

**2**

**МОДЕЛИРОВАНИЕ  
И АНАЛИЗ ДАННЫХ**

НАУЧНЫЙ ЖУРНАЛ

**MODELLING  
AND DATA ANALYSIS**

SCIENTIFIC JOURNAL

**2021**

ISSN: 2219-3758

ISSN: 2311-9454 (ONLINE)

# **МОДЕЛИРОВАНИЕ И АНАЛИЗ ДАННЫХ**

НАУЧНЫЙ ЖУРНАЛ

**2021 • Том. 11 • № 2**

# **MODELLING AND DATA ANALYSIS**

SCIENTIFIC JOURNAL

**2021 • Vol. 11 • № 2**



Московский государственный  
психолого-педагогический университет  
Moscow State University  
of Psychology & Education

## РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

**Главный редактор** – Л.С. Куравский

**Заместители главного редактора** – С.Д. Кулик, А.В. Пантелеев

**Члены редакционной коллегии** – К.К. Абгарян, Г.Г. Амосов, М.В. Воронов, Е.Л. Григоренко (США), В.К. Захаров, А.И. Кибзун, Л.М. Либкин (Великобритания), В.Р. Милов, А.В. Наумов, Д.Л. Ревизников, Х. Холлинг (Германия), Д. Фрэнсис (США), К.В. Хорошенко (Великобритания), Г.А. Юрьев

## РЕДАКЦИОННЫЙ СОВЕТ

**Председатель редакционного совета** – Г.Г. Амосов

**Члены редакционного совета** – В.А. Барабанщиков, П. Бентлер (США), А.В. Горбатов, Л.С. Куравский, Л.М. Либкин (Великобритания), А.А. Марголис, В.В. Рубцов, Д.В. Ушаков, Д. Фрэнсис (США)

**Ответственный секретарь** – Н.Е. Юрьева

Издаётся с 2011 года

Учредитель

Федеральное государственное бюджетное  
образовательное учреждение высшего образования  
«Московский государственный психолого-педагогический университет»

Адрес редколлегии:

г. Москва, ул. Сретенка, 29, факультет информационных технологий  
Тел.: +7 (499) 167-66-74  
E-mail: mad.mgppu@gmail.com

Журнал зарегистрирован в Государственном комитете РФ по печати.

Свидетельство о регистрации средств массовой информации

ПИ № ФС77-52058 от 7 декабря 2012 года

**ISSN: 2219-3758**

**ISSN: 2311-9454 (online)**

© ФГБОУ ВО «Московский государственный психолого-педагогический университет», 2021.  
Все права защищены. Любая часть этого издания не может быть воспроизведена в какой бы то ни было форме и какими бы то ни было средствами без письменного разрешения редакционной коллегии. Правила оформления рукописей, направляемых в редакцию журнала, высылаются по запросу по электронной почте.



◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇ **СОДЕРЖАНИЕ** ◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇

---

**АНАЛИЗ ДАННЫХ**

*Грешников И.И., Куравский Л.С., Юрьев Г.А.*  
Принципы построения программно-аппаратного комплекса  
для интеллектуальной поддержки экипажа и оценки уровня его подготовки ..... 5

*Артеменков С.Л.*  
Упорядоченные сети частных корреляций в психологических исследованиях ..... 31

---

**МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ**

*Золотарев И.А., Рассказова В.А.*  
Модификация алгоритма декомпозиции  
путей ориентированного графа для учета расписания..... 51

---

**КОМПЛЕКСЫ ПРОГРАММ**

*Пантелеев А.В., Беляков И.А.*  
Разработка программного обеспечения метода глобальной  
оптимизации, имитирующего поведение стаи серых волков ..... 59

---

**МЕТОДИКА ОБУЧЕНИЯ**

*Лукин В.Н.*  
Дистанционное обучение: проблемы и решения..... 74

*Степанов М.Е.*  
Межпредметные связи в общем курсе высшей математики ..... 89



◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆ АНАЛИЗ ДАННЫХ ◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆

УДК 519.85, 629.7.07

## Принципы построения программно-аппаратного комплекса для интеллектуальной поддержки экипажа и оценки уровня его подготовки

**Грешников И.И.\***

Государственный научно-исследовательский институт авиационных систем  
(ФГУП «ГосНИИАС»), г. Москва, Российская Федерация  
ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-5474-3094>  
e-mail: [vvanes@mail.ru](mailto:vvanes@mail.ru)

**Куравский Л.С.\*\***

Московский государственный психолого-педагогический университет  
(ФГБОУ ВО МГППУ), г. Москва, Российская Федерация  
ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-3375-8446>  
e-mail: [l.s.kuravsky@gmail.com](mailto:l.s.kuravsky@gmail.com)

**Юрьев Г.А.\*\*\***

Московский государственный психолого-педагогический университет  
(ФГБОУ ВО МГППУ), г. Москва, Российская Федерация  
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-2960-6562>  
e-mail: [g.a.yuryev@gmail.com](mailto:g.a.yuryev@gmail.com)

Представлен новый подход к интеллектуальной поддержке экипажей воздушных судов, основанный на сравнении исследуемых фрагментов полётов (маневров) с паттернами, содержащимися в базе данных и представляющими эмпирический интеллект системы. Ключевым компонентом этого подхода являются четыре новые метрики, обеспечивающие значимую дискриминацию анализируемых фрагментов полётов и данных видеоокулографии различных типов и качества исполнения, а именно: евклидова метрика в пространстве вейвлет-коэффициентов, метрика правдоподобия траекторий собственных значений преобразований параметров деятельности, метрика Кохонена в пространстве вейвлет-коэффициентов (с использованием ассоциативных нейронных сетей) и метрика правдоподобия для сравнения траекторий движения взгляда. Особенности представленного подхода являются: наличие «интеллектуальной составляющей», которая содержится в эмпирических данных и может гибко изменяться по мере их накопления; применение интегральных сравнений исследуемых фрагментов полета и данных видеоокулографии с сопоставимыми образцами различных типов и качества исполнения из



специализированной базы данных, с перенесением на исследуемый фрагмент характеристик ближайшего паттерна из специализированной базы данных; применение сложной комбинации методов анализа случайных процессов и многомерного статистического анализа.

**Ключевые слова:** операторы сложных технических систем, интеллектуальная поддержка экипажа, оценка уровня подготовки экипажа, видеоокулография, метрика правдоподобия, метрика Кохонена.

**Для цитаты:**

*Грешников И.И., Куравский Л.С., Юрьев Г.А.* Принципы построения программно-аппаратного комплекса для интеллектуальной поддержки экипажа и оценки уровня его подготовки // Моделирование и анализ данных. 2021. Том 11. № 2. С. 5–30. DOI: <https://doi.org/10.17759/mda.2021110201>

**\*Грешников Иван Игоревич**, начальник сектора, Государственный научно-исследовательский институт авиационных систем (ФГУП «ГосНИИАС»), г. Москва, Российская Федерация, ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-5474-3094>, e-mail: [vvanes@mail.ru](mailto:vvanes@mail.ru)

**\*\*Куравский Лев Семёнович**, доктор технических наук, профессор, декан факультета «Информационные технологии», заведующий кафедрой «Прикладная информатика и мультимедийные технологии», Московский государственный психолого-педагогический университет (ФГБОУ ВО МГППУ), г. Москва, Российская Федерация, ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-3375-8446>, e-mail: [l.s.kuravsky@gmail.com](mailto:l.s.kuravsky@gmail.com)

**\*\*\*Юрьев Григорий Александрович**, кандидат физико-математических наук, доцент, профессор кафедры прикладной информатики и мультимедийных технологий, заместитель декана факультета информационных технологий по научной работе, заведующий лабораторией математической психологии и прикладного программного обеспечения центра информационных технологий для психологических исследований, Московский государственный психолого-педагогический университет (ФГБОУ ВО МГППУ), г. Москва, Российская Федерация, ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-2960-6562>, e-mail: [g.a.yuryev@gmail.com](mailto:g.a.yuryev@gmail.com)

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Проблема оценки влияния человеческого фактора (ЧФ) при проектировании и эксплуатации авиационной техники признается всеми исследователями и регулирующими органами авиационной отрасли. На сегодняшний день ЧФ становится одной из основных причин возникновения критических ситуаций в полете воздушного судна (ВС). Как правило, ошибки совершаются экипажем в результате неправильной оценки текущей ситуации.

Тем не менее, в настоящее время ЧФ и его влияние на развитие критических ситуаций в полете все еще недостаточно учитывается на этапах анализа безопасности и проектирования кабины экипажа ВС. Современный подход к учету ЧФ базируется только на анализе статистики произошедших инцидентов и происшествий, что является основным его недостатком. В результате, существующие методики и рекомендации, учитывающие ЧФ, направлены лишь на изменения в процессах обучения опе-



раторов или процедурах эксплуатации плохо спроектированных систем и устройств, не позволяя количественно оценивать риски в конкретных полётах и выявлять факторы, способствующие возникновению опасных лётных ситуаций. Проблема заключается, во-первых, в отсутствии моделей рисков и недостатке статистических данных о ЧФ, полученных в результате исследования инцидентов безопасности, и, во-вторых, в отсутствии эффективных научно-практически обоснованных мер по смягчению этих рисков при проектировании кабины экипажа ВС. Разработка математических моделей и методов оценки уровня подготовки экипажа на основе анализа параметров полета, а также их программная реализация позволят существенно продвинуться в развитии средств прогнозирования рисков и выявления факторов, способствующих возникновению опасных лётных ситуаций, в том числе в режиме реального времени.

К настоящему времени получен ряд результатов, связанных с выявлением проблем пилотирования [1–10, 15–20], где в подавляющем большинстве случаев рассматриваются только параметры траектории воздушного судна и не учитываются другие характеристики. Ограничения, которые делают невозможным реальное практическое применение этих результатов, детально рассмотрены в работах [12–14]. Следует отметить, что многие из указанных ограничений обусловлены применением традиционных метрик для сравнения фрагментов полетов (манёвров).

В данной статье рассмотрен новый подход к обеспечению интеллектуальной поддержки и оценки уровня подготовки экипажа, опирающийся на результаты, представленные в работах [11–14]. Особенности представленного подхода являются:

- наличие «интеллектуальной составляющей», которая содержится в эмпирических данных и может гибко изменяться по мере их накопления;
- применение интегральных сравнений исследуемых фрагментов полета и данных видеоокулографии с сопоставимыми образцами различных типов и качества исполнения из специализированной базы данных, содержащей паттерны нормального и аномального пилотирования; при этом на исследуемый фрагмент переносятся характеристики ближайшего паттерна из специализированной базы данных;
- применение сложной комбинации методов анализа случайных процессов и многомерного статистического анализа.

При этом используются экспериментальные данные, включающие комбинированную информацию о динамике полёта и управлении воздушным судном, распределении визуального внимания пилотов, а также экспертные оценки результатов выполнения лётных упражнений.

Ключевым компонентом данного подхода являются рассматриваемые в этой статье четыре новые сложные метрики, обеспечивающие значимую дискриминацию анализируемых фрагментов полётов и данных видеоокулографии различных типов и качества исполнения, а именно: евклидова метрика в пространстве вейвлет-коэффициентов, метрика правдоподобия траекторий собственных значений преобразований параметров деятельности, метрика Кохонена в пространстве вейвлет-коэффициентов (с использованием ассоциативных нейронных сетей) и метрика правдоподобия для сравнения траекторий движения взора. Известные ранее метрики этот результат не обеспечивают.





Рассмотренные далее результаты являются существенным шагом в развитии средств прогнозирования рисков и выявления факторов, способствующих возникновению опасных лётных ситуаций, в том числе в режиме реального времени, и могут применяться:

- для оценки работы экипажей, включая контроль качества их обучения,
- поддержки формирования инструкторских оценок,
- обеспечения современных форм адаптивного обучения экипажей,
- сравнения различных форматов системы экранной индикации в кабине экипажа,
- оптимизации компоновки индикаторов кабины экипажа воздушного судна с учетом данных видеоокулографии,
- оценки влияния компоновки индикаторов кабины экипажа воздушного судна и условий полёта на риски возникновения авиационных инцидентов,
- сравнения различных средств и программ обучения лётного состава, а также при проектировании современных летательных аппаратов.

## **2. ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНАЯ ПОДДЕРЖКА ЭКИПАЖА В РАМКАХ ПРОЦЕДУРЫ ОБУЧЕНИЯ ЭКИПАЖА НА ТРЕНАЖЁРАХ И УПРАВЛЕНИЯ ВОЗДУШНЫМ СУДНОМ: ОБЩЕЕ ОПИСАНИЕ**

Интеллектуальная поддержка экипажа может обеспечиваться как на авиационных тренажёрах и стендах в процессе обучения, так и в реальном полёте. Структура связей модуля интеллектуальной поддержки с компонентами процедуры обучения на тренажёрах/стендах и управлением воздушным судном представлена на рис. 1. Интеллектуальная поддержка выполняется в реальном времени и реализуется тремя компонентами программного обеспечения:

- инструментальным средством «The Intelligent System for Flight Analysis» (ISFA), обеспечивающим применение предусмотренных математических моделей и методов,
- монитором состояния полёта (Flight Condition Monitor) и
- модулем формирования фрагментов полёта.

Инструментальное средство ISFA вычисляет свои оценки на основе динамически получаемой информации о параметрах полёта и состоянии систем воздушного судна (ВС), а также используя данные видеоокулографии, представленные траекториями движения взоров пилотов, которые измеряются с помощью айтрекера.

Применяемая концепция оценивания опирается на интегральные сравнения исследуемых фрагментов полёта и действий пилотов с сопоставимыми фрагментами из специализированной базы данных, содержащей паттерны, характеризующие выполнение лётных упражнений экипажами с различным уровнем подготовки, включая нормальное и аномальное пилотирование. На оцениваемый фрагмент переносятся характеристики ближайшего паттерна. Таким образом, «интеллект» системы, принимающей решения, содержится в накопленных эмпирических данных и может усиливаться по мере наполнения базы паттернами.



Монитор состояния полёта обеспечивает вывод диагностической информации, полученной системой ISFA в результате оперативно проведённого анализа, для экипажа и пилотов-инструкторов. На основе этой информации оценивается качество пилотирования и формируются сообщения, которые предупреждают экипаж об опасности, обусловленной аномальным пилотированием – если она имеет место – и сообщают экипажу информацию, позволяющую понять, в чём заключались его ошибки при выполнении заданного манёвра. Кроме того, в рамках процедуры обучения, опираясь на информацию, выведенную на монитор, пилот-инструктор формирует новые задания для экипажа.

На монитор состояния полёта выводятся сведения о нормальности или аномальности выполняемого маневра, распознанный тип маневра, текстовое описание выявленной аномальности маневра – если она имеет место – и процентный вклад наиболее значимых с точки зрения анализа лётных параметров, которыми обусловлены отличия оцениваемого фрагмента полёта от эталонного выполнения манёвра данного типа.

При достаточно квалифицированном наполнении специализированной базы данных характерными фрагментами (паттернами) полётов, оценки, формируемые на панели монитора, фактически обеспечивают замену «субъективного инструктора» (т.е. человека, оценивающего действия и состояния экипажа на основе своего индивидуального опыта, с сопутствующими пристрастиями и вариативностью индивидуальных представлений об объекте оценивания) на «объективного инструктора», оценивающего всех в единой шкале и не имеющего ни пристрастий, ни вариативности представлений.

Информация, выводимая на панель монитора и доступная пилотам, поддерживает «обратную связь», позволяющую экипажу корректировать свои действия. Она включает и сигналы об опасностях, содержащие более детализированные сведения, чем те, которые обычно принято доводить для пилотов в кабине самолёта. Выводимая на панель монитора текстовая информация, а также сведения о вкладе наиболее значимых параметров, которыми обусловлены отличия оцениваемого фрагмента полёта от эталонного паттерна, позволяют пилотам понять причины ошибок пилотирования, если они имеют место.

### **3. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ И МЕТОДЫ, ОБЕСПЕЧИВАЮЩИЕ ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНУЮ ПОДДЕРЖКУ И ОЦЕНКУ УРОВНЯ ПОДГОТОВКИ И СОСТОЯНИЯ ЭКИПАЖА**

Оценки уровня подготовки и состояния экипажа и элементы его интеллектуальной поддержки строятся на основе анализа наборов временных рядов, описывающих динамику параметров летательного аппарата, состояние пилотов и их глазодвижительную активность, представленную данными видеоокулографии. Данные для анализа поступают в процессе выполнения лётных упражнений.

Алгоритмические аспекты применяемого подхода представлены диаграммой потоков данных на рис. 2.

