит в линию OA, а перо же за счёт качения отклонилось от этой линии на угол u_1 , то есть $\angle ACM = u - u_1$. Треугольники OAD и CBM являются равнобедренными и имеют углы при вершинах равные u_1 . Значит у них равны и углы при основании, то есть $\angle CAM = \angle OAD = \frac{\pi - u_1}{2}$. Из этого следует, что точка M лежит на

хорде AD. Из подобия названных треугольников следует, что $AM = \frac{r_1}{r_0} AD = k_1 \cdot AD$.

Теорема доказана.

Как и в случае эпициклоид, мы можем получить параметрические уравнения гипоциклоид. Точка А имеет координаты $(r_0 \cdot \cos u; r_0 \cdot \sin u)$, а точка D – координаты $(r_0 \cdot \cos (1-1/k_1)u; r_0 \cdot \sin (1-1/k_1)u)$. Координаты точки M вычисляются по формулам, которые и являются нужными уравнениями:

$$x_M = r_0 \cdot \cos u + k_1 r_0 \cdot (\cos (1 - \frac{1}{k_1})u - \cos u) = r_0 (1 - k_1) \cdot \cos u + r_0 k_1 \cdot \cos(1 - \frac{1}{k_1})u =$$

$$r_0((1 - k_1) \cdot \cos u + k_1 \cdot \cos (1 - \frac{1}{k_1})u),$$

$$y_M = r_0 \cdot \sin u + k_1 r_0 \cdot (\sin (1 - \frac{1}{k_1})u - \sin u) = r_0 (1 - k_1) \cdot \sin u + r_0 \cdot k_1 \cdot (\sin (1 - \frac{1}{k_1})u =$$

$$r_0 ((1 - \frac{1}{k_1}) \cdot \sin u + \frac{1}{k_1} \cdot \sin (1 - \frac{1}{k_1})u).$$

Окончательно получаем:

$$x_M = r_0((1 - k_1) \cdot \cos u + k_1 \cdot \cos (1 - \frac{1}{k_1})u),$$

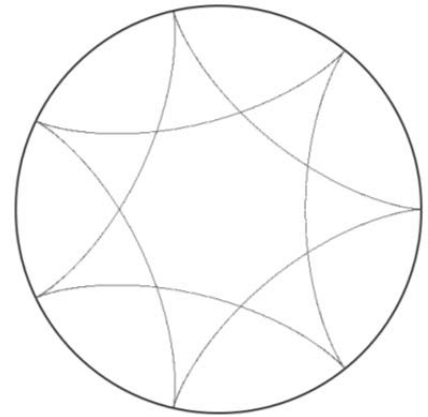
$$y_M = r_0 ((1 - k_1) \cdot \sin u + k_1 \cdot \sin (1 - \frac{1}{k_1})u).$$

Как и для эпициклоид, наши уравнения, используя два исходных параметра r_0 и k_1 , позволяют построить любые гипоциклоиды, связанные с общей для них неподвижной окружностью. При этом нет необходимости проводить имитацию процесса качения.

Применим уравнения в программе построения гипоциклоиды. Для получения замкнутой кривой следует использовать рациональные значения параметра $k_1 = \frac{m}{n}$. При этом значение угла u должно меняться от нуля до $2\pi \cdot m$.

```

GraphicsWindow.Width=500
GraphicsWindow.Height=500
pi = Math.Pi
x0 = 250
y0 = 250
r0 = 240
GraphicsWindow.DrawEllipse(x0-r0,y0-r0,2*r0,2*r0)
m=2
n=7
k1 = m/n
For u=0 To 2*pi*m Step pi/1000
xm = x0 + r0*((1-k1)*Math.Cos(u) + k1*Math.Cos((1-1/k1)*u))
ym = y0 + r0*((1-k1)*Math.Sin(u) + k1*Math.Sin((1-1/k1)*u))
GraphicsWindow.SetPixel(xm,ym,"red")
EndFor
    
```



Теперь заменим параметр k_1 на отношение скоростей точек, движущихся по этой окружности. Обозначим это число, как и раньше, через q ($q = 1 - 1/k_1$). Из этого равенства получаем, что $k_1 = -\frac{1}{q-1} = \frac{1}{1-q}$. Это то число, которое определяет положение точки M на хорде.

Теорема 18. Пусть точки A и D движутся по окружности радиуса r_0 с постоянными угловыми скоростями в разные стороны, причём модуль скорости точки D в q раз больше скорости точки A . Точка M , определяемая условием $AM = \frac{1}{1-q} AD$, описывает гипоциклоиду, а любая хорда AD является нормалью к этой гипоциклоиде.

Теорема эта практически является переформулированной теоремой 17. Если же её сравнить с аналогичной теоремой 13, связанной с эпициклоидами, мы видим ещё одно существенное различие между эпициклоидами и гипоциклоидами. Оно, конечно же, проявилось уже в момент сопоставления чертежей, связанных с построением кардиоиды и кривой Штейнера.

И там, и там движутся две точки, соединяющая их хорда делится в постоянном отношении и точка деления вычерчивает циклоидальную кривую. Но в случае эпициклоид точки B и D движутся по окружности радиуса $r_0 + 2r_1$, а хорда BD является касательной к соответствующей кривой. В то же время в случае гипоциклоид точки A и D движутся по неподвижной окружности радиуса r_0 , а хорда AD является нормалью к соответствующей кривой, поскольку проходит через неподвижную точку A соприкосновения неподвижной и подвижной окружностей. Точки A и B при этом меняются ролями.

Для нас в дальнейшем будет особенно важен вопрос, состоящий в нахождении и описании семейств прямых, являющихся огибающими гипоциклоид. Для эпициклоид он уже решён. В случае же гипоциклоид роль касательных играют нормали. По этой причине необходимо продолжить исследование этих кривых.

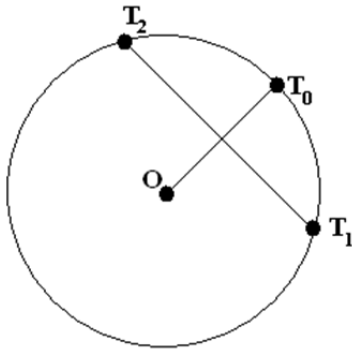
В процессе исследования мы будем использовать кинематические методы. Прежде всего вспомним кинематическую теорему Эйлера: произвольное мгновенное движение твёрдого тела в любой момент времени может быть представлено как сумма двух мгновенных движений: одного мгновенно-поступательного и одного мгновенно-вращательного [2].

Пусть на плоскости выделено семейство параллельных прямых. Зададим центр вращения O и начнём вращать плоскость с постоянной угловой скоростью. Каждая прямая из выделенного семейства будет двигаться как аналог твёрдого тела. Чистое вращение будет осуществлять только та прямая, которая проходит через центр вращения. Остальные прямые семейства будут по теореме Эйлера сочетать в своём перемещении и вращательное, и поступательное движение. Однако поступательное движение не изменяет направления прямой. По этой причине на это направление влияет только вращательная составляющая. И с этой точки зрения можно рассматривать движение всех прямых семейства как вращение с постоянной угловой скоростью. Поступательной составляющей мы просто будем пренебрегать.



Исходя из этого соображения, можно утверждать, что если одна прямая вращается (в нашем понимании) с постоянной угловой скоростью, а вторая движется так, что всегда образует с первой прямой постоянный угол, то она также вращается с той же угловой скоростью. В частности это имеет место для перпендикулярных прямых.

Рассмотрим окружность с центром O , по которой движутся две точки T_1 и T_2 с угловыми скоростями l и q (скорость q может быть и отрицательной). В момент старта точки совмещены. Если точка T_1 замела в процессе движения дугу, имеющую угловую меру u , то



точка T_2 заметёт дугу, имеющую угловую меру $q \cdot u$. Опустим из центра окружности O перпендикуляр на хорду T_1T_2 и продлим его до пересечения с окружностью в точке T_0 . Радиус OT_0 делит дугу T_1T_2 пополам, следовательно, точка T_0 замела в процессе движения дугу, имеющую угловую меру $\frac{1+q}{2}u$. Таким образом, её угловая скорость равна среднему арифметическому скоростей точек T_1 и T_2 . Такова же скорость вращения радиуса OT_0 .

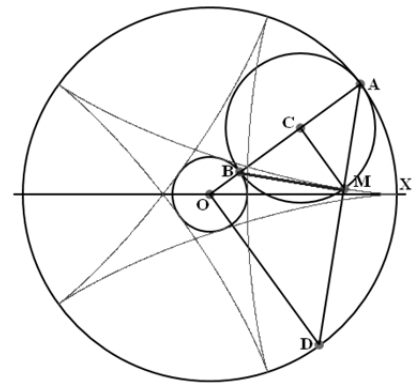
Наши предыдущие рассуждения позволяют сделать заключение, что перпендикулярная этому радиусу хорда T_1T_2 вращается с той же угловой скоростью.

Теперь мы можем выяснить, как ведут себя касательные к гипоциклоидам, а затем по аналогии описать поведение нормалей к эпициклоидам. Это дополнение в чём-то прояснит теорему об эволютах к эпициклоидам и позволит доказать теорему об эволютах к гипоциклоидам.

Теорема 19. Пусть точки A и D движутся по окружности радиуса r_0 с постоянными угловыми скоростями в разные стороны, причём модуль скорости точки D в q (q – положительно) раз больше скорости точки A . Точка M , определяемая

условием $AM = \frac{1}{1+q} AD$, описывает гипоциклоиду. Точка B

является пересечением линии центров подвижной и неподвижной окружностей с окружностью радиуса $r_0 - 2 \cdot r_1$. Прямая BM является касательной к гипоциклоиде и по мере перемещения точки B (с той же угловой скоростью, что и A) вращается с угловой скоростью $\frac{1-q}{2}$.



Доказательство. Исходно нам заданы два параметра: радиус неподвижной окружности r_0 и отношение q скорости точки D к скорости точки A . Как и выше $q = 1 - \frac{1}{k_1}$, то есть $k_1 = \frac{1}{1+q}$. Кроме того, $r_1 = k_1 \cdot r_0$.

Таким образом, процесс качения двух окружностей полностью определён, и уже доказано, что точка М описывает гипоциклоиду. Отрезок ВМ является диаметром подвижной окружности. Угол АМВ, опирающийся на этот диаметр является прямым, следовательно прямая ВМ перпендикулярна к нормали АD. Тем самым она является касательной к гипоциклоиде. Предыдущие рассуждения показали, что перпендикулярные друг к другу прямые АD и ВМ вращаются с одинаковой угловой скоростью $\frac{1-q}{2}$. Теорема доказана.

Понятно, что аналогичная теорема может быть сформулирована и для эпициклоид, тем более, что она нами уже доказана.

Теорема 20. Пусть точки В и D движутся по окружности радиуса $r_0 - 2 \cdot r_1$ с постоянными угловыми скоростями в одну сторону, причём модуль скорости точки D в q раз больше скорости точки В. Точка М, определяемая условием $BM = \frac{1}{1+q} BD$, описывает эпициклоиду. Прямая ВМ является касательной к эпициклоиде и по мере перемещения точки В вращается с угловой скоростью $\frac{1+q}{2}$.

Тот факт, что величины r_0 и q могут иметь произвольные значения позволяет переформулировать две последние теоремы в новом виде.

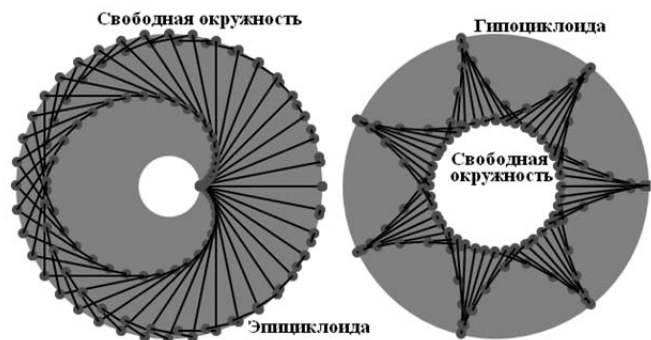
Теорема 21. Пусть по окружности с постоянной угловой скоростью (для определённости равной единице) движется точка, через которую проходит прямая, вращающаяся также с постоянной угловой скоростью ω . Тогда огибающей следов, оставляемых этой прямой, является либо эпициклоида ($\omega > 0,5$), вписанная в эту окружность, либо гипоциклоида ($\omega < 0,5$), описанная вокруг окружности.

Доказательство. Поскольку в теореме одновременно рассматриваются и эпициклоиды, и гипоциклоиды, есть необходимость введения некоторых обобщающих терминов, которые позволят сделать рассуждения более компактными и ясными. Нечто подобное мы уже делали при изучении улиток Паскаля.

В результате качения подвижного круга по ободу неподвижного он замечает кольцо, одной из границ которого является обод неподвижного круга. Вторую границу назовём свободной окружностью (этот термин не является общепринятым). Как эпициклоиды, так и гипоциклоиды находятся внутри этого кольца, которое мы назовём несущим. Отличие случая эпициклоид от случая гипоциклоид состоит в том, что для первых свободная окружность является внешней границей несущего кольца, а для вторых – внутренней. Мгновенный же центр вращения касательной и в том, и в другом случае скользит по свободной окружности.

Что касается доказательства теоремы, то оно состоит в том, что по угловой скорости ω восстанавливается параметр q. Действительно, полагая, что q имеет знак, который определяет характер кривой: при $q > 0$ – эпициклоида, при $q < 0$ – гипоциклоида, мы можем приравнять угловую скорость ω и величину $\frac{1+q}{2}$, чтобы определить знак параметра q. Поскольку $q = 2\omega - 1$, если $\omega > 0,5$, то $q > 0$, если же $\omega < 0,5$, то $q < 0$.

Если $q > 0$, то $q = 1 + 1/k_1$ и радиус свободной окружности равен $r_0 + 2 \cdot r_1$. Если же $q < 0$, то $-q = 1 - 1/k_1$ и радиус свободной окружности равен $r_0 - 2 \cdot r_1$. И в том и в другом случае все важные параметры (k_1 , r_0 , и r_1) восстанавливаются и позволяют воспроизвести процесс построения кривой с помощью качения подвижного круга по неподвижному кругу. При

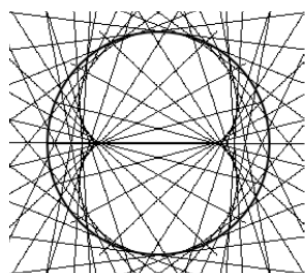


этом семейство касательных к кривой ведёт себя как указано в доказываемой теореме: мгновенный центр вращения касательных движется по окружности с единичной скоростью, а сами касательные вращаются со скоростью ω . Теорема доказана.

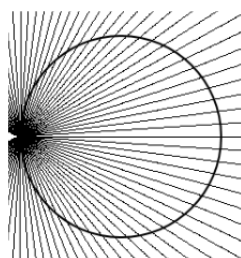
Приведём текст программы, производящей построение следов прямой, движущейся так, как указано в теореме 21.

```
x0 = 320
y0 = 220
r = 100
GraphicsWindow.DrawEllipse(x0 - r,y0 - r,2*r,2*r)
m = 2
n = 1
omega = m/n
For u=0 To 2* Math.Pi Step 2* Math.Pi/50
  xt = x0 + r* Math.Cos(u)
```

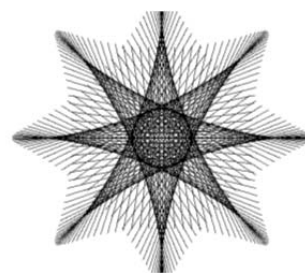
```
yt = y0 - r* Math.Sin(u)
dx = Math.Cos(omega*u)
dy = -Math.Sin(omega*u)
For p= -200 To 200
  x = xt + p*dx
  y = yt + p*dy
  GraphicsWin-
  dow.SetPixel(x,y,"")
EndFor
EndFor
```



$\omega = 2$



$\omega = 0,5$



$\omega = -1/3$

Отметим случай, когда $\omega = 0,5$. Все прямые, полученные при таком вращении проходят через одну точку. Этот факт желательно объяснить на уровне физического воспроизведения процесса построения кривой с помощью качения. И тут выявляется пробел в наших предыдущих рассуждениях. Попробуем более пристально рассмотреть процесс возникновения циклоидальных кривых. При этом отметим, что теорема 21 помогла нам написать программу построения огибающих, а программа в свою очередь помогла выявить пробел в доказательстве.

Прежде всего, при рассмотрении эпициклоид мы использовали положительные значения параметра k_1 , а, значит, $q = 1 + 1/k_1$ заведомо больше единицы. Следовательно, пробел в нашем рассуждении приходится на интервал значений q от нуля до единицы. Займёмся его изучением.

Поскольку $k_1 = \frac{1}{q-1}$, значения величины k_1 отрицательны (при $q = 1$ можно

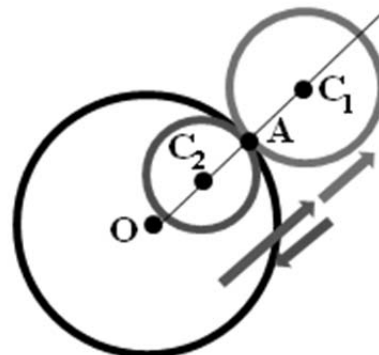
условно считать, что k_1 равно минус бесконечности). На отрезке $[0; 1]$ функция $k_1 = \frac{1}{q-1}$

монотонно убывает, и, значит, $k_1 \in [-\infty; -1]$. Снова отрицательные величины самовольно врываются в описание физического процесса качения. Необходимо дать правильную интерпретацию их появлению.

Мы достаточно хорошо представляем себе, как происходит построение циклоидальных кривых, когда $q \in [1; +\infty]$ и когда $q \in [-\infty; 0]$. Если $q \in [1; +\infty]$, вычисления показывают, что $k_1 > 0$, и соприкосновение окружностей при качении внешнее. Если $q \in [-\infty; 0]$, вычисления показывают, что $-1 < k_1 < 0$, и соприкосновение окружностей при качении внутреннее. Поскольку переход из одной ситуации в другую происходит при $k_1 = 0$, можно дать следующую геометрическую интерпретацию.

Будем считать, что параметр k_1 принимает любые действительные значения. В этом случае следует признать, что и радиус подвижной окружности может принимать отрицательные значения. Дадим этой возможности следующее геометрическое истолкование. Пусть на плоскости расположены две соприкасающиеся окружности. Одна из них называется неподвижной, а другая - подвижной. Подвижная окружность может либо целиком лежать вне неподвижной, либо целиком лежать внутри этой окружности.

Пусть O – центр неподвижной окружности, C – центр подвижной окружности и A – точка касания этих окружностей. Рассмотрим два вектора OA и AC и положим, что величина k_1 определяется условием $AC = k_1 \cdot OA$. Такое определение этой величины позволяет ей на законных основаниях принимать отрицательные значения.



Если теперь менять k_1 от некоторого положительного значения к отрицательному, то вектор AC_1 сначала станет нулевым, а потом поменяет направление, а, следовательно, и знак. При этом внешнее касание перейдет во внутреннее.

Однако процесс изменения величины k_1 на этом останавливать не обязательно. Когда k_1 примет значение -1 , неподвижная и подвижная окружности совпадут и качение будет невозможно. Перо останется неподвижным. Это как раз тот самый случай ($\omega = 0,5$), который заставил нас проводить наши рассуждения.



Далее неподвижная окружность станет больше неподвижной и целиком охватит её. Физически эта ситуация вполне допустима. Частично (поскольку полноценного вращения нет) она реализуется, когда на вбитом в стену гвозде раскачивается баранка.

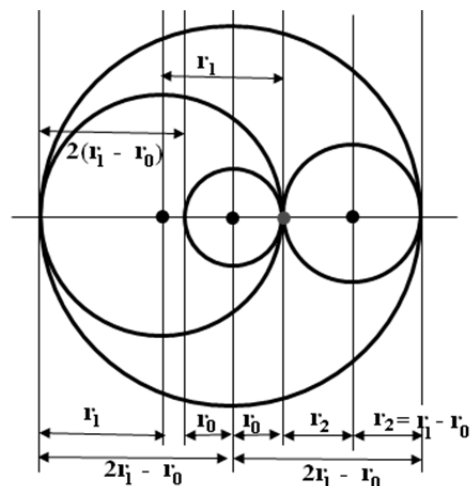
Именно этот случай качения соответствует значениям величины q от нуля до единицы, и, что то же самое, значениям величины k_1 меньше -1 .

Итак, наиболее удобным способом единого описания всех трёх ситуаций качения подвижной окружности по неподвижной является использование любых действительных значений для величины k_1 .

Поскольку последний случай, при физическом воспроизведении отличающийся от первых двух, то хотя он и выявлен нами, но не рассмотрен в деталях, необходимо и для него получить аналог теорем 12 и 17. При этом первым становится предположение о том, что в случае «баранки» будет вычерчиваться гипоциклоида, ведь значения величины k_1 отрицательны.

Однако достаточно простое рассуждение разрушает эту иллюзию. Пусть $q \in [0;1]$, тогда по свободной окружности в контексте теоремы 13 в одном направлении движутся две точки со скоростями 1 и q . Сторонний наблюдатель не знает, что для нас более быстрая точка имеет скорость 1. Он предположит, что единичную скорость имеет как раз более медленная точка. Это заставит его сделать вывод, что вычерчивается эпициклоида. Это рассуждение можно положить в основу доказательства соответствующей теоремы, но мы пойдём путём подробного рассмотрения кинематики движущейся баранки.

Пусть вокруг неподвижной окружности радиуса r_0 катится, охватывая её окружность большего радиуса r_1 (будем считать, что оба радиуса положительны). Процесс



качения однозначно определяет свободную окружность радиуса $r = 2 \cdot r_1 - r_0$.

Неподвижная окружность радиуса r_0 и свободная окружность являются границами кольца, внутри которого находится вычерчиваемая кривая. Если предположить, что эта линия является эпициклоидой, то из наших предыдущих теорем следует, что такую же эпициклоиду вычертит и перо, связанное с ещё одной окружностью. Эта окружность катится по внешней стороне неподвижной окружности и заматывает то же самое кольцо. Радиус этой окружности, как видно из чертежа, равен $r_2 = r_1 - r_0$. На том же чертеже показано исходное положение пера на двух окружностях.

Итак, наша задача состоит в том, чтобы доказать, что качение «обхватывающей баранки» радиуса r_1 и внешнее качение окружности радиуса r_2 (назовём её внешней) приводит к построению одной и той же эпициклоиды. При этом как всегда будем считать, что $r_1 = k_1 \cdot r_0$, и, значит, $r_2 = r_0 \cdot (k_1 - 1)$. По нашему исходному предположению $k_1 > 1$.

Пусть из исходного положения баранка перекаатилась по дуге неподвижной окружности, имеющей угловую меру u . Тогда перо относительно линии центров баранки и неподвижной окружности повернётся на угол $u_1 = \frac{u \cdot r_0}{r_1} = \frac{u}{k_1}$. Для внешней окружности выберем

такую скорость качения, при которой перо повернётся на такой же угол u_1 . Это означает, что внешняя окружность прокатится по дуге длины

$$u_1 \cdot r_2 = \frac{u}{k_1} \cdot r_0 \cdot (k_1 - 1).$$

Таким образом, угловая мера соответствующей дуги на неподвижной окружности равна $u_2 = \frac{u_1 \cdot r_2}{r_0} = u \cdot \left(1 - \frac{1}{k_1}\right) = u - u_1$. Но из этого сле-

дует, что радиус внешней окружности $С_{\text{внешн}}М$, на котором расположено перо, параллелен линии центров неподвижной окружности и баранки $ОС_{\text{баранки}}$.

Точно так же угол наклона радиуса баранки $С_{\text{баранки}}М$, на котором расположено перо, равен $u - u_1$. Следовательно, этот радиус параллелен линии центров неподвижной и внешней окружностей $ОС_{\text{внешн}}$.

Мы некорректно использовали одну и ту же букву $М$ для обозначения перьев на баранке и внешней окружности, поскольку на самом деле эти перья совпадают. Действительно, через точку $С_{\text{внешн}}$ проведём прямую параллельную $ОС_{\text{баранки}}$, а через точку $С_{\text{баранки}}$ – прямую параллельную $ОС_{\text{внешн}}$. Точка их пересечения $М$ очевидно совпадает и с одним, и с другим пером. Более того, поскольку $ОС_{\text{внешн}}МС_{\text{баранки}}$ параллелограмм, точка $М$ является точкой пересечения баранки и внешней окружности.

Отметим, что в исходном положении центры баранки и внешней окружности максимально удалены друг от друга, тем не менее, они касаются друг друга внешним образом. При их свободном перемещении внутри кольца возможно и внутреннее касание. Во всех прочих положениях баранка и внешняя окружность имеют две точки пересечения. Сразу возникает вопрос, по какой траектории движется вторая точка пересечения. Но об этом поговорим позже.

Таким образом, мы доказали, что и с помощью баранки, и с помощью внешней окружности вычерчивается одна и та же кривая. Но, поскольку внешняя окружность, как нам известно, связана с эпициклоидой, то установлен и тип этой кривой. Полученные нами результаты позволяют написать программу, воспроизводящую данный процесс. А программа даст нам возможность рассмотреть процесс качения сразу двух окружностей более пристально.

Кроме построения эпициклоиды программа должна воспроизвести хотя бы один кадр качения баранки и внешней окружности. Она также должна выделить точки их соприкосно-



вения с неподвижной и свободной окружностями и начертить важные прямые, соединяющие выделенные точки.

```

GraphicsWindow.Height=600
GraphicsWindow.Width=600
pi = Math.Pi
x0 =300
y0 =300
GraphicsWindow.FillEllipse(x0 - 5,y0 - 5,10,10)
r0 = 50
m=3
n=1
k1 = m/n
r1 = k1*r0
r = 2*r1 - r0
GraphicsWindow.DrawEllipse(x0-r0,y0-r0,2*r0,2*r0)
GraphicsWindow.DrawLine(x0-r-10,y0,x0+r+10,y0)
GraphicsWindow.DrawEllipse(x0-r,y0-r,2*r,2*r)
rmove=r1 - r0
u = 5*pi/7
xa = x0 + r0* Math.Cos(u)
ya = y0 - r0* Math.Sin(u)
GraphicsWindow.FillEllipse(xa - 5,ya - 5,10,10)
xaa = x0 + r0* Math.Cos(u*(k1 - 1)/k1)
yaa = y0 - r0* Math.Sin(u*(k1 - 1)/k1)
GraphicsWindow.FillEllipse(xaa - 5,yaa - 5,10,10)
xbb = x0 + r*Math.Cos(u*(k1 - 1)/k1)
ybb = y0 - r*Math.Sin(u*(k1 - 1)/k1)
xb = x0 + r*Math.Cos(u+pi)
yb = y0 - r*Math.Sin(u+pi)
GraphicsWindow.BrushColor="green"
GraphicsWindow.FillEllipse(xb - 5,yb - 5,10,10)
GraphicsWindow.FillEllipse(xbb - 5,ybb - 5,10,10)
xc = x0 - rmove*Math.Cos(u)
yc = y0 + rmove*Math.Sin(u)
xcc = x0 + r1*Math.Cos(u*(k1 - 1)/k1)
ycc = y0 - r1*Math.Sin(u*(k1 - 1)/k1)

```

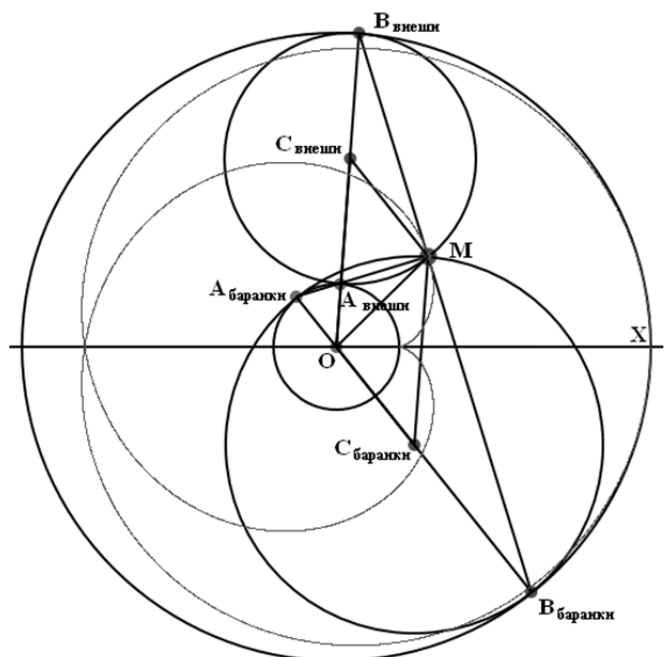
```

xmm =xcc + rmove*Math.Cos(u+pi)
ymm =ycc - rmove*Math.Sin(u+pi)
GraphicsWindow.DrawLine(xa,ya,xmm,ymm)
GraphicsWindow.BrushColor="red"
GraphicsWindow.FillEllipse(xmm - 7,ymm - 7,14,14)
GraphicsWindow.FillEllipse(xcc - 5,ycc - 5,10,10)
GraphicsWindow.FillEllipse(xc - 5,yc - 5,10,10)
GraphicsWindow.DrawEllipse(xc-r1,yc-r1,2*r1,2*r1)
GraphicsWindow.DrawEllipse(xcc-rmove,ycc-rmove,
2*rmove,2*rmove)
GraphicsWindow.DrawLine(xb,yb,xbb,ybb)
GraphicsWindow.DrawLine(x0,y0,xb,yb)
GraphicsWindow.DrawLine(x0,y0,xbb,ybb)
u1 = u/k1
xm = xc + r1*Math.Cos(u - u1)
ym = yc - r1*Math.Sin(u - u1)
GraphicsWindow.DrawLine(xc,yc,xm,ym)
GraphicsWindow.BrushColor="green"
GraphicsWindow.FillEllipse(xm - 3,ym - 3,6,6)
GraphicsWindow.DrawLine(xcc,ycc,xmm,ymm)
GraphicsWindow.DrawLine(x0,y0,xm,ym)
GraphicsWindow.DrawLine(xc,yc,xa,ya)
GraphicsWindow.DrawLine(x0,y0,xcc,ycc)
For u=0 To 2*pi*m Step pi/1000
  xa = x0 + r0* Math.Cos(u)
  ya = y0 - r0* Math.Sin(u)
  xc = x0 - rmove*Math.Cos(u)
  yc = y0 + rmove*Math.Sin(u)
  u1 = u/k1
  xm = xc + r1*Math.Cos(u - u1)
  ym = yc - r1*Math.Sin(u - u1)
  GraphicsWindow.SetPixel(xm,ym,"red")
EndFor

```

Теорема 22. Пусть по неподвижной окружности радиуса r_0 без проскальзывания катятся баранка радиуса r_1 ($r_1 = k_1 \cdot r_0$; $r_1 > r_0$) и внешняя окружность радиуса $r_2 = r_1 - r_0$. При этом качение происходит так, что центр баранки движется с единичной угловой скоростью, а центр внешней окружности – с угловой скоростью $1 - 1/k_1$. Тогда одна из точек пересечения баранки и внешней окружности вычерчивает эпициклоиду, касательная к которой проходит через точки касания баранки и внешней окружности со свободной окружностью, а нормаль – через точки их касания с неподвижной окружностью.