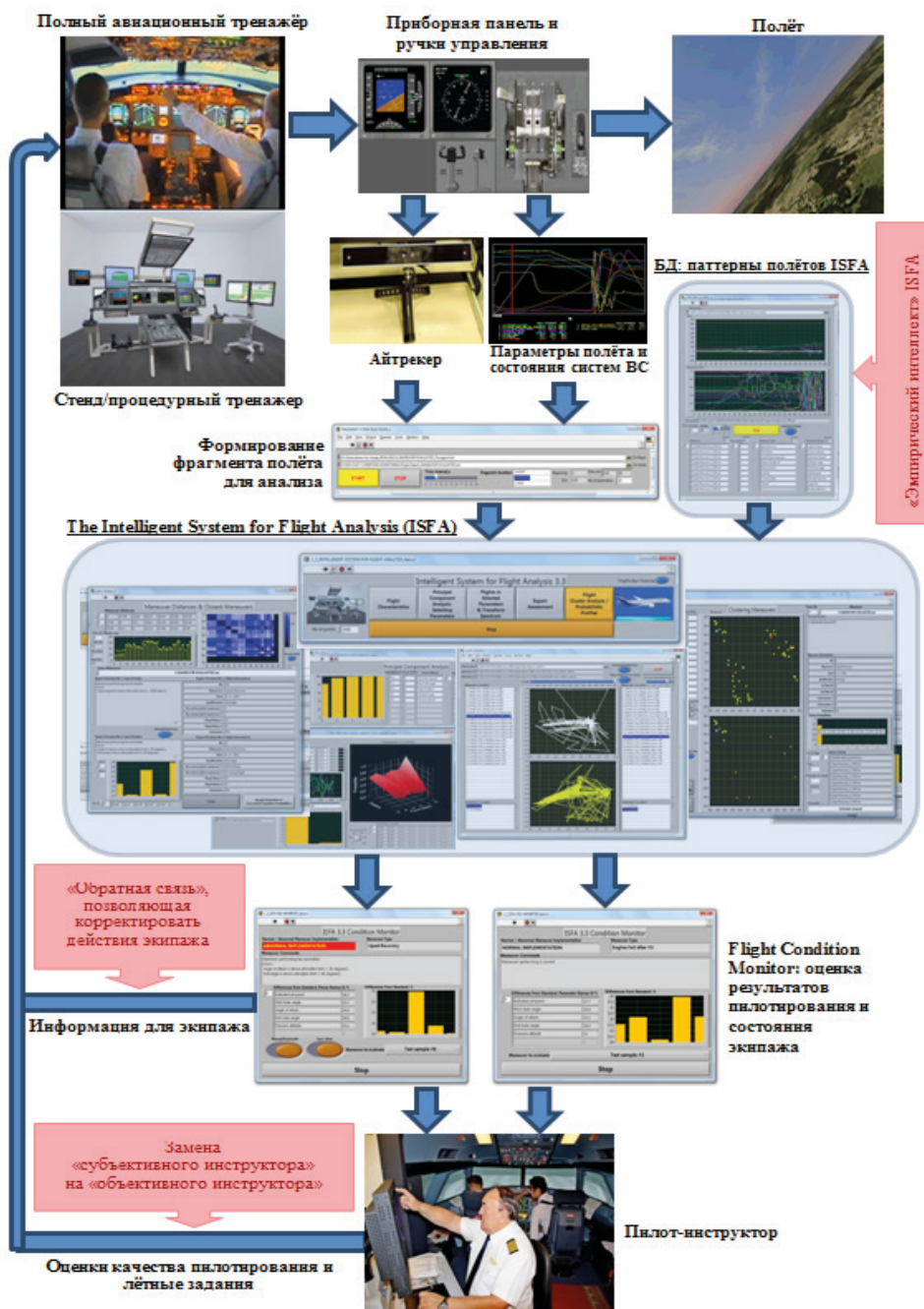


Рис. 1. Обеспечение интеллектуальной поддержки экипажа в реальном времени при управлении воздушным судном и обучении на тренажёрах

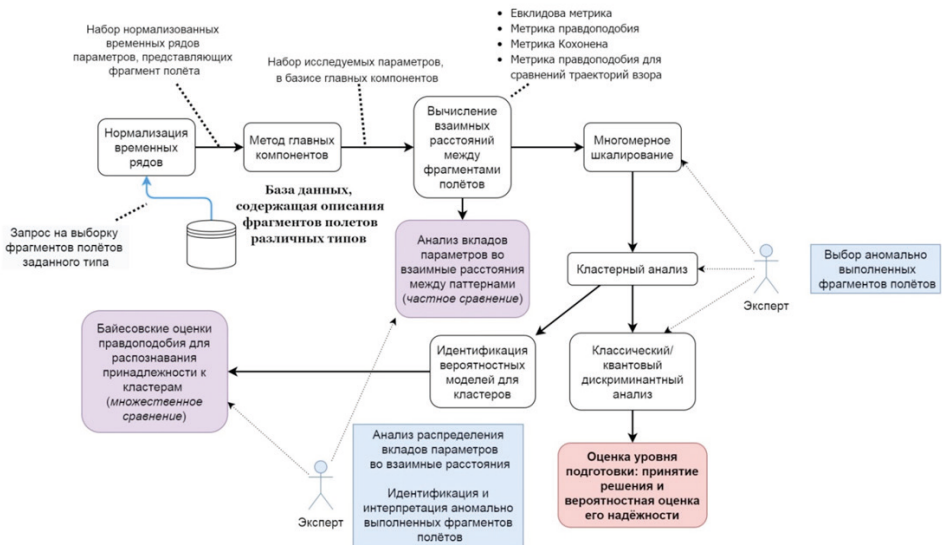


Рис. 2. Диаграмма потоков данных, представляющая алгоритмические аспекты оценки уровня подготовки и состояния экипажа

Оценки уровня подготовки экипажа определяются на основе интегральных сравнений исследуемых фрагментов полёта или поведения сложной системы с сопоставимыми фрагментами (паттернами) из специализированной базы данных, которые характеризуют выполнение лётных упражнений экипажами с различным уровнем подготовки. Паттерны представляют характерные фрагменты полётов с помощью наборов временных рядов, которые содержат значения параметров, определяющих движение и состояние систем летательного аппарата. На исследуемый фрагмент полёта переносятся характеристики паттерна, ближайшего в заданной метрике. Определение ближайшего паттерна сопровождается распознаванием аномального пилотирования и определением параметров полёта, характеризующих ошибки экипажа. Аномальность фрагментов полёта выявляется через принадлежность к заданным кластерам паттернов. При этом выявляются параметры, ответственные за принадлежность к определённым кластерам, а также за различия между паттернами.

Информация, собранная в специализированной базе данных, включает в себя временные ряды, содержащие значения параметров выполнения упражнений, а также комментарии, содержащие экспертные оценки. Эти оценки содержат информацию об ошибках экипажа в терминах параметров деятельности. Временные ряды приводятся к единой шкале.

Результаты сравнения фрагментов полета и данных видеоокулографии с сопоставимыми паттернами из специализированной базы данных вычисляются в результате анализа трех типов характеристик: параметров полёта и состояния систем воздушного судна; траекторий движения глаз пилотов; временных рядов первичных показателей глазодвигательной активности пилотов.



Действия, реализуемые пилотами с разным профессиональным качеством выполнения, а также фрагменты полётов разных типов отделяются друг от друга в достаточной степени в многомерном пространстве шкалирования, сформированном с помощью специальной процедуры в подобранных метриках. Это утверждение опирается на результаты проведённых вычислительных экспериментов. Результат решения задачи определяется выбором паттернов.

Необходимый результат достигается применением сложной комбинации процедур анализа случайных процессов и многомерного статистического анализа. «Интеллект» средств распознавания содержится в эмпирических данных, представленных паттернами, и может гибко изменяться по мере их накопления. Эмпирические данные включают комбинированную информацию о динамике полёта и управлении воздушным судном, о распределении визуального внимания пилотов, а также экспертные оценки результатов выполнения лётных упражнений.

Используя результаты применения метода главных компонент, многомерного шкалирования и кластерного анализа параметров полёта, состояния систем воздушного судна и траекторий движения глаз пилотов, формируются кластеры фрагментов полетов различных типов и качества исполнения, которые используются для классификации маневров в пространстве шкалирования, выявления ошибок экипажа и получения оценок качества выполнения исследуемых фрагментов полетов.

При этом:

- метод главных компонент понижает размерность задачи и обеспечивает определение представителей групп параметров с высокой внутренней корреляцией;
- многомерное шкалирование обеспечивает разделение в пространстве шкалирования паттернов различных типов фрагментов полётов и глазодвижительной активности пилотов, а также нормальных/аномальных результатов деятельности;
- кластерный анализ обеспечивает разделение различных типов и уровней качества выполнения фрагментов полётов;
- дискриминантный анализ решает задачи классификации фрагментов полётов.

Итоговые заключения о принадлежности к целевым кластерам, связанным с типами упражнений и качеством пилотирования, строятся на основе вычисления вероятностного профиля, что обеспечивается средствами дискриминантного анализа. Для содержательного анализа причин некорректного выполнения маневров детализируются относительные вклады параметров полёта и состояния систем воздушного судна в элементы матриц взаимных расстояний между фрагментами полётов в заданной метрике, что позволяет определять параметры, характеризующие ошибки пилота, с целью выявления их причин. При достаточной скорости компьютерных вычислений, оценки уровня подготовки экипажа могут быть получены в автоматическом режиме в реальном времени.

Количественные оценки уровня подготовки экипажей определяются тремя способами:

- путём прямого сравнения исследуемых фрагментов полётов с паттернами деятельности из базы данных, используя одну из применяемых метрик (при этом на исследуемое упражнение переносятся характеристики ближайшего паттерна);



- с помощью вероятностных оценок, вычисленных средствами дискриминантного анализа, используя выборочные функции распределения расстояний упражнений до центров кластеров в пространстве шкалирования;
- с помощью вероятностного профиля пребывания в диапазонах параметров деятельности, используя байесовские оценки правдоподобия.

При этом эксперт, принимающий участие в процедуре анализа результатов выполнения лётных упражнений, отвечает за:

- выбор кластеров аномальных паттернов в пространстве шкалирования;
- анализ баланса вкладов параметров при сравнении упражнений с целью выбора релевантных параметров для дальнейшего исследования;
- выявление и интерпретацию аномалий и ошибок.

Рассматриваемый подход можно применять даже при малых выборках лётных упражнений, поскольку и в этом случае можно выбрать паттерн и рассчитать вклад параметров во взаимные расстояния.

Представленные в отчёте [21] результаты практического применения показали, что разработанные методы обеспечили способность к распознаванию аномально выполненных фрагментов полетов и определению параметров, характеризующих ошибки пилота, с последующей возможностью выявления их причин.

Применяемый подход содержит следующие элементы новизны:

- вместо непосредственного представления исследуемых процессов временными рядами используется их представление вейвлет-коэффициентами, полученными в результате дискретного вейвлет-преобразования, что сняло проблему синхронизации сопоставляемых процессов, существенно тормозившую работы в данном направлении;
- основной формой представления анализируемых данных являются матрицы взаимных расстояний исследуемых процессов в различных метриках;
- в зависимости от типа задачи, применяются четыре вновь разработанные метрики для сравнения исследуемых фрагментов полётов;
- представление фрагментов полетов в пространстве шкалирования и их распределение по типам путем применения многомерного шкалирования к матрицам взаимных расстояний и последующего кластерного анализа;
- оценка относительных вкладов параметров в элементы матриц взаимных расстояний между фрагментами полётов и байесовские оценки правдоподобия с целью выявления аномально выполненных маневров и определения параметров, динамика которых свидетельствует об ошибках пилотов.

Для регистрации глазо двигательной активности применяются бесконтактные технические средства – *айтрекеры*, которые позволяют исключить субъективную оценку показателей состояния пилотов.

Разработанный подход продемонстрировал способность к распознаванию аномально выполненных фрагментов полетов и определению параметров, характеризующих ошибки пилота, обеспечивая таким образом последующее выявление их причин.

Практическое применение разработанного подхода обеспечивается инструментальным средством «*The Intelligent System for Flight Analysis*» (*ISFA*), предназначен-



ным для анализа поведения сложных систем. Это средство первоначально разрабатывалось для оценки качества выполнения лётных маневров, однако позднее стало применяться и для анализа данных видеоокулографии.

## **4. МЕТРИКИ, ОБЕСПЕЧИВАЮЩИЕ СРАВНЕНИЕ АНАЛИЗИРУЕМЫХ ФРАГМЕНТОВ ПОЛЁТОВ И ДАННЫХ ВИДЕООКУЛОГРАФИИ РАЗЛИЧНЫХ ТИПОВ И КАЧЕСТВА ИСПОЛНЕНИЯ**

### **4.1. Сравнение фрагментов полётов, используя евклидову метрику в пространстве вейвлет-коэффициентов**

Размерность матриц взаимных расстояний между фрагментами полётов равна объёму выборки исследуемых фрагментов. Исходные временные ряды, представляющие исследуемые процессы, при сравнении заменяются на ряды вейвлет-коэффициентов, полученных в результате кратномасштабного анализа [6]. При этом исходные процессы как функции времени заменяются интегральными характеристиками временных интервалов, которые относятся к области определения этих функций, что позволяет обеспечить значительное сокращение (примерно на порядок величины) количества коэффициентов, необходимых для правильного представления анализируемых процессов. Благодаря правилам соотнесения вейвлет-коэффициентов с фрагментами временных рядов, которые применяются в кратномасштабном анализе, преодолеваются трудности, связанные с необходимостью точной синхронизации процессов, относящихся к различным фрагментам полётов одного типа, поскольку наиболее значимые коэффициенты, относящиеся к более продолжительным временным интервалам, практически не чувствительны к умеренным сдвигам во времени. Длина вейвлет-представлений, используемых при последующем анализе, существенно (примерно на порядок величины) меньше длины соответствующего исходного временного ряда, при этом точность оценок существенно не ухудшается. Матрицы взаимных расстояний, вычисленные для всех рассматриваемых параметров, складываются, в результате чего получается общая матрица взаимных расстояний между исследуемыми фрагментами полётов.

Применяемый кратномасштабный анализ (КМА) (*Multiresolution Analysis, MRA*) – это инструмент для разделения сигналов на составляющие и анализа их порядка. Сигнал рассматривается в виде суммы разнотипных составляющих: функции тренда (средних значений по большим интервалам), циклических компонентов с определенным периодом повторения, локальных особенностей разного порядка (вплоть до скачков в определенные моменты), флуктуаций более высокого порядка вокруг перечисленных выше составляющих сигнала. Понятие КМА является фундаментальным в теории вейвлетов благодаря каскадному алгоритму вычислений, подобному быстрому преобразованию Фурье.

Детальное описание процедуры формирования матрицы взаимных расстояний в евклидовой метрике в пространстве вейвлет-коэффициентов представлено в [21].

## 4.2. Сравнение фрагментов полётов, используя метрику правдоподобия траекторий собственных значений для преобразований параметров деятельности

Описание метрики правдоподобия траекторий собственных значений для преобразований параметров фрагментов полётов представлено в работе [4].

Рассмотрим множество, состоящее из  $M$  зависимых от времени параметров выполнения фрагмента полёта, представленных наборами временных рядов:

$$\mathbf{r}_i = (r_{i,1}, r_{i,2}, \dots, r_{i,M})^T,$$

где значения индекса  $i \in \{1, 2, \dots, N\}$  соответствуют дискретным моментам времени. Динамика  $r_i$  может быть представлена следующим матричным уравнением:

$$\mathbf{r}_{i+1} = \mathbf{F}_i \mathbf{r}_i,$$

где  $\mathbf{F}_i$  – зависящая от времени матричная функция размерности  $M$ , которую следует идентифицировать по экспериментальным данным.

Для достаточно короткого интервала времени, включающего  $K$  точек и начинающегося в момент  $t_0$ , где  $K \geq M$ , матрицу  $\mathbf{F}_i$  можно аппроксимировать соответствующей стационарной матрицей:

$$\mathbf{F}_{i_0+j} \equiv \mathbf{F}_{i_0}, \text{ для всех } j \in \{0, 1, \dots, K-1\}.$$

Временной шаг, используемый при формировании рассматриваемого временного ряда, может варьироваться до достижения необходимого уровня согласования с экспериментальными данными.

Если рассмотреть  $K$  уравнений

$$\left\{ \mathbf{r}_{i+1} = \mathbf{F}_{i_0} \mathbf{r}_i \right\}_{i \in \{i_0, i_0+1, \dots, i_0+K-1\}}, \text{ где } \mathbf{F}_{i_0} = \begin{pmatrix} f_{i_0,11} & \dots & f_{i_0,1M} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{i_0,M1} & \dots & f_{i_0,MM} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{f}_{i_0,1}^T \\ \dots \\ \mathbf{f}_{i_0,M}^T \end{pmatrix},$$

то каждую строку  $\mathbf{f}_{i_0,l}^T$ ,  $l \in \{1, \dots, M\}$  матрицы  $\mathbf{F}_{i_0}$  можно идентифицировать как псевдорешение соответствующего  $l$ -го матричного уравнения, которое в общем случае является переопределенным:

$$\mathbf{Q}_{i_0} \mathbf{f}_{i_0,l} = \mathbf{q}_{i_0+1,l},$$

$$\text{где } \mathbf{Q}_{i_0} = \begin{pmatrix} r_{i_0,1} & \dots & r_{i_0,M} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{i_0+K-1,1} & \dots & r_{i_0+K-1,M} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{q}_{i_0+1,l} = (r_{i_0+1,l}; r_{i_0+2,l}; \dots; r_{i_0+K,l}).$$

Каждое из указанных  $l$  переопределенных уравнений может быть решено прямым методом после умножения его левой и правой частей на матрицу  $\mathbf{Q}_{i_0}^T$ , а именно:

$$\mathbf{Q}_{i_0}^T \mathbf{Q}_{i_0} \mathbf{f}_{i_0,l} = \mathbf{Q}_{i_0}^T \mathbf{q}_{i_0+1,l}.$$

Это уравнение дает решение, которое может рассматриваться как оптимальное, поскольку обеспечивает минимальную разность между левой и правой частями исходного переопределенного уравнения в евклидовой метрике. Таким образом, используя избыточную информацию, определяется вся идентифицируемая матрица.





Собственные значения идентифицируемой матричной функции  $\mathbf{F}_t$  являются функциями дискретного времени, представляя заданное ей преобразование. В общем случае, эти собственные значения являются комплексными, а соответствующие им собственные вектора – неортогональными. При этом значения с ненулевой мнимой частью образуют пары комплексно сопряженных значений, соответствующие преобразованиям в определенном двумерном инвариантном пространстве. Размерность задачи может быть понижена, если рассматривать динамику нескольких первых собственных значений, наибольших по абсолютной величине.

Траектории этих собственных значений на комплексной плоскости используются для попарных сравнений различных фрагментов полётов с целью распознавания их типов и выявления особенностей выполнения, включая аномальность. Для представления динамики каждого собственного значения используется свой марковский процесс с дискретными состояниями и дискретным временем (марковская цепь), при этом рассматриваемая область комплексной плоскости делится на ячейки конечной сеткой с достаточным разрешением, и  $j$ -му состоянию марковской цепи соответствует  $j$ -я ячейка этой сетки ( $j \in \{1, \dots, G\}$ ). Переходы между этими состояниями соответствуют переходам соответствующего собственного значения из одной ячейки в другую.

Выполнение  $s$ -го фрагмента полёта, где  $s \in \{1, \dots, S\}$ , представляется стохастической квадратной матрицей  $\mathbf{U}_s = (u_{ij,s})$  вероятностей переходов между состояниями марковской цепи, где  $u_{ij,s}$  – вероятность перехода из состояния  $j$  в состояние  $i$  ( $i, j \in \{1, \dots, G\}$ ). Динамика вероятностей пребывания в состояниях марковской цепи как функций дискретного времени определяется следующим матричным уравнением:

$$\mathbf{p}_{i+1} = \mathbf{U}_s \mathbf{p}_i,$$

где значения индекса  $i \in \{1, 2, \dots, N\}$  соответствуют дискретным моментам времени; вероятности пребывания в состояниях в момент времени  $i$  представляются как  $\mathbf{p}_i = (p_{i,1}, \dots, p_{i,G})^T$ . Каждый фрагмент полёта имеет свою собственную идентифицированную матрицу  $\mathbf{U}_s$  с уникальным набором вероятностей переходов между состояниями. Идентификация каждой матрицы  $\mathbf{U}_s$  выполняется, используя выборочные оценки частот переходов из одного состояния в другое, полученные для каждого рассматриваемого фрагмента полёта с помощью эмпирических данных.

Заданный  $s$ -й фрагмент полёта представляется последовательностью пройденных состояний  $\mathbf{V}_s = \{v_{1,s}, v_{2,s}, \dots, v_{N,s}\}$ . Правдоподобие фрагмента  $s_j$  по отношению к фрагменту  $s_j$  для  $j$ -й траектории собственных значений может быть представлено как условная вероятность  $P(\mathbf{V}_{e,s_j} | \mathbf{U}_{e,s_j})$ , которая вычисляется по последовательности пройденных состояний  $\mathbf{V}_{e,s_j} = \{v_{e,1,s_j}, v_{e,2,s_j}, \dots, v_{e,N,s_j}\}$  для матрицы  $\mathbf{U}_{e,s_j}$  вероятностей переходов:

$$P(\mathbf{V}_{e,s_j} | \mathbf{U}_{e,s_j}) = \prod_{k=1}^{N-1} u_{e, v_{k+1,s_j}, v_{k,s_j}, s_j}$$

Матрица  $\mathbf{Z}_e = (z_{e,ij})$ , где  $z_{e,ij} = -\ln P(\mathbf{V}_{e,s_j} | \mathbf{U}_{e,s_j})$  и  $i, j \in \{1, \dots, S\}$ , есть матрица взаимных расстояний для исследуемой выборки фрагментов полётов и  $j$ -й траектории собственного значения в метрике правдоподобия траекторий собственных



значений. Полная матрица взаимных расстояний фрагментов  $\mathbf{Z}$  определяется как сумма соответствующих частных матриц для каждой рассматриваемой траектории собственных значений:

$$\mathbf{Z} = \sum_e \mathbf{Z}_e.$$

Вследствие зависимости от последовательности пройденных состояний  $V_s$  марковской цепи, данный метод не очень чувствителен к разумным сдвигам во времени при синхронизации фрагментов полётов.

Основные элементы программной реализации рассмотренного подхода представлены в [11, 21].

### 4.3. Сравнение фрагментов полётов, используя метрику Кохонена в пространстве вейвлет-коэффициентов

Расчет значений метрики Кохонена в пространстве вейвлет-коэффициентов выполняется с помощью одной из разновидностей ассоциативных нейронных сетей – самоорганизующейся карты Кохонена (карты Кохонена). Каждому параметру действий экипажа требуется своя карта Кохонена. На входные слои этих структур подаются вейвлет-коэффициенты, представляющие параметры действий экипажей. Выходные слои (топологические карты) образуют прямоугольные матрицы, состоящие из элементов на радиальных базисных функциях (рис. 3). Для каждого элемента обучающей выборки определяется нейрон, ближайший к нему в евклидовой метрике («выигравший» нейрон). Затем, взяв взвешенную сумму прежнего центра «выигравшего» нейрона и соответствующего элемента обучающей выборки, параметры «выигравшего» нейрона и нейронов из его окрестности корректируются так, чтобы они в большей степени стали похожи на входной элемент, причем реализуемый «сдвиг» центров нейронов делается достаточно малым. В процессе обучения указанная окрестность сжимается до нуля. В результате последовательности таких коррекций определенные области топологической карты итерационно «сдвигаются» к определенным элементам обучающей выборки, при этом близкие входные данные обеспечивают «выигрыш» близко расположенных элементов топологических карт. Таким образом, самоорганизующиеся карты Кохонена учатся «понимать» структуру входных данных. Концепция этих карт построена на аналогии с ассоциативными свойствами человеческого мозга.

Взаимные расстояния между вейвлет-преобразованиями пар исследуемых процессов, представляющих различные действия экипажей, определяются как средние значения модулей двух следующих разностей:

- между расстоянием карты Кохонена от представления первого процесса до его «выигравшего» нейрона и расстоянием карты Кохонена от представления второго процесса до вычисленного «выигрышного» нейрона первого процесса, и, наоборот,
- между расстоянием карты Кохонена от представления второго процесса до его «выигравшего» нейрона и расстоянием карты Кохонена от представления первого процесса до вычисленного «выигрышного» нейрона второго процесса.

Общее взаимное расстояние является суммой соответствующих расстояний для всех параметров полётов. Поэтому, как и в случае евклидовой метрики в простран-



стве вейвлет-коэффициентов, могут быть вычислены оценки относительных вкладов параметров действий в элементы матриц взаимных расстояний.

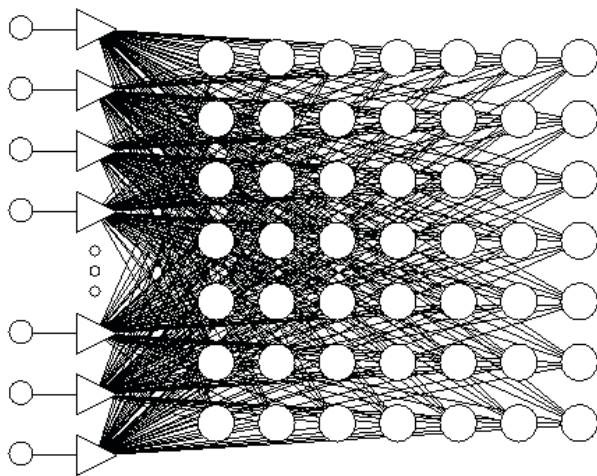


Рис. 3. Входной и выходной слои самоорганизующейся карты Кохонена

Детальное описание процедуры вычисления расстояний в метрике Кохонена представлено в [21]. Пример, иллюстрирующий эффективность использования рассматриваемых метрик при сравнении фрагментов полетов разных типов, обсуждается в работе [11].

#### **4.4. Сравнение паттернов глазодвигательной активности, используя марковскую модель представления динамики перемещений взгляда, связанную с метрикой правдоподобия**

Сравнение динамики перемещений взгляда пилотов по зонам индикации опирается на оценки правдоподобия, количественно определяющие степень согласованности движений взгляда, измеренных при выполнении различных фрагментов полётов.

Для представления динамики перемещений взгляда по зонам индикации используются марковские процессы с дискретными состояниями и дискретным временем (цепи Маркова). В этих моделях зонам индикации соответствуют определённые состояния, образующие полную систему (т.е. данные состояния охватывают все допустимые области, куда может быть направлен взгляд). Пребывание в состоянии определяется нахождением взгляда в соответствующей ему зоне индикации. Такт дискретного времени – в зависимости от объёма накопленных эмпирических данных – либо задаётся определённым (и, как правило, небольшим) интервалом времени, либо соответствует интервалу времени, определяющему переход от одной фиксации взгляда к другой. Вероятности переходов между состояниями являются параметрами модели. Каждому исследуемому фрагменту полёта соответствует своя модель с уникальным набором вероятностей переходов между состояниями.



Перемещения взора характеризуются последовательностями пройденных зон индикации, которые в терминах данной модели интерпретируются как последовательности состояний.

Динамика вероятностей пребывания в состояниях модели как функций дискретного времени определяется следующим матричным уравнением:

$$p(t+1) = \mathbf{M}_1 p(t),$$

где  $t$  – дискретное время;  $0 \leq t \leq T$ ;  $t, T \in N$ ;  $T$  – конечный момент времени;  $N$  – множество натуральных чисел; вектор  $p(t) = (p_0(t), \dots, p_n(t))^T$  – представляет вероятности пребывания в состояниях модели в момент времени  $t$ ;  $n$  – число состояний марковского процесса;  $\mathbf{M}_1 = m_{ij,l}$  – стохастическая матрица вероятностей перехода между состояниями цепи Маркова порядка  $n$ , в которой  $m_{ij,l}$  – вероятность перехода из состояния  $j$  в состояние  $i$  для исследуемого фрагмента полёта  $l$ .

Идентификация рассмотренных марковских моделей для исследуемых фрагментов  $l \in \{0, \dots, z\}$  выполняется, используя экспериментальные данные о частотах переходов из одной зоны индикации в другую. Каждое исследуемый фрагмент  $l$  имеет свою идентифицированную матрицу  $\mathbf{M}_1$ .

Для вычисления вероятностей  $P(v_r | C_l)$  прохождения последовательности из  $r$  состояний марковского процесса при условии принадлежности к исследуемому фрагменту  $l$ , где  $C_l$  – факт принадлежности к исследуемому фрагменту  $l$ , а  $v_r$  – событие, представляющее собой прохождение последовательности из  $r$  состояний, используются элементы матриц  $\mathbf{M}_1$ :

$$P(v_r | C_l) = \prod_{k=1}^{r-1} m_{s_{k+1} s_k, l}$$

Величины  $\ln P(v_r | C_l)$  применяются в качестве оценок правдоподобия прохождения последовательности из  $r$  состояний при условии принадлежности к исследуемому фрагменту  $l$ . Использование оценок правдоподобия вместо соответствующих вероятностей при анализе динамики прохождения состояний модели обусловлено низкими порядками указанных вероятностей, которые неудобны для машинных вычислений.

Основные элементы программной реализации рассмотренного подхода представлены в [21].

## 5. ПРИМЕР: ВЫХОД ИЗ СЛОЖНОГО ПРОСТРАНСТВЕННОГО ПОЛОЖЕНИЯ

На рис. 5–11 представлена последовательность форм, иллюстрирующая этапы работы программно-аппаратного комплекса интеллектуальной поддержки и оценки уровня подготовки экипажа при выполнении выхода из сложного пространственного положения на универсальном стенде прототипирования кабины экипажа, разработанного ФГУП «ГосНИИАС». При сравнении фрагментов полётов использовалась евклидова метрика в пространстве вейвлет-коэффициентов. Итоговые оценки выполнения фрагмента полёта представлены на панели монитора (рис. 11).

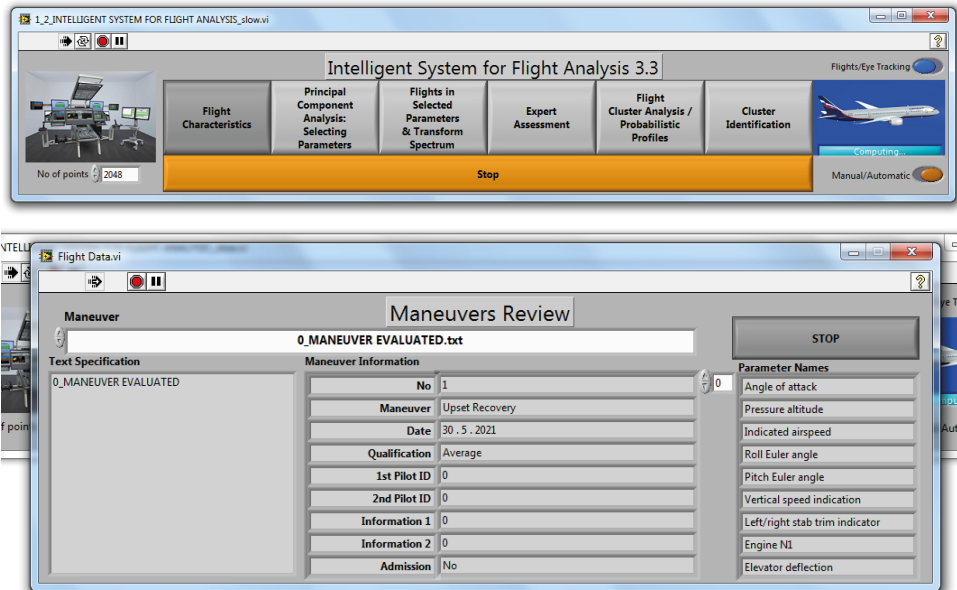


Рис. 5. The Intelligent System for Flight Analysis: информация о выбранном фрагменте полёта

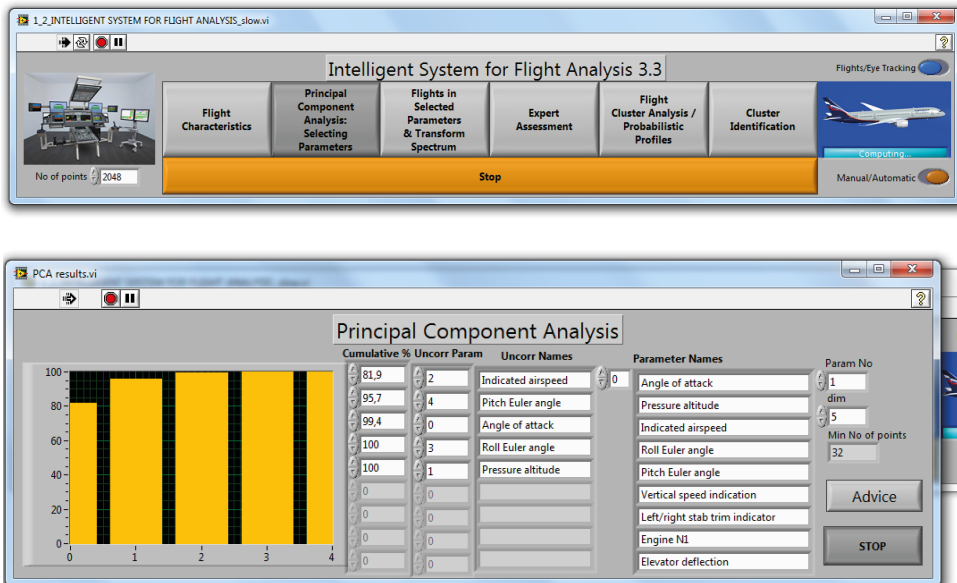


Рис. 6. The Intelligent System for Flight Analysis: выбор представителей групп параметров с высокой внутренней корреляцией с помощью метода главных компонент

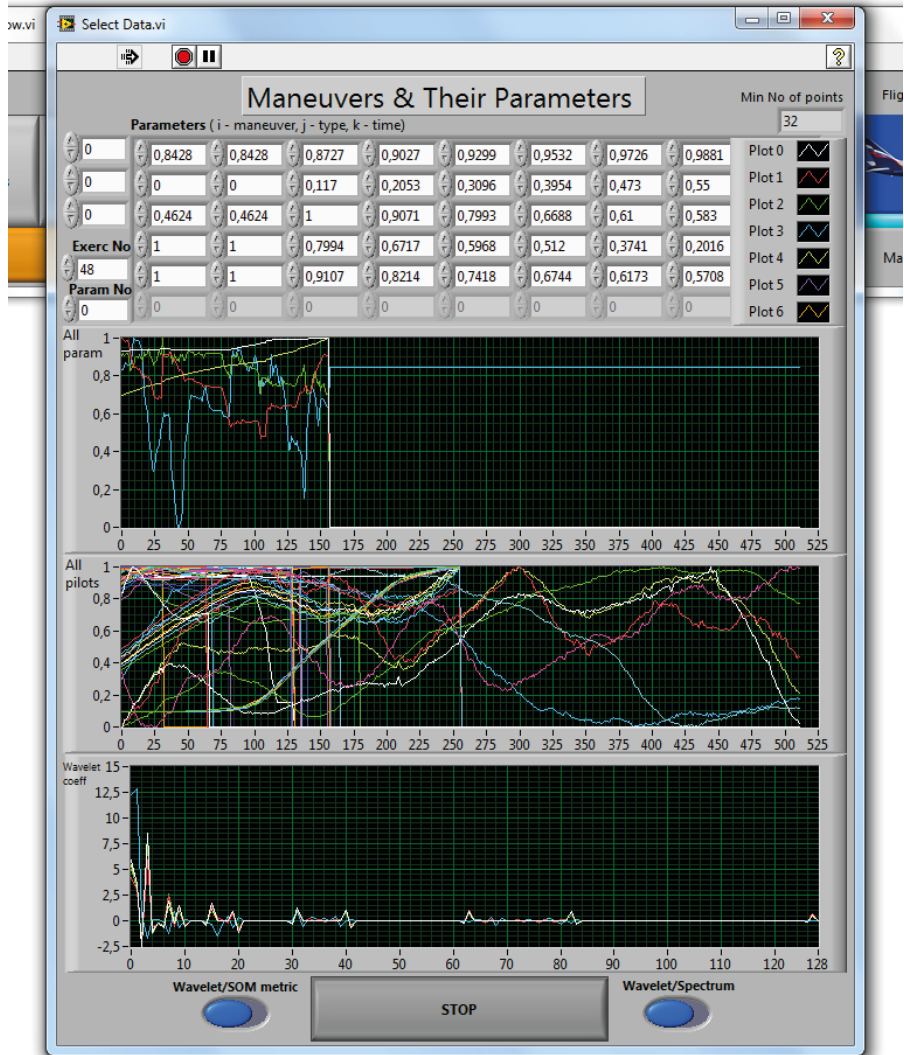
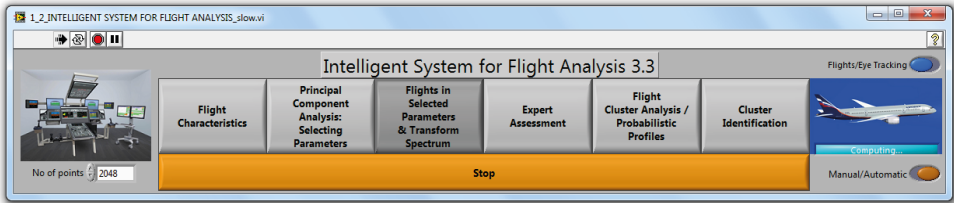