Доказательство. Факт вычерчивания эпициклоиды нами уже установлен ранее. Остается доказать утверждения о касательной и нормали. Это легко сделать, исполь-



зую чертёж, построенный нашей последней программой.

Как доказано выше, $ОС_{внешн}МС_{баранки}$ является параллелограммом. Из этого следует, что углы при вершинах равнобедренных треугольников $В_{внешн}С_{внешн}М$ и $В_{внешн}ОВ_{баранки}$ равны. Значит, равны и углы при основаниях, то есть отрезки $В_{внешн}М$ и $В_{внешн}В_{баранки}$ лежат на одной прямой.

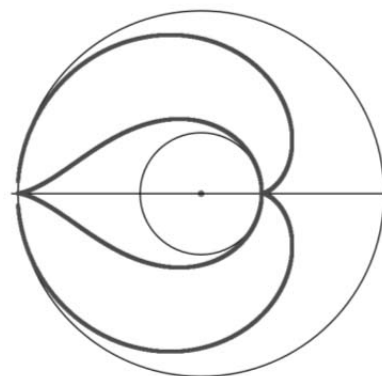
Угол $А_{баранки}МВ_{баранки}$ опирается на диаметр баранки, следовательно, является прямым. Угол $А_{внешн}МВ_{внешн}$ опирается на диаметр внешней окружности, следовательно, также является прямым. Значит, точки $А_{баранки}$, $А_{внешн}$ и $М$ лежат на одной прямой. Кроме того, как мы знаем, через мгновенные центры вращения катящихся окружностей $А_{баранки}$ и $А_{внешн}$ проходят нормали к эпициклоиде. Наконец, эти нормали (вернее одна нормаль, поскольку они сливаются во едино) перпендикулярны прямой $В_{баранки}В_{внешн}$. Таким образом, она является касательной к эпициклоиде. Теорема доказана.

Отметим, что мы легко могли бы получить отношения, в которых точка $М$ делит как отрезок $В_{баранки}В_{внешн}$, так и отрезок $А_{баранки}А_{внешн}$. Однако мы предоставляем сделать это читателю.

К данному моменту мы установили, что переход к баранкам ($k_1 < -1$) не привёл к появлению новых кривых. Тем не менее, он позволил установить новые факты об уже известных нам циклоидальных кривых.

Вкратце коснёмся вопроса о второй точке пересечения баранки и внешней окружности. Осуществляя их качение по условию, указанному в теореме 22, будем вычислять координаты точек пересечения двух соответствующих окружностей. Для этого решается система двух уравнений второго порядка, а именно система, состоящая из уравнений этих окружностей. Для её решения из одного уравнения вычитается другое, что приводит к линейному уравнению. Это уравнение описывает прямую, проходящую через точки пересечения окружностей, и позволяет получить квадратное уравнение относительно переменной x после исключения переменной y . Именно таков смысл вычислений, производимый в предлагаемой ниже программе, которая строит траектории обеих точек пересечения баранки и внешней окружности.

```
GraphicsWindow.Height=600
GraphicsWindow.Width=600
pi = Math.Pi
x0 = 300 '
y0 = 300
r0 = 100
m = 2
n = 1
k1 = m/n
r1 = k1*r0
rb = r1
r2 = r1 - r0
rv = r2
r = 2*r1 - r0
GraphicsWindow.FillEllipse(x0 - 5,y0 - 5,10,10)
GraphicsWindow.DrawEllipse(x0 - r0,y0 - r0,2*r0,2*r0)
GraphicsWindow.DrawEllipse(x0 - r,y0 - r,2*r,2*r)
GraphicsWindow.DrawLine(x0 - r - 10,y0,x0+r+10,y0)
For u = 0 To 2*pi*m Step pi/1000
u1 = u/k1
u2 = u - u1
xb = x0 + (r1 - r0)* Math.Cos(u+pi) 'Координаты центра
yb = y0 - (r1 - r0)* Math.Sin(u+pi) 'баранки
xv = x0 + (r2 + r0)* Math.Cos(u2) 'Координаты центра
yv = y0 - (r2 + r0)* Math.Sin(u2) 'внешней окружности
```



```

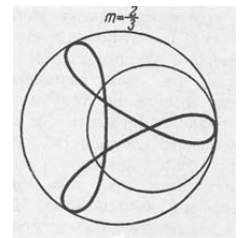
If Math.Abs(yv - yb) > .01 then
kk = -(xv - xb)/(yv - yb)
bb = (rb*rb -rv*rv+xv*xv - xb*xb+yv*yv - yb*yb)/(2*(yv - yb))
a1 = 1+kk*kk
b1 = -2*xb+2*kk*bb - 2*kk*yb
c1 = xb*xb+bb*bb - 2*bb*yb+yb*yb - rb*rb
d = Math.SquareRoot(Math.Abs(b1*b1 - 4*a1*c1))
If Math.Abs(a1) > .01 then
x1 = (-b1 + d)/(2*a1)
y1 = kk*x1+bb
x2 = (-b1 - d)/(2*a1)
y2 = kk*x2+bb
EndIf
GraphicsWindow.BrushColor="red"
GraphicsWindow.FillEllipse(x1 - 3,y1 - 3,6,6)
GraphicsWindow.BrushColor="green"
GraphicsWindow.FillEllipse(x2 - 3,y2 - 3,6,6)
EndIf
EndFor

```

Конкретный вариант, использованный в программе, позволяет убедиться, что вторая точка пересечения баранки и внешней окружности описывает траекторию с циклоидальными кривыми никак не связанную, хотя первая точка вычерчивает хорошо нам знакомую кардиоиду. Соответствующую кривую можно назвать сопряжённой к эпициклоиде. В случае кардиоиды мы видим, что сопряжённая линия имеет каплеобразную форму. Возможно, что перед нами некий новый вид кривых. По крайней мере, их желательно исследовать, что мы и предоставляем читателю, поскольку подобное исследование очень далеко увело бы нас от целей данной статьи.

Вернёмся к гипоциклоидам и сделаем одно вполне естественное наблюдение. Оно состоит в следующем. При значениях параметра k_1 , в интервале от нуля до $-\frac{1}{2}$, мы имеем ясную картину построения гипоциклоиды. В то же время при значениях параметра k_1 , в интервале от $-\frac{1}{2}$ до -1 , такой чёткой картины нет. К тому же

подвижная окружность получает некоторые свойства баранки, только охватывает она не неподвижную окружность, а круг, ограниченный свободной окружностью. В книге [3] на странице 112 сообщается, что при $m > \frac{1}{2}$ (m



играет роль k_1 без знака) вместо точек возврата у гипоциклоиды возникают узловые точки. Это утверждение иллюстрируется рисунком.

На самом деле это утверждение ошибочно. Оказывается, что здесь действительно возникает своеобразный эффект баранки, которая нового не создаёт, а только повторяет нечто известное. При этом имеет место полная аналогия с теоремой 22.

Теорема 23. Пусть по внутреннему ободу неподвижной окружности радиуса r_0 без проскальзывания катятся две окружности радиуса r_1 ($r_1 = k_1 \cdot r_0$; $1 > k_1 > 0,5$) и окружность радиуса $r_2 = r_0 - r_1$. При этом качение происходит так, что центр первой окружности движется с единичной угловой скоростью, а центр второй окружности – с угловой скоростью $1 - 1/k_1$ (эта скорость отрицательна). Тогда одна из точек пересечения двух катящихся окружностей вычерчивает гипоциклоиду. Касательная к ней проходит через точки соприкосновения двух движущихся окружностей со свободной окружностью, а нормаль – через точки их соприкосновения с неподвижной окружностью.

Доказательство. Факт вычерчивания гипоциклоиды пером второй окружности нами уже установлен ранее. Нужно доказать, что и перо первой окружности вычерчивает ту же кривую, а также утверждения о касательной и нормали. Поскольку формулировка теорем 22 и 23 практически одинакова, их доказательства также мало отличаются друг от друга. По этой причине мы приводим соответствующий чертёж и отмечаем, что выбор угловых скоростей, сделанный нами обеспечивает параллельность прямых OC_1 и C_2M , а также прямых OC_2 и C_1M . Это и обстоятельство является основой доказательства теоремы.

Теоремы 22 и 23 можно было бы объединить в одну, но вместо этого мы сформулируем общее для эпициклоид и гипоциклоид обобщение теоремы 14.

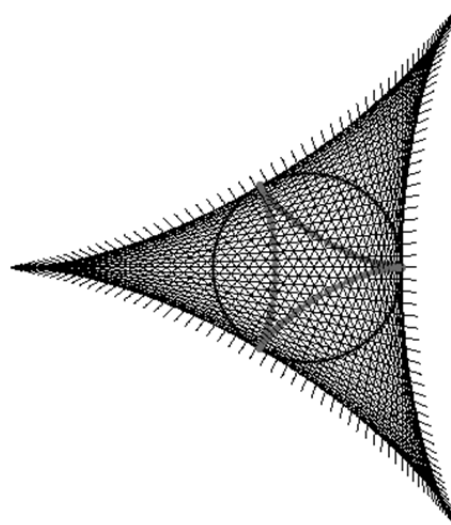
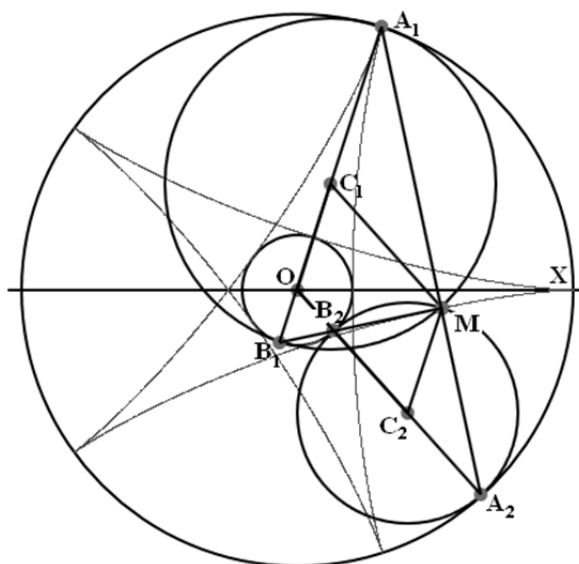
Теорема 24. Эволютой как эпициклоиды, так и гипоциклоиды является точно такая же кривая, для эпициклоид вписанная в неподвижную окружность, а для гипоциклоид описанная вокруг неподвижной окружности.

Доказательство. В теоремах 22 и 23 фактически доказано, что нормаль эпициклоид и гипоциклоид вращается вокруг точки, движущейся с единичной скоростью по неподвижной окружности с той же угловой скоростью, что и касательная. Из теоремы 21 следует нужное нам утверждение. Теорема доказана.

Приведём в качестве иллюстрации небольшую программу.

```

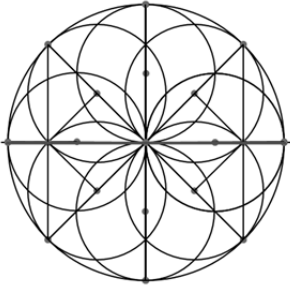
pi = Math.Pi
x0 = 320
y0 = 220
r0 = 70
GraphicsWindow.DrawEllipse(x0 - r0,y0 - r0,2*r0,2*r0)
For u = 0 To 2*pi Step pi/50
  xa = x0 + r0* Math.Cos(u)
  ya = y0 - r0* Math.Sin(u)
  xb = x0 + r0* Math.Cos(-2*u)
  yb = y0 - r0* Math.Sin(-2*u)
  xx = xa + (xb - xa)/3
  yy = ya + (yb - ya)/3
  GraphicsWindow.FillEllipse(xx - 3,yy - 3,6,6)
  p = xb - xa
  q = yb - ya
  s = Math.SquareRoot(p*p+q*q)
  p = p/s
  q = q/s
  For t= -150 To 150 Step 1
    x = xa + p*t
    y = ya +q*t
    GraphicsWindow.SetPixel(x,y,"")
  EndFor
EndFor
EndFor
    
```



Вернёмся к вопросу о том, что циклоидальные кривые можно рассматривать как образное представление действительных чисел. Здесь мы встретились с неожиданным ограничением. «Баранки» не вносят ничего нового в класс этих кривых. По этой причине термин

«перициклоиды» [3, стр. 111] либо является излишним, либо может характеризовать только конкретный способ построения кривой. Об этом обстоятельстве без обоснования говорится в [4].

Итак, при образном представлении действительных чисел речь может идти только о числах в пределах от $-\frac{1}{2}$ до $+\infty$. Начнём с рассмотрения этих крайних случаев.



Если $k_1 = -0,5$, то $q = -1$. Это означает, что точки В и D движутся из исходного положения с равными скоростями в противоположных направлениях, то есть хорда BD всегда остаётся вертикальной. Кроме того, точка М является серединой этой хорды, а, значит, скользит по горизонтальному диаметру. Таким образом, соответствующая гипоциклоида является отрезком. Впрочем, это утверждение не совсем точно. Правильнее было бы назвать её окружностью, сплюсненной в отрезок, поскольку точка М пробегает по горизонтальному диаметру два раза. Подробнее мы вернёмся к этому вопросу

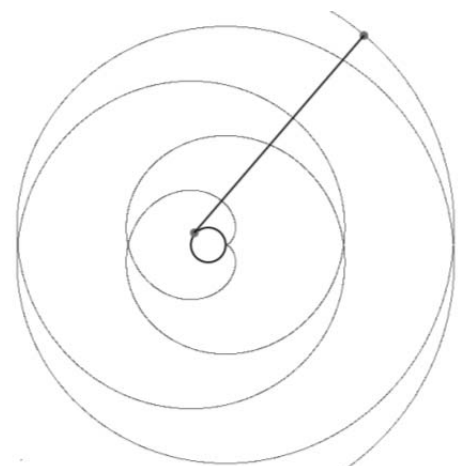
при изучении трохоид.

Теперь поговорим о случае $k_1 = +\infty$. Зафиксируем неподвижную окружность, а радиус подвижной будем неограниченно увеличивать, увеличивая k_1 . В итоге подвижная окружность превратится в прямую, которую мы и будем воспринимать, как окружность бесконечного радиуса.

Наших рассуждений, основанных на не слишком строгих, интуитивных основаниях, тем не менее, достаточно для построения хотя бы небольшого фрагмента соответствующей кривой. Как целое, она, по понятным причинам должна походить на спираль Архимеда и удаляться от центра неподвижной окружности сколь угодно далеко во всех направлениях.

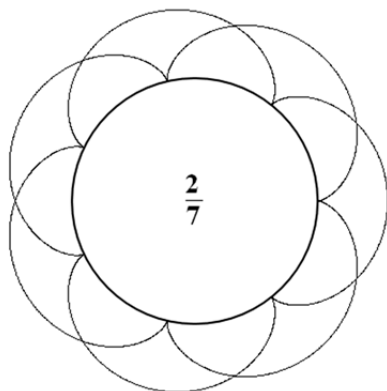
Приведём соответствующую программу, которая построит нашу кривую. Однако ещё до построения мы можем отметить одно важное обстоятельство. Дело в том, что мы можем понять, что за кривую мы строим. Более того, мы уже встречались с ней в первой части статьи. Дело в том, что качение прямой по неподвижной окружности без проскальзывания эквивалентно сматыванию натянутой нити с окружности. Как мы знаем, эта процедура приводит к построению эвольвенты окружности. Добавим ещё, что после разрезания нити, намотанной на окружность, её можно сматывать в разные стороны.

```
GraphicsWindow.Width=600
GraphicsWindow.Height=600
pi = Math.Pi
x0 = 300
y0 = 300
r0 = 20
m = 3
GraphicsWindow.DrawEllipse(x0-r0,y0-r0,2*r0,2*r0)
For u=0 To 2*pi*m Step pi/1000
  p = Math.Cos(u)
  q = Math.Sin(u)
  xa = x0 + r0*p
  ya = y0 - r0*q
  s = u*r0
  x = xa + s*q
  y = ya + s*p
  GraphicsWindow.SetPixel(x,y,"red")
  y = 600 - y
  GraphicsWindow.SetPixel(x,y,"green")
EndFor
u = 15
```



```

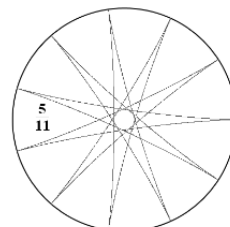
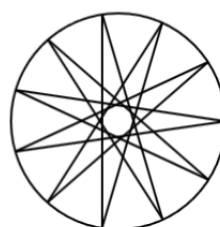
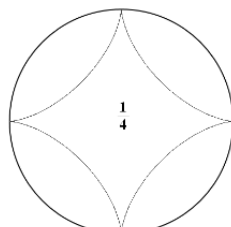
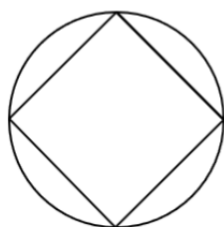
p = Math.Cos(u)
q = Math.Sin(u)
xa = x0 + r0* p
ya = y0 - r0* q
GraphicsWindow.FillEllipse(xa - 5, ya - 5, 10, 10)
s = u*r0
x = xa + s*q
y = ya + s*p
GraphicsWindow.FillEllipse(x - 5, y - 5, 10, 10)
GraphicsWindow.DrawLine(x, y, xa, ya)
    
```



Теперь обсудим внешний вид гипоциклоид. При этом вспомним, что эпициклоиды, соответствующие параметру $k_1 = \frac{m}{n}$ состоят из n арок, огибающих неподвижную окружность m раз. Особенно наглядно это проявляется в случае, когда $m < n$. Арки не имеют непомерной длины, то есть не обкручиваются вокруг неподвижной окружности по несколько раз.

Для гипоциклоид имеет место то же самое строение. Только арки находятся внутри неподвижной окружности. Более того, можно провести аналогию между гипоциклоидами и правильными звёздчатыми многоугольниками, вписанными в окружность. Каждая такая звезда определяется числом лучей (для гипоциклоиды – арок) и количеством обходов вокруг центра неподвижной окружности. Других гипоциклоид не существует.

Каждая такая звезда определяется числом лучей (для гипоциклоиды – арок) и количеством обходов вокруг центра неподвижной окружности. Других гипоциклоид не существует.



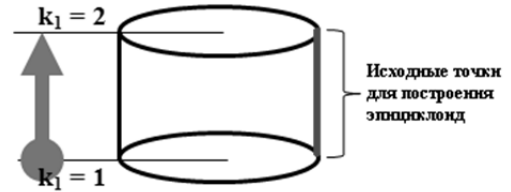
Итак, на настоящий момент мы достаточно хорошо представляем себе, как выглядят эпициклоиды и гипоциклоиды. Кроме того, мы знаем, что ряд свойств этих кривых, изучаемых в рамках дифференциальной геометрии, может быть получен с помощью методов элементарной геометрии и достаточно простых соображений, связанных с кинематикой. Речь идёт о построении касательных, нормалей и эволют. Именно по этой причине мы и считаем, что изучение подобных кривых является прекрасным введением в более сложную геометрическую проблематику.

Вспомним также о том, что каждая из эпи- и гипоциклоид связана с числом k_1 из интервала $[-\frac{1}{2}; \infty]$ и по этой причине может рассматриваться как зримый образ соответствующего действительного числа. При этом кривые, соответствующие иррациональным числам, имеют достаточно простую структуру – арки, обвивающие неподвижную окружность (для эпициклоид). В то же время, поскольку процесс построения «иррациональных» эпициклоид никогда не может завершиться, мы имеем дело с достаточно необычными объектами. Но рассмотрение таких объектов на ранних стадиях изучения высшей математики весьма полезно по ряду причин. Укажем только на их связь с фундаментальными фактами классической механики, например с теоремой Пуанкаре о возвращении: «почти всякая движущаяся точка

многократно возвращается к своему исходному положению. Это – один из немногих общих выводов о характере движения» [5].

Теперь, оставляя тему представления вещественных чисел эпи- и гипоциклоидами, попытаемся соединить воедино некую совокупность этих кривых. Сразу оговоримся, что можно было бы создать соответствующую конструкцию, включающую все кривые, но мы ограничимся эпициклоидами, соответствующими отрезку $k_1 \in [1;2]$.

Рассмотрим прямой круговой цилиндр, во все горизонтальные сечения которого следующим образом впишем эпициклоиды. Выберем одну из вертикальных образующих цилиндра и отобразим на неё отрезок $[1; 2]$. Теперь любому горизонтальному сечению соответствует параметр $k_1 \in [1;2]$. Каждая



точка выбранной образующей станет исходной точкой для построения эпициклоиды по способу, описанному в теореме 13 с параметром k_1 , соответствующим данному сечению. Например, в нижнее основание цилиндра будет вписана кардиоида. В результате из совокупности всех эпициклоид мы получим нечто среднее между поверхностью и телом.

Все сечения порождены сходным механическим процессом, скорости в котором непрерывно меняются при переходе от сечения к сечению, то есть в вертикальном направлении между кривыми существуют непрерывные маршруты, одним из которых является выбранная нами образующая. С другой стороны «рациональным» эпициклоидам соответствуют замкнутые кривые конечной длины, а «иррациональным» – плотно заполняющие кольцевые области.

Все два вида этих сечений основательно перемешаны, так же как перемешаны на числовой прямой рациональные и иррациональные числа. Предоставляем читателю возможность более подробно изучить соответствующий объект.

Мы же возвращаемся к классическим результатам теории циклоидальных кривых и займёмся уравнениями эпициклоид и гипоциклоид. Нашей непосредственной целью является вывод уравнения, одновременно описывающего оба вида кривых. При этом мы попытаемся показать, что работа с уравнениями не обязательно сводится к цепочке формальных преобразований. Она может быть вполне осмысленной, если исследователь ясно понимает геометрический (или кинематический) смысл уравнения или отдельных его членов. Демонстрация этого обстоятельства может иметь значительный педагогический эффект.

Прежде всего, сопоставим полученные на данный момент уравнения эпициклоид и гипоциклоид.

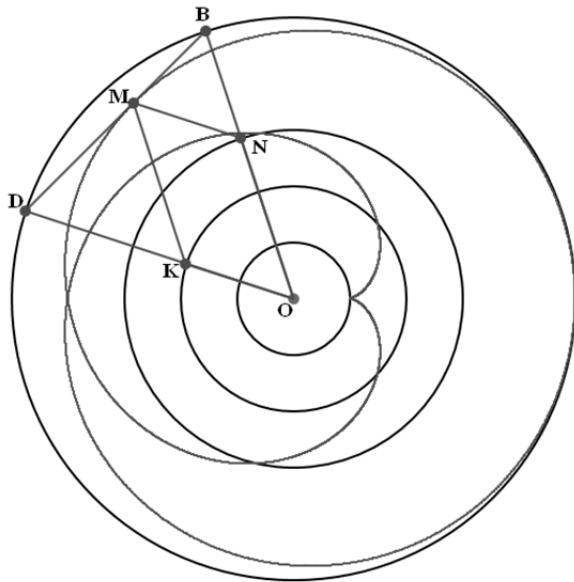
Эпициклоиды	Гипоциклоиды
$x_m = r_0((1 + k_1) \cdot \cos u + k_1 \cdot \cos(1 + \frac{1}{k_1})u),$	$x_m = r_0((1 - k_1) \cdot \cos u + k_1 \cdot \cos(1 - \frac{1}{k_1})u),$
$y_m = r_0((1 + k_1) \cdot \sin u + k_1 \cdot \sin(1 + \frac{1}{k_1})u).$	$y_m = r_0((1 - k_1) \cdot \sin u + k_1 \cdot \sin(1 - \frac{1}{k_1})u).$

Сходство не может не бросаться в глаза. Однако замена параметра k_1 в уравнениях эпициклоид на $-k_1$ приводит к уравнениям, в которых в правой части стоят не суммы, а разности. Вроде бы, мелочь, но она всё портит. Придётся с ней разбираться. В этом нам поможет теорема, установленная Франсуа [3, стр 116]. Сразу отметим, что приведённая в книге А. А. Савёлова формулировка не верна. Как мы увидим позднее, при произвольном выборе длин сторон шарнирного параллелограмма и при произвольном выборе угловых скоростей, четвёртая вершина вычерчивает либо эпитрохоиду, либо гипотрохоиду. Сейчас же мы сформулируем теорему для случая эпициклоид и гипоциклоид.

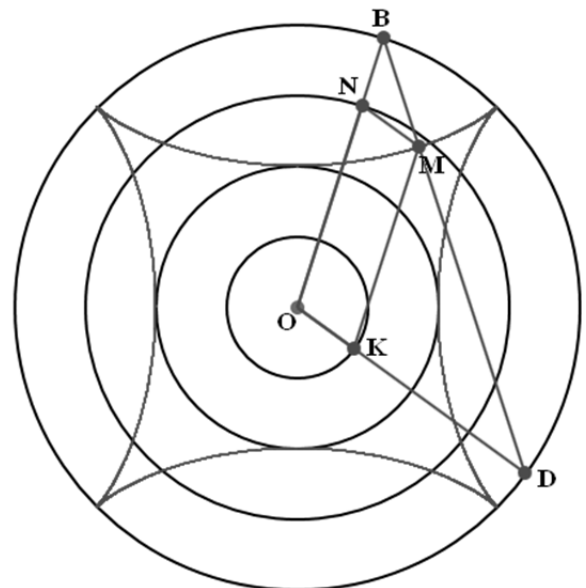
Теорема 25. Можно подобрать угловую скорость q , чтобы две стороны ON и OK шарнирного параллелограмма вращались равномерно с угловыми скоростями 1 и q , а четвёртая вершина M описывала либо эпициклоиду ($q > 0$), либо гипоциклоиду ($q < 0$).

Доказательство. Для доказательства используем наши уравнения. При этом будем иметь в виду, что уравнения вида $x = r \cdot \cos \omega \cdot u$ и $y = r \cdot \sin \omega \cdot u$ описывают движение точки по окружности радиуса r с постоянной угловой скоростью ω . Таким образом, каждую пару уравнений можно рассматривать как уравнение эпициклоиды или гипоциклоиды, либо как описание координат вершины M шарнирного параллелограмма.

При этом точка N движется с единичной угловой скоростью по окружности радиуса $r_b = (1 \pm k_1) \cdot r_0$, а точка K – со скоростью q по окружности радиуса $r_m = k_1 \cdot r_0$. Продемонстрируем это утверждение на соответствующих чертежах, отдельно для эпициклоид и циклоид. При этом за исходные параметры мы будем брать величины k_1 и r_0 . Соответствующие же радиусы r_b и r_m будут вычисляться с помощью величин k_1 и r_0 . Кроме того, ясно, что $q = 1 \pm \frac{1}{k_1}$, в зависимости от направления вращения.



Случай эпициклоиды



Случай гипоциклоиды

Теперь мы можем опираться на теоремы 13 и 17. Заодно отметим, что в теоремах 22 и 23 речь фактически уже шла о соответствующих параллелограммах, но там они появлялись в связи с качением окружностей и в довольно сложном контексте. В теореме же Франсуа всё предельно просто. Как мы знаем, отрезок OB и лежащий на нём отрезок ON вращаются с единичной угловой скоростью. Отрезок OD и лежащий на нём отрезок OK вращаются с угловой скоростью q .

Хорда BD проходит через точку M циклоидальной кривой, причём $\frac{BM}{BD} = \frac{1}{1 \pm q}$. Ни-

же мы рассмотрим только случай эпициклоиды, поскольку в случае гипоциклоиды доказательство проводится аналогичным образом. Итак, поскольку

$$\frac{BN}{BO} = \frac{BO - BN}{BO} = \frac{1 + 2k_1 - (1 + k_1)}{1 + 2k_1} = \frac{k_1}{1 + 2k_1} = \frac{1}{2 + \frac{1}{k_1}} = \frac{1}{1 + (1 + \frac{1}{k_1})} = \frac{1}{1 + q},$$

и BDO подобны, а, следовательно, отрезок MN параллелен отрезку OK . Точно также отрезок

МК параллелен отрезку ON. В результате мы установили, что четырёхугольник ONMK является параллелограммом.