Рис. 7. The Intelligent System for Flight Analysis: представление временных рядов значений параметров соответствующими вейвлет-коэффициентами

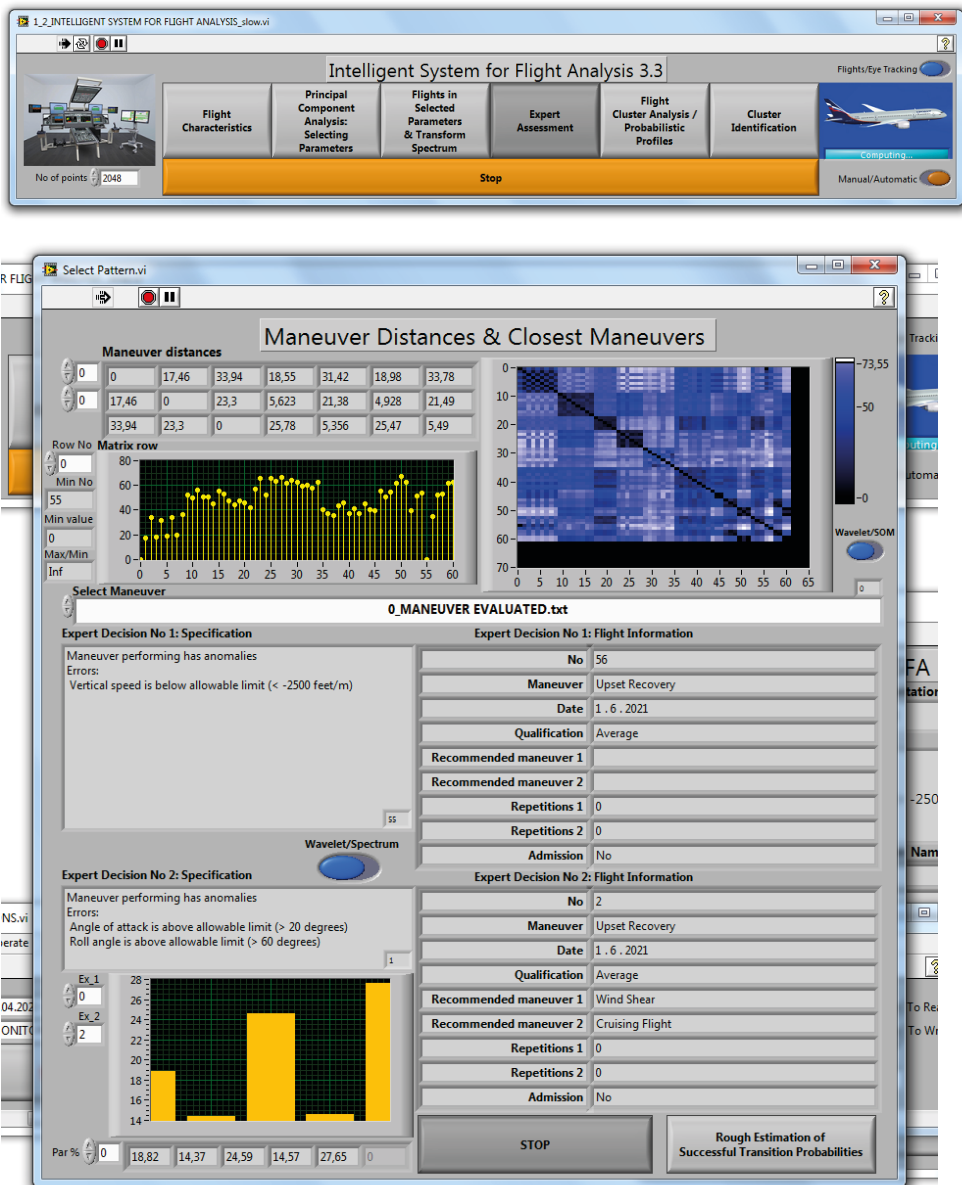


Рис. 8. The Intelligent System for Flight Analysis: расстояния от исследуемого фрагмента полёта до каждого паттерна из базы данных в заданной метрике; матрица взаимных расстояний между паттернами фрагментов полётов в цветовой шкале; информация о паттернах, ближайших к исследуемому; относительные вклады параметров полёта и состояния систем воздушного судна во взаимные расстояния между исследуемым и эталонным фрагментами полёта заданного типа

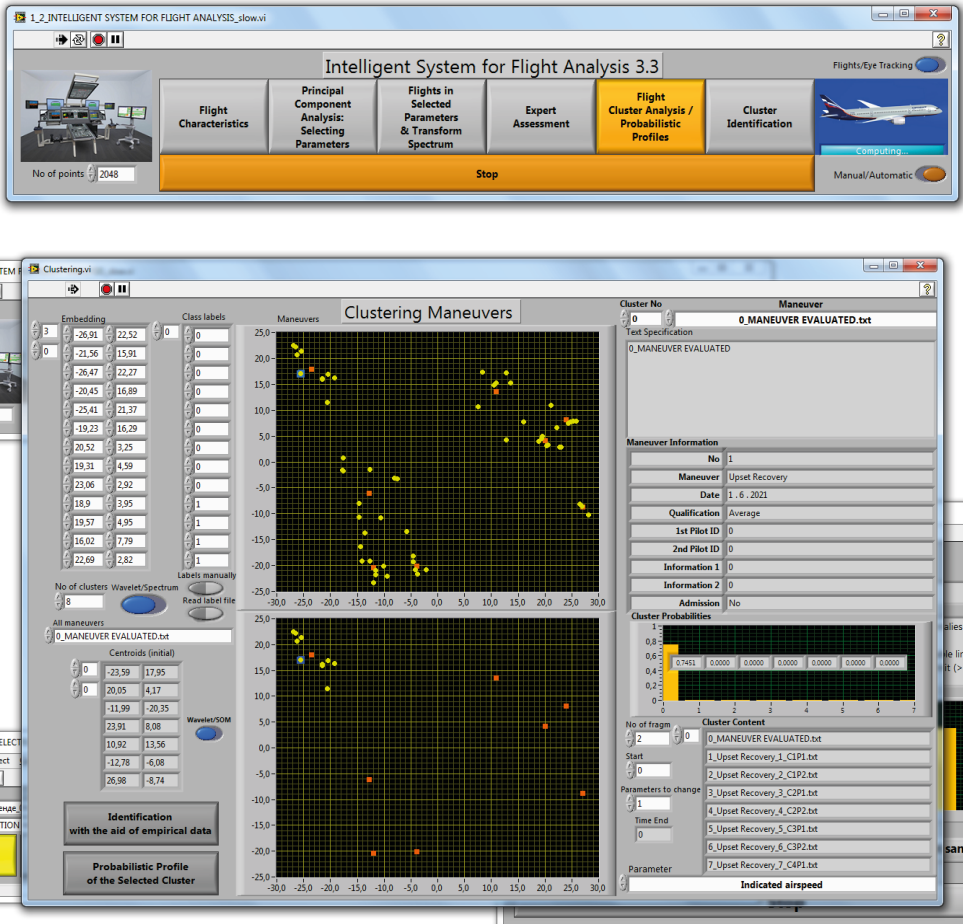


Рис. 9. The Intelligent System for Flight Analysis: паттерны различных типов фрагментов полётов в пространстве шкалирования; результаты их кластеризации, включая центры кластеров; вероятности принадлежности исследуемого фрагмента полёта к заданным кластерам фрагментов полётов разных типов, вычисленные в результате дискриминантного анализа.



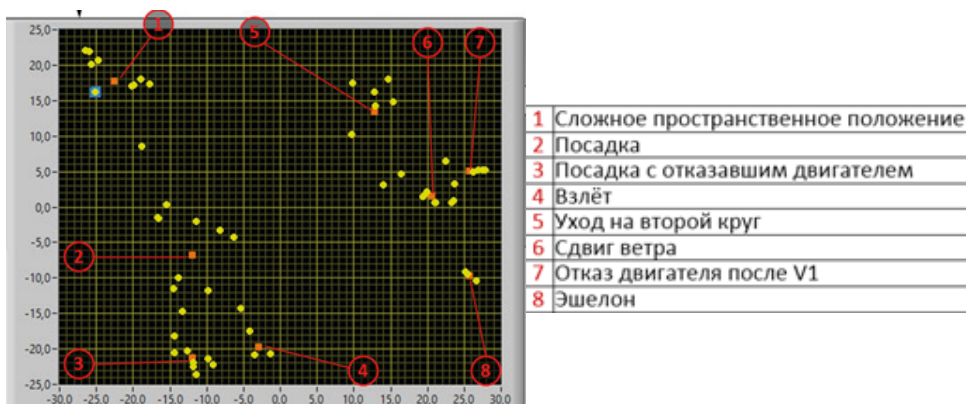


Рис. 10. The Intelligent System for Flight Analysis: кластеризация фрагментов полётов в пространстве шкалирования (каждый кластер соответствует одному из заданных типов фрагментов полётов, указанных в таблице)

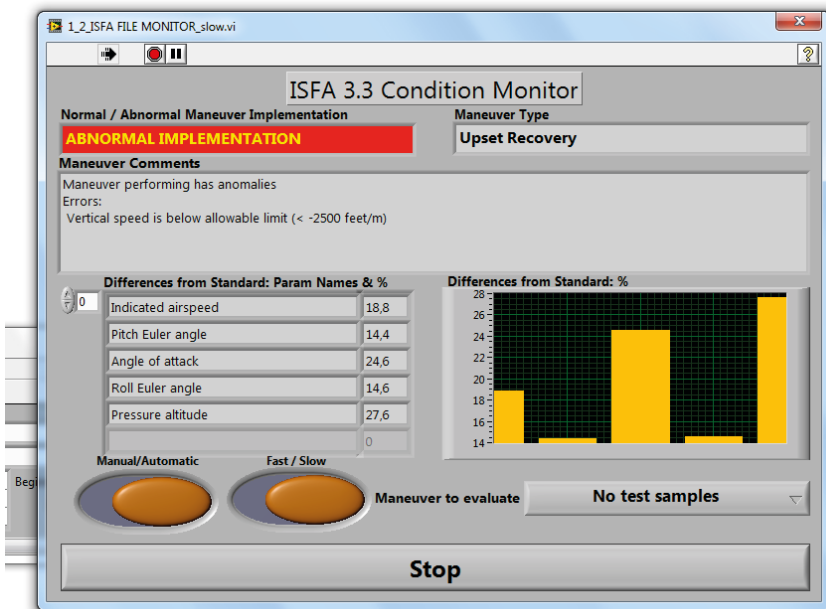


Рис. 11. The Intelligent System for Flight Analysis: оценка результатов пилотирования и состояния экипажа на панели монитора состояния полёта. На эту панель выводятся: сведения о нормальности или аномальности выполняемого фрагмента полёта, распознанный тип маневра, текстовое описание выявленной аномальности – если она имеет место – и процентный вклад наиболее значимых с точки зрения анализа лётных параметров, которыми обусловлены отличия оцениваемого фрагмента полёта от эталонного выполнения манёвра данного типа



## 6. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ И ВЫВОДЫ

1. Разработан новый подход к интеллектуальной поддержке лётных экипажей, основанный на сравнении текущих фрагментов полётов с паттернами, содержащимися в заранее сформированной специализированной базе данных и представляющими эмпирический интеллект системы.
2. Ключевым компонентом данного подхода являются четыре метрики, обеспечивающие значимую дискриминацию анализируемых фрагментов полётов и данных видеоокулографии различных типов и качества исполнения, а именно:
  - евклидова метрика в пространстве вейвлет-коэффициентов,
  - метрика правдоподобия траекторий собственных значений преобразований параметров деятельности,
  - метрика Кохонена в пространстве вейвлет-коэффициентов (с использованием ассоциативных нейронных сетей) и
  - метрика правдоподобия для сравнения траекторий движения взора.
3. Оценка уровня подготовки и состояния экипажа, а также элементы его интеллектуальной поддержки предполагают применение следующих математических методов:
  - метода понижения размерности задачи и определения представителей групп параметров с высокой внутренней корреляцией, построенного на базе метода главных компонентов;
  - многомерного шкалирования как метода разделения в пространстве шкалирования паттернов различных типов фрагментов полётов и глазодвигательной активности пилотов, а также нормальных/аномальных результатов деятельности;
  - кластерного анализа как метода разделения различных типов и уровней качества выполнения фрагментов полётов;
  - дискриминантного анализа как метода решения задачи классификации фрагментов полётов.
4. Разработанный подход продемонстрировал способность к распознаванию аномально выполненных фрагментов полетов и определению параметров, характеризующих ошибки пилота, обеспечивая таким образом последующее выявление их причин.
5. Рассмотренные результаты являются существенным шагом в развитии средств прогнозирования рисков и выявления факторов, способствующих возникновению опасных лётных ситуаций, в том числе в режиме реального времени, и могут применяться:
  - для оценки работы экипажей, включая контроль качества их обучения,
  - поддержки формирования инструкторских оценок,
  - обеспечения современных форм адаптивного обучения экипажей,
  - сравнения различных форматов системы экранной индикации в кабине экипажа,
  - оптимизации компоновки индикаторов кабины экипажа воздушного судна с учетом данных видеоокулографии,



- оценки влияния компоновки индикаторов кабины экипажа воздушного судна и условий полёта на риски возникновения авиационных инцидентов,
- сравнения различных средств и программ обучения лётного состава, а также при проектировании современных летательных аппаратов.

### *Литература*

1. Aircraft trajectory clustering techniques using circular statistics. Yellowstone Conference Center, Big Sky, Montana, 2016. IEEE.
2. Bastani V., Marcenaro L., Regazzoni C. Unsupervised trajectory pattern classification using hierarchical Dirichlet Process Mixture hidden Markov model // 2014 IEEE International Workshop on Machine Learning for Signal Processing (MLSP) / IEEE. 2014. Pp. 1–6.
3. Eerland W.J., Box S. Trajectory Clustering, Modelling and Selection with the focus on Airspace Protection // AIAA Infotech@ Aerospace. AIAA, 2016. Pp. 1–14.
4. Enriquez M. Identifying temporally persistent flows in the terminal airspace via spectral clustering // Tenth USA/Europe Air Traffic Management Research and Development Seminar (ATM2013) / Federal Aviation Administration (FAA) and EUROCONTROL. Chicago, IL, USA: 2013. June 10–13.
5. Enriquez M., Kurcz C. A Simple and Robust Flow Detection Algorithm Based on Spectral Clustering // International Conference on Research in Air Transportation (ICRAT) / Federal Aviation Administration (FAA) and EUROCONTROL. – Berkeley, CA, USA: 2012. May 22–25.
6. Faure C., Bardet J.M., Olteanu M., Lacaille J. Using Self-Organizing Maps for Clustering and Labelling Aircraft Engine Data Phases. In: WSOM (2017): 96–103.
7. Gaffney S., Smyth P. Joint probabilistic curve clustering and alignment // In Advances in Neural Information Processing Systems. Vol. 17. Cambridge, MA: MIT Press, 2005. Pp. 473–480.
8. Gaffney S., Smyth P. Trajectory clustering with mixtures of regression models // Proceedings of the fifth ACM SIGKDD international conference on Knowledge discovery and data mining. 1999. Pp. 63–72.
9. Gariel M., Srivastava A., Feron E. Trajectory clustering and an application to airspace monitoring // IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems. 2011. Vol. 12, no. 4. Pp. 1511–1524.
10. Grevtsov N. Synthesis of control algorithms for aircraft trajectories in time optimal climb and descent // Journal of Computer and Systems Sciences International. 2008. Vol. 47, no. 1. Pp. 129–138.
11. Kuravsky L.S. and Yuryev G.A. A novel approach for recognizing abnormal activities of operators of complex technical systems: three non-standard metrics for comparing performance patterns, International Journal of Advanced Research in Engineering and Technology (IJARET), 11(4), 2020, pp. 119–136. <http://www.iaeme.com/IJARET/issues.asp?JType=IJARET&VType=11&IType=4>
12. Kuravsky L.S., Yuryev G.A. Detecting Abnormal Activities of Operators of Complex Technical Systems and their Causes Basing on Wavelet Representations, International Journal of Civil Engineering and Technology (IJCIET) 10(2), 2019, pp. 724–742. <http://www.iaeme.com/IJCIET/issues.asp?JType=IJCIET&VType=10&IType=2>.
13. Kuravsky L.S., Yuryev G.A., Zlatomrezhev V.I. New approaches for assessing the activities of operators of complex technical systems. Eksperimental'naya psikhologiya = Experimental psychology (Russia), 2019, vol. 12, no. 4, pp. 27–49. doi:10.17759/exppsy.2019120403.
14. Kuravsky L.S., Yuryev G.A., Zlatomrezhev V.I., Yuryeva N.E. Assessing the Aircraft Crew Actions with the Aid of a Human Factor Risk Model. Eksperimental'naya psikhologiya = Experimental Psychology (Russia), 2020. Vol. 13, no. 2, pp. 153–181. DOI: <https://doi.org/10.17759/exppsy.2020130211>.