Теперь предположим, что нам исходно заданы два параметра r_b и r_m , а именно длины сторон параллелограмма. Тогда из уравнений $r_b = (1 \pm k_1) \cdot r_0$, и $r_m = k_1 \cdot r_0$ находим r_0 и k_1 , а, значит, и q . После этого мы убеждаемся, что наш шарнирный параллелограмм позволяет построить нужную кривую. Теорема доказана.

Используя уравнения циклоидальных кривых, мы пришли к теореме Франсуа. Теперь мы с помощью этой теоремы сделаем некоторые выводы об этих уравнениях.

В теореме говорится только о длине сторон шарнирного параллелограмма и их угловых скоростях. Начальное положение этих сторон может быть выбрано любым. Вне зависимости от этого будет построена вполне определённая циклоидальная кривая. Исходные же углы наклона сторон влияют только на поворот кривой вокруг центра неподвижной окружности. Действительно, поскольку стороны параллелограмма вращаются с различными скоростями, рано или поздно они догонят друг друга, вопреки злопыхательским утверждениям Зенона Элейского. Этот момент определит тот или иной угол поворота кривой.

Таким образом, уравнения

$$x_m = r_0 \left((1 + k_1) \cdot \cos(u + \alpha) + k_1 \cdot \cos \left(\left(1 + \frac{1}{k_1}\right)u + \beta \right) \right),$$

$$y_m = r_0 \left((1 + k_1) \cdot \sin(u + \alpha) + k_1 \cdot \sin \left(\left(1 + \frac{1}{k_1}\right)u + \beta \right) \right)$$

являются уравнениями эпициклоиды, повернутой на некоторый угол. Пусть, например, $\alpha = 0$, а $\beta = \pi$, тогда уравнения принимают вид

$$x_m = r_0 \left((1 + k_1) \cdot \cos u - k_1 \cdot \cos \left(1 + \frac{1}{k_1}\right)u \right),$$

$$y_m = r_0 \left((1 + k_1) \cdot \sin u - k_1 \cdot \sin \left(1 + \frac{1}{k_1}\right)u \right).$$

Теперь замена параметра k_1 на $-k_1$ переводит уравнения эпициклоиды в уравнения гипоциклоиды.

Метод Франсуа позволяет перейти к описанию эпициклоид и гипоциклоид с помощью комплексных чисел [3, стр. 116]. Действительно, вращение стержня длины s с угловой скоростью ω на комплексной плоскости описывается уравнением $z = s \cdot e^{i\omega t}$. Из этого следует, что в соответствии с теоремой Франсуа уравнение $z = s_1 e^{i\omega_1 t} + s_2 e^{i\omega_2 t}$ при соответствующем выборе параметра q описывает эпи- или гипоциклоиду. Это обстоятельство позволяет конформно отображать внутренность окружности на внутреннюю область, ограниченную эпициклоидами, соответствующими целым числам, и внешнюю область, ограниченную гипоциклоидами, соответствующими аликвотным дробям (то есть вида $1/n$).

Отметим также, что подобная форма описания циклоидальных кривых позволяет получить обобщение, предложенное Беллерманом [3, стр. 116], которое приводит к так называемым циклоидам высших порядков. При этом рассматривается сумма нескольких вращающихся с постоянными, но различными угловыми скоростями векторов-стержней. Общее

уравнение имеет вид $z = \sum_{i=1}^n s_i e^{i\omega_i t}$. Циклоиды высших порядков также связаны с конформными отображениями.

Возможно и обобщение, приводящее к пространственным кривым. В многомерном пространстве выбираем несколько двумерных плоскостей, проходящих через начало координат, и начинаем вращать в каждой из них радиус-вектора. Суммарный вектор вычерчивает пространственную кривую.

9. ГИПОТРОХОИДЫ

Перейдём к изучению удлинённых и укороченных гипотрохонид. Так же, как и в разделе, посвящённом гипоциклоидам, мы будем возвращаться и к эпитрохонидам. Особое наше внимание привлечёт различие в форме удлинённых и укороченных трохонид, поскольку именно оно играет важную роль при построении упомянутых выше конформных отображений.

Теорема 26. Пусть точки В и D движутся по окружности радиуса $r_0 = r_1 + r_2$ с постоянными скоростями в разные стороны ($r_1 = k_1 \cdot r_0$; $k_1 < 0,5$; $r_2 = k_2 \cdot r_1$). Если скорость точки В равна единице, а скорость точки D равна $q = 1 - 1/k_1$ (эта скорость отрицательна), то точка М, такая, что $BM = \frac{r_2}{r_0 - r_1 + r_2} BD$ вычерчивает гипотрохониду.

Доказательство. Точно так же, как гипоциклоида в теореме 17, гипотрохонид строится с помощью неподвижной окружности радиуса r_0 с центром O и подвижной окружности радиуса r_1 с центром C ($r_1 = k_1 \cdot r_0$) пером, удалённым от центра подвижной окружности на расстояние r_2 . При этом качение осуществляется по внутренней стороне обода.

Пусть линия центров OC, на которой лежат точки А и В, движется против часовой стрелки и имеет угол наклона u . Длина дуги неподвижной окружности, по которой прокатилась подвижная окружность, равна $r_0 \cdot u$. Такова же и длина дуги подвижной окружности, пришедшей в соприкосновение с неподвижной. Центральный угол, опирающийся на эту дугу, равен $u_1 = \frac{u \cdot r_0}{r_1} = \frac{u}{k_1}$.

Выберем точку D так, чтобы $\angle BOD = u - u_1$. Пусть из исходного положения на горизонтали перо переместится в точку М. Как показано в теореме 17, $\angle BCM = u - u_1$. Треугольники OBD и CBM являются равнобедренными и имеют углы при вершинах равные u_1 . Значит, у них равны и углы при основании, то есть $\angle CBM = \angle OBD = \frac{\pi - u_1}{2}$. Из этого следует, что точка М лежит на хорде BD. Из подобия названных треугольников следует, что $BM = \frac{r_2}{r_0 - r_1 + r_2} BD$. Теорема доказана.

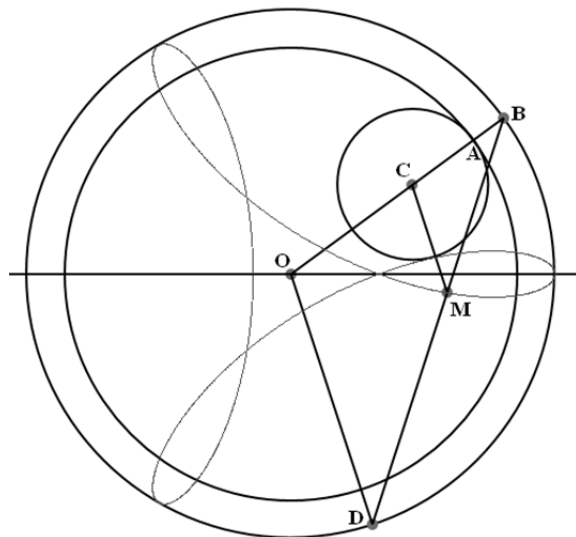
Теперь, используя теоремы 15 и 26 выведем уравнения эпи- и гипотрохонид. Вывод делается аналогично тому, как это уже было проведено для эпи- и гипоциклоид.

Параметрические уравнения эпитрохониды с параметрами $r_1 = k_1 \cdot r_0$, $r_2 = k_2 \cdot r_1$, $q = 1 + 1/k_1$, $r = r_0 + r_1 + r_2$ и $t = \frac{r_2}{r_0 + r_1 + r_2}$ имеют вид:

$$\begin{aligned} x &= r \cdot \cos u + t \cdot r \cdot (\cos qu - \cos u); \\ y &= r \cdot \sin u + t \cdot r \cdot (\sin qu - \sin u). \end{aligned}$$

Раскрыв скобки и вводя новые обозначения для коэффициентов при $\cos u$ и $\cos qu$ ($c_1 = r - t \cdot r$; $c_2 = t \cdot r$), получим уравнения в виде:

$$\begin{aligned} x &= c_1 \cdot \cos u + c_2 \cdot \cos qu; \\ y &= c_1 \cdot \sin u + c_2 \cdot \sin qu. \end{aligned}$$



Параметрические уравнения гипотрохоиды с параметрами $r_1 = k_1 \cdot r_0$, $r_2 = k_2 \cdot r_1$, $q=1-1/k_1$, $r = r_0 - r_1 + r_2$ и $t = \frac{r_2}{r_0 - r_1 + r_2}$ имеют вид точно такой же вид и приводятся к тем же окончательным уравнениям. Итак, мы установили, что эпи- и гипотрохоиды описываются уравнениями вида:

$$\begin{aligned} x &= c_1 \cdot \cos u + c_2 \cdot \cos qu; \\ y &= c_1 \cdot \sin u + c_2 \cdot \sin qu. \end{aligned}$$

Таким образом, общая теорема Франсуа может быть сформулирована следующим образом.

Теорема 28. Если стороны ON (длина стороны c_1) и ОК (длина стороны c_2) шарнирного параллелограмма вращались равномерно с угловыми скоростями 1 и q , то четвёртая вершина M описывает либо эпитрохоиду ($q > 0$), либо гипотрохоиду ($q < 0$).

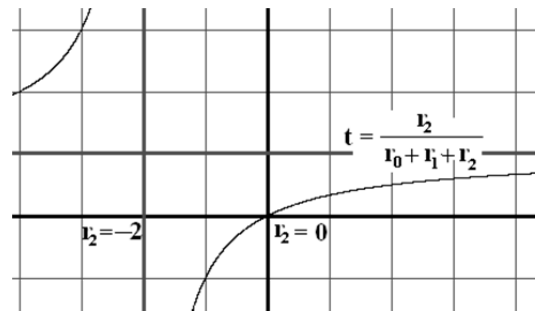
Сразу отметим, что поскольку $c_1 = r - t \cdot r$ и $c_2 = t \cdot r$, то $c_1 + c_2 = r$, то есть кривая вписана в окружность радиуса $c_1 + c_2$. Очевидно, характер кривой зависит не от самих значений c_1 и c_2 , а от их отношения. Действительно, если пропорционально изменить длину сторон параллелограмма, то будет вычерчена гомотетичная кривая. Таким образом, коэффициенты c_1 и c_2 в уравнениях можно пропорционально изменять. В частности можно привести уравнения к виду:

$$\begin{aligned} x &= \frac{c_1}{c_1 + c_2} \cos u + \frac{c_2}{c_1 + c_2} \cos qu; \\ y &= \frac{c_1}{c_1 + c_2} \sin u + \frac{c_2}{c_1 + c_2} \sin qu. \end{aligned}$$

Теперь нам нужно разобраться в том, какие кривые получаются при различных значениях c_1 и c_2 . В последних уравнениях $r = 1$, а значит, $t = \frac{c_2}{c_1 + c_2}$.

Далее, как мы знаем, значение параметра t , позволяющее построить эпи- или гипотрохоиду равно либо $\frac{1}{1+q}$ для положительных q (случай эпициклоиды), либо $\frac{1}{1-q}$ для отрицательных q (случай гипотрохоиды).

Для эпитрохоиды $t = \frac{r_2}{r_0 + r_1 + r_2} = \frac{r_0 + r_1 + r_2}{r_0 + r_1 + r_2} - \frac{r_0 + r_1}{r_0 + r_1 + r_2} = 1 - \frac{r_0 + r_1}{r_0 + r_1 + r_2}$, то есть функция $t = t(r_2)$ описывается уравнением перевёрнутой (относительно положения графика $t = \frac{1}{r_2}$) гиперболы, точка разрыва которой достигается при отрицательном значении r_2 . Мы такие значения не рассматриваем, и, значит, с ростом r_2 параметр t монотонно возрастает. Таким образом, если $q > 0$, то при $t < t_0 = \frac{1}{1+q}$ строится укороченная эпитрохоида, а при $t > t_0 = \frac{1}{1+q}$ – удлинённая.



Аналогичные рассуждения для гипотрохоиды приводят к следующему выводу: если $q < 0$, то при $t < t_0 = \frac{1}{1-q}$ строится укороченная гипотрохоида, а при $t > t_0 = \frac{1}{1-q}$ – удлинённая.

Если заданы параметры q и c_1 , то для построения эпи- или гипоциклоиды следует выбрать c_2 , используя уравнение $t_0 = \frac{c_2}{c_1 + c_2}$. Решение даёт формулой $c_2 = c_1 \cdot \frac{t_0}{1-t_0}$. Если c_2

увеличить, то параметр $t = \frac{c_2}{c_1 + c_2}$ уменьшится, и будет построена укороченная трохоида.

Наоборот, при уменьшении c_2 , строится удлинённая трохоида.

Для случая эпитрохоиды имеем $c_2 = c_1 \cdot \frac{t_0}{1-t_0} = c_1 \cdot \frac{\frac{1}{1+q}}{1-\frac{1}{1+q}} = c_1 \cdot \frac{1}{q} = \frac{c_1}{q}$. Для случая

гипотрохоиды имеем $c_2 = c_1 \cdot \frac{t_0}{1-t_0} = c_1 \cdot \frac{\frac{1}{1-q}}{1-\frac{1}{1-q}} = c_1 \cdot \frac{1}{-q} = -\frac{c_1}{q}$. Оба случая объединяются в

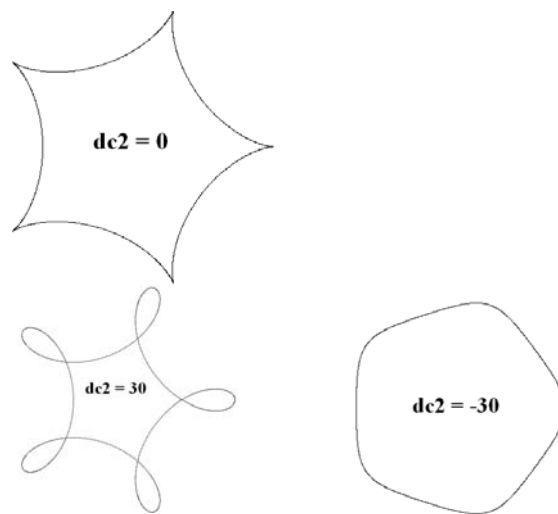
один с помощью формулы $c_2 = \frac{c_1}{|q|}$.

В принципе данный результат аналитическим путём мы могли получить уже давно. Для этого достаточно было использовать параметрические уравнения трохоид и теоремы 13 и 18. Однако мы стараемся обрисовать ситуацию более детально. И хотим показать, где возможно, геометрические и кинематические механизмы, связанные с возникновением циклоидальных кривых.

Продемонстрируем наши выводы с помощью очередной программы. В ней мы вычислим значение параметра c_2 , дающего эпи- или гипоциклоиду, и сохраним это значение в переменной cc_2 . Параметр dc_2 (добавка к c_2) служит для получения отклонения коэффициента c_2 от этого важного значения. При $dc_2 > 0$ величина c_2 растёт, строится удлинённая эпитрохоида. При $dc_2 < 0$ c_2 убывает, и строится укороченная эпитрохоида. Для гипотрохоид все вычисления и результаты построений аналогичны.

```

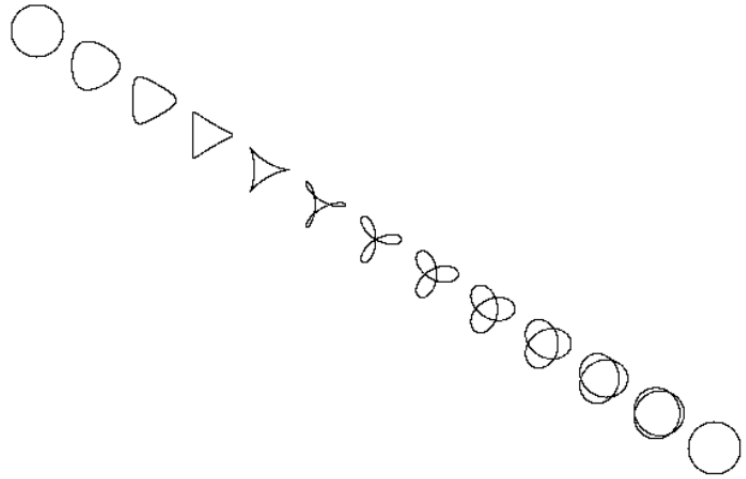
pi = Math.Pi
x0 = 320
y0 = 240
c1 = 150
q = -4
'Параметр для построения
'эпи- или гипоциклоиды
cc2 = c1/ Math.Abs(q)
'Смещение от этого параметра
dc2 = 30
c2 = cc2 + dc2
For u = 0 To 2*pi Step pi/1000
  x = x0+c1* Math.Cos(u)+c2* Math.Cos(q*u)
  y = y0-(c1* Math.Sin(u)+c2* Math.Sin(q*u))
  GraphicsWindow.SetPixel(x,y,"")
EndFor
    
```



Определённый интерес представляет вопрос об образовании различных семейств циклоидальных кривых. Мы уже рассматривали в связи с теоремой 16 семейство эпитрохонд, являющихся следами гомотопического перетекания одинарной петли-окружности в n-разовую петлю-окружность. Аналогичное семейство можно построить и для гипотрохонд. В этом случае, однако, у исходной и конечной петель направления обхода будут иметь противоположные направления. Простая программа демонстрирует переход m-разовой петли-окружности в n-разовую при условии, что m положительно, а n отрицательно.

```

pi = Math.Pi
x0 = 60
y0 = 60
x1 = 580
y1 = 380
r = 20
m = 1
n = -2
'Фазы
For t = 0 To 1.05 Step 1/12
For u = 0 To 2*pi Step pi/100
  xb = x0 + r*Math.Cos(m*u)
  yb = y0 - r*Math.Sin(m*u)
  xd = x1 + r*Math.Cos(n*u)
  yd = y1 - r*Math.Sin(n*u)
  x = xb + (xd - xb)*t
  y = yb + (yd - yb)*t
GraphicsWindow.SetPixel(x,y,"")
EndFor
EndFor
    
```



Ещё одним способом построения семейств циклоидальных кривых станет для нас использование функций комплексного переменного, Этот вопрос рассматривается в книге [6] под несколько иным углом. Тем не менее, мы будем пользоваться основными соображениями изложенными там.

Мы знаем, что уравнение $w = c \cdot |q| \cdot e^{ti} + c \cdot e^{qti}$ описывает эпи- ($q > 0$) или гипоциклоиду ($q < 0$). Рассмотрим функцию $w = c \cdot |q| \cdot z + c \cdot z^q$. Она переводит окружность $|z| = 1$ в соответствующую циклоидальную кривую. Начнём со случая эписциклоиды ($q > 0$).

Пусть при этом q является натуральным числом, большим, чем 1. Функция $w = c \cdot |q| \cdot z + c \cdot z^q$ аналитична внутри круга $|z| \leq 1$ и отображает его границу на эписциклоиду $w = c \cdot |q| \cdot e^{ti} + c \cdot e^{qti}$. Согласно принципу соответствия границ функция $w = c \cdot |q| \cdot z + c \cdot z^q$ осуществляет конформное отображение круга $|z| \leq 1$ на внутренность соответствующей эписциклоиды [7, глава II, теорема 2].

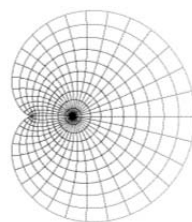
Рассмотрим окружность $|z| = r$ ($r < 1$). Функция $w = c \cdot |q| \cdot z + c \cdot z^q$ отображает её в линию с уравнением $w = c \cdot |q| \cdot r \cdot e^{it} + c \cdot r^q \cdot e^{qit}$. Мы знаем, что это циклоидальная кривая, для которой $c_1 = c \cdot |q| \cdot r$ и $c_2 = c \cdot r^q$. Вычислив параметр t , легко показать, что кривая является укороченной эпитрохондой.

$$t = \frac{c_2}{c_1 + c_2} = \frac{c \cdot r^q}{c \cdot |q| \cdot r + c \cdot r^q} = \frac{r^{q-1}}{r^{q-1} + |q|} = \frac{1}{1 + \frac{|q|}{r^{q-1}}} < \frac{1}{1 + |q|}$$

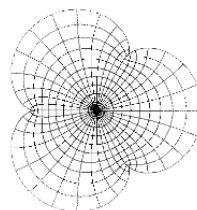
Продемонстрируем этот результат с помощью следующей программы.

```

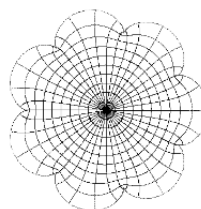
pi = Math.Pi
x0 = 320
y0 = 220
c = 80
q = 2
For r=0 to 1 Step .1
  c1 = c*q*r
  c2 = c* Math.Power(r,q)
  For u = 0 To 2*pi Step pi/500
x=x0+ c1* Math.Cos(u) + c2* Math.Cos(q*u)
y = y0 - c1* Math.Sin(u)-c2* Math.Sin(q*u)
    GraphicsWindow.SetPixel(x,y,"")
  EndFor
EndFor
For r=0 to 1 Step .005
  c1 = c*q*r
  c2 = c* Math.Power(r,q)
  For u = 0 To 2*pi Step pi/20
x=x0+c1* Math.Cos(u) + c2*Math.Cos(q*u)
y = y0 - c1* Math.Sin(u)-c2*Math.Sin(q*u)
    GraphicsWindow.SetPixel(x,y,"")
  EndFor
EndFor
    
```



q = 2



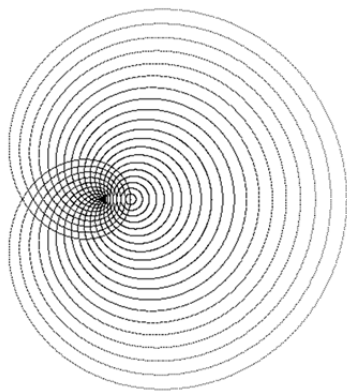
q = 4



q = 8

Мы видим, как укороченные эпициклоиды становятся элементами визуализации сеток соответствующих конформных отображений. Отметим, что они не пересекаются друг с другом.

Если же рассмотреть функцию $w = c \cdot q \cdot z + c \cdot z^q$ при любых значениях переменной z , то она переводит любую окружность вида $|z| = const$ в семейство эпитрохонд. Но, естественно, что удлинённые эпитрохонды не только обладают точками самопересечений, но и пересекают другие кривые.



Той же самой программой, сделав верхний предел изменения переменной r больше единицы, можно построить подобное расширенное семейство. На чертеже показан случай для $q = 2$. Таким образом, семейство строится с помощью функции $w = 2 \cdot z + z^2$ и состоит из улиток Паскаля.

Пусть теперь q является отрицательным целым числом. Функция $w = c \cdot |q| \cdot z + c \cdot z^q$ уже не является аналитической внутри круга $|z| \leq 1$. Более того, в случае $|q| > 1$ в нуле она имеет кратный полюс [8]. Изменим функцию так, чтобы она, как и прежде отображала окружности в гипотрохонды, но при этом

имела бы простой полюс.

Для этого заставим стороны параллелограмма вращаться в противоположных направлениях. Точнее, сторона, которая вращалась с угловой скоростью 1, теперь будет вращаться с угловой скоростью -1 , а сторона, которая вращалась с угловой скоростью q , теперь будет вращаться с угловой скоростью $-q$ (напомним, что $q < 0$). Ясно, что кривая по методу Франсуа будет построена та же самая. Зато теперь мы можем использовать функцию с простым по-

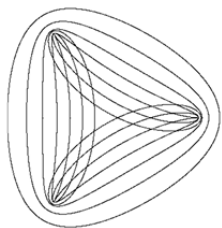
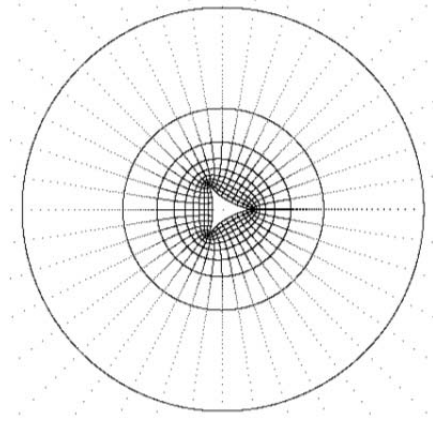
люсом $w = -\frac{c \cdot q}{z} + c \cdot z^{-q}$. И в этом случае [7, глава II, теорема 3] функция осуществляет конформное отображение круга $|z| \leq 1$ на внешность гипоциклоиды.

Последняя из наших программ при минимальной модификации позволяет строить соответствующие семейства гипотрохонд. Пока эти гипотрохонды являются укороченными, они не пересекаются и заполняют внешнюю область гипоциклоиды.

```

pi = Math.Pi
x0 = 320
y0 = 220
c = 10
q = 2
For r=.1 to 1 Step .1
  c1 = c*q/r
  c2 = c* Math.Power(r,q)
  For u = 0 To 2*pi Step pi/1500
    x = x0 + c1* Math.Cos(-u) + c2* Math.Cos(q*u)
    y = y0 - c1* Math.Sin(-u) - c2* Math.Sin(q*u)
    GraphicsWindow.SetPixel(x,y,"")
  EndFor
EndFor

```



Как и выше при переходе к произвольным значениям переменной z появляются удлинённые гипотрохонды, но нарушается конформность. На очередном чертеже показаны гипотрохонды, соответствующие значения переменной при условии $0,6 \leq |z| \leq 1,2$ для функции $w = \frac{2}{z} + z^2$.

Важным обстоятельством для нас является и то, что подобные семейства можно строить и с помощью неаналитических функций. Рассмотрим функцию $w = -q\bar{z} + z^{-q}$, где \bar{z} как обычно обозначает сопряжённое к z комплексное число. Поскольку $q < 0$, нам будет удобнее перейти к натуральным значениям q , в результате чего функция примет вид $w = q\bar{z} + z^q$.

Покажем, что она взаимно однозначно отображает внутренность круга $|z| \leq 1$ на внутреннюю часть гипоциклоиды, связанной с угловой скоростью $-q$. Поскольку

$$\begin{aligned}
 z &= r \cdot \cos u + i \cdot r \cdot \sin u, \\
 \bar{z} &= r \cdot \cos(-u) + i \cdot r \cdot \sin(-u), \\
 z^q &= r^q \cdot \cos(qu) + i \cdot r^q \cdot \sin(qu),
 \end{aligned}$$

выполняются следующие равенства:

$$\begin{aligned}
 x &= r \cdot q \cdot \cos(-u) + r^q \cdot \cos(qu), \\
 y &= r \cdot q \cdot \sin(-u) + r^q \cdot \sin(qu).
 \end{aligned}$$

Эти два параметрических уравнения описывают укороченные гипотрохонды для каждого из значений $r < 1$. Каждая из этих кривых не имеет самопересечений. Докажем, что любые две такие кривые не пересекаются между собой. Для этого зафиксируем значение угла u . Тогда меняя r от 0 до 1, мы построим некоторую кривую. Если ни одна из них не имеет самопересечений, то никакие две гипотрохонды не пересекаются между собой.

Покажем, что квадрат расстояния от начала координат до точки $(x; y)$ является монотонно возрастающей функцией. Действительно,

$$x^2 + y^2 = r^2 q^2 + r^{2q} + 2qr^{q+1} \cos((q-1)u) = (rq - r^q)^2 + 2qr^{q+1} (1 + \cos((q-1)u)).$$

Второе слагаемое монотонно возрастает на отрезке от 0 до 1, поскольку коэффициент $2q \cdot (1 + \cos((q-1)u))$ неотрицателен. Рассмотрим функцию $rq - r^q$. Её производной по r является выражение $q - q \cdot r^{q-1} = q \cdot (1 - r^{q-1}) \geq 0$ на отрезке $[0; 1]$. Значит, и квадрат этой функции возрастает на отрезке $[0; 1]$, так же как и величина $x^2 + y^2$.

Таким образом, внутренность гипоциклоиды при отображении на неё функцией $w = qz + z^q$ единичного круга $|z| \leq 1$ расслаивается на непересекающиеся укороченные гипотроихиды. Следовательно, отображение является взаимно однозначным.

Продемонстрируем этот факт с помощью программы. Кроме того, на сетках хорошо видно, что отображение не является конформным.

GraphicsWindow.Height=600

GraphicsWindow.Width=600

pi = Math.Pi

x0 = 300

y0 = 300

r0 = 250

q = 2

For u=0 To 2*pi Step pi/500

For m=0 To 1 Step 1/10

x1 = m* Math.Cos(-u)

y1 = m* Math.Sin(-u)

x2 = Math.Power(m,q)* Math.Cos(q*u)

y2 = Math.Power(m,q)* Math.Sin(q*u)

x = x0 + r0*(q*x1+x2)/(q+1)

y = y0 + r0*(q*y1+y2)/(q+1)

GraphicsWindow.SetPixel(x,y,"")

EndFor

EndFor

For u=0 To 2*pi Step pi/20

For m=0 To 1 Step 1/500

x1 = m* Math.Cos(-u)

y1 = m* Math.Sin(-u)

x2 = Math.Power(m,q)* Math.Cos(q*u)

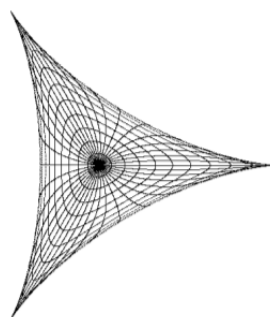
y2 = Math.Power(m,q)* Math.Sin(q*u)

x = x0 + r0*(q*x1+x2)/(q+1)

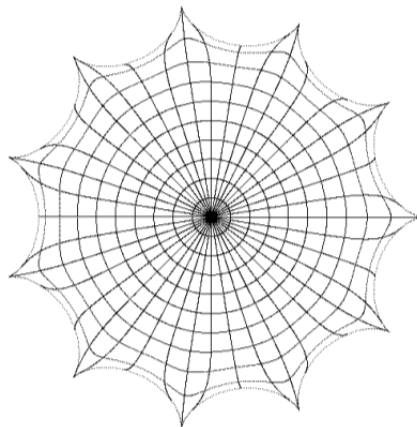
y = y0 + r0*(q*y1+y2)/(q+1)

GraphicsWindow.SetPixel(x,y,"")

EndFor

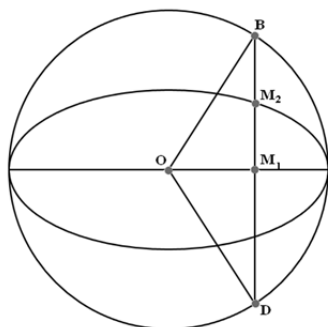


q = 2



q = 10

Теперь перейдём к рассмотрению конкретных видов гипоциклоид и гипотроихид.



Начнём с очень простого, но интересного случая $q = -1$. Будем пользоваться теми же обозначениями, которые использовались в теореме 26. Поскольку радиусы OB и OD вращаются в противоположных направлениях с одинаковой угловой скоростью, точки B и D всё время симметричны относительно горизонтальной прямой, проходящей через центр вращения. Таким образом, хорда BD всегда перпендикулярна к горизонтали.

Точки, которые делят эту хорду в постоянном отношении, вычерчивают гипоциклоиды. Каждая из них является сжатой

окружностью, а сама гипоциклоида представляет собой эллипс, сжатый в горизонтальный диаметр.

Функция, которая осуществляет конформное отображение круга $|z| \leq 1$ на внешность гипоциклоиды, то есть на плоскость с удалённым отрезком, задаётся формулой $w = z + \frac{1}{z}$.

Нетрудно видеть, что с точностью до множителя $\frac{1}{2}$ перед нами функция Жуковского. Разберёмся, для чего введён этот множитель.

Дело в том, что без него функция $w = z + \frac{1}{z}$ переводит точку $z = 1$ в точку $w = 2$. То есть гипоциклоида представляет собой отрезок $[-2; 2]$. Добавление же этого множителя подстраивает гипоциклоиду-отрезок так, чтобы она стала вписанной в окружность единичного радиуса.

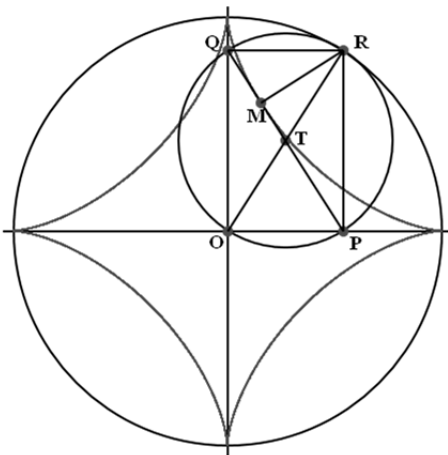
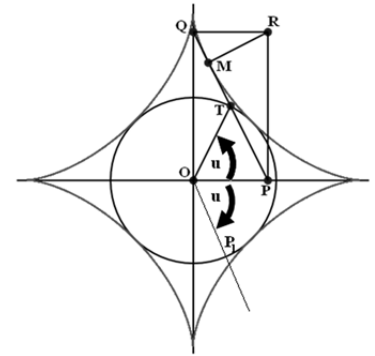
Если подобную подгонку сделать и для всех других гипоциклоид, то уравнение $w = \frac{q}{z} + z^q$, где q – натуральное число, следует заменить на уравнение $w = \frac{(q + z^q)}{z}$.

Далее мы рассмотрим две наиболее известные гипоциклоиды. Одной из них является астроида ($q = -3$), а второй – кривая Штейнера ($q = -2$), которая особенно важна для нас.

Согласно теореме 21 астроида является огибающей некоторого семейства прямых, которое можно описать следующим образом: точка T движется по окружности постоянной угловой скоростью против часовой стрелки, а прямая, проходящая через точку T , вращается с такой же угловой скоростью по часовой стрелке.

Теорема 29. Астроида является огибающей отрезков постоянной длины, концы которых скользят по двум взаимно перпендикулярным прямым.

Доказательство. Пусть радиус OT , имеющий длину r , вращается против часовой стрелки, а прямая OP_1 вращается по часовой стрелке с такой же угловой скоростью. Тогда прямая TP , которая параллельна прямой OP_1 , является касательной к астроиде. Очевидно, что треугольник TOP является равнобедренным. Точно также равнобедренным является и треугольник TOQ (отрезок TQ является продолжением отрезка TP). Значит, $TP = TQ = OT = r$, а, следовательно, PQ имеет постоянную длину, равную $2r$. Теорема доказана.



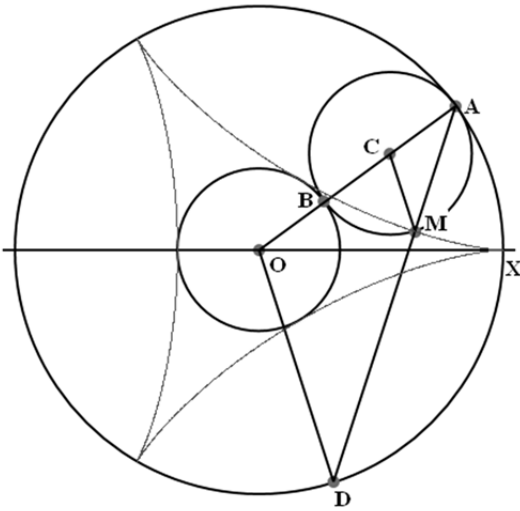
Одна из точек малого карданова круга вычерчивает астроиду, двигаясь вдоль касательной ортогонально радиусу, проходящему через неподвижную в данный момент точку R . Таким образом, ею может быть только точка M , которая является основанием перпендикуляра, опущенного из точки R мгновенного соприкосновения кардановых окружностей на касательную PQ .

Поскольку при качении малого карданова круга естественным образом возникает прямоугольник OQRP, то можно сказать, что астроида является геометрическим местом оснований перпендикуляров RM, опущенных из точки R на диагональ PQ.

10. КРИВАЯ ШТЕЙНЕРА

Кривая Штейнера является нашей главной целью. Именно с её помощью будет построена соответствующая группа преобразований.

Кривая Штейнера возникает при качении подвижной окружности по внутренней ободу неподвижной окружности. При этом радиус подвижной окружности в три раза меньше радиуса неподвижной окружности. Легко понять, что кривая Штейнера состоит из трёх арок. Она похожа на греческую букву дельта и, по этой причине, её порой называют дельтоидой.



Согласно теореме 19 кривая Штейнера может быть построена следующим образом. Пусть точки A и D движутся по окружности радиуса r_0 с постоянными угловыми скоростями в разные стороны, причём модуль скорости точки D в два раза больше скорости точки A. Точка M, определяемая условием $AM = \frac{1}{3} AD$, описывает дельтоиду.

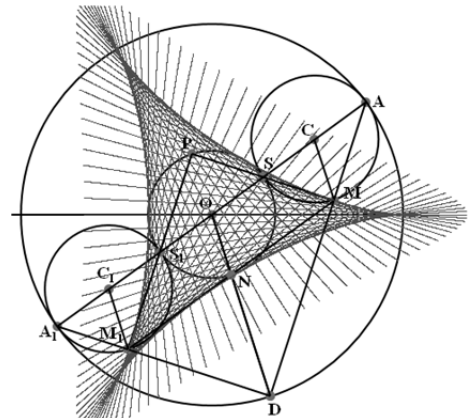
Если угол AOX равен u , то будем говорить, что точка A определяется углом u . Рассмотрим кроме точки A ещё и точку A_1 , которая определяется углом $u + \pi$. Назовём точки A и A_1 связанными, а отрезок AA_1 – диаметром кривой Штейнера.

Наконец вспомним, что согласно теореме 21 кривую Штейнера можно построить как огибающую некоторого семейства прямых. Пусть по окружности радиуса $\frac{1}{3}r_0$ с постоянной угловой скоростью ω_1 движется точка, через которую проходит прямая, вращающаяся также с постоянной угловой скоростью ω_2 . Тогда в случае, когда $\frac{\omega_2}{\omega_1} = -\frac{1}{2}$ огибающей следов, оставляемых этой прямой, является кривая Штейнера, описанная вокруг окружности радиуса $\frac{1}{3}r_0$ (речь идёт о свободной окружности).

Теперь у нас есть возможность сформулировать интересную теорему о кривой Штейнера.

Теорема 30. Любой из диаметров кривой Штейнера касается этой кривой и имеет постоянную длину, равную удвоенному диаметру катящейся окружности. Касательные, проведённые через концы диаметра, перпендикулярны друг другу, а точка их пересечения лежит на окружности радиуса $\frac{1}{3}r_0$.

Доказательство. Пусть точка A определяется углом u , а связанная с ней точка A_1 – углом $u + \pi$. Тогда точки D и D_1 , по теореме 19 соответствующие точкам A и A_1 , определяются углами $-2u$ и $-2u + 2\pi$, то есть D и D_1 совпадают. Поскольку отрезок AA_1 является диа-



метром неподвижной окружности, угол ADA_1 – прямой.

Поскольку $AM = \frac{1}{3}AD$, так же как и $AM_1 = \frac{1}{3}A_1D_1$, то подобны пары треугольников

OAD и CAM , а так же OA_1D и CA_1M_1 . Из этого следует, что отрезки CM и C_1M_1 параллельны и равны. Таким образом, четырёхугольник MCC_1M_1 является параллелограммом. Значит, диаметр кривой Штейнера MM_1 параллелен отрезку AA_1 и равен двум диаметрам катящейся окружности.

Кроме того, диаметр кривой Штейнера MM_1 наклонён к горизонтали под углом α (в силу параллельности отрезку AA_1) и проходит через точку N , лежащую на пересечении свободной окружности и отрезка OD , который наклонён к горизонтали под углом -2α . Получается, что любой из диаметров кривой Штейнера лежит на прямой NM , причём точка N движется с угловой скоростью -2 , а прямая NM вращается с угловой скоростью 1 . По теореме 21 получается, что диаметры кривой Штейнера касаются этой кривой.

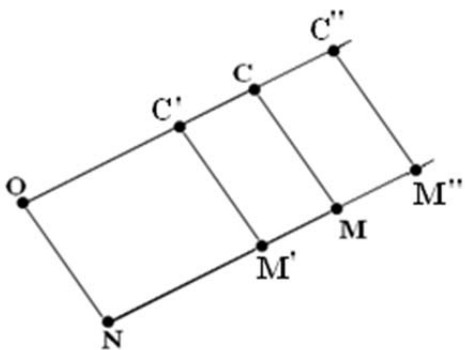
Теперь проведём в точках M и M_1 касательные к кривой Штейнера. Поскольку AD – нормаль к этой кривой, то отрезок MS , соединяющий точку M на кривой с точкой S пересечения катящейся окружности с отрезком AA_1 является касательной. Действительно, угол SMA опирается на диаметр катящейся окружности и является прямым, то есть AD и MS перпендикулярны.

Точно также отрезок MS_1 , соединяющий точку M_1 на кривой Штейнера с точкой S_1 пересечения катящейся окружности в новом её положении с отрезком AA_1 является касательной.

Поскольку отрезки AD и AD_1 перпендикулярны, перпендикулярны друг другу и касательные MS и MS_1 . А поскольку они исходят из концов диаметра SS_1 свободной окружности, то пересекаются в некоей точке P , лежащей на этой же окружности. Теорема доказана.

Видимо, тот факт, что кривая Штейнера является огибающей своих диаметров, привёл к появлению так называемой задачи об иголке [9]. Ограничимся цитатой из соответствующей статьи. «Задача об иголке состоит в определении минимальной площади фигуры на плоскости, в которой единичный отрезок, «иглу», можно развернуть на 180 градусов, вернув его в исходное положение с обращённой ориентацией. Такое возможно проделать в круге радиуса $1/2$. Другой пример - фигура, ограниченная дельтоидом... Оказывается, что можно построить фигуру с произвольно малой площадью».

Вернёмся к доказательству последней теоремы. Очевидно, что упоминаемая там точка N , лежащая на свободной окружности, является серединой диаметра кривой Штейнера. Таким образом, середина диаметров кривой Штейнера вычерчивает свободную окружность.



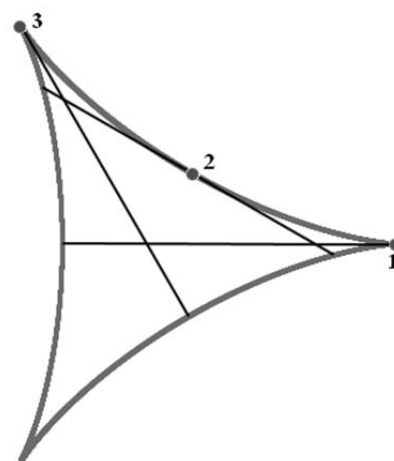
Возникает вопрос, какие кривые вычерчивают другие точки, делящие диаметр в постоянном отношении. Мы можем с большой вероятностью успеха предположить, что речь идёт о гипотрохоидах, связанных с кривой Штейнера. К тому же нам желательно рассмотреть их внешний вид и изучить те особенности, которыми они обладают.

Снова вернёмся к доказательству последней теоремы. Для построения кривой Штейнера используется параллелограмм $OCMN$ (см. теорему 28).

Если выбрать на отрезке точку M' , которая делит отрезок MM_1 , а, значит, и отрезок MN , в заданном отношении $\frac{M'N}{MN} < 1$, то параллелограмм $OC'M'N$ позволит построить удлинённую гипотрохоиду. В случае $\frac{M'N}{MN} > 1$ параллелограмм $OC''M''N$ позволит построить укороченную гипотрохоиду. При этом способе построения укороченные гипотрохоиды будут

целиком охватывать кривую Штейнера, удлинённые будут расположены в её внутренней части.

Более того, рассмотрим качение диаметра по одной из арок кривой Штейнера. Нас интересует положение точки касания в различных фазах движения. В начальной фазе точка касания находится на правом конце отрезка (фаза 1). Далее она постепенно перемещается вдоль катящегося отрезка (фаза 2), пока не достигнет левого конца (фаза 3).



Таким образом, точка касания проходит вдоль всего отрезка и делит его во всех возможных отношениях. По этой причине любая удлинённая гипотрохоида, определяемая фиксированным отношением $v = \frac{MN}{MN} < 1$, касается каждой арки

кривой Штейнера. На самом деле при полном цикле проката диаметра по кривой Штейнера он меняет ориентацию и касается каждой арки кривой ещё раз в точках, определяемых отношением $1 - v$. Из этого следует, что удлинённая гипотрохоида похожа на листок клевера, но является кривой с самопересечениями.

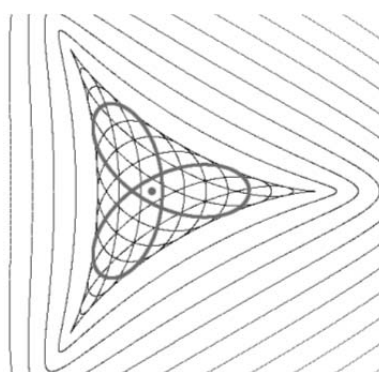
Продемонстрируем наши рассуждения с помощью программы.

```

pi = Math.Pi
x0 = 320
y0 = 220
GraphicsWindow.FillEllipse(x0-5,y0-5,10,10)
r0 = 200
m=1
n=3
k1 = m/n
r1 = k1*r0
r = r0 - 2*r1
For v=0 To pi Step pi/1000
    u = v
    xa = x0 + r0* Math.Cos(u)
    ya = y0 - r0* Math.Sin(u)
    xc = x0 + (r0 - r1)*Math.Cos(u)
    yc = y0 - (r0-r1)*Math.Sin(u)
    xb = x0 + (r0 - 2*r1)*Math.Cos(u)
    yb = y0 - (r0 - 2*r1)*Math.Sin(u)
    u1 = u/k1
    xm1 = xc + r1*Math.Cos(u - u1)
    ym1 = yc - r1*Math.Sin(u - u1)
    xd = x0 + r0* Math.Cos(u1 - u)
    yd = y0 + r0* Math.Sin(u1 - u)
    u = pi+u
    xa = x0 + r0* Math.Cos(u)
    ya = y0 - r0* Math.Sin(u)
    
```

```

xc = x0 + (r0 - r1)*Math.Cos(u)
yc = y0 - (r0 - r1)*Math.Sin(u)
xb = x0 + (r0 - 2*r1)*Math.Cos(u)
yb = y0 - (r0 - 2*r1)*Math.Sin(u)
u1 = u/k1
xm = xc + r1*Math.Cos(u - u1)
ym = yc - r1*Math.Sin(u - u1)
For t=-1 To 2 Step .1
    x = xm + t*(xm1 - xm)
    y = ym + t*(ym1 - ym)
    GraphicsWindow.SetPixel(x,y,"")
EndFor
EndFor
    
```



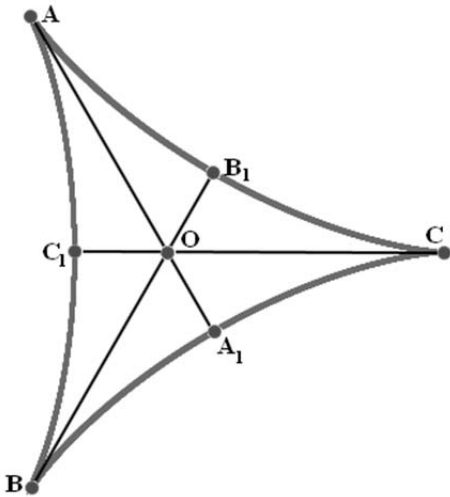
Отметим, что возникшее семейство кривых можно трактовать как гомотопическое преобразование кривой Штейнера в себя. При этом траекториями точек служат диаметры этой кривой, а фазами преобразования являются удлинённые гипотрохоиды, одной из которых является «тройная» окружность. Это преобразование, конечно, можно распространить и на укороченные гипотрохоиды.

Теперь изучим вопрос о форме подэра (напомним, что подэра – это геометрическое место оснований перпендикуляров, опущенных из точки на касательные к заданной кривой») кривой Штейнера относительно произвольных точек плоскости. Начнём мы, однако, с внутренних точек кривой Штейнера.

Важными фактами, связанными с рассматриваемым вопросом, является то, что через любую внутреннюю точку области, ограниченной кривой Штейнера, можно провести

- три касательные к кривой Штейнера;
- три нормали к кривой Штейнера.

Продemonстрируем правильность этих утверждений с помощью рассуждений качественного характера. Три диаметра кривой Штейнера AA_1 , BB_1 и CC_1 , исходящие из точек возврата, делят внутреннюю область на криволинейные треугольники. В частности можно говорить о треугольниках AA_1B и AA_1C , BB_1A и BB_1C , CC_1A и CC_1B . Назовём их базовыми.



Ещё раз рассмотрим процесс перекачивания диаметра по арке кривой Штейнера из положения AA_1 в положение BB_1 . Обозначим концы движущегося диаметра через T и P . Тогда T непрерывно переходит из положения A_1 в положение B , а P – из положения A в B_1 . Кроме того точка касания диаметра M переходит по арке из положения A в положение B .

Своеобразная трансверсаль MT при движении целиком замечает криволинейный треугольник AA_1B , а трансверсаль MP – криволинейный треугольник AB_1B . Иными словами через каждую точку криволинейного треугольника AA_1B можно провести касательную к арке AB кривой Штейнера.

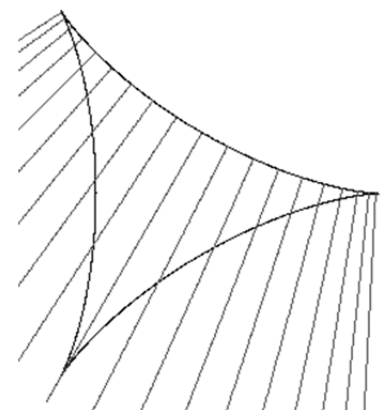
Через каждую точку криволинейного треугольника AB_1B также можно провести касательную к арке AB , которая отличается от предыдущей касательной.

Итак, с каждым базовым треугольником связана касательная к одной из арок кривой Штейнера. Кроме того, каждая точка внутри дельтоиды накрыта тремя базовыми треугольниками, поскольку любая пара треугольников с общим диаметром накрывает соответствующую область, но точка может попасть только в один треугольник из пары. В итоге становится ясно, что через любую внутреннюю точку области, ограниченной кривой Штейнера, можно провести три касательные к кривой Штейнера.

Отметим, что в общем положении две касательные проведены к одной арке, и одна – к другой. К третьей арке касательную провести нельзя.

Перейдём к случаю нормалей. Здесь всё очень просто. Если двигать нормаль по одной из арок дельтоиды, то она, перемещаясь непрерывно, заметёт все внутренние точки соответствующей области без перекрытий. Таким образом, из каждой внутренней точки можно провести одну нормаль к каждой из трёх арок кривой Штейнера.

Теперь мы можем представить себе, как выглядит подэра кривой Штейнера относительно внутренней точки. Три касательные, проходящие через эту точку, обеспечивают тройное прохождение через неё подэры. Три нормали, проходящие через эту же точку, обеспечивают трехкратное касание подэры и кривой Штейнера. Таким образом, можно предположить, что подэра кривой Штейнера похожа на деформированную трёхлепестковую розу Гранди (уравнение в полярных координатах $\rho = a \cdot \sin 3\varphi$).



Чтобы в полной мере убедиться в этом построим подэры кривой Штейнера на экране. Для этого сначала проведём несложные вычисления, основанные на теореме 21. Пусть точка

$(x_s; y_s)$ сдвинулась вдоль окружности радиуса r_0 с центром $(x_0; y_0)$ на угол u . Прямая, проходящая через эту точку, повернулась на угол $-\frac{u}{2}$. Значит, направляющий единичный вектор этой прямой имеет координаты $(\cos(-\frac{u}{2}); \sin(-\frac{u}{2}))$, а прямая (касательная к кривой Штейнера) имеет уравнение $q(x - x_s) = p(y - y_s)$ или $qx - py = qx_s - py_s = c_1$.

Прямая, проходящая через произвольную точку $(x_t; y_t)$, перпендикулярно касательной имеет уравнение $p(x - x_t) = -q(y - y_t)$ или $px + qy = px_t + qy_t = c_2$. Соответствующая система уравнений всегда имеет решение, которое можно найти по правилу Крамера:

$$x = \begin{vmatrix} c_1 & -p \\ c_2 & q \end{vmatrix} = qc_1 + pc_2; \quad y = \begin{vmatrix} q & c_1 \\ p & c_2 \end{vmatrix} = qc_2 - pc_1.$$

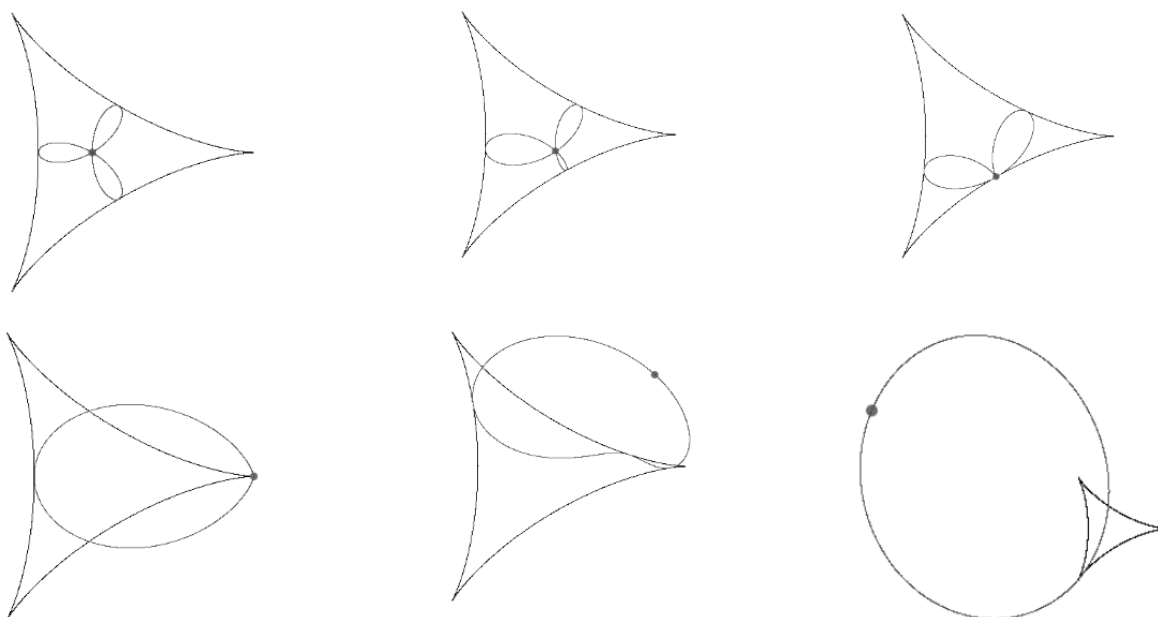
Теперь мы можем написать программу и построить подэры кривой Штейнера относительно различных точек. Эти же уравнения, задающие подэру параметрически, позволяют получить и её алгебраическое уравнение, поскольку она является алгебраической кривой.

```

pi = Math.Pi
x0 = 320
y0 = 220
r0 = 210
GraphicsWindow.DrawEllipse(x0-r0/3,y0-r0/3,2*r0/3,2*r0/3)
For u = 0 To 2*pi Step pi/1000
  xa = x0 + r0* Math.Cos(u)
  ya = y0 - r0* Math.Sin(u)
  xd = x0 + r0* Math.Cos(-2*u)
  yd = y0 - r0* Math.Sin(-2*u)
  xm = xa + (xd - xa)/3
  ym = ya + (yd - ya)/3
  GraphicsWindow.SetPixel(xm,ym,"")
EndFor

xt = x0
yt = y0
GraphicsWindow.FillEllipse(xt-3,yt-3,6,6)
For u = 0 To 2*pi Step pi/1000
  xs = x0 + r0* Math.Cos(u)/3
  ys = y0 + r0* Math.Sin(u)/3
  p = Math.Cos(-u/2)
  q = Math.Sin(-u/2)
  c1 = q*xs - p*ys
  c2 = p*xt + q*yt
  x = c1*q + c2*p
  y = q*c2 - p*c1
  GraphicsWindow.SetPixel(x,y,"red")
EndFor
    
```

Теперь посмотрим, как выглядят подэры различных точек.

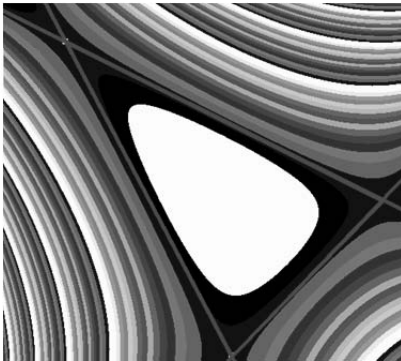


Теперь мы, наконец, переходим к геометрии треугольника.

11. НЕКОТОРЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ГЕОМЕТРИИ ТРЕУГОЛЬНИКА

Согласно Большой Советской Энциклопедии «треугольник прямолинейный, часть плоскости, ограниченная тремя отрезками прямых (стороны треугольника), имеющими попарно по одному общему концу (вершины треугольника)». Уже это определение показывает, что можно понимать термин «треугольник» по-разному. Данное определение аналогично определению круга, поскольку оно объединяет границу фигуры и внутреннюю область. Но можно понимать термин «треугольник» по аналогии с окружностью, акцентируя внимание на сторонах треугольника.

Что же касается сторон треугольника, то можно, как это делалось выше, называть сторонами треугольника отрезки, а можно и прямые, на которых эти отрезки лежат. В этом случае при обращении к методу координат появляется ещё одна точка зрения на треугольник. Каждая из сторон треугольника описывается линейной формой $L_i = a_i x + b_i y + c_i$, которая приравнивается к нулю. Произведение всех трёх линейных форм $L_1 \cdot L_2 \cdot L_3$, приравненное к нулю, описывает совокупность всех сторон треугольника, то есть треугольник как таковой. И



в данном контексте треугольник может рассматриваться как частный случай кривой третьего порядка. Более того, совокупность уравнений вида $L_1 \cdot L_2 \cdot L_3 = \text{const}$ порождает семейство кривых того же порядка, о котором можно сказать, что оно связано с данным треугольником. И это сразу указывает на то, что треугольник, ой, как не прост.

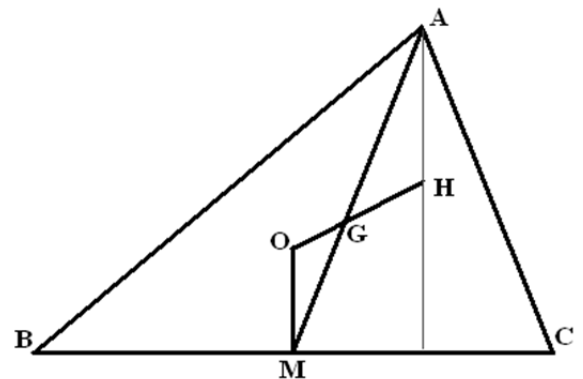
Однако далее мы будем придерживаться, условно говоря, школьной точки зрения на треугольник. Здесь философская рефлексия неуместна. Достаточно иметь перед собой привычный образ той геометрической фигуры, у которой есть три вершины, три угла и три стороны. При этом каждой вершине треугольника соответствует противоположная сторона.