15. *Laxhammar R., Falkman G.* Online learning and sequential anomaly detection in trajectories // *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*. 2014. Vol. 36, no. 6. Pp. 1158–1173.
16. *Li Z., et al.* Incremental clustering for trajectories // *Database Systems for Advanced Applications. Lecture Notes in Computer Science*. 2010. Vol. 5982. Pp. 32–46.
17. *Liu H., Li J.* Unsupervised multi-target trajectory detection, learning and analysis in complicated environments // *2012 21st International Conference on Pattern Recognition (ICPR) / IEEE*. 2012. Pp. 3716–3720.
18. *Rintoul M., Wilson A.* Trajectory analysis via a geometric feature space approach // *Statistical Analysis and Data Mining: The ASA Data Science Journal*. 2015.
19. *Wei J., et al.* Design and Evaluation of a Dynamic Sectorization Algorithm for Terminal Airspace // *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*. 2014. Vol. 37, no. 5. Pp. 1539–1555.
20. *Wilson A., Rintoul M., Valicka C.* Exploratory Trajectory Clustering with Distance Geometry // *International Conference on Augmented Cognition /Springer*. 2016. Pp. 263–274.
21. Отчёт о НИР «Разработка математических моделей и методов оценки уровня подготовки экипажа на основе анализа параметров полета, поступающих в процессе выполнения летных упражнений и данных видеоокулографии», ГосНИИАС, Москва, 2020.



## Principles of Developing a Software and Hardware Complex for Crew Intelligent Support and Training Level Assessment

**Ivan I. Greshnikov\***

State Research Institute of Aviation Systems (GosNIIAS), Moscow, Russia  
ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-5474-3094>  
e-mail: [vvanes@mail.ru](mailto:vvanes@mail.ru)

**Lev S. Kuravsky\*\***

Moscow State University of Psychology and Education (MSUPE), Moscow, Russia  
ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-3375-8446>  
e-mail: [l.s.kuravsky@gmail.com](mailto:l.s.kuravsky@gmail.com)

**Grigory A. Yuryev\*\*\***

Moscow State University of Psychology and Education (MSUPE), Moscow, Russia  
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-2960-6562>  
e-mail: [g.a.yuryev@gmail.com](mailto:g.a.yuryev@gmail.com)

Presented is a new approach to aircraft crew intelligent support, which is based on comparing flight fragments (maneuvers) under study with the relevant patterns contained in the database and representing the system “empirical intelligence”. Principal components of this approach are four new metrics for comparing flight fragments, viz.: the Euclidean metric in the space of wavelet coefficients; the likelihood metric of eigenvalue trajectories for transformations of activity parameters; the Kohonen metric in the space of wavelet coefficients; the likelihood metric for

### For citation:

Greshnikov I.I., Kuravsky L.S., Yuryev G.A. Principles of Developing a Software and Hardware Complex for Crew Intelligent Support and Training Level Assessment. *Modelirovanie i analiz dannykh = Modelling and Data Analysis*, 2021. Vol. 11, no. 2, pp. 5–30. DOI: <https://doi.org/10.17759/mda.2021110201> (In Russ., abstr. in Engl.).

\***Ivan I. Greshnikov**, Head of the Sector, State Research Institute of Aviation Systems (GosNIIAS), Moscow, Russia, ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-5474-3094>, e-mail: [vvanes@mail.ru](mailto:vvanes@mail.ru)

\*\***Lev S. Kuravsky**, DSc (Engineering), Professor, Dean of the Computer Science Faculty, Head of the Department of Applied Informatics and Multimedia Technologies of the Faculty of Information Technologies, Moscow State University of Psychology and Education (MGPPU), Moscow, Russia, ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-3375-8446>, e-mail: [l.s.kuravsky@gmail.com](mailto:l.s.kuravsky@gmail.com)

\*\*\***Grigory A. Yuryev**, PhD (Physical and Mathematical Sciences), Associate Professor, Professor of the Department of Applied Informatics and Multimedia Technologies, Deputy Dean of the Computer Science Faculty for Research, Head of the Laboratory for Mathematical Psychology and Applied Software of the Center of Information Technologies for Psychological Research, Moscow State University of Psychology and Education (MGPPU), Moscow, Russia, ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-2960-6562>, e-mail: [g.a.yuryev@gmail.com](mailto:g.a.yuryev@gmail.com)



comparing gaze trajectories. Features of the presented approach are: the presence of an “intelligent component” that is contained in empirical data and can be flexibly changed as they accumulate; the use of integral comparisons of the flight fragments under study and video oculography data with relevant patterns of various types and performance quality from a specialized database, with transferring characteristics of the nearest pattern from this specialized database to the fragment under study; applying a complex combination of the methods for stochastic processes analysis and multivariate statistical techniques.

**Keywords:** operators of complex technical systems, intelligent crew support, crew training level assessment, video oculography, likelihood metric, Kohonen metric.

### **References**

1. Aircraft trajectory clustering techniques using circular statistics. Yellowstone Conference Center, Big Sky, Montana, 2016. IEEE.
2. Bastani V., Marcenaro L., Regazzoni C. Unsupervised trajectory pattern classification using hierarchical Dirichlet Process Mixture hidden Markov model // 2014 IEEE International Workshop on Machine Learning for Signal Processing (MLSP) / IEEE. 2014. Pp. 1–6.
3. Eerland W.J., Box S. Trajectory Clustering, Modelling and Selection with the focus on Airspace Protection // AIAA Infotech@ Aerospace. AIAA, 2016. Pp. 1–14.
4. Enriquez M. Identifying temporally persistent flows in the terminal airspace via spectral clustering // Tenth USA/Europe Air Traffic Management Research and Development Seminar (ATM2013) / Federal Aviation Administration (FAA) and EUROCONTROL. Chicago, IL, USA: 2013. June 10–13.
5. Enriquez M., Kurcz C. A Simple and Robust Flow Detection Algorithm Based on Spectral Clustering // International Conference on Research in Air Transportation (ICRAT) / Federal Aviation Administration (FAA) and EUROCONTROL. – Berkeley, CA, USA: 2012. May 22–25.
6. Faure C., Bardet J.M., Olteanu M., Lacaille J. Using Self-Organizing Maps for Clustering and Labelling Aircraft Engine Data Phases. In: WSOM (2017): 96–103.
7. Gaffney S., Smyth P. Joint probabilistic curve clustering and alignment // In Advances in Neural Information Processing Systems. Vol. 17. Cambridge, MA: MIT Press, 2005. Pp. 473–480.
8. Gaffney S., Smyth P. Trajectory clustering with mixtures of regression models // Proceedings of the fifth ACM SIGKDD international conference on Knowledge discovery and data mining. 1999. Pp. 63–72.
9. Gariel M., Srivastava A., Feron E. Trajectory clustering and an application to airspace monitoring // IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems. 2011. Vol. 12, no. 4. Pp. 1511–1524.
10. Grevtsov N. Synthesis of control algorithms for aircraft trajectories in time optimal climb and descent // Journal of Computer and Systems Sciences International. 2008. Vol. 47, no. 1. Pp. 129–138.
11. Kuravsky L.S. and Yuryev G.A. A novel approach for recognizing abnormal activities of operators of complex technical systems: three non-standard metrics for comparing performance patterns, International Journal of Advanced Research in Engineering and Technology (IJARET), 11(4), 2020, pp. 119–136. <http://www.iaeme.com/IJARET/issues.asp?JType=IJARET&V-Type=11&IType=4>
12. Kuravsky L.S., Yuryev G.A. Detecting Abnormal Activities of Operators of Complex Technical Systems and their Causes Basing on Wavelet Representations, International Journal of Civil Engineering and Technology (IJCIET) 10(2), 2019, pp. 724–742. <http://www.iaeme.com/IJCIET/issues.asp?JType=IJCIET&VType=10&IType=2>



13. Kuravsky L.S., Yuryev G.A., Zlatomrezhev V.I. New approaches for assessing the activities of operators of complex technical systems. *Eksperimental'naya psikhologiya = Experimental psychology (Russia)*, 2019, vol. 12, no. 4, pp. 27–49. doi:10.17759/expsy.2019120403.
14. Kuravsky L.S., Yuryev G.A., Zlatomrezhev V.I., Yuryeva N.E. Assessing the Aircraft Crew Actions with the Aid of a Human Factor Risk Model. *Eksperimental'naya psikhologiya = Experimental Psychology (Russia)*, 2020. Vol. 13, no. 2, pp. 153–181. DOI: <https://doi.org/10.17759/expsy.2020130211>.
15. Laxhammar R., Falkman G. Online learning and sequential anomaly detection in trajectories // *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*. 2014. Vol. 36, no. 6. Pp. 1158–1173.
16. Li Z., et al. Incremental clustering for trajectories // *Database Systems for Advanced Applications. Lecture Notes in Computer Science*. 2010. Vol. 5982. Pp. 32–46.
17. Liu H., Li J. Unsupervised multi-target trajectory detection, learning and analysis in complicated environments // 2012 21st International Conference on Pattern Recognition (ICPR) / IEEE. 2012. Pp. 3716–3720.
18. Rintoul M., Wilson A. Trajectory analysis via a geometric feature space approach // *Statistical Analysis and Data Mining: The ASA Data Science Journal*. 2015.
19. Wei J., et al. Design and Evaluation of a Dynamic Sectorization Algorithm for Terminal Airspace // *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*. 2014. Vol. 37, no. 5. Pp. 1539–1555.
20. Wilson A., Rintoul M., Valicka C. Exploratory Trajectory Clustering with Distance Geometry // *International Conference on Augmented Cognition /Springer*. 2016. Pp. 263–274.
21. Research report “Development of mathematical models and methods for assessing the level of crew training based on the analysis of flight parameters received during flight exercises and video oculography data”, GosNIIAS, Moscow, 2020.

УДК 519.237.5

## Упорядоченные сети частных корреляций в психологических исследованиях

*Артеменков С.Л.\**

Московский государственный психолого-педагогический университет  
(ФГБОУ ВО МГППУ), г. Москва, Российская Федерация  
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-1619-2209>  
e-mail: [slart@inbox.ru](mailto:slart@inbox.ru)

Сетевое моделирование, которое появилось в последние годы, может с успехом применяться к рассмотрению связей между измеряемыми психологическими переменными. В этом контексте психологические переменные понимаются как непосредственно влияющие друг на друга, а не как следствие латентного конструкта. В статье описаны методы регуляризации, которые могут использоваться для эффективной оценки разреженной и интерпретируемой структуры сети на основе частных корреляций психологических измерений. Представлен обзор процедуры регуляризации глассо с использованием выбора модели EBIC для оценки упорядоченной разреженной сети частных корреляций. Рассмотрены вопросы выполнения этого анализа в R при наличии нормального и не нормального распределения данных с учетом влияния гиперпараметра, который устанавливается исследователем вручную. Рассмотренный подход интересен также как способ визуализации возможных каузальных связей между переменными. Данный обзор устраняет пробел, относящийся к отсутствию доступного описания на русском языке этого пока малораспространенного в России и в тоже время многообещающего подхода.

**Ключевые слова:** корреляционный анализ, сети частных корреляций, регуляризация, моделирование сетей в психологии, язык R.

### Для цитаты:

*Артеменков С.Л.* Упорядоченные сети частных корреляций в психологических исследованиях // Моделирование и анализ данных. 2021. Том 11. № 2. С. 31–50. DOI: <https://doi.org/10.17759/mda.2021110202>

\**Артеменков Сергей Львович*, кандидат технических наук, Московский государственный психолого-педагогический университет (ФГБОУ ВО МГППУ), г. Москва, Российская Федерация, ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-1619-2209>, e-mail: [slart@inbox.ru](mailto:slart@inbox.ru)





## 1. ВВЕДЕНИЕ

Корреляционный анализ является одним из самых распространенных методов статистики и представляет собой метод обработки статистических данных, заключающийся в изучении коэффициентов корреляции между переменными. Эти коэффициенты помогают выявить меру линейной связи между соответствующими переменными. «Хотя корреляция прямо не указывает на причинную связь, она может быть ключом к разгадке причин» [7, с. 105].

При существовании ряда связанных между собой переменных, их корреляционный анализ удобно визуализировать различными способами (представления в виде таблиц, коррелограмм, тепловых карт и графов). В частности, весьма удобным и наглядным является представление связей ряда переменных в виде графа, состоящего из сети вершин, соединенных ребрами графа на множестве точек плоскости (или пространства) [1]. При этом вершины графа обозначают исходные переменные, а ребра соответствуют корреляционным связям. В такой общей сетевой модели вес каждого ребра определяется величиной коэффициента корреляции между соответствующими узлами. Величиной веса может определяться и толщина ребра в то время, как длина ребра в сети часто определяется, как обратная величина к весу ребра. Два сильно связанных узла поэтому располагаются ближе друг к другу. Такие сети часто называются взвешенными. Как правило, соединения в сети визуализируются с использованием разных обозначений для отрицательных и положительных корреляций. Например, в цветных изображениях: красные линии указывают отрицательные корреляции, а зеленые (или синие) линии – положительные. В черно-белом варианте положительные корреляции обычно обозначаются непрерывной линией, а отрицательные – пунктирной линией [2].

В последние годы наблюдается все более широкое использование сетевого моделирования для предварительных исследований психологического поведения в качестве альтернативы моделированию конструкторов как латентных переменных [2, 13, 43]. В этих так называемых психологических сетях [20] узлы представляют собой психологические переменные, такие как оценки состояний, настроений, симптомов или отношений, в то время как ребра (связи, соединяющие два узла) представляют неизвестные статистические отношения, которые необходимо оценить, что создает новые проблемы для статистического вывода. В результате этот класс сетевых моделей отличается от социальных сетей, в которых связи известны [49]. Существует большое количество технической литературы по оценке сетевых моделей [24, 25, 27, 34]. Тем не менее, эта литература в основном представлена на английском языке, часто требует довольно глубоких математических знаний и не фокусируется на уникальных проблемах, связанных с анализом психологических данных.

При всей простоте и наглядности корреляционного анализа (в частности, в его сетевом представлении) корреляционное исследование может приводить к ложным выводам о наличии причинно-следственной связи между парами отдельных признаков. Общие коэффициенты корреляции устанавливают лишь статистические взаимосвя-



зи, которые могут иметь место, например, в следствие влияния других переменных. Таким образом, представление сетей общих корреляций мало говорит о реальных каузальных отношениях между переменными даже после проверки условий их значимости, поскольку кроме совместных вариаций переменных они должны иметь правильное хронологическое упорядочение и должно быть исключено возможное влияние других факторов [6].

В связи с этим для установления реальных взаимосвязей между переменными часто важно рассматривать коэффициенты частных корреляций (Partial Correlation), которые показывают степень (тесноту) взаимосвязи двух переменных относительно друг друга, без учета влияния всех других переменных. В настоящее время сеть частных корреляций является распространенной моделью, используемой для оценки психологических сетей на основе непрерывных данных. Частные корреляционные сети обычно оцениваются с использованием методов регуляризации, происходящих из области машинного обучения. Было показано, что эти методы хорошо работают при восстановлении истинной структуры сети [24, 25, 34]. Регуляризация включает в себя оценку статистической модели с дополнительным штрафом за сложность модели. Это приводит к тому, что оцениваемая модель является разреженной: многие параметры оцениваются как точно нулевые. При оценке сетей это означает, что связи, которые могут быть ложными, удаляются из модели, что приводит к сетям, которые проще интерпретировать. Таким образом, регуляризация, позволяет осуществить упорядочение сети, включающие как выбор конкретной модели, так и оценку параметров сети.

Регуляризованная оценка сети используется в значительном количестве публикаций в различных областях, таких как клиническая психология [18, 23], психиатрия [14, 28], исследования личности [8, 17, 29] и медицинские науки [38]. Общим для этих статей является то, что они предполагают, что наблюдаемые переменные каузально влияют друг на друга, что приводит к сетевым моделям, которые позволяют понять связи между симптомами психопатологии (например, печальное настроение, усталость и бессонница), элементами личностных качеств, таких как сознательность (например, импульсный контроль, упорядоченность и трудолюбие), или поведением, связанным со здоровьем (например, ощущение полноты энергии, легкое заболевание и трудности в выполнении повседневных задач). С этой сетевой психометрической точки зрения, корреляции между элементами проистекают из взаимной ассоциации между переменными, которая отличается от традиционной точки зрения, где корреляция между измеряемыми переменными объясняется с помощью введения латентных конструкторов [2, 43].

В результате такие психометрические сети могут предложить другое представление о конструкторах, как кластерах определенных взаимосвязанных характеристик: синдромы, такие как депрессия или тревожное расстройство, в области психических расстройств [12, 14], аспекты или области личности, такие как экстраверсия или невротизм в исследованиях личности [44], области исследований здоровья [31] и динамических факторов риска [10]. В отечественных работах сетевые методы были использованы для исследования одаренности [4, 5, 11].



При этом важно отметить, что при использовании методов сетевого корреляционного анализа необязательно придерживаться только представленной выше сетевой перспективы. Психологические сети в целом могут быть мощными инструментами для изучения мультиколлинеарности и прогнозов медиации, а также могут использоваться для выделения латентных переменных и каузальных связей [2, 3].

Цель данной статьи состоит в том, чтобы представить на русском языке введение в регуляризацию сетей частных корреляций, обрисовать возможности для построения и оценки моделей этих сетей, имеющиеся, в частности, в языке программирования R, и рассмотреть некоторые вопросы, возникающие при сетевом корреляционном анализе в области психологии. Представленные положения и результаты основаны на ряде зарубежных работ [16, 20, 21].

## 2. СЕТИ ЧАСТНЫХ КОРРЕЛЯЦИЙ

Наиболее часто используемая основа для построения психологической сети на основе данных, которые можно считать многомерными нормальными, – это оценка сетевых связей в виде коэффициентов частных корреляций [13]. Эти коэффициенты, также известные как условные независимые ассоциации, варьируются от  $-1$  до  $1$  и кодируют оставшуюся связь между двумя узлами после контроля всей другой возможной информации. Частные корреляционные сети также называют графами концентрации или Гауссовскими графическими моделями, и они являются частью более общего класса статистических моделей, называемых попарно марковскими случайными полями [30].

После того, как частные корреляции оценены, они могут быть визуализированы во взвешенной сетевой структуре (в виде графа, описанного во введении). Каждый узел представляет переменную, а каждое ребро представляет, что две переменные не являются независимыми после согласования всех переменных в наборе данных. Каждое из ребер сети имеет вес, равный коэффициенту частной корреляции между соответствующими двумя узлами. Всякий раз, когда частная корреляция точно равна нулю, между двумя узлами не проводится ребра, что указывает на то, что две переменные являются независимыми после контроля всех других переменных в сети.

Несколько различных пакетов программного обеспечения могут быть использованы для визуализации сети. Например, можно использовать свободно доступные пакеты программного обеспечения `cytoscape`, `gephi` или R-пакеты `qgraph`, `igraph`, `Rgraphviz` или `ggraph` [40]. Пакет `qgraph` обычно используется в психологической литературе, так как он автоматизирует много шагов для графического построения взвешенных сетей и включает различные методы их оценки. При изображении сетевой модели более широкие и насыщенные линии указывают на более сильные частные корреляции.

### 2.1. Вычисление частных корреляций

В теории существует несколько способов вычисления коэффициентов частных корреляций. Для быстрого получения частных корреляций обычно используются

два метода. Во-первых, частные корреляции могут быть получены непосредственно из обратной матрицы дисперсии-ковариации. Если  $y$  представляет набор переменных измерений, представленных многомерным нормальным распределением, которое, без потери общности, можно считать центрированным, а  $\mathbf{K}$  обозначает инвертированную матрицу дисперсии-ковариации  $S$ , то элементы  $k_{ij}$  (строка  $i$ , столбец  $j$  в  $\mathbf{K}$ ) могут быть стандартизированы для получения коэффициентов частных корреляций между переменной  $y_i$  и переменной  $y_j$  после согласования со всеми другими переменными [32]:

$$\text{Cor}(y_i, y_j | y_{-(i,j)}) = \frac{k_{ij}}{\sqrt{k_{ii}}\sqrt{k_{jj}}}.$$

Альтернативный способ получения коэффициентов частных корреляций заключается в использовании уравнений линейных регрессий по всем узлам [34]. После проведения множественной регрессии коэффициент частной корреляции между  $y_i$  и  $y_j$  определяется наклоном линии регрессии, предсказывающей одну переменную из другой или наоборот [41]. Если частная корреляция, полученная из регрессионной модели одного узла, немного отличается от регрессионной модели для другого узла, то получить единственную оценку можно путем усреднения двух оцененных частных корреляций.

## 2.2. Интерпретация сетей частных корреляций

Сети частных корреляций допускают несколько мощных выводов. Во-первых, они позволяют моделировать уникальные взаимодействия между переменными. Если переменная  $A$  коррелирует с  $B$ , а  $B$  коррелирует с  $C$ , то мы естественно ожидаем, что  $A$  коррелирует с  $C$ . Безусловная нулевая корреляция между  $A$  и  $C$  будет неожиданной, поскольку к такой корреляционной ситуации приводят немного причинных структур. Два возможных здесь варианта предполагают, что  $B$  является общим эффектом от  $A$  и  $C$  или две ортогональные латентные переменные вызывают ковариацию между  $A$  и  $B$  и между  $B$  и  $C$ . Если данные являются нормальными, частные корреляции могут быть интерпретированы как попарные взаимодействия (что не следует путать с эффектами взаимодействия двух переменных на выходной переменной). Для моделирования корреляций достаточно использовать только две пары: взаимодействие между  $A$  и  $B$  и взаимодействие между  $B$  и  $C$ . Эта модель будет содержать одну степень свободы и таким образом приводит к проверяемой гипотезе. Такая точка зрения сходна логлинейному моделированию категориальных данных [9], которое структурно сопоставимо с сетью частных корреляций.

Сеть частных корреляций отображает мультиколлинеарность и прогнозирует медиацию, поскольку частные корреляции тесно связаны с коэффициентами, полученными в моделях множественной регрессии: когда независимая переменная не предсказывает зависимую переменную, мы не ожидаем, что в сети будет иметься ребро. Сила частной корреляции, кроме того, напрямую связана с силой коэффициента регрессии. Таким образом, ребра, связанные с одним узлом, показывают исследователю ожидаемый результат анализа множественной регрессии. В отличие от того,



что можно увидеть из анализа множественной регрессии одной зависимой переменной, сеть также показывает, какие переменные будут предсказывать независимые переменные. Связывая отдельные модели множественной регрессии, сети частных корреляций позволяют отображать линейное прогнозирование и мультиколлинеарность среди всех переменных. Это позволяет получить представление о предсказательном посредничестве: сеть, в которой две переменные не связаны напрямую, а косвенно связаны (например,  $A - B - C$ ), указывает на то, что  $A$  и  $C$  могут быть коррелированы, но любой прогнозирующий эффект от  $A$  до  $C$  (или наоборот) опосредуется  $B$ .

Частные корреляции могут указывать на возможные причинные пути. Отношения условной независимости, например, кодируемые коэффициентами частных корреляций, играют решающую роль в причинно-следственной связи [39]. Когда предполагается, что все соответствующие переменные наблюдаются (то есть, нет латентных переменных), частная корреляция между переменными  $A$  и  $B$  может быть не нулевой, только если  $A$  вызывает  $B$ ,  $B$  вызывает  $A$ , существует взаимная связь между  $A$  и  $B$  или  $A$  и  $B$  вызывают третью переменную в сети [30, 39].

В связи с этим, сети частных корреляций можно рассматривать как исследовательские структуры, которые позволяют генерировать гипотезы, указывающие на возможные причинные эффекты. Хотя существуют исследовательские алгоритмы, целью которых является обнаружение направленных (причинных) сетей, они опираются на сильные предположения, такие как ацикличность (переменная не может в конечном итоге вызывать себя, например,  $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow A$ ), и на нее сильнее влияют латентные переменные, вызывая ковариацию (латентные переменные будут вызывать направленные ребра между наблюдаемыми переменными, что подразумевает сильную причинную гипотезу). Кроме того, эти модели нелегко идентифицировать или параметризовать: многие эквивалентно ориентированные модели могут в равной степени соответствовать данным, при разной параметризации. Сети с частными корреляциями, с другой стороны, могут быть хорошо идентифицированы (без эквивалентных моделей) и легко параметризуются с использованием коэффициентов частных корреляций.

Таким образом, оперативная оценка неориентированных сетей предлагает привлекательную альтернативу исследовательской оценке направленных сетей, которые характеризуются проблемными и плохо идентифицированными направлениями и величинами воздействий. Следует отметить, что сеть частных корреляций не должна интерпретироваться как сеть, определяющая скелет причинно-следственной модели (направленная сеть со снятыми наконечниками стрелок). В частности, преимущество сети частных корреляций заключается в возможности показа взаимодействий, обусловливающих такой общий эффект, который обычно связывают с существованием латентных переменных. Кроме того, латентные переменные могут приводить к ребрам как в направленных, так и в ненаправленных сетях.

Кластеры в сети могут выделять латентные переменные. Хотя частные корреляции направлены на выделение уникальной дисперсии между двумя переменными, они сохраняют общую дисперсию из-за внешних источников, которые не могут быть



полностью разделены путем контроля других переменных в сети. В результате, если латентная переменная вызывает ковариацию между двумя или более переменными в сети, ожидается, что все эти переменные будут связаны в сети, образуя кластер [2, 26]. Такие кластеры могут указывать на латентные переменные.

### 3. РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ ЛАССО

Как показано выше, частные корреляции можно легко оценить путем инвертирования выборочной дисперсионно-ковариационной матрицы или путем выполнения последовательных множественных регрессий и стандартизации полученных коэффициентов. Однако оценка параметров по данным всегда сопровождается вариациями выборки, что приводит к тому, что оценки никогда не бывают точно равны нулю. Даже когда две переменные условно независимы, в сети могут появляться не нулевые (хотя обычно небольшие) частные корреляции, которые будут представлены как очень слабые ребра в сети. Эти связи условно называют «ложными» или «ложными срабатываниями» [16]. Чтобы предотвратить чрезмерную интерпретацию и сбой в репликации оценочных сетевых структур, важной целью при оценке сети является ограничение количества ложных соединений. Методы, которые позволяют уменьшить количество ложных соединений, называют методами регуляризации сети. При этом можно видеть, что не регуляризованные сети частных корреляций уже позволяют уменьшить количество ложных срабатываний в сети с предельными коэффициентами корреляции [16].

Обычный способ осуществить регуляризацию сети состоит в том, чтобы проверить все частные корреляции на статистическую значимость и удалить все ребра, которые не достигают определенной степени значимости [19]. Однако это создает проблему многократного тестирования, и исправление этой проблемы (например, с помощью коррекции Бонферрони) приводит к потере информативности [16].

Практический способ решения проблемы произвольного выбора сети состоит в построении сетей на основе их различных вариантов и рассмотрении того, насколько стабильными являются основные результаты. В связи с этим все более популярными становятся методы статистической регуляризации, способствующие получению более понятных сетей, которые лучше экстраполируются на новые выборки. В частности, известным методом регуляризации является оператор наименьшей абсолютной усадки и отбора: лассо (lasso; [46]), который, в отличие от других методов регуляризации, может привести к точным оценкам параметров, равным нулю. По сути, лассо ограничивает сумму абсолютных коэффициентов частных корреляций; в результате все оценки уменьшаются, а некоторые становятся точно равными нулю. С технической точки зрения, лассо стремится оценить инверсную матрицу дисперсии-ковариации  $\mathbf{K}$  путем максимизации штрафной функции правдоподобия [25]:

$$\log \det (\mathbf{K}) - \text{trace}(\mathbf{SK}) - \lambda \sum_{\langle i, j \rangle} |k_{ij}|.$$



В качестве альтернативы, лассо-регуляризация может применяться к отдельным моделям регрессии, если сеть оценивается с использованием регрессий по узлам [34].

Использование лассо приводит к разреженной сети, в которой удаляются вероятные паразитные ложные ребра. Лассо использует параметр настройки  $\lambda$  (лямбда), который определяет уровень разреженности и напрямую контролирует, насколько частные корреляции штрафуются за сумму абсолютных значений всех коэффициентов корреляции. Когда параметр настройки  $\lambda$  маленький, то удаляются только несколько ребер, что может привести к сохранению ложных ребер. Когда параметр настройки велик, то удаляются многие ребра, что может привести к удалению в сети истинных ребер в дополнение к удалению ложных ребер. Поэтому на практике необходимо тщательно выбирать параметр настройки, чтобы создать сетевую структуру, которая минимизирует количество паразитных ребер при максимальном количестве истинных ребер [24].

При выборе параметра настройки лассо, как правило, несколько сетей оцениваются с разными значениями  $\lambda$  [50]. Различные значения  $\lambda$  могут быть выбраны из логарифмически разнесенного диапазона между максимальным значением  $\lambda$ , для которого не сохраняется ребро ( $\lambda$  равно наибольшему абсолютному значению), и некоторыми скалярными множителями, уменьшающими это максимальное значение в определенное число раз. Текущая версия пакета `qgraph` использует, например, коэффициент 0,01 и оценивает 100 сетей по умолчанию.

Таким образом, метод регуляризации лассо обычно используется для оценки совокупности сетей, а не отдельной сети, начиная от полностью подключенной сети (с максимумом ребер) до полностью отключенной сети (без ребер). Затем из этой коллекции сетей выбирается лучшая сеть. Этот выбор можно сделать путем оптимизации соответствия сети данным, сводя к минимуму некоторый информационный критерий. Было показано, что минимизация расширенного байесовского информационного критерия (EBIC; [15]) хорошо работает для определения истинной структуры сети [24], особенно когда генерируемая сеть разрежена (т.е. не содержит много ребер). Регуляризация лассо с выбором модели EBIC характеризуется высокой специфичностью во всем (т.е. не оценивает ребра, которые не находятся в истинной сети), но изменяющейся чувствительностью (т.е. оценивает ребра, которые находятся в истинной сети) на основе истинной структуры сети и размера выборки. Например, чувствительность обычно меньше, когда истинная сеть плотная (содержит много ребер) или имеет несколько узлов (концентраторов) со многими ребрами.

В модели EBIC используется гиперпараметр  $\gamma$  (гамма), который управляет другими параметрами, и обычно его необходимо устанавливать вручную. Гиперпараметр  $\gamma$  определяет, насколько EBIC предпочитает более простые модели (т.е. имеющие меньше ребер) [15, 24]:

$$EBIC = -2L + E \log(N) + 4\gamma E \log(P).$$

Здесь  $L$  обозначает логарифмическую функцию правдоподобия,  $N$  – размер выборки,  $E$  – число не нулевых ребер и  $P$  – количество узлов. Этот гиперпараметр  $\gamma$



необходимо устанавливать вручную, и обычно он устанавливается в диапазоне от 0 до 0,5 [24], причем более высокие значения указывают на то, что более простые модели (более экономные модели с меньшим числом ребер) являются предпочтительными. При установке гиперпараметра в 0 ошибок обнаружения оценивается большее количество ребер, включая возможные побочные (сеть имеет более высокую чувствительность). Установка гиперпараметра равным 0,5 приводит к ошибкам предосторожности или экономии: получается меньше ребер, что исключает большинство паразитных ребер, но, возможно, при этом пропускаются некоторые ребра (то есть сеть имеет более высокую специфичность). Даже при установке гиперпараметра  $\gamma$  в 0 сеть все равно будет более разреженной по сравнению с сетью частных корреляций, которая не использует какую-либо форму регуляризации; установка  $\gamma$  в 0 указывает на то, что EBIC сводится к стандартному BIC, при котором по-прежнему предпочтение отдается простым моделям.

Какое из этих значений  $\gamma$  лучше всего работает, является сложной функцией (обычно неизвестной) истинной сетевой структуры. На практике рекомендуется первоначально устанавливать среднее значение  $\gamma = 0,25$ .

В настоящее время многие варианты алгоритмов лассо реализованы в программном обеспечении с открытым исходным кодом [51]. Предлагаемый далее вариант, называемый графическим лассо (glasso; [25], специально предназначен для оценки сетей частных корреляций путем инверсии выборочной матрицы дисперсии-ковариации. Алгоритм графического лассо (glasso) был реализован в пакете glasso для языка статистического программирования R. Функция, которая использует этот пакет в сочетании с выбором модели EBIC, была реализована в пакете qgraph и может также вызываться через пакет начальной загрузки [20].

Алгоритм glasso непосредственно штрафует элементы матрицы дисперсии и ковариации. Это отличает его от других методов оценки сети лассо, которые обычно стремятся оценить структуру сети путем штрафования коэффициентов регрессии в серии моделей множественной регрессии [34]. Процедура glasso может быть задействована с помощью простых команд ввода (потому что она требует только оценки ковариационной матрицы, а не необработанных данных), что позволяет использовать полихорические корреляционные матрицы, когда данные являются порядковыми.

Следует отметить, что хотя лассо-регуляризация приводит к удалению ребер из сети, это не доказывает, что эти ребра фактически равны нулю. Это потому, что лассо стремится максимизировать специфичность; то есть стремится включать как можно меньше ложных срабатываний (ребер, которых нет в истинной модели). В результате рассмотрение предполагаемой сети, которая является разреженной (с отсутствующими ребрами), или даже пустой сетью, никоим образом не является доказательством того, что пропущенные ребра фактически отсутствуют. Оценка лассо может привести к множеству ложных негативов, ребер, которые не присутствуют в предполагаемой сети, но присутствуют в истинной сети. Это связано с хорошо известной проблемой проверки нулевых гипотез: не отказ от нулевой гипотезы не является доказательством того, что нулевая гипотеза верна [48]. Мы не можем включить





ребро либо потому, что данные слишком шумные, либо потому, что нулевая гипотеза верна. Лассо-регуляризация, как и классическая проверка значимости, не может различить эти две причины.

#### 4. НЕ РАСПРЕДЕЛЕННЫЕ НОРМАЛЬНО ДАННЫЕ

Как было отмечено ранее, оценка сетей частных корреляций связана с предположением о многомерной нормальности. Оценка этих сетей тесно связана с моделированием структурными уравнениями [22], где также обычно требуется многомерное нормальное распределение. Это не только означает, что предельные распределения должны быть нормальными, но и все отношения между переменными также должны быть линейными. При этом возникает вопрос, что делать с ненормальными (например, упорядоченными категориальными) данными, которые часто встречаются в психологических данных? Несколько решений, предложенных в литературе по моделированию структурными уравнениями, могут также быть использованы для моделирования сетей.