Кроме того, с любым треугольником связаны следующие линии (по три линии каждого типа), почти всегда связывающие вершины с противоположными сторонами.

1. Медианы – отрезки, соединяющие вершины треугольника с серединами противоположных сторон. Три медианы треугольника пересекаются в одной точке называемой центроидом, которая является центром тяжести треугольника. Мы будем обозначать её буквой G .
2. Высоты – перпендикуляры, опущенные из вершин треугольника на противоположные стороны. Три высоты треугольника пересекаются в одной точке. Мы будем обозначать её буквой H и называть ортоцентром.
3. Биссектрисы трёх углов треугольника пересекаются в одной точке, которая является центром вписанной окружности. Мы будем обозначать эту точку буквой I .
4. Срединные перпендикуляры к сторонам треугольника (именно они не проходят через вершины) пересекаются в одной точке, которая является центром описанной окружности. Мы будем обозначать эту точку буквой O .

Теперь мы переходим к фактам, выходящим за пределы школьного курса планиметрии.

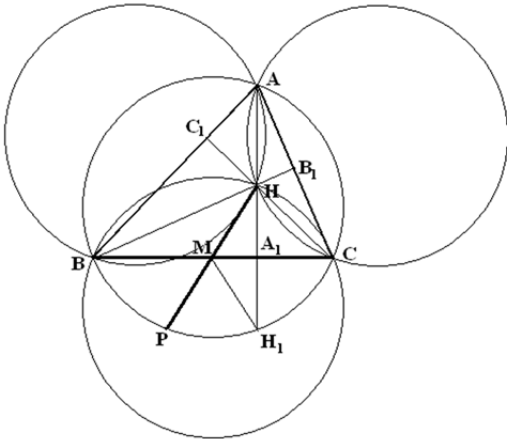
Прямая Эйлера. Три точки O , G и H лежат на одной прямой, называемой прямой Эйлера. Докажем этот факт, следуя [10]. На прямой OG выберем точку N (пока мы о ней ничего достоверно не знаем, но обозначаем её так в надежде на будущее), которая удовлетворяет условию $HG = 2 \cdot OG$. Поскольку центроид делит медиану в том же отношении ($AG = 2 \cdot MG$), треугольники OGM и HGA подобны. Следовательно, отрезок $АН$ параллелен отрезку $ОМ$. Таким



образом, отрезок АН перпендикулярен стороне АВ, и точка Н лежит на высоте. Если провести аналогичные рассуждения и для двух других медиан, мы получим, что та же точка Н лежит на каждой из высот. Фактически мы доказали, что высоты треугольника пересекаются в одной точке, а точки О, G и Н лежат на одной прямой.

Ортоцентр и описанная окружность. Те свойства ортоцентра, о которых мы сейчас расскажем, понадобятся нам в дальнейшем при доказательстве важных для нас теорем. Ортоцентр напрямую не связан с какими-либо окружностями. Тем не менее, оказывается, что окружность, симметричная относительно стороны треугольника описанной вокруг данного треугольника окружности, проходит через ортоцентр.

Более того, поскольку у треугольника три стороны, то и окружностей, симметричных относительно сторон, также три. И все они проходят через точку Н.

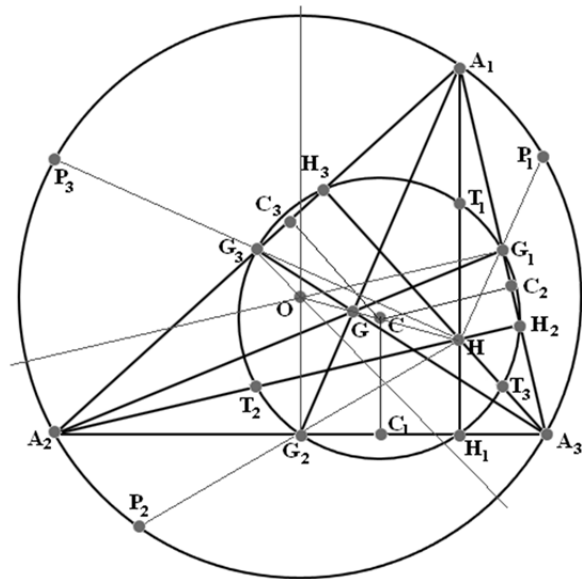


Действительно, угловая мера угла А треугольника ABC равна половине угловой меры дуги ВРС. Дополнительная к ней дуга ВНС имеет угловую меру $2\pi - 2\angle A$. Но $\angle ВНС$ также равен мере $2\pi - 2\angle A$, поскольку это угол между высотами треугольника ABC, опущенными на стороны угла А. Если симметрично отобразить описанную окружность относительно стороны ВС, то дуга ВРС перейдет в дугу ВНС, а угол ВНС будет опираться на дугу с угловой мерой $2\pi - 2\angle A$. Из этого следует, что точка Н лежит на любой из трёх симметричных окружностей.

Далее отметим, что симметрично отображённый относительно стороны ВС (и любой другой стороны треугольника) ортоцентр Н попадает в точку Н₁, лежащую на описанной окружности. Наконец, очевидно, что фигура, состоящая из двух дуг ВНС и ВРС, обладает центральной симметрией относительно точки М, являющейся серединой стороны ВС. Из этого следует, что если продолжить отрезок НМ до пересечения с дугой ВРС, то точка М будет серединой отрезка НР.

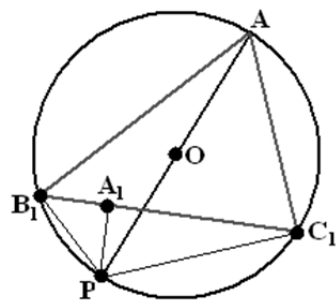
Окружность Эйлера или окружность девяти точек. Середины трёх сторон треугольника, основания высот и середины отрезков, соединяющих вершины с ортоцентром, лежат на одной окружности.

Поскольку мы имеем дело с большим количеством точек, то будем широко использовать для их обозначения индексы: вершины треугольника обозначены через А₁, А₂ и А₃. Середины сторон обозначены через G₁, G₂ и G₃ (буква G выбрана, поскольку имеется связь этих точек с центроидом). Основания высот обозначены через Н₁, Н₂ и Н₃. Середины отрезков, соединяющих вершины с ортоцентром обозначены через Т₁, Т₂ и Т₃. Центр окружности Эйлера и её проекции на стороны обозначены через С, С₁, С₂ и С₃. Наконец, точки пересечения описанной окружности с отрезками НG₁, НG₂ и НG₃, о которых упоминалось выше, обозначены через Р₁, Р₂ и Р₃.

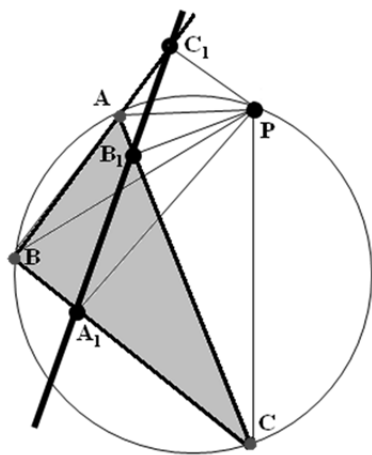


Доказательство теоремы об окружности Эйлера будет не длиннее описания обозначений. Подвергнем плоскость гомотетии с коэффициентом $\frac{1}{2}$.

Тогда вершины треугольника A_1, A_2 и A_3 перейдут в точки T_1, T_2 и T_3 . Описанная же окружность перейдет в окружность, проходящую через точки T_1, T_2 и T_3 , то есть в окружность Эйлера. Точки P_1, P_2 и P_3 перейдут в точки G_1, G_2 и G_3 , поскольку точка G_1 является серединой отрезка HP_1 . Значит, окружность Эйлера проходит через середины сторон. Наконец, срединные перпендикуляры перейдут в прямые CC_1, CC_2 и CC_3 . При этом точки C_1, C_2 и C_3 являются серединами отрезков H_1G_1, H_2G_2 и H_3G_3 , ввиду чего точка C – центр окружности Эйлера, равноудалена и от середин сторон, и от оснований высот. Следовательно, окружность Эйлера проходит и через основания высот. Отметим ещё и тот факт, что центр окружности Эйлера лежит на прямой Эйлера.



Прямые Симсона. Если выбрать на описанной окружности произвольную точку P , то основания A_1, B_1 и C_1 перпендикуляров, опущенных на стороны треугольника ABC лежат на одной прямой, называемой прямой Симсона. Каждой точке на описанной окружности соответствует своя прямая Симсона.

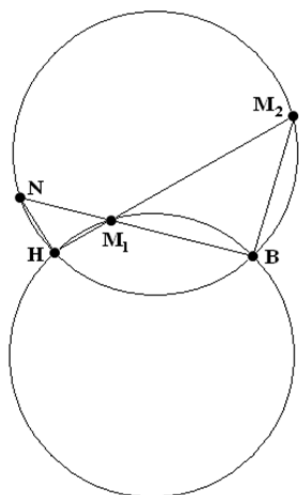


Задача состоит в том, чтобы доказать, что угол AB_1C_1 равен углу CB_1A_1 . Тем самым будет показано, что точки A_1, B_1 и C_1 лежат на одной прямой. Рассмотрим четырехугольник AB_1PC_1 . Вокруг него можно описать окружность. Значит углы AB_1C_1 и APC_1 опираются на общую дугу и равны между собой. Из точек A_1 и B_1 отрезок PC виден под прямым углом. Следовательно, эти четыре точки лежат на одной окружности. По этой причине углы A_1B_1C и A_1PC , опирающиеся на одну дугу, равны. Если мы сумеем доказать, что угол APC_1 равен углу A_1PC , то теорема будет доказана.

Углы при вершинах C_1 и A_1 четырехугольника BC_1PA_1 прямые, значит, углы при вершинах B и P составляют в сумме развернутый угол, т.е. $\angle C_1PA_1 = \pi - \angle ABA_1$. Углы ABC и APC опираются на дополняющие друг друга дуги окружности, следовательно, они составляют в сумме развернутый угол, $\angle APC = \pi - \angle ABA_1$. Итак, $\angle C_1PA_1 = \angle APC$. Теперь, вычитая из каждого из этих углов угол APA_1 , получим углы APC_1 и A_1PC . Таким образом, эти углы равны между собой. Теорема доказана.

Легко понять, что прямыми Симсона являются и высоты треугольника (точка P совпадает с одной из вершин треугольника), и его стороны (точка P диаметрально противоположна одной из вершин треугольника).

Теорема Штейнера о прямых Симсона. Огибающей прямых Симсона является кривая Штейнера. Доказательство теоремы будет проведено по схеме, намеченной в книге [11], но более подробно. Отметим, что в указанной книге широко используются кинематические соображения, что в значительной степени соответствует стилю нашей статьи.



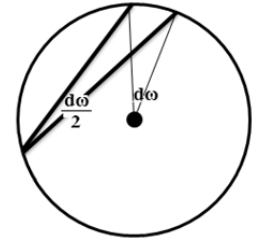
Кстати, по ходу доказательства будет передоказана предшествующая теорема о прямых Симсона, но уже кинематическим методом. Предваряя последующие рассуждения отметим, что прямые Симсона вращаются со скоростью $-\frac{\omega}{2}$ вокруг точки, движущейся по окружности Эйлера со скоростью ω .

Но прежде чем приступать к доказательству основного результата, докажем небольшую лемму, имеющую кинематический смысл. Пусть две равных окружности γ_1 (нижняя) и γ_2 (верхняя) пересекаются в точках N и B , и пусть дуга NM_1B , как и аналогичная

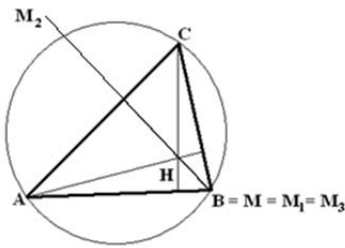
дуга окружности γ_2 , имеет угловую меру α . Пусть прямые HM_1 и BM_1 пересекаются с окружностью γ_2 в точках M_2 и N соответственно. Тогда дуги M_1V окружности γ_1 и M_2V окружности γ_2 равны.

Действительно, поскольку угол HM_1V опирается на дугу с угловой мерой $2\pi - \alpha$, он равен $\pi - \frac{\alpha}{2}$. Отсюда следует, что $\angle BM_1M_2 = \frac{\alpha}{2}$, так же как и $\angle HM_2V$, который опирается на дугу окружности γ_2 , имеющую угловую меру α . Из этого следует, что треугольник M_2NM_1 является равнобедренным, то есть хорды M_1V и M_2V равны между собой, как и стянутые ими дуги.

Кинематический же смысл леммы таков. Пусть исходя из точки V по окружности γ_1 с угловой скоростью ω движется точка M_1 , а по окружности γ_2 с угловой скоростью $-\omega$ движется точка M_2 . Тогда точки H , M_1 и M_2 всегда находятся на одной прямой.



Отметим и ещё одну деталь. Хотя точка M_1 движется с угловой скоростью ω , прямая HM_1 вращается с угловой скоростью $\frac{\omega}{2}$, поскольку угол, вписанный в окружность в два раза меньше центрального угла.

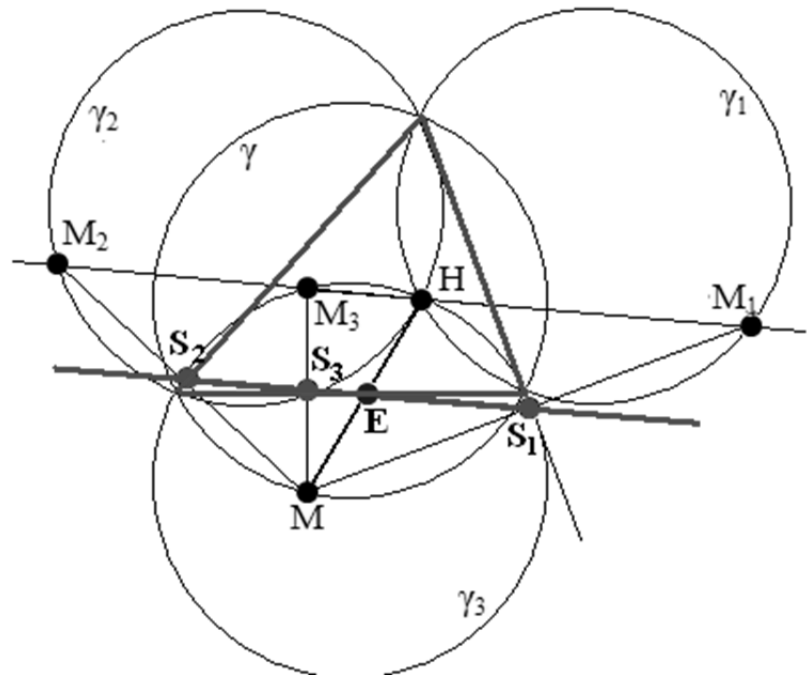


Перейдём к доказательству теоремы Штейнера. Пусть треугольник ABC вписан в окружность γ , а по этой окружности с угловой скоростью ω движется точка M . Симметрично отразим окружность γ относительно каждой из сторон нашего треугольника и получим три окружности γ_1 , γ_2 и γ_3 , которые проходят через ортоцентр треугольника H . Симметричные образы точки M , а именно M_1 , M_2 и M_3 , будут двигаться по соответствующим окружностям с угловыми скоростями, равными $-\omega$.

Если точка M совпадает с вершиной треугольника B , то очевидно, что точки M_1 и M_3 совпадают с этой вершиной, а точка M_2 лежит на высоте, исходящей из B . Значит, точки H , M_1 , M_2 и M_3 в данный момент лежат на одной прямой. По лемме точки H , M_1 , и M_3 так и будут оставаться на одной прямой при движении точки M .

Рассмотрев прохождение точки M через вершины A и C , мы убедимся, что все четыре точки H , M_1 , M_2 и M_3 всегда будут располагаться на одной прямой, которая вращается вокруг ортоцентра с угловой скоростью $-\frac{\omega}{2}$.

Считая основаниями треугольников стороны, параллельные прямой HM_1 , рассмотрим теперь средние линии треугольников MM_1H , MHM_3 и MM_3M_2 . Очевидно, что все они лежат на прямой, параллельной к HM_1 . Следовательно, середины отрезков MH , MM_1 , MM_2 и MM_3 лежат на одной прямой. Обозначим эти точки соответственно как E , S_1 , S_2 и S_3 .



Очевидно, что точки S_1 , S_2 и S_3 являются основаниями перпендикуляров, опущенных из точки M на стороны треугольника ABC . Таким образом, мы повторно доказали, как и обещали, что эти точки задают прямую Симсона.

Теперь рассмотрим точку E – середину отрезка MH . При гомотетичном преобразовании плоскости относительно ортоцентра с коэффициентом $\frac{1}{2}$ точка M перейдёт в точку E , которая, как мы уже знаем лежит на окружности Эйлера.

При движении точки M по описанной окружности с угловой скоростью ω точка E движется по окружности Эйлера с той же угловой скоростью. Через неё проходит прямая Симсона, параллельная прямой NM_1 , вращающейся с угловой скоростью $-\frac{\omega}{2}$. Таким образом, семейство прямых Симсона можно построить методом, описанным в теореме 21. При угловой скорости точки E , равной ω , и угловой скорости вращения прямой Симсона, равной $-\frac{\omega}{2}$, это семейство должно огибать кривую Штейнера, описанную вокруг окружности Эйлера. Теорема доказана.

12. ПОСТРОЕНИЕ ГРУППЫ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ, СВЯЗАННОЙ С ГЕОМЕТРИЕЙ ТРЕУГОЛЬНИКА

Теорема Штейнера даёт возможность построить группу преобразований, которая, несомненно, имеет прямую связь с геометрией треугольника. Прежде чем строить её обсудим вопрос о связи треугольника и соответствующей ему кривой Штейнера. Итак, треугольник с помощью своих прямых Симсона порождает кривую Штейнера. Его стороны и высоты при этом являются касательными соответствующей кривой. Будем говорить, что данный треугольник вложен в кривую Штейнера.

Сейчас мы покажем, что в кривую Штейнера можно вложить треугольник любой формы, то есть треугольник подобный любому другому произвольно выбранному треугольнику. Вообще это обстоятельство почти очевидно, но мы в силу его важности для нас рассмотрим достаточно подробно.

Зафиксируем на плоскости окружность γ и выберем два произвольных треугольника. Форма треугольника, которая у подобных треугольников одинакова, определяется двумя параметрами – двумя углами. Впишем в окружность γ треугольники, подобные выбранным, и построим для каждого из них кривую Штейнера. Очевидно, что эти кривые будут конгруэнтны, поскольку равны их окружности Эйлера, вписанные в каждую из кривых Штейнера. Совместив две кривые Штейнера, мы вложим оба треугольника в одну дельтоиду. Можно провести эту процедуру практически, нарисовав соответствующие треугольники и кривые на двух кальках и наложив их друг на друга.

Однако подобные действия можно провести и с одним треугольником. Пусть на двух кальках нарисованы две кривые Штейнера, порождённые одинаковыми треугольниками. Ясно, что совместить кривые Штейнера на кальках можно несколькими способами. Число возможных вариантов равно шести, поскольку кривая Штейнера совмещается сама с собой либо при повороте на 120° , либо при зеркальной симметрии относительно касательной, проходящей через излом кривой.

Как истолковать это обстоятельство? Дело в том, что треугольник можно воспринимать не только как фигуру, подобную реальному предмету, но и более абстрактно, например, как упорядоченную тройку действительных чисел, задающую длины сторон. Тогда один треугольник со сторонами a , b и c превращается в шесть треугольников, а именно в $\{a, b, c\}$, $\{b, c, a\}$, $\{c, a, b\}$, $-\{a, b, c\}$, $-\{b, c, a\}$, $-\{c, a, b\}$, где знак минус указывает на смену ориентации треугольника на евклидовой плоскости. Подобное неоднозначное понимание треуголь-

ника можно усмотреть уже в одной из реконструкций доказательства Фалеса теоремы о равнобедренном треугольнике.

Сделаем следующее замечание по поводу описания треугольников, вложенных в кривую Штейнера. Построение кривой Штейнера по методу, описанному в теореме 21, мы обычно начинаем с того момента, когда точка, движущаяся по окружности находится на горизонтальном радиус-векторе, направленном вправо, а прямая, вращающаяся вокруг этой точки, горизонтальна. Естественно считать, что в этот начальный момент угол $\omega = 0$. Далее радиус-вектор начинает вращаться против часовой стрелки, а прямая – по часовой. При этом положение каждой касательной к кривой Штейнера можно «проиндексировать» углом ω . В результате каждая может быть однозначно описана индексом. По этой причине мы можем сопоставить каждому треугольнику, вложенному в кривую Штейнера тройку действительных чисел, каждое из которых принадлежит отрезку $[0; 2\cdot\pi)$. На этот раз тройка является неупорядоченной.

Итак, кривая Штейнера содержит в себе треугольники всех форм. Естественно допустить, что группа преобразований, которую мы строим, будет связана именно с кривой Штейнера. Продолжая построение группы, мы попытаемся сопоставить каждому треугольнику некоторую точку на плоскости.

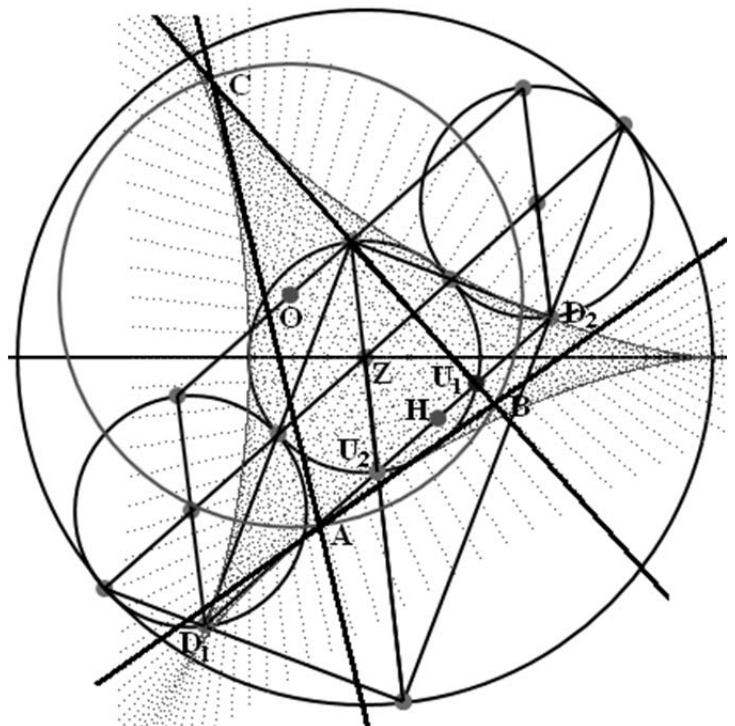
Пусть некоторый треугольник вложен в кривую Штейнера. Тогда его ортоцентр лежит внутри области, ограниченной этой кривой, поскольку три касательных к кривой Штейнера можно провести только через внутренние точки. Этими касательными являются три высоты треугольника.

Теперь займёмся построением треугольника, ортоцентр которого является внутренней точкой области, ограниченной кривой Штейнера. Как мы знаем, диаметры кривой Штейнера, одновременно являющиеся касательными к ней, полностью замечают внутренность дельтоиды. По этой причине вместо того, чтобы выбирать произвольную точку H внутри кривой Штейнера, мы выберем произвольный диаметр кривой Штейнера, лежащий на прямой L , касающейся этой кривой. Затем на этом диаметре выберем произвольную точку H . Очевидно, что таким образом можно выбрать любую внутреннюю точку области, ограниченной кривой Штейнера.

Теперь наша задача состоит в том, чтобы построить треугольник, вложенный в кривую Штейнера, ортоцентр которого совпадает с точкой H , а одна из высот – с проходящей через эту точку касательной L .

Мы знаем, что вписанная в кривую Штейнера окружность γ является окружностью Эйлера искомого треугольника. Окружность γ и касательная L обязательно имеют две общие точки U_1 и U_2 , которые сливаются в одну только в том случае, когда диаметр касается окружности γ . Это следует из метода построения кривой Штейнера, описанного в теореме 21.

Теперь подчеркнём два обстоятельства, которые нам нужно будет иметь в виду. Прежде всего, одна из двух упомянутых точек U_2 является серединой диаметра кривой Штейнера. Кроме того, при качении диаметра вдоль окружности γ точка пересечения касательной

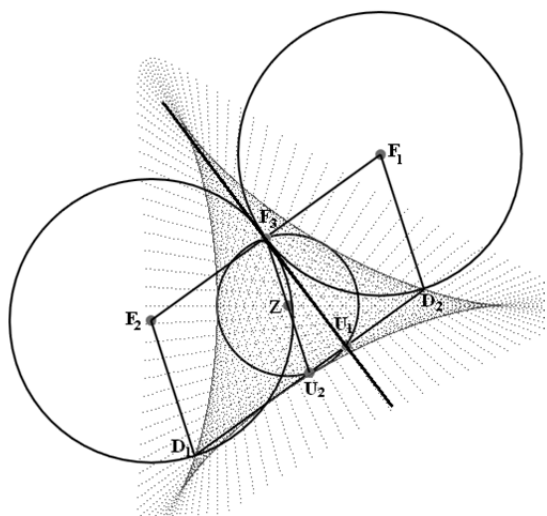


тельных, проходящих через концы диаметра, пробегает по всей окружности γ . Таким образом, через любую точку окружности γ проходят две взаимно перпендикулярных касательных к кривой Штейнера.

Итак, на прямой L лежат две важные точки будущего треугольника. Одна из них должна стать основанием его высоты, а вторая – будет лежать посередине между ортоцентром и вершиной, из которой опущена высота L . Именно эта (вторая) роль будет предоставлена середине диаметра D_1D_2 точке U_2 .

Теперь мы можем описать процедуру построения искомого треугольника ABC . Поскольку нам известны ортоцентр H и окружность Эйлера γ с центром Z , мы можем гомотетией относительно H с коэффициентом 2 получить окружность ξ , в которую будет вписан треугольник ABC .

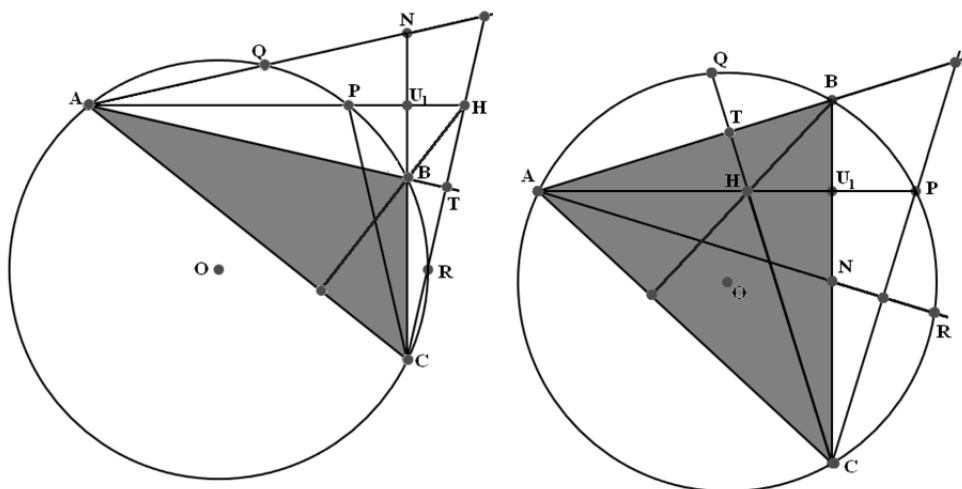
Вершины B и C мы получим как точки пересечения перпендикуляра к диаметру D_1D_2 в точке U_1 с окружностью ξ . Поясним, почему такое пересечение всегда имеет место. Край-



ними положениями ортоцентра H являются концы диаметра D_1 и D_2 . Гомотетические образы окружности Эйлера в свою очередь являются крайними положениями описанной окружности. Их центры F_1 и F_2 являются концами отрезка, параллельного диаметру D_1D_2 и имеющего такую же длину. По этой причине два крайних варианта описанных окружностей касаются и друг друга и перпендикуляра к диаметру, восстановленного из точки U_1 . Касание происходит в точке F_3 , диаметрально противоположной на окружности Эйлера середине диаметра точке U_2 . Все остальные описанные окружности, соответствующие промежуточным положениям ортоцентра H на диаметре заведомо пересекаются с перпендикуляром U_2U_3 .

Перейдём к построению третьей вершины треугольника. Вершина A является точкой пересечения прямой L с описанной окружностью. Однако, поскольку прямая и окружность пересекаются в двух точках, нужно разобраться, какую из них следует выбрать. Поскольку точка H лежит на диаметре кривой Штейнера, то при гомотетии точки U_1 и U_2 переходят в точки пересечения прямой L с описанной окружностью ξ . Точкой A назовём гомотетический образ точки U_2 , а гомотетический образ точки U_1 обозначим через P .