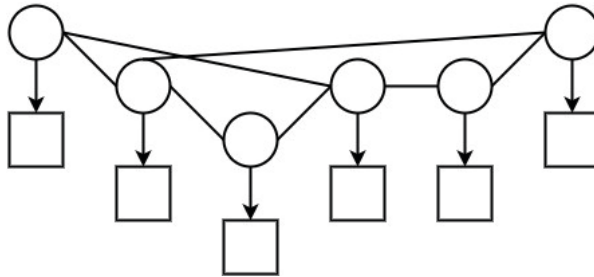
Предположение о нормальности может быть ослаблено, если положить, что наблюдаемые данные являются производными скрытой многомерной нормально распределенной системы [21, 33]. Рассмотрим эту ситуацию, следуя работе [21], из которой в основном взяты дальнейшие рисунки 1–4.

Пример такой системы показан на рис. 1, где квадратные элементы обозначают наблюдаемые переменные, круглые элементы указывают нормально распределенные латентные переменные, а направленные стрелки указывают на монотонные функции преобразования (каждое значение латентной переменной преобразуется в одно уникальное значение измеряемой переменной с сохранением порядкового номера неизменным; более высокие значения в исходной шкале также выше в преобразованной шкале). Обратите внимание, что здесь не идет речь об ошибке измерения, которая может быть учтена при наличии нескольких индикаторов, приходящихся на одну латентную переменную [22]. Предполагается, что каждая наблюдаемая переменная указывает только на одну латентную переменную [35].

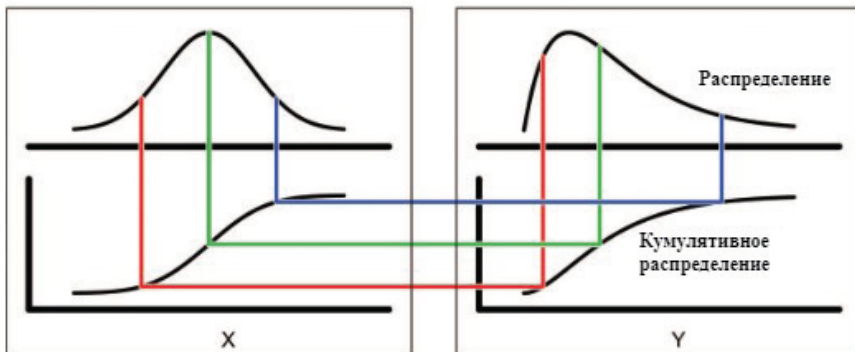
В этом случае два сценария являются наиболее распространенными: наблюдаемые переменные являются непрерывными или они состоят из упорядоченных категорий. Когда наблюдаемые переменные непрерывны, но не распределены нормально, переменные могут быть преобразованы так, чтобы иметь предельное нормальное распределение. Мощный метод, который был использован в оценке сети, заключается в применении непаранормального преобразования [33]. Это преобразование использует кумулятивные распределения (кодирующие вероятность того, что переменная ниже некоторого уровня), чтобы преобразовать распределение наблюдаемой переменной в распределение латентной нормально распределенной переменной.

Рисунок 2 показывает упрощенный пример того, как два распределения  $X$  и  $Y$  могут быть связаны их совокупными (кумулятивными) распределениями. Предположим, что  $X$  нормально распределено, а  $Y$  – гамма-распределено (потенциально ис-

кажено). Затем значения  $X$  могут быть сопоставлены с кумулятивным распределением с помощью функции вероятности (в R: `pnorm`). Затем эти кумулятивные вероятности могут быть сопоставлены со значениями гамма-распределения с помощью функции квантиля (в R: `qgamma`). На практике распределение  $Y$  неизвестно. Плотность и совокупная плотность  $X$ , с другой стороны, известны, и совокупное распределение  $Y$  может быть оценено путем вычисления эмпирической интегральной функции распределения (в R: `ecdf`).



*Рис. 1. Метод ослабления предположения о многомерной нормальности. Наблюдаемые переменные (квадраты), предположительно являются преобразованиями многомерных латентных нормальных переменных (круги); связи между кругами заданы произвольно и могут быть другими*

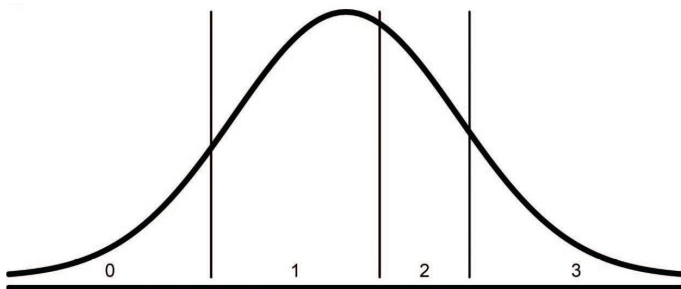


*Рис. 2. Схема преобразования кумулятивных распределений для перевода распределения переменной  $Y$  в нормальное распределение  $X$*

Таким образом, чтобы сопоставить значения  $Y$  со значениями нормально распределенной переменной  $X$ , необходимо оценить функцию плавного преобразования между двумя кумулятивными распределениями. Это ядро непаранормального преобразования, целью которого является сопоставление каждого уникального результата переменной (например, обозначения 1, 2 или 3 на рисунке 3) с одним уникальным результатом стандартной нормальной переменной (например, 1,96, 0, 1,65). Для этой цели можно использовать функцию `huge.pnr` из пакета `huge` в R [51]. Важно отметить, что это преобразование предполагает плавное увеличение кумулятивных

распределений и поэтому не будет работать, когда присутствуют только несколько возможных вариантов ответа (например, в шкалах Ликерта). Когда данные являются двоичными, преобразованные данные все еще будут двоичными, просто используя метки, отличные от 0 и 1.

Когда доступно только несколько категорий элементов и варианты ответов можно считать порядковыми [45], можно использовать пороговые функции [35] в качестве функций преобразования данных. При этом предполагается, что наблюдаемая оценка снова отражает скрытую нормально распределенную оценку, но корреляции между элементами могут быть непосредственно оценены без необходимости преобразования данных.



*Рис. 3. Визуализация пороговой модели, используемой в полихорических и полисерийных корреляциях*

Пример такой пороговой функции показан на рисунке 3, где три порога соответствуют четырем категориям ответа (0, 1, 2 или 3). Нормальное распределение соответствует скрытой оценке предмета, а вертикальные столбцы соответствуют порогам; человек с латентной оценкой ниже первого набрал бы 0, человек с латентной оценкой между первым и вторым порогом набрал бы 1, и так далее. После того, как пороговые значения оценены, корреляции между скрытыми переменными могут быть оценены попарно.

Эти корреляции называются полихорическими корреляциями, когда обе переменные являются порядковыми [36], или полисерийными корреляциями, когда только одна из двух переменных является порядковой [37]. Для вычисления полихорических и полисерийных корреляций в R может использоваться функция `lavCor` из пакета `lavaan` [42]. Эти корреляции затем могут быть использованы в качестве входных данных для алгоритма глассо.

Регуляризация частных корреляций с использованием алгоритма глассо с выбором модели EBIC на основе полихорических корреляций является стандартным выбором при оценке психологических сетей из-за высокой распространенности в этом случае упорядоченных категориальных данных. Важным ограничением является то, что эти методы основаны на предположении, что скрытые переменные, лежащие в основе наблюдаемых порядковых переменных, распределены нормально, что может быть неправдоподобным. Например, некоторые психопатологические симпто-



мы, такие как суицидальные мысли, могут иметь реальную «нулевую точку» – отсутствие симптома. Правильное обращение с такими переменными остается темой будущих исследований.

Когда данные являются двоичными, можно также использовать тетраэрические и бисериальные корреляции (соответственно частные случаи полихорических и полисериальных корреляций). Однако, из-за базового предположения о нормальности, эти данные не всегда стоит обрабатывать с использованием сетей частных корреляций. Когда все переменные являются двоичными, можно оценить модель Изинга с помощью пакета *IsingFit* в R [47]. Результирующая сеть имеет аналогичную интерпретацию, как сети частных корреляций, и также оценивается с использованием лассо с выбором модели EBIC [47]. Когда данные состоят как из категориальных, так и из непрерывных переменных, современную сетевую модель называют смешанной графической моделью, которая реализована в пакете *mgm* также с использованием оценки лассо с выбором модели EBIC.

## 5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Настоящая статья посвящена оценке психологических сетей с использованием популярного метода упорядочения оценок связей между узлами сети: регуляризация лассо с выбором модели EBIC. В этом методе могут быть использованы непрерывные или упорядоченные категориальные данные, а связи в сети определяются коэффициентами частных корреляций, что позволяет ограничить в сети число возможных паразитных ребер. Методы, описанные в статье, подходят тогда, когда отдельные значения в данных можно считать независимыми. Представленная сетевая методология приобрела известность в последние годы в зарубежной психологии и используется во все большем количестве публикаций в различных областях психологических исследований в качестве возможной альтернативы структурному моделированию с использованием латентных переменных [2].

В статье подробно обсуждаются частные корреляции, сети частных корреляций и как их следует интерпретировать, а также рассматриваются вопросы упорядочения сетей частных корреляций с использованием регуляризации лассо и расширенного байесовского информационного критерия EBIC. Рассмотрена реализация представленных методов в графическом алгоритме лассо (глассо) в пакетах языка статистического программирования R. Показано как методы регуляризации могут работать в случае, когда данные не имеют нормального распределения.

Использование сетевого моделирования в психологии все еще является молодой областью, которая быстро развивается. Настоящая статья устраняет пробел, относящийся к отсутствию доступного описания на русском языке процедуры регуляризации лассо с использованием выбора модели EBIC, и предоставляет обзор пока мало-распространенного и в тоже время многообещающего метода оценки упорядоченной разреженной сети частных корреляций.



### Литература

1. Алескеров Ф.Т., Хабина Э.Л., Шварц Д.А. Бинарные отношения, графы и коллективные решения. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2017. 344 с.
2. Артеменков С.Л. Сетевое моделирование психологических конструктов // Моделирование и анализ данных. 2017. № 1. С. 9–28.
3. Артеменков С.Л. Инициционно-семантическая модель дивергентной креативности [Электронный ресурс] // Психологическая наука и образование psyedu.ru. 2012. № 3. С. 1–15. URL: [http://psyjournals.ru/psyedu\\_ru/2012/n3/55540.shtml](http://psyjournals.ru/psyedu_ru/2012/n3/55540.shtml)
4. Жукова Е.С., Артеменков С.Л., Богоявленская Д.Б. К вопросу о соотношении одаренности и осознанной саморегуляции. Личностные и регуляторные ресурсы достижения образовательных и профессиональных целей в эпоху цифровизации. Москва: Знание-М, 2020. С. 104–115. DOI: 10.38006/907345–50–8.2020.104.115.
5. Жукова Е.С., Артеменков С.Л., Богоявленская Д.Б. Исследование интеллектуальной активности в младшем школьном и подростковом возрасте / Моделирование и анализ данных. 2019. № 1. С. 11–29.
6. Мутина О.В. Методы исследования каузальных связей // Экспериментальная психология в России: традиции и перспективы. М.: «Институт психологии РАН», 2010. С. 139–143.
7. Шишляникова Л.М. Применение корреляционного анализа в психологии // Психологическая наука и образование. 2009. Том 14. № 1. С. 98–107.
8. Abacioglu C.S., Isvoranu A.M., Verkuyten M., Thijs J. & Epskamp S. Exploring teachers' influence on student motivation in multicultural classrooms: A comparative network analysis. *Journal of School Psychology*, 2019. 74, 90–105. <https://doi.org/10.1016/j.jsp.2019.02.003>.
9. Agresti A. Categorical data analysis. New York, NY: Wiley, Inc. 1990.
10. Berg J.W., Smid W., Kossakowski J.J., Beek D.V., Borsboom D., Janssen E., & Gijs L. The Application of Network Analysis to Dynamic Risk Factors in Adult Male Sex Offenders. *Clinical Psychological Science*, 2020. 8, 539–554.
11. Bogoyavlenskaya D., Joukova E., Artemenkov S. Longitudinal Study Of The Creative Abilities // The European Proceedings of Social & Behavioural Sciences (EpSBS), 2018. 14: 125–131. doi: <https://dx.doi.org/10.15405/epsbs.2018.11.02.14>
12. Borsboom D. A network theory of mental disorders. *World Psychiatry*, 2017. 16(1), 5–13.
13. Borsboom D., & Cramer A.O.J. Network analysis: An integrative approach to the structure of psychopathology. *Annual Review of Clinical Psychology*, 2013. 9, 91–121.
14. Borsboom D., Cramer A., & Kalis A. Brain disorders? Not really: Why network structures block reductionism in psychopathology research. *Behavioral and Brain Sciences*, 2019. 42, 1–54. doi:10.1017/S0140525X17002266
15. Chen J., & Chen Z. Extended Bayesian information criteria for model selection with large model spaces. *Biometrika*, 2008. 95, 759–771.
16. Costantini G., Epskamp S., Borsboom D., Perugini M., Mõttus R., Waldorp L.J., & Cramer A.O.J. State of the aRt personality research: A tutorial on network analysis of personality data in R. *Journal of Research in Personality*, 2015. 54, 13–29.
17. Costantini G., Richetin J., Emanuele P., Casini E., Epskamp S. & Perugini M. Stability and variability of personality networks. A tutorial on recent developments in network psychometrics. *Personality and Individual Differences*, 2019. 136, 68–78.
18. de Ron J, Fried E.I., Epskamp S. Psychological networks in clinical populations: investigating the consequences of Berkson's bias. *Psychological Medicine*, 2019. 1–9. <https://doi.org/10.1017/S0033291719003209>
19. Drton M., & Perlman M.D. Model selection for gaussian concentration graphs. *Biometrika*, 2004. 91, 591–602.



20. *Epskamp S., Borsboom D., Fried E.I.* Estimating psychological networks and their accuracy: a tutorial paper. *Behavior Research Methods*. 2018. 50, 195–212.
21. *Epskamp S., Fried E.I.* A tutorial on regularized partial correlation networks. *Psychological Methods*, 2018. 23(4), 617–634. <https://doi.org/10.1037/met0000167>
22. *Epskamp S., Rhemtulla M., & Borsboom D.* Generalized network psychometrics: Combining network and latent variable models. *Psychometrika*, 2017. 82, 904–927. <http://dx.doi.org/10.1007/s11336-017-9557-x>
23. *Epskamp S., van Borkulo C.D., van der Veen D.C., Servaas M.N., Isvoranu A.M., Riese H. & Cramer A.O.J.* Personalized Network Modeling in Psychopathology: The Importance of Contemporaneous and Temporal Connections. *Clinical Psychological Science*, 2018. 6(3), 416–427.
24. *Foygel R., & Drton M.* Extended Bayesian information criteria for Gaussian graphical models. *Advances in Neural Information Processing Systems*, 2010. 23, 2020–2028.
25. *Friedman J.H., Hastie T., & Tibshirani R.* Sparse inverse covariance estimation with the graphical lasso. *Biostatistics*, 2008. 9, 432–441.
26. *Golino H.F., & Epskamp S.* Exploratory graph analysis: A new approach for estimating the number of dimensions in psychological research. *PLoS One*, 2017. 12, e0174035.
27. *Hastie T., Tibshirani R., & Wainwright M.* Statistical learning with sparsity: The lasso and generalizations. Boca Raton, FL: CRC Press. 2015.
28. *Isvoranu A-M., Guloksuz S., Epskamp S., van Os J., Borsboom D., GROUP Investigators.* Toward incorporating genetic risk scores into symptom networks of psychosis. *Psychological Medicine*, 2020. 50, 636–643. <https://doi.org/10.1017/S003329171900045X>
29. *Kan K-J., de Jonge H., van der Maas H.L.J., Levine S.Z., & Epskamp S.* How to Compare Psychometric Factor and Network Models. *Journal of Intelligence*, 2020. 8(4), 35.
30. *Koller D., & Friedman N.* Probabilistic graphical models: Principles and techniques. Cambridge, MA: MIT Press. 2009.
31. *Kossakowski J.J., Epskamp S., Kieffer J.M., van Borkulo C.D., Rhemtulla M., & Borsboom D.* The application of a network approach to health-related quality of life (HRQoL): Introducing a new method for assessing HRQoL in healthy adults and cancer patient. *Quality of Life Research*, 2015. 25, 781–792.
32. *Lauritzen S.L.* Graphical models. Oxford, UK: Clarendon Press. 1996.
33. *Liu H., Lafferty J.D., & Wasserman L.* The nonparanormal: Semiparametric estimation of high dimensional undirected graphs. *The Journal of Machine Learning Research*, 2009. 10, 2295–2328.
34. *Meinshausen N., & Bühlmann P.* High-dimensional graphs and variable selection with the lasso. *The Annals of Statistics*, 2006. 34, 1436–1462.
35. *Muthén B.* A general structural equation model with dichotomous, ordered categorical, and continuous latent variable indicators. *Psychometrika*, 1984. 49, 115–132.
36. *Olsson U.* Maximum likelihood estimation of the polychoric correlation coefficient. *Psychometrika*, 1979. 44, 443–460.
37. *Olsson U., Drasgow F., & Dorans N.J.* The polyserial correlation coefficient. *Psychometrika*, 1982. 47, 337–347.
38. *Oreel T.H., Borsboom D., Epskamp S., Hartog I.D., Netjes J.E., Niewekerker P.T., Henriques J.P.S., Scherer-Rath M., Van Laarhoven H.W.M. & Sprangers M.A.G.* The dynamics in health-related quality of life of patients with stable coronary artery disease were revealed: a network analysis. *Journal of clinical epidemiology*. 2019. 107, 116–123.
39. *Pearl J.* Causality: Models, reasoning, and inference. Cambridge, UK: Cambridge University Press. 2000.
40. *Pedersen T.L.* ggraph: An Implementation of grammar of graphics for graphs and networks (R package version 1.0.0). 2017. Retrieved from <https://CRAN.R-project.org/package=ggraph>