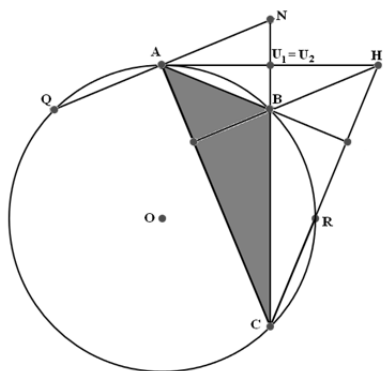
Итак, треугольник построен. Однако нам необходимо доказать, что точка H является его ортоцентром. Отметим то обстоятельство, что различные расположения точки H относительно отрезка U_1U_2 создают различные конфигурации для искомого треугольника ABC . Однако доказатель-



ство того, что H при данном способе построения является ортоцентром, не меняется. По этой причине мы приводим на чертеже две конфигурации (первая – H правее отрезка U_1U_2 ; вторая – H внутри отрезка U_1U_2), но доказательство проводим только для первого случая.

Поскольку точка U_1 при гомотетии с центром в H и коэффициентом 2 переходит в точку P , отрезки HU_1 и U_1P равны. На прямой BC выделим точку N , такую, чтобы отрезки BU_1 и U_1N были равны. Треугольники $АНВ$ и $СРН$ являются равнобедренными. Более того, половины их углов при вершине – углы $РАВ$ и $РСВ$, опираются на дугу $PВ$, а, значит, равны между собой. Таким образом, треугольники $АНВ$ и $СРН$ подобны.

Треугольник $АНТ$ по этой причине является прямоугольным. Действительно, $\angle ВСН + \angle АНТ = 90^\circ$ как острые углы треугольника $СU_1N$. Кроме того, $\angle НАВ = \angle ВСН$. Следовательно, прямая $АВ$ является высотой треугольника $АНС$. Но его высотой является и прямая $СВ$. Таким образом, точка $В$ является ортоцентром треугольника $АНС$. По этой причине третьей высотой этого треугольника является прямая $ВН$. То есть прямая $НВ$ перпендикулярна $АС$.



Но это означает, что в треугольнике $АВС$ две высоты $АР$ и $НВ$ пересекаются в точке H , и эта точка является ортоцентром треугольника $АВС$.

По поводу случая, когда диаметр касается окружности γ , и точки U_1 и U_2 сливаются, нет необходимости говорить много, поскольку доказательство существования треугольника полностью сохраняет свою силу. Ограничимся лишь тем, что приведём чертёж, соответствующий этому случаю. Отличие лишь в том, что угол $АСВ$ опирается на дугу $АВ$, а угол $ВАН$ является углом между касательной и хордой, а, значит, тоже равен половине той же дуги $АВ$.

Наконец, отметим, что в случаях, когда H находится на самой кривой Штейнера, треугольник $АВС$ вырождается в отрезок. Это обстоятельство вытекает из наших рассуждений, посвящённых доказательству пересечения перпендикуляра к диаметру D_1D_2 , восстановленному из точки U_1 , с окружностью ξ .

Кроме всего прочего понятно, что поскольку одна из высот и одна из сторон треугольника $АВС$ являются касательными к кривой Штейнера, то и все его стороны и высоты также являются касательными к ней. Это следует из того, что, кривая Штейнера, образованная прямыми Симсона треугольника $АВС$, должна совпадать с исходной кривой Штейнера.

Оформим доказанное нами свойство кривой Штейнера как теорему.

Теорема 31. Каждая точка, находящаяся внутри кривой Штейнера, является ортоцентром некоторого треугольника, высоты и стороны которого касаются данной кривой. Среди этих треугольников можно найти треугольник любой формы, то есть треугольник подобный любому произвольно выбранному треугольнику.

Опираясь на этот факт, можно построить группу преобразований, переводящую любой треугольник в любой другой.

Построение группы можно провести исходя из следующих соображений. С точки зрения топологии внутренние точки области, ограниченной кривой Штейнера, гомеоморфны внутренней части единичного круга, а для внутренности круга существует, тесно связанная с геометрией группа автоморфизмов.

Речь, естественно, идёт о группе дробно-линейных преобразований. Эта группа соответствует группе движений плоскости Лобачевского, реализованной в модели Пуанкаре. В первой части нашей статьи мы из других соображений отмечали возможную связь между геометрией треугольника и группой преобразований геометрии Лобачевского. Сейчас же мы со значительно большим основанием можем говорить о том, что группа дробно-линейных преобразований позволяет переводить любые треугольники евклидовой плоскости друг в друга.

Понятно, что мы рассматриваем единичный круг на комплексной плоскости. Выбранный нами гомеоморфизм сопоставляет каждому треугольнику комплексное число, по модулю меньшее единицы.

Действие группы дробно-линейных преобразований сохраняется при любом выборе этого гомеоморфизма между внутренними областями кривой Штейнера и единичного круга. Тем не менее, этот выбор влияет на восприятие множества евклидовых треугольников, поскольку при разных гомеоморфизмах множества треугольников различным образом группируются в совокупности, которые соответствуют таким фигурам геометрии Лобачевского, как прямые, окружности, орициклы и эквидистанты.

По-видимому, наиболее естественным гомеоморфизмом между внутренними точками кривой Штейнера и внутренностью круга в этом случае должно было бы стать конформное их отображение друг на друга. По теореме Римана такое отображение существует, но его построение является достаточно сложной задачей. По этой причине мы можем использовать рассмотренную нами выше неаналитическую функцию $w = 2\bar{z} + z^2$. Однако в любом случае при нашем подходе преобразование треугольников друг в друга производится группой дробно-линейных преобразований.

В целом данный вопрос выходит за рамки нашей статьи, и по этой причине мы пока откладываем его рассмотрение. В то же время нам необходимо сделать определённые выводы.

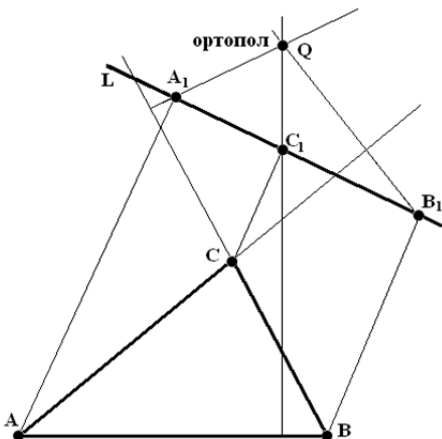
Прежде всего, отметим, что теорема Штейнера и связанные с ней дополнительные построения позволяют утверждать, что каждый треугольник порождает на плоскости сложную структуру, содержащую точки, прямые, кривые и новые треугольники. При этом эта структура в определённом смысле содержит любой из возможных треугольников, то есть каждый треугольник в известном смысле уже содержит в себе всю геометрию треугольника.

Кроме того, достаточно естественной группой преобразований, действующей на этой структуре, является группа движений геометрии Лобачевского. Конечно, ничего особенно удивительного в этом обстоятельстве нет, поскольку геометрии Лобачевского имеет модель в рамках планиметрии Евклида. Как известно, эта модель эквивалентна модели Пуанкаре, но построена в чисто геометрическом духе, как геометрия окружностей.

Тем не менее, тот факт, что геометрию треугольника можно связать с группой иной, хотя и тесно связанной с евклидовой геометрией, является весьма значимым. Далее мы коснёмся ещё ряда вопросов, связанных с теоремой Штейнера и покажем ещё ряд, порождаемых ею объектов.

13. ОРТОПОЛ И КРИВАЯ ШТЕЙНЕРА

Прямую связь с нашей тематикой имеет также и такое малоизвестное понятие как ортопол. Термин включает в себя части слов «ортогональность» и «полюс». Обоснованность такого названия можно усмотреть в определении ортопола.



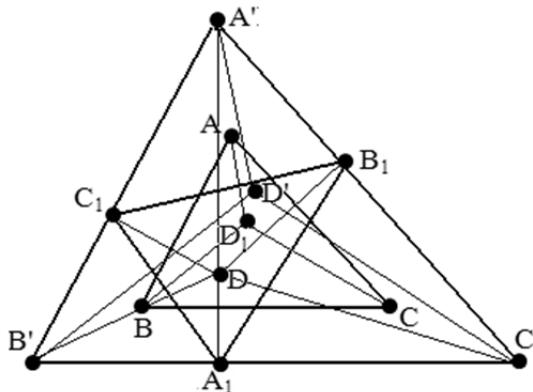
Пусть задан треугольник ABC и прямая L. Из вершин треугольника опустим на прямую L перпендикуляры и обозначим их основания через A_1 , B_1 и C_1 соответственно. Из точки A_1 восстановим перпендикуляр к стороне BC, из точки B_1 – перпендикуляр к стороне AC, и, наконец, из точки C_1 – перпендикуляр к стороне AB. Тогда эти три перпендикуляра пересекутся в одной точке, называемой ортополом прямой L относительно треугольника ABC.

Ортопол упоминается в статье [12]. В частности там указано, что существование ортопола следует из теоремы Штейнера об ортологических треугольниках. Эта теорема доказывается в книге [13]. В следующих двух абзацах

приведём её формулировку и доказательство, почти дословно взяв его из [13] и не делая своих пояснений. При этом значение термина «ортологичность» треугольников соответствует ситуации, описанной в теореме.

Теорема Штейнера об ортологичности. Если перпендикуляры из вершин треугольника $A_1B_1C_1$ на стороны треугольника ABC пересекаются в одной точке, то перпендикуляры из вершин треугольника ABC на стороны треугольника $A_1B_1C_1$ пересекаются также в одной точке.

Положим, что перпендикуляры из вершин треугольника $A_1B_1C_1$ на стороны треугольника ABC пересекаются в точке D . Проведем через A_1, B_1, C_1 прямые, параллельные сторонам треугольника ABC получим треугольник $A'B'C'$ – пусть D' есть, точка изогонально сопряженная с точкой D относительно этого треугольника. Так как треугольник $A_1B_1C_1$ есть подэрный треугольник точки D относительно $A'B'C'$, то прямые $A'D', B'D'$ и $C'D'$ перпендикулярны к сторонам его; но треугольники ABC и $A'B'C'$ гомотетичны; поэтому перпендикуляры из A, B и C на стороны треугольника $A_1B_1C_1$ как прямые соответственные с $A'D', B'D'$ и $C'D'$, пересекаются в одной точке D' .



К сожалению, мы не имеем возможности говорить о подэрных (в современной терминологии – педальных) треугольниках и изогональном сопряжении точек. Ограничимся тем, что процитируем рассуждение из [12] выводящее теорему об ортополе из теоремы Штейнера:

«В случае ортополя проекции вершин треугольника ABC на прямую L – точки A_1, B_1, C_1 – можно считать вершинами вырожденного треугольника, а параллельные перпендикуляры – пересекающимися в бесконечно удалённой точке».

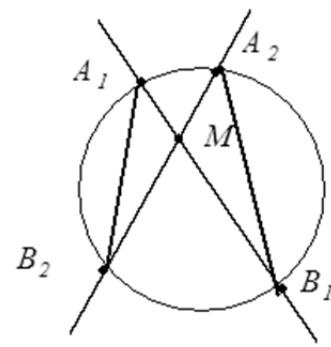
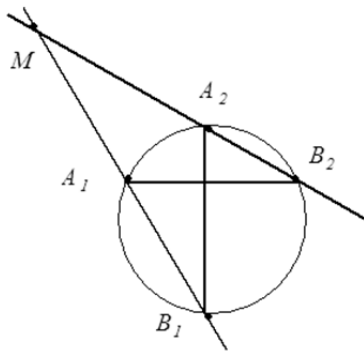
Теперь объясним, по какой причине мы начали разговор об ортополе. Прежде всего, отметим, что в определении ортополя и прямых Симсона есть нечто общее, но, так сказать, с точностью до наоборот. В одном случае проведение перпендикуляров к сторонам треугольника позволяет получить точку, в другом – прямую. Эта ассоциация, естественно, могла бы оказаться случайной, но между ортополем и прямыми Симсона существует вполне реальная связь.

Рассмотрим совокупность точек ортополя семейства параллельных прямых. Легко понять, что она образует прямую, перпендикулярную ко всем прямым семейства. И, оказывается, эта прямая является одной из прямых Симсона.

Поскольку мы решили обойтись без использования понятия об изогональном сопряжении точек, мы дадим другое доказательство теоремы об ортополе, дополненной последним утверждением предыдущего абзаца.

При этом мы всё же используем ещё одно понятие элементарной геометрии, речь идёт о радикальной оси двух окружностей [14].

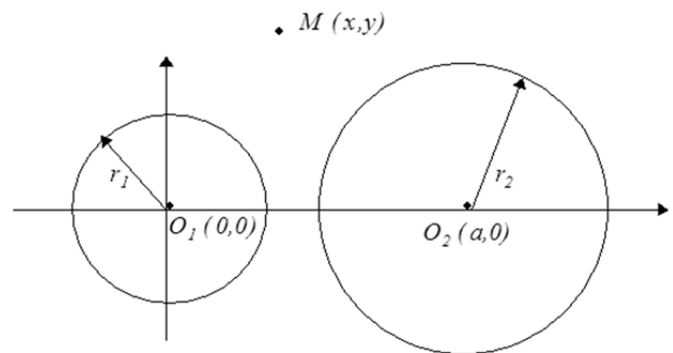
В школьном курсе геометрии доказывается следующая теорема: пусть две прямые l_1 и l_2 проходят через точку M и пересекают окружность s в точках A_1, B_1 и A_2, B_2 соответственно, тогда произведение длин отрезков $MA_1 \cdot MB_1$ равно произведению $MA_2 \cdot MB_2$. Тем самым, указанное произведение не зависит от выбора прямой, проходящей через точку M . Его называют степенью точки M относительно окружности s . Если считать отрезки MA и MB направленными, то степень точки приобретает знак. Для точек, лежащих внутри окружности, она будет отрицательной, а для точек вне окружности – положительной.



Теорема о радикальной оси. Пусть на плоскости заданы две неконцентрических окружности, тогда геометрическое место точек плоскости, имеющих равные степени относительно каждой из окружностей, является прямой линией, перпендикулярной линии центров данных окружностей. Эту прямую называют радикальной осью двух окружностей.

Доказательство. Выберем систему координат на плоскости так, чтобы ее начало совпадало с центром одной из окружностей, а ось абсцисс совпадала с линией центров.

Используя координаты точек, приведенные на чертеже, получаем, что $MO_1^2 = l_1^2 = x^2 + y^2$ и $MO_2^2 = l_2^2 = (x - a)^2 + y^2$. Легко понять, что степени точки M относительно этих окружностей соответственно равны $S_1 = l_1^2 - r_1^2 = x^2 + y^2 - r_1^2$ и $S_2 = l_2^2 - r_2^2 = (x - a)^2 + y^2 - r_2^2$. Приравни-



вая эти выражения, получаем алгебраическое уравнение $x^2 + y^2 - r_1^2 = (x - a)^2 + y^2 - r_2^2$. После раскрытия скобок, квадраты координат x и y сокращаются. Более того, координата y исчезает из уравнения совсем. Таким образом, x является постоянной величиной $x = \frac{a^2 + r_1^2 - r_2^2}{2 \cdot a}$. Пе-

ред нами ни что иное, как уравнение вертикальной прямой на координатной плоскости. Итак, радикальная ось является прямой, которая перпендикулярна оси x , то есть линии центров двух окружностей.

Из доказанной теоремы следует, что радикальная ось двух пересекающихся окружностей проходит через точки пересечения этих окружностей, поскольку они имеют нулевые степени.

Теорема об ортополе. Пусть на плоскости заданы треугольник ABC и прямая L . Из вершин треугольника опустим на прямую L перпендикуляры и обозначим их основания через R , Q и P соответственно. Из точки R восстановим перпендикуляр к стороне BC , из точки Q – перпендикуляр к стороне AC , и, наконец, из точки P – перпендикуляр к стороне AB . Тогда эти три перпендикуляра пересекутся в одной точке, называемой ортополем прямой L относительно треугольника ABC .

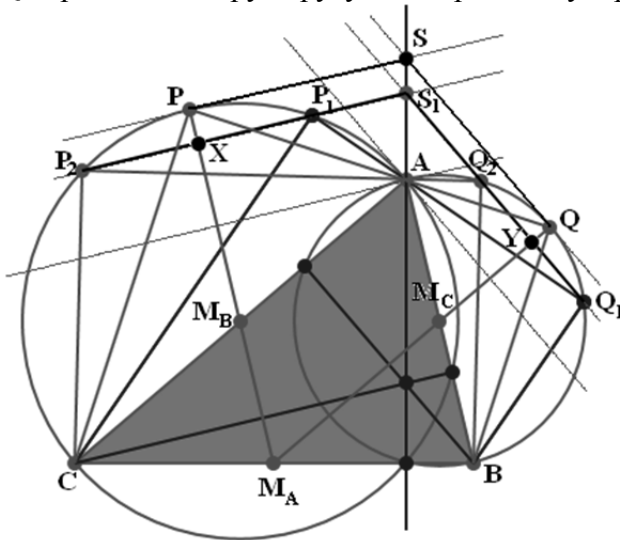
Доказательство (с использованием традиционных понятий евклидовой планиметрии). Мы уже говорили о том, что если существует точка ортопола некоторой прямой L на плоскости, то точки ортопола существуют и у всех параллельных L прямым. По этой причине теорему об ортополе достаточно доказать для всех прямых, проходящих через некоторую точку плоскости, например, через вершину A треугольника ABC . В этом случае точка R , упомянутая в формулировке теоремы, будет совпадать с точкой A для всех прямых пучка с центром в точке A .

Пусть точки M_A , M_B и M_C – середины сторон треугольника ABC . На сторонах AB и AC как на диаметрах построим окружности γ_B и γ_C . Затем проведём две средние линии треугольника ABC – $M_A M_B$ и $M_A M_C$. Они параллельны сторонам AB и AC соответственно. Пусть P и Q точки их пересечения с окружностями γ_C и γ_B , лежащие в одной полуплоскости с вершиной A относительно прямой BC .

Пусть стороны AB , BC и CA имеют длины c , a и b соответственно. Длина отрезка $M_A M_B$ равна $c/2$, $M_B P = b/2$, $M_A M_C = b/2$ и $M_C Q = c/2$. Таким образом, $M_A P = M_A Q$, то есть треугольник $M_A P Q$ является равнобедренным.

Углы $\angle P M_A Q$, $\angle P M_B A$ и $\angle A M_C Q$ равны между собой, как углы с соответственно параллельными сторонами. Следовательно, углы при основании равнобедренных треугольников $M_A P Q$, $M_B P A$ и $M_C A Q$ также равны. Из этого вытекает, что прямые PQ , PA и AQ совпадают между собой. Значит, отрезок PQ проходит через точку A .

Далее поскольку треугольники $C P A$ и $B Q A$ являются прямоугольными, прямые CP и BQ параллельны друг другу как перпендикуляры к прямой PQ .



Проведём через точку P касательную к окружности γ_C , а через точку Q касательную к окружности γ_B . Обозначим точку их пересечения через S . Прямоугольные треугольники $M_A P S$ и $M_A Q S$ имеют общую гипотенузу $M_A S$ и по равному катету $M_A P$ и $M_A Q$. Следовательно, они равны, как равны и их катеты PS и QS . Степень точки S относительно окружности γ_C равна PS^2 , а степень точки S относительно окружности γ_B равна QS^2 , то есть эти степени равны, и точка S лежит на радикальной оси окружностей γ_C и γ_B . Но очевидно, что эта ось совпадает с высотой треугольника ABC , опущенной из вершины A .

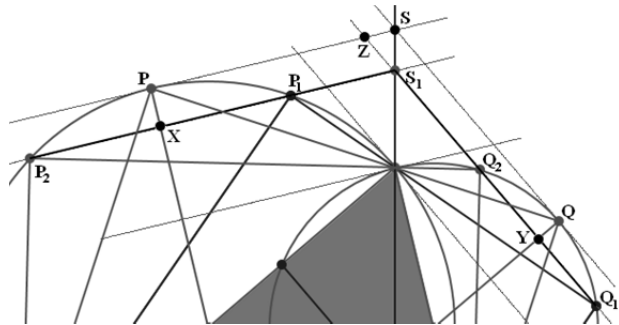
Теперь легко понять, что точка S является точкой ортопола прямой PQ относительно треугольника ABC . И для этой прямой доказано, что точка ортопола существует. Перейдём к доказательству существования ортопола для других прямых пучка с центром в точке A .

Проведём произвольную хорду $P_1 P_2$ окружности γ_C , перпендикулярную прямой $P M_A$, проходящей через центр γ_C . Очевидно, что дуги $P_1 P$ и $P_2 P$ равны. Проведём прямую $P_1 A$ до пересечения с окружностью γ_B в точке Q_1 и прямую $P_2 A$ до пересечения с окружностью γ_B в точке Q_2 . Поскольку равные вертикальные углы $\angle P A P_1$ и $\angle Q A Q_1$ опираются на дуги PP_1 и QQ_1 , то эти дуги имеют равные угловые меры, так же как и дуги PP_2 и QQ_2 . Значит, дуги QQ_1 и QQ_2 равны. По этой причине прямая $Q_1 Q_2$ перпендикулярна к прямой $M_A Q$.

Кроме того, прямые BP_1 и CQ_1 параллельны, так как образуют с параллельными прямыми BP и CQ равные углы. Одновременно прямые BP_1 и CQ_1 перпендикулярны к прямой $P_1 Q_1$. По той же причине прямые BP_2 и CQ_2 параллельны между собой и перпендикулярны к прямой $P_2 Q_2$.

Пусть точка S_1 является точкой пересечения прямых $P_1 Q_1$ и $P_2 Q_2$. Если она лежит на прямой AS – высоте треугольника ABC , то она представляет собой ортопол сразу двух прямых, $P_1 Q_1$ и $P_2 Q_2$.

Обозначим угол $\angle P M_B P_1$ через φ , а углы треугольника ABC через α , β и γ соответственно. Далее, пусть точки X и Y являются серединами хорд $P_1 P_2$ и $Q_1 Q_2$ соответственно. Тогда



Значит, $\angle PSM_A = \frac{\beta + \gamma}{2}$ и $SM_A = \frac{R \cdot (\sin \beta + \sin \gamma)}{\sin \frac{\beta + \gamma}{2}} = 2 \cdot R \cdot \cos \frac{\beta - \gamma}{2}$.

Рассматривая углы с попарно параллельными сторонами, получаем, что $\angle PM_AQ = \alpha$ и $\angle BM_AQ = \gamma$. Из этого вытекает, что $\angle M_ASH = \frac{\pi}{2} - (\gamma + \frac{\alpha}{2}) = \frac{\pi}{2} - \frac{\gamma}{2} - \frac{\alpha + \gamma}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{\gamma}{2} - \frac{\pi - \beta}{2} = \frac{\beta - \gamma}{2}$. Следовательно, $SH_A = SM_A \cdot \cos \frac{\beta - \gamma}{2} = 2 \cdot R \cdot \cos^2 \frac{\beta - \gamma}{2}$. Наконец, $SH = SH_A - HH_A = 2 \cdot R \cdot (\cos^2 \frac{\beta - \gamma}{2} - \cos \beta \cdot \cos \gamma)$. Итак, чтобы установить равенство отрезков MM_A и SH , необходимо доказать тригонометрическое тождество: $1 + \cos \alpha = 2 \cdot (\cos^2 \frac{\beta - \gamma}{2} - \cos \beta \cdot \cos \gamma)$, что не составляет особого труда.

Поскольку $\alpha = \pi - \beta - \gamma$, $\cos \alpha = -\cos(\beta + \gamma)$. Тождество приобретает вид $1 - \cos \beta \cos \gamma + \sin \beta \sin \gamma = 2 \cos^2 \frac{\beta - \gamma}{2} - 2 \cos \beta \cos \gamma$ и сводится к формуле $\cos(\beta - \gamma) = 2 \cos^2 \frac{\beta - \gamma}{2} - 1$, что соответствует выражению для косинуса двойного угла. Мы доказали, что $MM_A = SH$.

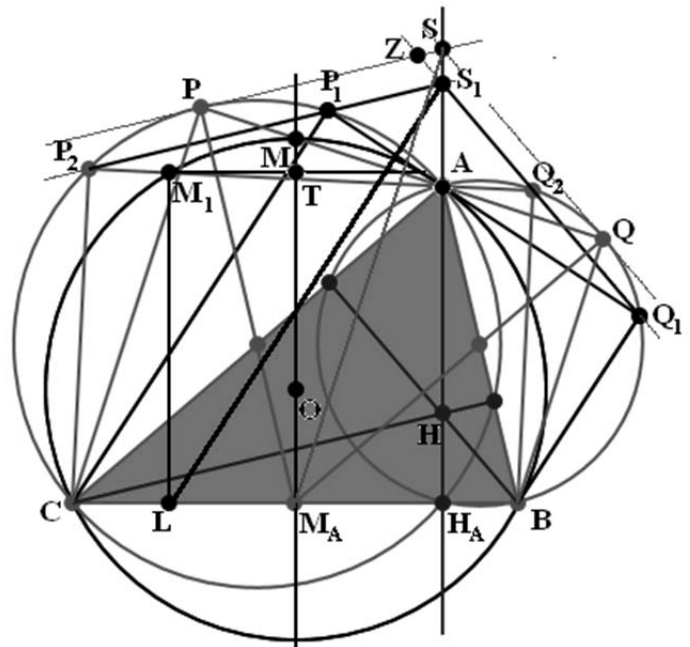
Из этого следует, что четырёхугольник $MSHM_A$ является параллелограммом. Его диагонали MH и SM_A в точке пересечения E делятся пополам. Из доказательства теоремы об огибающей прямых Симсона следует, что точка E лежит на окружности Эйлера.

Далее, дуга описанной окружности NB имеет угловую меру α , а дуга BA – угловую меру 2γ . Отсюда вытекает, что дуга AM имеет угловую меру $\pi - \alpha - 2\gamma = \beta - \gamma$.

Пусть точка M двигается по описанной окружности и служит для построения прямых Симсона. Когда она совпадает с вершиной A , прямой Симсона является высота SH треугольника ABC . После смещения точки M против часовой стрелки на угол $\beta - \gamma$ соответствующая ей прямая Симсона будет проходить через точку E и отклонится от высоты SH по часовой стрелке на угол $\frac{\beta - \gamma}{2}$. Но именно в таком положении и находится прямая SM_A . Значит, эта прямая является прямой Симсона треугольника ABC .

В общем случае мы будем рассуждать сходным образом, но отклонение прямых Симсона (S_1L) будем отсчитывать от прямой SM_A .

Вернёмся к нашему доказательству теоремы об ортополе. Если дуга PP_1 окружности γ_C имеет угловую меру φ , то прямая P_1S_1 отстоит от параллельной прямой PS на расстояние $\frac{b}{2}(1 - \cos \varphi)$. Треугольник ZSS_1 подобен треугольнику ABC с коэффициентом подобия k , который мы пока ещё не вычисляли. Точка S_1 является точкой ортопола прямой P_1Q_1 , проходящей через вершину A . Прямая S_1L , перпендикулярная P_1Q_1 является геометрическим местом точек ортопола, прямых параллельных прямой P_1Q_1 . Поскольку угол P_1AP опирается на



дугу PP_1 он равен $\frac{\varphi}{2}$, то есть прямые PQ и P_1Q_1 пересекаются под этим углом, как и перпендикулярные им прямые SM_A и S_1L . Отметим также, что угол LS_1H равен $\frac{\beta - \gamma}{2} + \frac{\varphi}{2}$.

Вычислим коэффициент подобия треугольников ABC и ZSS_1 ($k = AB : ZS$), а затем длину отрезка SS_1 . Высоте треугольника ZSS_1 , опущенной из вершины S_1 и имеющей длину $\frac{b}{2}(1 - \cos \varphi)$, соответствует высота треугольника ABC , опущенная из вершины C и имеющая длину $b \cdot \sin \alpha$. Таким образом, $k = \frac{2 \cdot \sin \alpha}{1 - \cos \varphi}$ и $SS_1 = \frac{a}{k} = \frac{a}{2 \cdot \sin \alpha} \cdot (1 - \cos \varphi) = R \cdot (1 - \cos \varphi)$.

Пусть M_1 – такая точка на описанной окружности, что M_1L является перпендикуляром к стороне BC . Если бы угловая мера дуги MM_1 равнялась φ , и отрезок M_1L равнялся бы отрезку S_1H , то работала бы логика, ранее применённая нами к прямой SM_A . А именно, четырёхугольник M_1LHS_1 является параллелограммом, точка пересечения его медиан лежит на окружности Эйлера и наклон прямой S_1L соответствует наклону прямой Симсона, связанной с точкой M_1 .

Итак, чтобы быть прямой Симсона, прямая S_1L должна удовлетворять четырём свойствам:

1. Угол LS_1H равен $\frac{\beta - \gamma}{2} + \frac{\varphi}{2}$.
2. Угловая мера дуги MM_1 равна φ .
3. Длина отрезка M_1L равна длине отрезка S_1H .
4. Длина отрезка SS_1 равна $R \cdot (1 - \cos \varphi)$.

Покажем, что прямую удовлетворяющую свойствам 2 – 4 можно легко построить, а затем покажем, что для неё выполняется и свойство 1. Приступим к построению. Положение точки S_1 уже определено (свойство 4). При этом отрезок S_1H короче отрезка SH на $R \cdot (1 - \cos \varphi)$.

Положение точки M_1 определяется свойством 2: угловая мера дуги MM_1 равна φ . Это значит, что угол MOM_1 равен φ , из чего следует, что длина отрезка MT равна $R \cdot (1 - \cos \varphi)$. Но это как раз и означает, что отрезок M_1L короче отрезка MM_A тоже на $R \cdot (1 - \cos \varphi)$. И поскольку $MM_A = SH$, то $M_1L = S_1H$. Свойство 3 таким образом выполняется.

Перейдём к проверке свойства 1. Сначала отметим, что $M_AL = R \cdot \sin \varphi$. Теперь мы можем указать длины катетов прямоугольного треугольника S_1H_AL .

Поскольку, $SH_A = 2 \cdot R \cdot \cos^2 \frac{\beta - \gamma}{2}$ и $H_AM_A = \frac{a}{2} - c \cdot \cos \beta$, имеем $S_1H_A = 2 \cdot R \cdot \cos^2 \frac{\beta - \gamma}{2} - R \cdot (1 - \cos \varphi)$ и $LH_A = \frac{a}{2} - c \cdot \cos \beta + R \cdot \sin \varphi$. Теперь мы можем показать, что тангенс угла LS_1H равен $tg(\frac{\beta - \gamma}{2} + \frac{\varphi}{2})$, а значит, и угол LS_1H равен $\frac{\beta - \gamma}{2} + \frac{\varphi}{2}$. Для этого проведём ряд преобразований.

$$LH_A = \frac{a}{2} - c \cdot \cos \beta + R \cdot \sin \varphi = R \cdot \sin \alpha - 2 \cdot R \cdot \sin \gamma \cdot \cos \beta + R \cdot \sin \varphi.$$

Далее при преобразованиях опустим множитель R , поскольку он всё равно сократится при вычислении тангенса.

Прилежащий катет (S_1H_A):

$$2 \cdot \cos^2 \frac{\beta - \gamma}{2} - (1 - \cos \varphi) = (2 \cdot \cos^2 \frac{\beta - \gamma}{2} - 1) + \cos \varphi = \cos(\beta - \gamma) + \cos \varphi =$$

$$2 \cdot \cos\left(\frac{\beta - \gamma}{2} + \frac{\varphi}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\beta - \gamma}{2} - \frac{\varphi}{2}\right)$$

Противолежащий катет (LH_A):

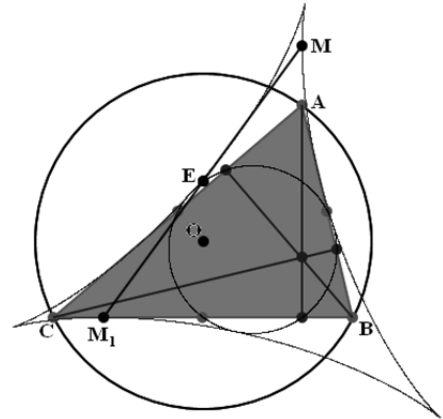
$$\sin \alpha - 2 \cdot \sin \gamma \cdot \cos \beta + \sin \varphi = \sin(\beta + \gamma) - 2 \cdot \sin \gamma \cdot \cos \beta + \sin \varphi = \sin(\beta - \gamma) + \sin \varphi =$$

$$2 \cdot \sin\left(\frac{\beta - \gamma}{2} + \frac{\varphi}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\beta - \gamma}{2} - \frac{\varphi}{2}\right)$$

Окончательно имеем $\operatorname{tg}(\angle LS_1H) = \frac{LH_A}{S_1H_A} = \operatorname{tg}\left(\frac{\beta - \gamma}{2} + \frac{\varphi}{2}\right)$. Теорема доказана.

Теорема 33. Пусть вокруг треугольника описана окружность. Множество точек ортополов касательных к ней относительно этого треугольника образуют кривую Штейнера.

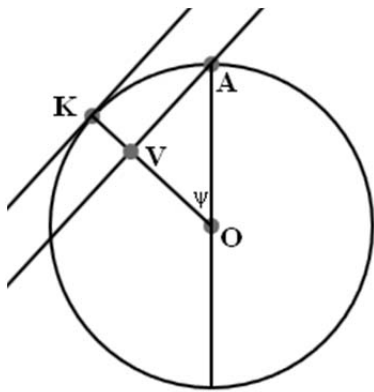
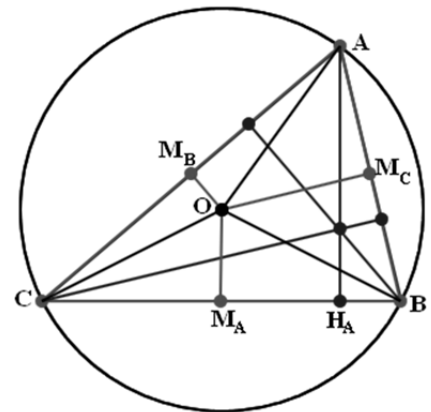
Доказательство. Мы доказали, что каждая из прямых Симсона образована точками ортопола семейства параллельных прямых. По этой причине, диаметры MM_1 кривой Штейнера, связанной с треугольником ABC лежат на таких прямых. И именно концы этих диаметров вычерчивают эту кривую. Точка E , лежащая на окружности Эйлера и являющаяся серединой диаметра, одновременно является серединой отрезка LS_1 (в обозначениях, принятых в предыдущем доказательстве). Чтобы доказать нашу теорему достаточно показать, что точка M является ортополом прямой, касающейся описанной окружности и параллельной прямой P_1Q_1 .



Нами доказано, что длина отрезка ES_1 равна половине отрезка LS_1 , то есть по результатам предыдущего доказательства $\frac{1}{4} \sqrt{LH_A^2 + S_1H_A^2} = R \cdot \cos\left(\frac{\beta - \gamma}{2} - \frac{\varphi}{2}\right)$. Кроме того, мы знаем,

что этот отрезок образует с высотой, опущенной из вершины A угол, равный $\frac{\beta - \gamma}{2} + \frac{\varphi}{2}$.

Определим угол между этим отрезком и радиусом описанной окружности OA . Как известно, угол $\angle M_B O A$ равен β . Значит $\angle M_B A O = \frac{\pi}{2} - \beta$. Далее, $\angle C A H_A = \frac{\pi}{2} - \gamma$. В итоге получаем, что угол $\angle O A H_A$ равен $\angle C A H_A - \angle M_B A O = \frac{\pi}{2} - \gamma - (\frac{\pi}{2} - \beta) = \beta - \gamma$. Итак, прямая ES_1 составляет с высотой AH_A угол $\frac{\beta - \gamma}{2} + \frac{\varphi}{2}$, а прямая OA – угол $\beta - \gamma$. Следовательно, угол между этими прямыми равен разности этих углов, то есть $\frac{\beta - \gamma}{2} - \frac{\varphi}{2}$.



равен разности этих углов, то есть $\frac{\beta - \gamma}{2} - \frac{\varphi}{2}$.

Теперь рассмотрим окружность радиуса R с центром O . Пусть на ней задана точка A . Зададим на той же окружности ещё одну точку K и предположим, что $\angle KOA = \psi$. Проведём через точку K касательную к нашей окружности, а через точку

А параллельную к этой касательной прямую AV. Тогда Расстояние между касательной и параллельной ей прямой из пучка с центром в точке А равно $R \cdot (1 - \cos \psi)$.

Вернёмся к треугольнику ABC. Если прямую P₁Q₁ заменить на параллельную ей касательную к описанной окружности, то касательная, а с ней и её точка ортопола, как мы только что видели, отодвинется на расстояние $R \cdot (1 - \cos(\frac{\beta - \gamma}{2} - \frac{\varphi}{2}))$ и займёт положение М на прямой ES₁. Таким образом, длина отрезка EM станет равной $R \cdot \cos(\frac{\beta - \gamma}{2} - \frac{\varphi}{2}) + R \cdot (1 - \cos(\frac{\beta - \gamma}{2} - \frac{\varphi}{2})) = R$. Значит, точка М является концом диаметра. Теорема доказана.

Из этой теоремы вытекает следующий факт. Если мы берём любую окружность, концентрическую к описанной, то все ортополы всех её касательных сдвинуты относительно ортополов касательных к описанной окружности на постоянную длину. Из-за этого они делят диаметры кривой Штейнера в постоянном отношении, а, значит, вычерчивают гипотрохоиду, связанную с кривой Штейнера.

В результате можно построить отображение плоскости на себя (не взаимно однозначное) следующим образом. Каждая точка плоскости лежит на единственной окружности, входящей в семейство концентрических окружностей с центром О. Кроме того, каждая прямая на плоскости касается единственной окружности, принадлежащей семейству концентрических окружностей с центром О (её радиус равен расстоянию от точки О до этой прямой). Таким образом, каждой точке на плоскости может быть поставлена единственная прямая, касающаяся в этой точке одной из концентрических окружностей.

Наше отображение, порожаемое треугольником ABC, будет переводить произвольную точку Т плоскости (кроме точки О, в которой отображение не определено) в ортопол прямой, проходящей через точку Т перпендикулярно прямой ОТ, относительно треугольника ABC. При этом каждая из концентрических окружностей будет переходить в гипотрохоиду. В результате мы можем рассматривать треугольник ABC как некую динамическую структуру, порождающую достаточно сложное преобразование плоскости. Естественно, что существуют и отображения порожаемые треугольником по иным принципам, например, изогональные и изотомические отображения [15]. Мы же хотим раз показать, что треугольник порождает структуры имеющие дифференциально-геометрический характер.

Продемонстрируем действие нашего отображения с помощью программы.

```
'Точки ортопола концентрических окружностей
pi = Math.Pi
GraphicsWindow.Height=700
GraphicsWindow.Width=700
x0 = 350
y0 = 350
r0 = 120
ua = pi*.3
ub = -pi*.15
uc = pi - ub
GraphicsWindow.DrawEllipse(x0-r0,y0-r0,2*r0,2*r0)
' Вершины треугольника
xa = x0 + r0* Math.Cos(ua)
ya = y0 - r0* Math.Sin(ua)
xb = x0 + r0* Math.Cos(ub)
yb = y0 - r0* Math.Sin(ub)
xc = x0 + r0* Math.Cos(uc)
yc = y0 - r0* Math.Sin(uc)
GraphicsWindow.BrushColor="black"
GraphicsWindow.DrawEllipse(x0-r0,y0-r0,2*r0,2*r0)
GraphicsWindow.FillEllipse(x0-5,y0-5,10,10)
pero[0]=2
```

```
For u = 0 to 2*pi step pi/1000
x1 = x0 + r* Math.Cos(u)
y1 = y0 - r* Math.Sin(u)
p1 = Math.Sin(u)
q1 = Math.Cos(u)
Ortopol()
GraphicsWindow.FillEllipse(xortopol-
pero[n],yortopol-pero[n],2*pero[n],2*pero[n])
EndFor
EndFor
GraphicsWindow.PenColor="blue"
GraphicsWindow.PenWidth=4
GraphicsWindow.DrawTriangle(xa,ya,xb,yb,xc,yc)
```

'Подпрограммы

```
Sub Perespr
'Вход - параметры двух прямых (точка и направляющий вектор)
a1 = q1
b1 = -p1
c1 = y1*p1 - q1*x1
```

```

pero[1]=1
pero[2]=1
pero[3]=2
pero[4]=1
pero[5]=1
pero[6]=1
p = xc - xb
q = yc - yb
s = Math.SquareRoot(p*p+q*q)
pa = q/s
qa = -p/s
p = xa - xc
q = ya - yc
s = Math.SquareRoot(p*p+q*q)
pb = q/s
qb = -p/s
p = xb - xa
q = yb - ya
s = Math.SquareRoot(p*p+q*q)
pc = q/s
qc = -p/s
For n = 0 to 6
  r = n*40

```

Sub Ortopol

'Вход – параметры прямой

```

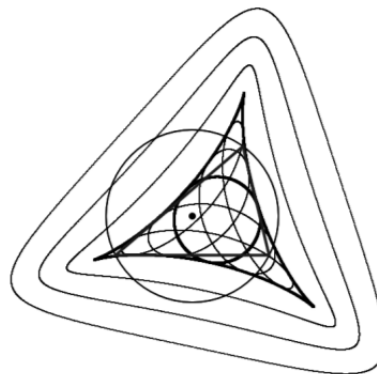
x1 = x1
y1 = y1
p1 = p1
q1 = q1
x2 = xb
y2 = yb
p2 = -q1
q2 = p1
Perespr()
xprb = xper
yprb = yper
x2 = xc
y2 = yc

```

```

a2 = q2
b2 = -p2
c2 = y2*p2 - q2*x2
d1 = b1*c2 - c1*b2
d2 = -c2*a1+a2*c1
d3 = a1*b2 - a2*b1
'Выход - точка пересечения
xper = d1/d3
yper = d2/d3
EndSub

```



'Продолжение Sub Ortopol

```

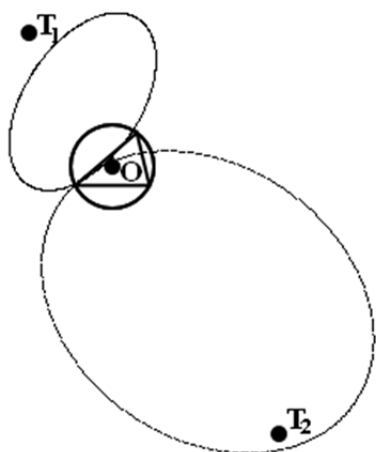
Perespr()
xprc = xper
yprc = yper
x1 = xprb
y1 = yprb
p1 = pb
q1 = qb
x2 = xprc
y2 = yprc
p2 = pc
q2 = qc
Perespr()
xortopol = xper
yortopol = yper
EndSub

```

Сделаем ещё ряд замечаний по поводу ортопола и его связи с прямыми Симсона. Прежде всего, ортопол является понятием, которое как бы делает треугольник источником своеобразного силового поля, которое «дотягивается» до любой прямой и порождает соответствующую этой прямой точку. Именно по этой причине и появляется возможность построить наше отображение.

Далее, теорема Штейнера о прямых Симсона, уже сама по себе позволяет построить гипотрохониды, связанные с кривой Штейнера. Однако использование ортопола придаёт гипотрохонидам более весомую связь с треугольником. Каждая из них становится образом некоторой окружности, связанной с треугольником. При этом каждая точка гипотрохониды является точкой ортопола, то есть связана с треугольником напрямую.

Наше отображение не определено в точке O по следующей причине. Нельзя выделить одну прямую из пучка прямых с центром в точке O . Из-за этого точку O приходится рассматривать как окружность нулевого радиуса, с которой соприкасаются все прямые упомянутого пучка. Поскольку, как легко понять, соответствующая точка ортопола совпадает с серединой диаметра кривой Штейнера, то окружность нулевого радиуса отображается (в том числе и нашей программой) в окружность Эйлера.

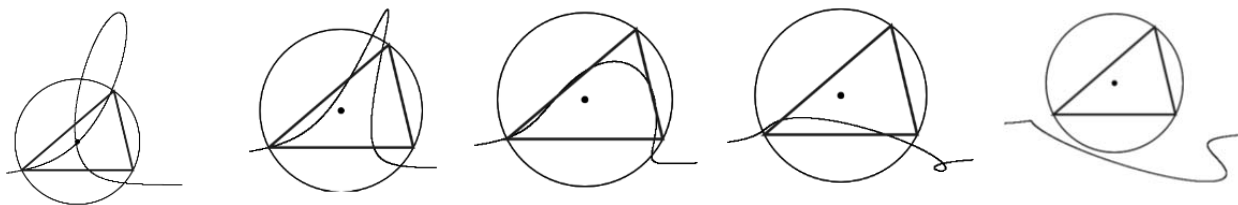


Естественно, что таким же образом, то есть как окружность нулевого радиуса, можно рассматривать и любую точку на плоскости. Таким образом, после выбора треугольника каждой точке T на плоскости ставится в соответствие кривая, образованная точками ортопола пучка прямых с центром T . На рисунке изображены две таких кривых для двух точек плоскости.

Отметим, что при произвольном выборе двух точек плоскости соответствующие им кривые обязательно пересекаются в точке ортопола соединяющих их прямой.

Наконец, наше отображение следующим образом позволяет преобразовывать одну гладкую кривую в другую. Пусть точка T лежит на исходной кривой. Проводим в этой точке касательную и строим её орторол S .

Тогда множество точек S образует некоторую кривую, которая является образом исходной кривой. Интересно, что любая прямая линия при подобной процедуре преобразуется в точку. На рисунках показаны образы сдвигаемых по вертикали парабол, оси симметрии которых проходят через центр описанной окружности.

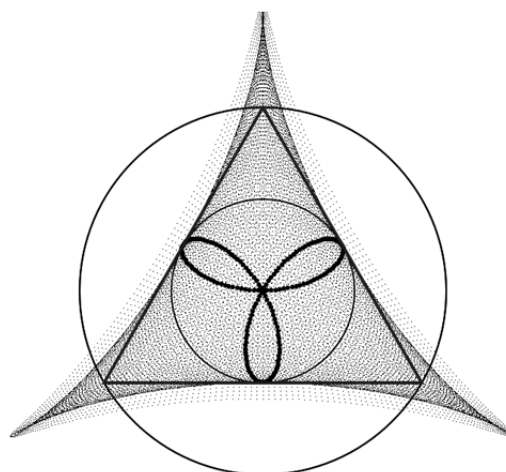


Построенные нами кривые являются порождением парабол, которые не связаны с треугольником. Естественно полагать, что больший интерес представляет преобразование кривых, связанных с треугольником, например, эллипса Штейнера. Отметим, что имеются в наличии и парабола, непосредственно связанные с треугольником. Например, такая парабола возникнет, если вершину A рассматривать в качестве фокуса, а сторону BC в качестве директрисы.

Ясно также, что характер нашего отображения несколько меняется в зависимости от формы треугольника. Например, если треугольник правильный, достигается большая симметрия между кривыми, расположенными в различных частях плоскости.

Преобразование кривых с помощью ортопола можно применить, в том числе, и к самой кривой Штейнера. Результат преобразования для случая правильного треугольника показан на чертеже.

Мы уже не имеем возможности обсуждать вопросы, связанные с ортополом и основанным на нём отображением плоскости. В том числе даже и вопросы, возникающие при взгляде на приведённые нами чертежи, например, являются ли образы точек на основе пучков с центрами в этих точках эллипсами. Или



на вопрос о том, всегда ли образ кривой Штейнера при нашем отображении является её подерой.

Вопросы, связанные с понятием ортопола, мы рассмотрели чтобы лишний раз показать, насколько широкой является проблематика, связанная с геометрией треугольника. Рассмотрение не прояснённых нами моментов предоставляем читателю.

14. НЕКОТОРЫЕ ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

Данная статья из-за её значительного объёма требует завершения, однако, остаётся целый ряд вопросов, которые связаны с изложенным выше подходом к геометрии треугольника. Прежде всего, возникает вопрос о связи данного подхода с общим состоянием современной геометрии треугольника. Как мы говорили, геометрия треугольника является теорией, обладающей огромным количеством результатов. Однако эти результаты пока не складываются в единую картину. Предлагаемая нами точка зрения, возможно, является одним из вариантов нащупывания общего подхода к геометрии треугольника, насколько такой подход возможен. В любом случае поиск в этом направлении необходим.

Чтобы оценить сложность задачи достаточно ознакомиться, например, с работами [15-20], причём этот список всего на всего может послужить исходным пунктом изучения геометрии треугольника. В нашей же статье остались незатронутыми даже такие исходные объекты геометрии треугольника, как вписанные (и невписанные) окружности. Одним из вариантов введения их в схему нашего подхода является использование частного случая поризмы Понселе, описанного в [21].

Далее мы остановимся на некоторых достаточно частных вопросах, связанных с изложенным выше материалом. В частности, упомянем один известный, но, скорее всего, малоизвестный факт, связывающий геометрию треугольника с кардиоидой. Пусть треугольник, вписанный в окружность вращается внутри этой окружности, и с помощью неподвижной точки M на этой окружности строятся прямые Симсона для каждого положения вращающегося треугольника. Тогда огибающая этих прямых Симсона, каждая из них привязана к своему треугольнику, представляет собой кардиоиду. Предоставляем доказательство этого факта читателю, а сами ограничиваемся программой, демонстрирующей его.

```

pi = Math.Pi
GraphicsWindow.Height=700
GraphicsWindow.Width=700
x0 = 350
y0 = 350
r0 = 150
GraphicsWindow.DrawEllipse(x0-r0,y0-r0,2*r0,2*r0)
x1 = x0 + r0
y1 = y0
For ua = 0 To 2*pi step pi/50
ub = ua - pi/3
uc = ua + pi/3
xa = x0 + r0* Math.Cos(ua)
ya = y0 - r0* Math.Sin(ua)
xb = x0 + r0* Math.Cos(ub)
yb = y0 - r0* Math.Sin(ub)
xc = x0 + r0* Math.Cos(uc)
yc = y0 - r0* Math.Sin(uc)
p = xc - xb
q = yc - yb
s = Math.SquareRoot(p*p+q*q)

```

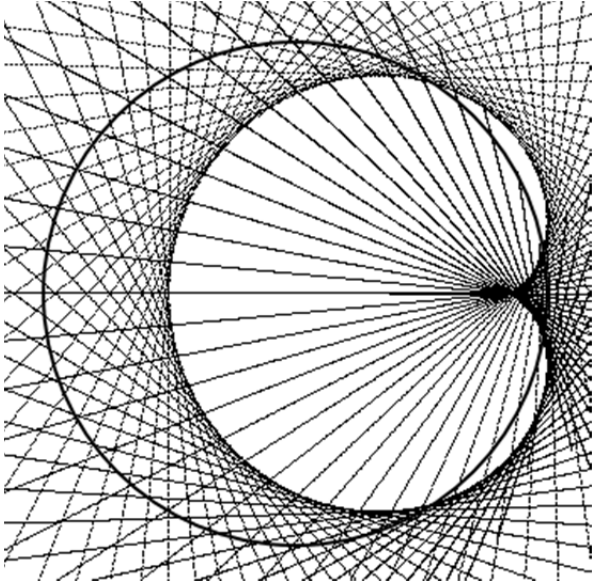
```

p = xa - xc
q = ya - yc
s = Math.SquareRoot(p*p+q*q)
pb = q/s
qb = -p/s
p1 = pa
q1 = qa
x2 = xb
y2 = yb
p2 = -qa
q2 = pa
Perespr()
xxa = xper
yya = yper
p1 = pb
q1 = qb
x2 = xc
y2 = yc
p2 = -qb
q2 = pb
Perespr()
xxb = xper

```

$$pa = q/s$$

$$qa = -p/s$$



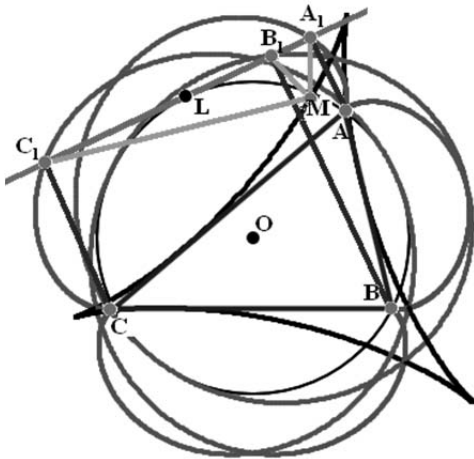
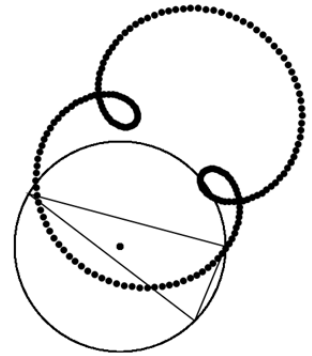
```

yyb = yper
For t = -8 To 9 Step .01
  x = xxa + t*(xxb - xxa)
  y = yya + t*(yyb - yya)
  GraphicsWindow.SetPixel(x,y,"")
EndFor
EndFor
Sub Perespr
  a1 = q1
  b1 = -p1
  c1 = y1*p1 - q1*x1
  a2 = q2
  b2 = -p2
  c2 = y2*p2 - q2*x2
  d1 = b1*c2 - c1*b2
  d2 = -c2*a1 + a2*c1
  d3 = a1*b2 - a2*b1
  xper = d1/d3
  yper = d2/d3
EndSub

```

В том же направлении поиска циклоидальных кривых, связанных с треугольниками, направляет мысли геометра и следующий чертёж, на котором показано геометрическое место точек ортопола неподвижной прямой относительно треугольников, вращающихся внутри описанной окружности.

Ещё одно появление сразу трёх кардиоид связано с теоремой 33: которая утверждает, что множество точек ортополов касательных к описанной окружности относительно вписанного треугольника образует кривую Штейнера. Действительно, проекция A_1 вершины A на касательную к описанной окружности при вращении касательной



описывает подеру окружности. Эта подера является кардиоидой (см. теорему 11). То же самое можно сказать и вершинах B и C . Таким образом, три проекции A_1 , B_1 и C_1 движутся по трём кардиоидам, а три прямых A_1M , B_1M и C_1M , параллельных высотам треугольника ABC , пересекаются в одной точке M , вычерчивающей кривую Штейнера.

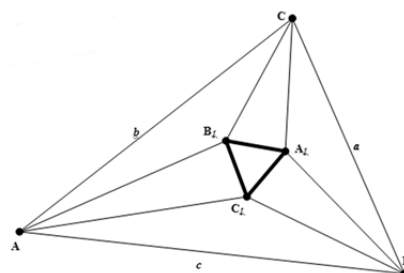
Отметим ещё одно обстоятельство. При доказательстве теоремы 31 можно было заметить, что произвольно выбранный ортоцентр треугольника H симметричен центру описанной окружности O будущего треугольника относительно центра окружности Эйлера. Если на роль ортоцентра взять точку O , то точка H станет центром описанной окружности уже другого треугольника. Поскольку кривая Штейнера не обладает центральной симметрией, этот треугольник должен обладать другой формой. В результате на множестве треугольников возникает некое соответствие, разбивающее треугольники на пары. Желательно это соответствие описать.

В доказательстве теоремы 32 фактически выясняется, как кривая Штейнера расположена относительно треугольника. Точка S является одной из точек возврата дельтоиды. Это обстоятельство может быть полезно при выяснении некоторых вопросов, например, таких как выяснение взаимного положения кривой Штейнера и различных правильных треугольников, связанных с исходным треугольником. Речь в частности идёт о треугольниках Наполеона и Морлея.



Треугольник Наполеона

Везде, где речь идёт о кривой Штейнера, возникает вопрос: один (одна) или три? Речь, например, может идти о числе касательных или нормалей к этой кривой, проходящих через определённую точку на плоскости.



Треугольник Морлея

Для построения в теореме 31 треугольника по точке H (ортоцентру), лежащей внутри дельтоиды, важно именно наличие трёх высот. Значит, построить треугольник по точке, лежащей вне дельтоиды невозможно, поскольку через неё проходит только одна прямая Симсона.

При выходе точки H непосредственно на кривую Штейнера треугольник вырождается, точнее одна из его сторон вырождается в точку. Однако сопоставление треугольников с комплексными числами наводит на мысль, что точки вне кривой Штейнера можно сопоставить с «невозможными» треугольниками, имеющими произвольную длину сторон, в том числе такую, при которой неравенство треугольника не соблюдается.

К этому же кругу вопросов относится и восстановление прямой по её точке ортопола. Поскольку через точку H внутри кривой Штейнера проходит три прямых Симсона, то можно найти три перпендикулярных им прямых, ортополами которых и является данная точка. Для точки вне кривой такая прямая одна. На границе (в обозначениях теоремы 31) происходит слияние прямых P_1Q_1 и P_2Q_2 и превращение в одну прямую PQ . Таким образом, граница, то есть сама кривая Штейнера связана с числом 2.

Наконец, скажем немного о связи геометрии треугольника с вопросами анализа. Поскольку треугольник порождает семейства гладких гипотрохонд, возможность написания дифференциальных уравнений является очевидной.

Кроме того, достаточно ясно, что геометрия треугольника связана с теорией особенностей дифференцируемых отображений или, используя более популярное название этой теории, с теорией катастроф.

Компьютерное построение некоторых чертежей, связанных с геометрией треугольника, навеивает ассоциации с трёхмерными изображениями. Приведём пример. Наша программа будет всего на всего строить прямые Симсона некоторого треугольника. Для этого из точки M , движущейся по описанной окружности, мы будем опускать перпендикуляры на две стороны треугольника, получая две точки P и T . При этом мы будем проводить не отрезок PT , а отрезок P_1T_1 в три раза длинней ($P_1P = PT = TT_1$).

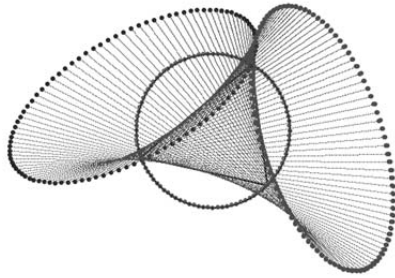
```
pi = Math.Pi
x0 = 320
y0 = 220
r0 = 100
u1 = pi / 3
u2 = 10 * pi / 9
u3 = -pi / 4
x1 = x0 + r0 * Math.Cos(u1)
y1 = y0 - r0 * Math.SIN(u1)
x2 = x0 + r0 * Math.COS(u2)
y2 = y0 - r0 * Math.SIN(u2)
```

```
q1 = y3
p2 = xt
q2 = yt
Ort()
xb = p
yb = q
FOR t = -1 TO 2 STEP .01
x = xa + t * (xb - xa)
y = ya + t * (yb - ya)
IF t = -1 THEN
GraphicsWindow.BrushColor="blue"
```

```

x3 = x0 + r0 * Math.COS(u3)
y3 = y0 - r0 * Math.SIN(u3)
GraphicsWindow.DrawTriangle(x1,y1,x2,y2,x3,y3)
GraphicsWindow.DrawEllipse(x0-r0,y0-r0,2*r0,2*r0)
FOR u = 0 TO 2 * pi STEP pi / 50
xt = x0 + r0 * Math.COS(u)
yt = y0 - r0 * Math.SIN(u)
GraphicsWindow.PenColor="brown"
GraphicsWindow.DrawEllipse(xt-2,yt-2,4,4)
p0 = x1
q0 = y1
p1 = x2
q1 = y2
p2 = xt
q2 = yt
Ort()
xa = p
ya = q
p0 = x1
q0 = y1
p1 = x3

```



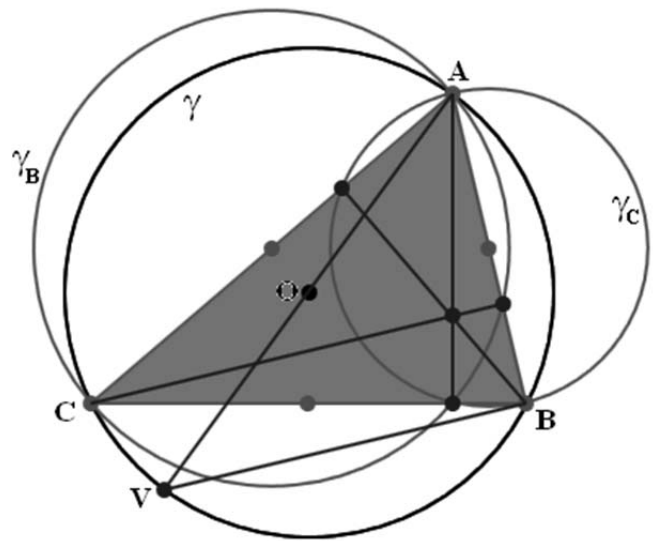
```

GraphicsWindow.FillEllipse(x-3, y-3, 6,6)
EndIf
IF t >= 1.99 THEN
GraphicsWindow.BrushColor="green"
GraphicsWindow.FillEllipse(x-3, y-3, 6,6)
EndIf
GraphicsWindow.SetPixel(x, y,"red")
EndFor
EndFor
Sub Ort
b = (q1 - q0)*(q1 - q0) + (p1 - p0)*(p1 - p0)
a = (q1-q0)*(q2-q0)*(p1-p0)+
p0*(q1-q0)*(q1-q0)+p2*(p1-p0)*(p1-p0)
p = a / b
IF Math.Abs(p1 - p0) > Math.Abs(q1 - q0) THEN
q = q0 + (p - p0) * (q1 - q0) / (p1 - p0)
ELSE
q = q2 - (p - p2) * (p1 - p0) / (q1 - q0)
EndIf
EndSub

```

Получить из прямых Симсона реальную поверхность тоже достаточно просто. Рассмотрим горизонтальную плоскость и треугольник ABC на ней. Пусть по описанной окружности движется точка M, порождающая прямые Симсона. Создадим два вертикальных дубликата описанной окружности, повернув её относительно хорд AB и BC в вертикальное положение. Пусть по ним синхронно с точкой M движутся точки M₁ и M₂. Тогда движущаяся пространственная прямая M₁M₂ проектируется на прямые Симсона и одновременно замечает некоторую поверхность, называемую торсовой с двумя плоскими направляющими (обе являются окружностями) [22].

Наконец, интерес представляет и вопрос о взаимном расположении прямых Симсона различных треугольников. При этом основания перпендикуляров при построении прямых Симсона могут оказаться точками ортопола относительно других треугольников. Рекомендуем рассмотреть с этой точки зрения треугольник AVB, который находится с окружностями γ и γ_C в таком же положении, как треугольник ABC с окружностями γ и γ_B .



15. ВЫВОДЫ

В статье отмечена неправильная трактовка планиметрии евклидовой плоскости, которая согласно Эрлангенской программе Клейна определяется группой движений, то есть группой преобразований, оставляющих евклидовы расстояния неизменными. В принципе это ошибочное мнение затрагивает вопрос, находящейся на периферии интересов современных математиков, и ни в коей мере не затрагивает значимость идей, высказанных Феликсом Клейном. Тем не менее, ошибка должна быть устранена. Рассмотрение данного вопроса потребовало:

- изложения довольно большого числа хорошо известных фактов, относящихся к различным разделам геометрии;
- построения группы переводящей любой треугольник в любой другой;

- и привело к постановке ряда вопросов, которые не могут быть разрешены и подробно изложены в данной статье.

Итак, в статье приводятся:

1. Теория циклоидальных кривых без использования сколько-нибудь сложных методов дифференциальной геометрии. Их заменили соображения кинематического характера.
2. Некоторые факты геометрии треугольника, необходимые для построения соответствующей группы преобразований, в том числе и важнейшая для всего изложения теорема Штейнера о прямых Симсона.

В статье показано, что:

1. Каждой внутренней точке области, ограниченной кривой Штейнера соответствует некоторый треугольник.
2. Среди этих треугольников можно найти треугольники любой формы.
3. Тем самым, группа преобразований внутренней области, ограниченной кривой Штейнера, является и группой преобразований, действующей на множестве треугольников. Эта группа в отличие от группы движений и групп аффинных и проективных преобразований не является группой точечных преобразований.
4. На роль данной группы после установления гомеоморфизма между внутренней областью, ограниченной кривой Штейнера, и единичным кругом на комплексной плоскости может быть взята группа дробно-линейных преобразований.
5. Доказаны теоремы о связи ортопола с прямыми Симсона. В частности доказано, что точки ортопола касательных к описанной окружности образуют кривую Штейнера.
6. На основе понятия ортопола построено отображение плоскости, порождаемое фиксированным на ней треугольником.
7. Отмечена связь геометрии треугольника с теорией особенностей дифференцируемых отображений.

Перечислим ряд вопросов, которые требуют дополнительного рассмотрения.

1. Вопрос о выборе наиболее удачного гомеоморфизма между внутренней областью, ограниченной кривой Штейнера, и единичным кругом на комплексной плоскости, который естественным образом связал бы совокупности треугольников с такими объектами геометрии Лобачевского как прямые, окружности, орициклы и эквидистанты. В частности интересно было бы рассмотреть преобразы диаметров кривой Штейнера.
2. Факт разбиения всего множества треугольников на совокупности, соответствующие либо объектам геометрии Лобачевского, либо объектам, порождаемым геометрией кривой Штейнера, позволяет изучать геометрические места замечательных точек для каждой из таких совокупностей. Например, можно изучить геометрическое место центров вписанных окружностей для семейства треугольников, соответствующих одному из диаметров кривой Штейнера.
3. Установление соответствия между комплексными числами, по модулю меньшими единицы, и евклидовыми треугольниками делает возможным разработку «исчисления треугольников». В частности, очевидно, что возможно их «перемножение», «нахождение среднего арифметического», «сопряжение» и т. д.
4. Если построить функции, вычисляющие по комплексному числу, соответствующему данному треугольнику, длины его сторон, то возможно рассмотрение, условно говоря, «мнимых треугольников», то есть тех, которым соответствуют комплексные числа, по модулю большие нуля. Видимо, их длины сторон либо, оставаясь действительными числами, не подчиняются соответствующим неравенствам, либо эти длины становятся комплексными числами.

5. Подобные же функции могут быть построены для вычисления параметров замечательных точек, прямых и кривых, связанных с треугольником, и, тем самым, эти понятия могут быть перенесены на множество «мнимых треугольников».

6. Желательно детально изучить связи геометрии треугольника с теорией особенностей дифференцируемых отображений.

7. Нужно установить продуктивность применения предлагаемого подхода к основным результатам геометрии треугольника.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. И. Молодший. Основы учения о числе в XVIII и начале XIX века. М., Учпедгиз, 1963.
2. Е. Н. Берёзкин. Курс теоретической механики. М., Изд. МГУ, 1974.
3. А. А. Савёлов. Плоские кривые: Систематика, свойства, применения. М., Книжный дом «Либроком», 2009.
4. Г. Н. Берман. Циклоида. М., Наука, 1980.
5. В. И. Арнольд. Математические методы классической механики. М., Наука, 1974.
6. В. И. Иванов, В. Ю. Попов. Конформные отображения и их приложения. М., Едиториал УРСС, 2002.
7. М. А. Лаврентьев, Б. В. Шабат. Методы теории функций комплексного переменного. М., Наука, 1965.
8. А. И. Маркушевич. Краткий курс теории аналитических функций. М., Гос. изд. физ.-мат. лит., 1961.
9. Википедия. Задача об иголке.
10. Г. С. М. Кокстер. Введение в геометрию. М., Наука, 1966.
11. Н. Б. Васильев, В. Л. Гутенмахер. Прямые и кривые. М., Наука, 1978.
12. А. Мякишев. Прогулки по окружностям: от Эйлера до Тейлора. Математика: Всё для учителя. № 6, 2011, Издательская группа «Основа».
13. Д. Ефремов. Новая геометрия треугольника. Одесса, Матезис, 1902.
14. Энциклопедия элементарной математики. Книга четвёртая. Геометрия. М., Гос. изд. физ.-мат. лит., 1963.
15. С. И. Зетель. Новая геометрия треугольника. М., Учпедгиз, 1962.
16. В. В. Прасолов. Задачи по планиметрии, ч. 1 – 2. М., Наука, 1996.
17. Е. Д. Куланин, С. Н. Федин. Геометрия треугольника в задачах. М., Книжный дом «Либроком», 2009.
18. Е. Д. Куланин, Н. А. Шихова. Геометрический фейерверк: Творческие задания на уроках математики М., Илекса, 2016.
19. Е. Д. Куланин. О прямых Симсона, кривой Штейнера и кубике Мак-Кэя. Математическое просвещение, сер. 3, вып. 10, 2006.
20. Е. Д. Куланин. Виктор Тебо и его задачи. Математическое просвещение, сер. 3, вып. 11, 2007.
21. М. Е. Степанов. Образ силового поля как эвристическая модель в математике. Моделирование и анализ данных: Труды факультета информационных технологий МГППУ, вып. 3. М., Русавиа, 2007.
22. С. Н. Кривошапка, В. Н. Иванов, С. М. Халаби. Аналитические поверхности. М., Наука, 2006.

Работа поступила 25.11.2015г.

ЭРГОНОМИЧЕСКОЕ ПРОЕКТИРОВАНИЕ ИНТЕГРАЛЬНОЙ ИНДИКАЦИИ В СЛЕДЯЩЕЙ СИСТЕМЕ

Д.Н. Булгаков, Н.Н. Столяров

Для эргатических следящих систем представлены методы эргономической разработки и оценки эргономического качества перспективных типов систем отображения информации (СОИ) с совмещенной и аналоговой визуализацией траекторных параметров, основанные на объективных расчетно-аналитических оценках зрительной загрузки оператора по СОИ, эргономического качества отдельных элементов СОИ и компоновки СОИ.

For ergatic tracking system methods of ergonomical construction and ergonomical valuation for complex and analog indicators of trajectory parameters based on objective valuations of operator visual scanning load, ergonomical quality of indicators and their arrangement are introduced and discussed.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА

Эргономика, эргатическая система, следящая система, система отображения информации, интегральная индикация параметров..

Следящей системой (СС) называется техническая или эргатическая система, воспроизводящая исполнительным механизмом движение задающего устройства или, в общем случае, некоторый отслеживаемый процесс [1]. В современной технике СС часто являются элементами сложных технических комплексов, предназначенных для управления процессами различной природы. Например, в терминах теории СС описывается работа системы «пилот – самолет – атмосфера» при заходе на посадку по приборам в режиме штурвального управления. В сложных эргатических системах связующими звеньями между оператором и исполнительными техническими устройствами являются система отображения информации (СОИ) и органы управления. СОИ предназначена для представления оператору необходимой для выполнения стоящих перед эргатической системой задач информации и информации о состоянии технической части эргатической системы. Поэтому эргономическое качество СОИ оказывает сильное влияние на эффективность и безопасность работы эргатической системы в целом.

Назовем траекторной составляющей СОИ эргатической СС ту часть СОИ, которая дает оператору СС визуальную информацию о значениях и о динамике тех параметров, которые определяют физическое или механическое положение СС в ее фазовом пространстве, - так называемых траекторных параметрах (ТП). В дальнейшем изложении для краткости термин «траекторная составляющая» (СОИ) будет опускаться.

Перспективным и проверенным практикой последнего десятилетия прошлого века направлением эргономического совершенствования СОИ СС является отказ от традиционного цифрового представления ТП на отдельных изобразительных элементах (ИЭ) типа «шкала-стрелка», используемого в электромеханических СОИ и в первом поколении электронных

СОИ, и наметившийся переход к совмещенной или комплексной аналоговой визуализации ряда ТП. Для краткости терминологии совмещенную цифровую или аналоговую визуализацию нескольких ТП одним ИЭ или одним фрагментом общего информационного поля СОИ будем называть интегральным траекторным параметром (ИТП). В данной статье предпринимается попытка установления общих принципов эргономической экспертизы СОИ СС с интегральными траекторными параметрами и разработки методов объективной оценки эргономического качества как отдельного ИТП, так и СОИ с ИТП в целом.

Потенциально заложенные в СОИ с ИТП эргономические достоинства определяются тем, что в традиционных СОИ с раздельной, преимущественно цифровой визуализацией ТП практически достигнуты пределы возможностей по всем основным составляющим эргономического качества СОИ: по информативности, по адекватности представления информации о динамике СС необходимым управляющим действиям оператора и по селективности или структурированности представления этой информации [2]. Этот вывод сделан на основе эргономической экспертизы пилотажно-навигационной части электромеханической СОИ тяжелого самолета по системе обобщенных числовых показателей эргономического качества СОИ [3].

Современное техническое оснащение СОИ на цветных дисплеях или жидких кристаллах и информационно-компьютерное обеспечение СОИ допускают широкое использование аналоговой визуализации пространственного положения СС и ее динамики, комплексную визуализацию ряда ТП одним ИЭ, при которых внедряемые формы визуализации способны более полно отражать специфику выполняемых СС задач. Удачное в эргономическом отношении аналоговое представление видеоинформации должно упрощать оператору выделение из информационного поля СОИ необходимой по конкретной ситуации информации и ее переработку: возникает возможность предъявления оператору информации в форме, приближающейся к оперативной образно-концептуальной модели основных задач, выполняемых СС, что может значительно снизить уровень психофизиологической загрузки оператора при его взаимодействии с СОИ. Определение эргономически грамотных путей реализации этих потенциальных преимуществ СОИ с ИТП требует анализа всех трех вышеперечисленных составляющих эргономического качества СОИ с ИТП, а также разработки системы объективных числовых показателей эргономического качества ИТП.

1. Изобразительный элемент (ИЭ) любого типа производит преобразование визуализируемых им параметров, значения которых – случайные величины. Согласно фундаментальному положению теории информации преобразование случайной величины не увеличивает количества содержащейся в ней информации, поэтому ИЭ принципиально не способен дать дополнительную информацию о динамике визуализируемых им ТП. Однако оператору СС необходима информация о близости значений траекторных параметров к предельно допустимым, о взаимосвязи динамики различных ТП и т.д. Эргономически обоснованная техническая реализация изобразительного элемента ИТП должна предоставлять оператору такую дополнительную информацию, как для повышения информативности СОИ, так и для повышения адекватности представления информации необходимым управляющим действиям оператора.

2. Основным эргономическим требованием к ИТП является его информативность, т.е. способность предоставлять оператору всю необходимую для выполняемой СС задачи информацию о динамике визуализируемых им ТП. Однако понятие информативности как отдельного ИТП, так и СОИ в целом эргономически противоречиво, так как не учитывает объективную ограниченность психофизиологических возможностей оператора по приему и переработке информации. Действительно, превышение информационным потоком приборной информации пропускной информационной способности оператора затрудняет оператору выделение из информационного поля СОИ действительно необходимой по ситуации информации, что приводит к ухудшению эргономического качества ИТП и СОИ в целом [2].

Одним из числовых показателей информативности ИТП и его ИЭ, в котором учтено отмеченное противоречие, является показатель $\lambda_{ИТП}$ относительной зрительной загрузки оператора по ИТП. Показатель $\lambda_{ИТП}$, аналитический вид которого будет представлен ниже, характеризует минимально необходимые для достижения заданного качества работы СС временные затраты оператора на взаимодействие с ИТП. Особенность оценки зрительной загрузки оператора по ИТП и его ИЭ состоит в том, что получаемые теоретически по оперативным частотам [1] «собранных» в ИТП траекторных параметров значения показателя $\lambda_{ИТП}$ и теоретически оптимальной вероятности $P_{ИТП}$ наблюдения ИТП оператором [4] характеризуют исключительно эргономическую совместимость ТП, визуализированных ИТП, в то время как эмпирическое значение показателя $\lambda_{ИТП}$ и эмпирическое значение вероятности наблюдения ИТП оператором отражают как эргономическую совместимость объединенных в ИТП траекторных параметров, так и эргономическое качество технической реализации изобразительного элемента ИТП.

Для минимизации зрительной загрузки оператора определяющим требованием к эргономической организации ИТП является следующее: при выполнении оператором СС задач, вызывающих предельно высокую загрузку оператора по приборной информации, ИТП не должен искусственно повышать долю каждого из представленных в нем ТП в общем распределении зрительного внимания оператора сверх оптимальной доли этого ТП. Например, в пилотажно-навигационной СОИ самолета с индикатором воздушных порывов, теоретически позволяющей пилоту вести контроль полетных параметров по их удвоенным информативным частотам [1], такое повышение возникает при визуализации на интегральном полетном параметре полетных параметров с большим разбросом в значениях их информативных частот. Действительно, включенные в интегральный полетный параметр полетные параметры с низкими информативными частотами будут избыточно часто контролироваться пилотом, так как минимально необходимая частота контроля пилотом интегрального полетного параметра совпадает с удвоенной максимальной из информативных частот визуализированных интегральным полетным параметром полетных параметров, а любое обращение пилота к интегральному полетному параметру неизбежно сопровождается снятием с интегрального параметра избыточной для выполнения пилотажной задачи информации о динамике полетных параметров с малыми информативными частотами. Следствием этого является искусственное повышение зрительной загрузки пилота по интегральному полетному параметру и по СОИ в целом по сравнению со зрительной загрузкой пилота по СОИ с отдельной визуализацией полетных параметров. Таким образом, необходимым условием для эргономической совместимости нескольких ТП в интегральном траекторном параметре является близость значений оперативных частот этих ТП.

3. *Аналитический* вид показателя относительной зрительной загрузки оператора СС по ИТП определяется формулой

$$\lambda_{ИТП} = T_{cp} \cdot f_{ИТП} + T_n \cdot f_{ИТП},$$

где: T_{cp} - средняя продолжительность снятия оператором информации с ИТП при его однократном обращении к ИТП; $f_{ИТП}$ - оперативная частота ИТП, равная удвоенной максимальной из оперативных частот визуализируемых на ИЭ ИТП траекторных параметров. Значение $f_{ИТП}$ равно минимально необходимой для обеспечения заданного качества работы СС частоте зрительных обращений оператора к ИТП. T_n - средняя продолжительность переноса взгляда оператора с одного элемента СОИ на другой, обычно $T_n = 0,1c$.

Значение $\lambda_{ИТП}$ равно доли времени, необходимой оператору для контроля объединенных в ИТП траекторных параметров при заданном качестве работы СС, в общей продолжи-

тельности анализируемого этапа работы СС и, таким образом, дает теоретическую оценку зрительной загрузки оператора по ИТП.

Теоретическую оценку минимально возможного значения T_{cp} можно получить следующим методом, который основан на расчете количества информации, необходимой оператору для стабилизации каждого ТП из ИТП в пределах его допустимых отклонений [1].

Пусть T - продолжительность этапа работы СС в секундах. Тогда $N_{итп} = T \cdot f_{итп}$ - минимально необходимое число зрительных обращений оператора к ИТП на этом этапе. Обозначим через $I_{итп}$ (бит) суммарное количество информации, необходимое оператору для обеспечения заданного качества управления всеми ТП, представленными ИТП. Величина $I_{итп} / N_{итп}$ (бит/обращение) характеризует среднее количество информации, которое необходимо снять с ИТП за одно зрительное обращение к ИТП. При максимальной скорости V_1 (бит/с) переработки приборной видеоинформации зрительным каналом оператора (обычно предполагается, что V_1 находится в пределах 4-5 бит/с) средняя продолжительность снятия оператором информации с ИТП при его однократном обращении к ИТП составит

$$T_{cp} = (I_{итп} / N_{итп}) / V_1 = I_{итп} \cdot V_1 / N_{итп} \text{ с/обращение.}$$

Полученное по данной оценке T_{cp} значение $\lambda_{итп}$ позволяет на начальных этапах эргономической разработки ИТП объективно установить, является ли использование данного типа ИТП допустимым по эргономическим требованиям, так как по значению $\lambda_{итп}$ рассчитывается показатель λ относительной зрительной загрузки оператора по СОИ с ИТП [2], [5] и объективно выясняется, не приводит ли использование этого ИТП к недопустимому возрастанию зрительной загрузки оператора по СОИ.

4. При положительном решении вопроса об эргономической целесообразности использования данного ИТП после разработки технической формы его визуализации изобразительным элементом конкретного вида и компоновки СОИ с разработанным ИЭ ИТП на этапах макетных и натуральных испытаний объективная оценка эргономического качества СОИ с ИТП и ИЭ ИТП проводится по системе обобщенных числовых показателей, представленных в [3], [5].

Расчет показателя λ относительной зрительной загрузки оператора по СОИ СС ИТП выполняется стандартным методом из [3] в предположении, что ИЭ ИТП является отдельным прибором или узлом СОИ.

Для оценки СОИ с ИТП по траекторно-вероятностному показателю Q и структурному показателю QS [3], [5] определяется теоретически оптимальная вероятность $P_{итп}$ наблюдения оператором ИТП: $P_{итп} = \lambda_{итп} / \lambda$. Значение $P_{итп}$ характеризует теоретически оптимальную долю ИТП в общем распределении внимания оператора по элементам СОИ при его высокой зрительной загрузке по приборной информации. По установленному значению $P_{итп}$ находятся теоретически оптимальные вероятности переноса взгляда оператора по элементам СОИ и вероятности циклов в зрительном маршруте оператора по СОИ, используемые в структурном показателе QS .

Общая эргономическая оценка СОИ с ИТП по показателям Q и QS проводится методами, изложенными в [4], [5], в предположении, что ИЭ ИТП является отдельным прибором или узлом СОИ. Возникающие для СОИ с ИТП особенности в выборе используемых в расчете показателя Q эталонных дисперсий ТП, представленных на ИЭ ИТП, будут обсуждены в следующем пункте.

5. Объективная числовая оценка эргономического качества ИЭ ИТП, включающая оценку его информативности, дается значением траекторно-вероятностного показателя ИЭ

ИТП $Q_{ИТП}$. Для определения аналитического вида этого показателя предполагается, что ИЭ ИТП визуализирует K траекторных параметров; $P_{ИТП} = p$ - теоретически оптимальная вероятность наблюдения оператором ИТП; q - эмпирическая вероятность наблюдения оператором ИЭ ИТП, устанавливаемая при макетных или натуральных испытаниях СОИ с ИТП; D_j - теоретически достигаемая при теоретически оптимальной вероятности наблюдения оператором ИТП дисперсия j -го ТП (эталонная дисперсия j -го ТП); E_j - эмпирическая дисперсия j -го ТП, устанавливаемая при натуральных испытаниях СОИ с ИТП; $j = 1, \dots, K$. В принятых обозначениях

$$Q_{ИТП} = \frac{1}{2^{|p-q|}} \cdot \sqrt{\frac{K}{\sum_{j=1}^K \frac{E_j}{D_j}}} \quad (1)$$

Очевидно, что при $D_j \leq E_j$ для каждого $j = 1, \dots, K$ $0 < Q_{ИТП} \leq 1$, причем $Q_{ИТП} = 1$ тогда и только тогда, когда $p = q$ и $E_j = D_j$ при каждом j , то есть когда теоретически оптимальная и эмпирическая вероятности наблюдения оператором ИТП совпадают, а качество стабилизации каждого ТП, характеризуемое его эмпирической дисперсией, совпадает с эталонным.

В зависимости от технических особенностей ИЭ ИТП выбор значения эталонной дисперсии входящего в ИТП траекторного параметра производится одним из двух способов:

- если ИЭ предоставляет оператору возможность отдельного наблюдения j -го ТП по удвоенной оперативной частоте f_j этого ТП, то есть ИЭ не вынуждает оператора искусственно завышать частоту контроля j -го ТП до $f_{ИТП}$, то D_j полагается равной суммарной дисперсии частотных составляющих этого ТП в диапазоне $(f_j, +\infty)$, не подавляемых стабилизирующим управлением этим ТП;
- если некоторый из ТП, входящих в ИТП, может наблюдаться оператором только с частотой наблюдения оператором всего ИЭ ИТП, минимально допустимое значение которой составляет $f_{ИТП} g$, то эталонная дисперсия D_j такого j -го ТП полагается равной суммарной дисперсии частотных составляющих этого ТП в диапазоне $(0,5 f_{ИТП}, +\infty)$.

Анализ исходных для расчета $Q_{ИТП}$ величин - значений D_j и E_j каждого из входящих в ИТП траекторных параметров уже способен выделить неудачно визуализированный на ИЭ ИТП траекторный параметр – для такого ТП его эмпирическая дисперсия E_j значительно по сравнению с остальными ТП превышает свое эталонное значение D_j . В свою очередь, малое по сравнению с эталонным значением D_j эмпирическое значение дисперсии E_j показывает, что ИЭ ИТП искусственно завышает частоту контроля оператором j -го ТП и провоцирует оператора на избыточно высокочастотное управление этим ТП. Такой эргономический недостаток ИЭ ИТП искусственно повышает зрительную нагрузку оператора, что вследствие возникающего у оператора дефицита времени может привести к недопустимому ослаблению оператором контроля других ТП, не вошедших в ИТП. Само же значение траекторно-вероятностного показателя ИЭ ИТП, рассчитанное по формуле (1), дает интегральную эргономическую оценку ИЭ ИТП как по качеству управления ТП, вошедшими в ИТП, так и по близости характеристик структуры зрительной деятельности оператора по СОИ с ИТП к теоретически оптимальным: чем выше эргономическое качество ИЭ ИТП, тем ближе значение $Q_{ИТП}$ к единице.

Таким образом, представленные методы позволяют на начальных этапах проектирования СОИ с ИТП эргономически обоснованно определять состав комплексируемых в ИТП параметров, а на этапах испытаний СОИ с ИТП получить объективные числовые оценки эргономического качества ИЭ ИТП и СОИ с ИТП в целом. Дальнейшее развитие этих методов требует в первую очередь исследования эксплуатируемых СОИ с ИТП для установления нормативных значений введенных обобщенных показателей эргономического качества СОИ с совмещенной или аналоговой индикацией траекторных параметров СС.

ЛИТЕРАТУРА

1. Булгаков Д.Н. Следящие системы с дискретным вводом информации. – Моделирование и анализ данных. – М.: МГППУ. 2011, № 1. С. 76-86.
2. Булгаков Д.Н. Математические методы эргономического проектирования СОИ самолета. – Техника. Информатика. Экономика. Сер. СОИ. – М.: ВИМИ. 1994. Вып. 1. С. 3-11.
3. Булгаков Д.Н., Столяров Н.Н. Объективные методы эргономической экспертизы СОИ самолета. – Научный вестник МГТУ ГА. Сер. Аэромеханика и прочность. – М.: МГТУ ГА. 2003. № 59. С. 51-56.
4. Столяров Н.Н. Эргономическое проектирование СОИ самолета с совмещенной визуализацией полетных параметров. – Научный вестник МГТУ ГА. Сер. Аэромеханика и прочность. – М.: МГТУ ГА. 2003. № 59. С. 95-100.
5. Булгаков Д.Н. Теоретические основы расчетно-экспериментальной оценки эргономического качества системы отображения информации в следящей системе. – Экспериментальная психология. – М.: Русавиа, МГППУ. 2013. № 1. С. 88-96.

Работа поступила 24.09.2016г.

АВТОРЫ

Аладко Антон Валерьевич	Студент факультета информационных технологий МГППУ <i>kvetlarien@mail.ru</i>
Артеменков Сергей Львович	кандидат технических наук, профессор кафедры прикладной информатики и мультимедийных технологий, руководитель центра информационных технологий для психологических исследований факультета информационных технологий МГППУ <i>slart@inbox.ru</i>
Булгаков Дмитрий Николаевич	доктор технических наук, профессор кафедры прикладной математики МГППУ <i>dnbulgakov@mail.ru</i>
Воронов Михаил Владимирович	доктор технических наук, профессор, профессор кафедры прикладной математики факультета информационных технологий МГППУ <i>mivoronov@yandex.ru</i>
Захаров Валерий Константинович	доктор физико-математических наук, профессор кафедры теоретической информатики механико-математического факультета Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова <i>zakharov_valeriy@list.ru</i>
Митин Александр Иванович	профессор Российской академии народного хозяйства и государственной службы при Президенте РФ (РАНХиГС), профессор Московского государственного психолого-педагогического университета (МГППУ), д.пед.н., к.ф.-м.н, профессор <i>mitin_ai@mail.ru</i>
Степанов Михаил Евграфович	кандидат педагогических наук, доцент кафедры прикладной математики факультета информационных технологий МГППУ <i>mestepanov@yandex.ru</i>
Филичева Татьяна Алексеевна	доцент РАНХиГС (Брянский филиал), к.т.н., доцент <i>filta@yandex.ru</i>