41. Pourahmadi M. Covariance estimation: The glm and regularization perspectives. *Statistical Science*, 2011. 26, 369–387.
42. Rosseel Y. lavaan: An R package for structural equation modeling. *Journal of Statistical Software*, 2012. 48(2), 1–36.
43. Schmittmann V.D., Cramer A.O.J., Waldorp L.J., Epskamp S., Kievit R.A., & Borsboom D. Deconstructing the construct: A network perspective on psychological phenomena. *New Ideas in Psychology*, 2013. 31, 43–53.
44. Soutter A.R.B., Bates T.C., Möttus R. Big Five and HEXACO Personality Traits, Proenvironmental Attitudes, and Behaviors: A Meta-Analysis. *Perspect Psychol Sci*. 2020. 15(4), 913–941. doi: 10.1177/1745691620903019.
45. Stevens S.S. On the theory of scales of measurement. *Science, New Series*, 1946. 103, 677–680.
46. Tibshirani R. Regression shrinkage and selection via the lasso. *Journal of the Royal Statistical Society Series B*, 1996. 58, 267–288.
47. van Borkulo C.D., & Epskamp S. IsingFit: Fitting Ising models using the elasso method. R package version 0.2.0. 2014.
48. Wagenmakers E.-J. A practical solution to the pervasive problems of p values. *Psychonomic Bulletin & Review*, 2007. 14, 779–804.
49. Wasserman S., & Faust K. *Social network analysis: Methods and applications*. New York, NY: Cambridge University Press. 1994.
50. Zhao P., & Yu B. On model selection consistency of lasso. *The Journal of Machine Learning Research*, 2006. 7, 2541–2563.
51. Zhao T., Li X., Liu H., Roeder K., Lafferty J., & Wasserman L. huge: High-dimensional undirected graph estimation (R package version 1.2.7). 2015. Retrieved from <https://CRAN.R-project.org/package=huge>



# Ordered Partial Correlation Networks in Psychological Research

**Sergei L. Artemenkov\***

Moscow State University of Psychology and Education, Moscow, Russia

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-1619-2209>

e-mail: [slart@inbox.ru](mailto:slart@inbox.ru)

Network modeling, which has emerged in recent years, can be successfully applied to the consideration of relationships between measurable psychological variables. In this context, psychological variables are understood as directly affecting each other, and not as a consequence of a latent construct. The article describes regularization methods that can be used to effectively assess the sparse and interpretable network structure based on partial correlations of psychological indicators. An overview of the glasso regularization procedure using EBIC model selection for evaluating an ordered sparse network of partial correlations is presented. The issues of performing this analysis in R in the presence of normal and non-normal data distribution are considered, taking into account the influence of the hyperparameter, which is manually set by the researcher. The considered approach is also interesting as a way to visualize possible causal connections between variables. This review bridges the gap related to the lack of an accessible description in Russian of this approach, which is still uncommon in Russia and at the same time promising.

**Keywords:** correlation analysis, partial correlation networks, regularization, network modeling in psychology, language R.

## For citation:

Artemenkov S.L. Ordered Partial Correlation Networks in Psychological Research. *Modelirovanie i analiz dannykh = Modelling and Data Analysis*, 2021. Vol. 11, no. 2, pp. 31–50. DOI: <https://doi.org/10.17759/mda.2021110202> (In Russ., abstr. in Engl.).

## References

1. Aleskerov F.T., Khabina E.L., Shvarts D.A. Binarnyye otnosheniya, grafy i kollektivnyye resheniya. M.: FIZMATLIT, 2017. 344 s.
2. Artemenkov S.L. Setevoye modelirovaniye psikhologicheskikh konstruktov // Modelirovaniye i analiz dannykh. 2017. № 1. S. 9–28.
3. Artemenkov S.L. Initsionno-semanticheskaya model' divergentnoy kreativnosti [Elektronnyy resurs] // Psikhologicheskaya nauka i obrazovaniye psyedu.ru. 2012. № 3. S. 1–15. URL: [http://psyjournals.ru/psyedu\\_ru/2012/n3/55540.shtml](http://psyjournals.ru/psyedu_ru/2012/n3/55540.shtml).
4. Zhukova E.S., Artemenkov S.L., Bogoyavlenskaya D.B. K voprosu o sootnoshenii odarenosti i osoznannoy samoregulyatsii. Lichnostnyye i regulyatornyye resursy dostizheniya obrazovatel'nykh i professional'nykh tseyev v epokhu tsifrovizatsii. Moskva: Znaniye-M, 2020. S. 104–115. DOI: 10.38006/907345–50–8.2020.104.115.

\***Sergei L. Artemenkov**, PhD in Engineering, Moscow State University of Psychology and Education, Moscow, Russia, ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-1619-2209>, e-mail: [slart@inbox.ru](mailto:slart@inbox.ru)





5. Zhukova E.S., Artemenkov S.L., Bogoyavlenskaya D.B. Issledovaniye intellektual'noy aktivnosti v mladshem shkol'nom i podrostkovom vozraste / Modelirovaniye i analiz dannykh. 2019. № 1. S. 11–29.
6. Mitina O.V. Metody issledovaniya kauzal'nykh svyazey // Eksperimental'naya psikhologiya v Rossii: traditsii i perspektivy. M.: «Institut psikhologii RAN», 2010. S. 139–143.
7. Shishlyannikova L.M. Primeneniye korrelyatsionnogo analiza v psikhologii // Psikhologicheskaya nauka i obrazovaniye. 2009. Tom 14. № 1. S. 98–107.
8. Abacioglu C.S., Isvoranu A.M., Verkuyten M., Thijs J. & Epskamp S. Exploring teachers' influence on student motivation in multicultural classrooms: A comparative network analysis. *Journal of School Psychology*, 2019. 74, 90–105. <https://doi.org/10.1016/j.jsp.2019.02.003>.
9. Agresti A. *Categorical data analysis*. New York, NY: Wiley, Inc. 1990.
10. Berg J.W., Smid W., Kossakowski J.J., Beek D.V., Borsboom D., Janssen E., & Gijs L. The Application of Network Analysis to Dynamic Risk Factors in Adult Male Sex Offenders. *Clinical Psychological Science*, 2020. 8, 539–554.
11. Bogoyavlenskaya D., Joukova E., Artemenkov S. Longitudinal Study Of The Creative Abilities // The European Proceedings of Social & Behavioural Sciences (EpSBS), 2018. 14: 125–131. doi: <https://dx.doi.org/10.15405/epsbs.2018.11.02.14>.
12. Borsboom D. A network theory of mental disorders. *World Psychiatry*, 2017. 16(1), 5–13.
13. Borsboom D., & Cramer A.O.J. Network analysis: An integrative approach to the structure of psychopathology. *Annual Review of Clinical Psychology*, 2013. 9, 91–121.
14. Borsboom D., Cramer A., & Kalis A. Brain disorders? Not really: Why network structures block reductionism in psychopathology research. *Behavioral and Brain Sciences*, 2019. 42, 1–54. doi:10.1017/S0140525X17002266
15. Chen J., & Chen Z. Extended Bayesian information criteria for model selection with large model spaces. *Biometrika*, 2008. 95, 759–771.
16. Costantini G., Epskamp S., Borsboom D., Perugini M., Möttus R., Waldorp L.J., & Cramer A.O.J. State of the aRT personality research: A tutorial on network analysis of personality data in R. *Journal of Research in Personality*, 2015. 54, 13–29.
17. Costantini G., Richetin J., Emanuele P., Casini E., Epskamp S. & Perugini M. Stability and variability of personality networks. A tutorial on recent developments in network psychometrics. *Personality and Individual Differences*, 2019. 136, 68–78.
18. de Ron J, Fried E.I., Epskamp S. Psychological networks in clinical populations: investigating the consequences of Berkson's bias. *Psychological Medicine*, 2019. 1–9. <https://doi.org/10.1017/S0033291719003209>
19. Drton M., & Perlman M.D. Model selection for gaussian concentration graphs. *Biometrika*, 2004. 91, 591–602.
20. Epskamp S., Borsboom D., Fried E.I. Estimating psychological networks and their accuracy: a tutorial paper. *Behavior Research Methods*. 2018. 50, 195–212.
21. Epskamp S., Fried E.I. A tutorial on regularized partial correlation networks. *Psychological Methods*, 2018. 23(4), 617–634. <https://doi.org/10.1037/met0000167>.
22. Epskamp S., Rhemtula M., & Borsboom D. Generalized network psychometrics: Combining network and latent variable models. *Psychometrika*, 2017. 82, 904–927. <http://dx.doi.org/10.1007/s11336-017-9557-x>
23. Epskamp S., van Borkulo C.D., van der Veen D.C., Servaas M.N., Isvoranu A.M., Riese H. & Cramer A.O.J. Personalized Network Modeling in Psychopathology: The Importance of Contemporaneous and Temporal Connections. *Clinical Psychological Science*, 2018. 6(3), 416–427.
24. Foygel R., & Drton M. Extended Bayesian information criteria for Gaussian graphical models. *Advances in Neural Information Processing Systems*, 2010. 23, 2020–2028.



25. Friedman J.H., Hastie T., & Tibshirani R. Sparse inverse covariance estimation with the graphical lasso. *Biostatistics*, 2008. 9, 432–441.
26. Golino H.F., & Epskamp S. Exploratory graph analysis: A new approach for estimating the number of dimensions in psychological research. *PLoS One*, 2017. 12, e0174035.
27. Hastie T., Tibshirani R., & Wainwright M. *Statistical learning with sparsity: The lasso and generalizations*. Boca Raton, FL: CRC Press. 2015.
28. Isvoranu A-M., Guloksuz S., Epskamp S., van Os J., Borsboom D., GROUP Investigators. Toward incorporating genetic risk scores into symptom networks of psychosis. *Psychological Medicine*, 2020. 50, 636–643. <https://doi.org/10.1017/S003329171900045X>
29. Kan K-J., de Jonge H., van der Maas H.L.J., Levine S.Z., & Epskamp S. How to Compare Psychometric Factor and Network Models. *Journal of Intelligence*, 2020. 8(4), 35.
30. Koller D., & Friedman N. *Probabilistic graphical models: Principles and techniques*. Cambridge, MA: MIT Press. 2009.
31. Kossakowski J.J., Epskamp S., Kieffer J.M., van Borkulo C.D., Rhemtulla M., & Borsboom D. The application of a network approach to health-related quality of life (HRQoL): Introducing a new method for assessing HRQoL in healthy adults and cancer patient. *Quality of Life Research*, 2015. 25, 781–792.
32. Lauritzen S.L. *Graphical models*. Oxford, UK: Clarendon Press. 1996.
33. Liu H., Lafferty J.D., & Wasserman L. The nonparanormal: Semiparametric estimation of high dimensional undirected graphs. *The Journal of Machine Learning Research*, 2009. 10, 2295–2328.
34. Meinshausen N., & Bühlmann P. High-dimensional graphs and variable selection with the lasso. *The Annals of Statistics*, 2006. 34, 1436–1462.
35. Muthén B. A general structural equation model with dichotomous, ordered categorical, and continuous latent variable indicators. *Psychometrika*, 1984. 49, 115–132.
36. Olsson U. Maximum likelihood estimation of the polychoric correlation coefficient. *Psychometrika*, 1979. 44, 443–460.
37. Olsson U., Drasgow F., & Dorans N.J. The polyserial correlation coefficient. *Psychometrika*, 1982. 47, 337–347.
38. Oreel T.H., Borsboom D., Epskamp S., Hartog I.D., Netjes J.E., Niewekerker P.T., Henriques J.P.S., Scherer-Rath M., Van Laarhoven H.W.M. & Sprangers M.A.G. The dynamics in health-related quality of life of patients with stable coronary artery disease were revealed: a network analysis. *Journal of clinical epidemiology*. 2019. 107, 116–123.
39. Pearl J. *Causality: Models, reasoning, and inference*. Cambridge, UK: Cambridge University Press. 2000.
40. Pedersen T.L. *ggraph: An Implementation of grammar of graphics for graphs and networks (R package version 1.0.0)*. 2017. Retrieved from <https://CRAN.R-project.org/package=ggraph>
41. Pourahmadi M. Covariance estimation: The glm and regularization perspectives. *Statistical Science*, 2011. 26, 369–387.
42. Rosseel Y. *lavaan: An R package for structural equation modeling*. *Journal of Statistical Software*, 2012. 48(2), 1–36.
43. Schmittmann V.D., Cramer A.O.J., Waldorp L.J., Epskamp S., Kievit R.A., & Borsboom D. Deconstructing the construct: A network perspective on psychological phenomena. *New Ideas in Psychology*, 2013. 31, 43–53.
44. Soutter A.R.B., Bates T.C., Möttus R. Big Five and HEXACO Personality Traits, Proenvironmental Attitudes, and Behaviors: A Meta-Analysis. *Perspect Psychol Sci*. 2020. 15(4), 913–941. doi: 10.1177/1745691620903019.



45. Stevens S.S. On the theory of scales of measurement. *Science, New Series*, 1946. 103, 677–680.
46. Tibshirani R. Regression shrinkage and selection via the lasso. *Journal of the Royal Statistical Society Series B*, 1996. 58, 267–288.
47. van Borkulo C.D., & Epskamp S. IsingFit: Fitting Ising models using the elasso method. R package version 0.2.0. 2014.
48. Wagenmakers E.-J. A practical solution to the pervasive problems of p values. *Psychonomic Bulletin & Review*, 2007. 14, 779–804.
49. Wasserman S., & Faust K. *Social network analysis: Methods and applications*. New York, NY: Cambridge University Press. 1994.
50. Zhao P., & Yu B. On model selection consistency of lasso. *The Journal of Machine Learning Research*, 2006. 7, 2541–2563.
51. Zhao T., Li X., Liu H., Roeder K., Lafferty J., & Wasserman L. huge: High-dimensional undirected graph estimation (R package version 1.2.7). 2015. Retrieved from <https://CRAN.R-project.org/package=huge>

## ◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇

УДК 531.38;531.39

### Модификация алгоритма декомпозиции путей ориентированного графа для учета расписания

**Золотарев И.А.** \*

Московский авиационный институт (НИУ МАИ),  
г. Москва, Российская Федерация  
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-6437-2212>  
e-mail: [yngvar.antonsson@gmail.com](mailto:yngvar.antonsson@gmail.com)

**Рассказова В.А.** \*\*

Московский авиационный институт (НИУ МАИ),  
г. Москва, Российская Федерация,  
ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-4943-3133>  
e-mail: [varvara.rasskazova@mail.ru](mailto:varvara.rasskazova@mail.ru)

Работа направлена на уточнение алгоритма декомпозиции путей ориентированного графа. Рассмотрено дополнительное ограничение на параметр *balance* для учета расписания отправления локомотивов. Также приведено новое правило расчета параметров *Ns*. Приведен пример работы алгоритма декомпозиции путей ориентированного графа с учетом расписания. Научная и практическая новизна работы заключается в существенном снижении размерности исходной задачи, что особенно важно в условиях транспортных сетей сложной топологии.

**Ключевые слова:** теория оптимизации, оптимизация на графах, алгоритм декомпозиции путей ориентированного графа, сильно связный граф, теория расписаний.

**Для цитаты:**

*Золотарев И.А., Рассказова В.А.* Модификация алгоритма декомпозиции путей ориентированного графа для учета расписания // Моделирование и анализ данных. 2021. Том 11. № 2. С. 51–58. DOI: <https://doi.org/10.17759/mda.2021110203>

\***Золотарев Игорь Антонович**, студент магистратуры, Московский авиационный институт, (НИУ МАИ), г. Москва, Российская Федерация, ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-6437-2212>, e-mail: [yngvar.antonsson@gmail.com](mailto:yngvar.antonsson@gmail.com)

\*\***Рассказова Варвара Андреевна**, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры 804 «Теория вероятностей и компьютерное моделирование», Московский авиационный институт, (НИУ МАИ), г. Москва, Российская Федерация, ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-4943-3133>, e-mail: [varvara.rasskazova@mail.ru](mailto:varvara.rasskazova@mail.ru)



## 1. ВВЕДЕНИЕ

Задача составления оптимального расписания грузовых железнодорожных перевозок – сложная оптимизационная задача с большим количеством параметров и большой размерностью массива вершин (станций) и ребер (перегонов). Алгоритм декомпозиции путей ориентированного графа, изложенный в [1] и уточненный в [2], не учитывает наличие расписания отправления локомотивов, а в за время прохождения каждого из перегонов берется число 1. В данной работе будет рассмотрено дополнительное ограничение на параметр *balance*, играющий важную роль в исходном алгоритме, а также на расчет времени прохождения сегментов маршрута .

## 2. ПОСТАНОВКА ИСХОДНОЙ ЗАДАЧИ

Рассмотрим ориентированный граф  $\vec{G} = (V, E)$ , в котором  $V = \{v_i : i = [1, n]\}$  – множество вершин и  $E = \{(v_i, v_j) : i \neq j, i, j \in [1, n]\}$  – множество дуг ориентированного графа. Пусть задан набор порожденных сильно связных подграфов  $\vec{G}_s = (V_s, E_s)$ ,  $s = [1, K]$ , таких что выполняются соотношения  $\bigcup_{s=1}^K V_s = V$  и  $\bigcup_{s=1}^K E_s = E$ .

Пусть задано некоторое множество путей в ориентированном графе  $\vec{G} = (V, E)$ :  $\mathbb{P} = \{p_i, i = [1, m]\}$ .

Задача о декомпозиции заданного множества путей на заданном множестве  $\vec{G}_s, s = [1, K]$  сильно связных подграфов состоит в том, чтобы разбить каждый путь из множества  $\mathbb{P}$  на подпути меньшей длины

$$p_i = (p_{i_1}, p_{i_2}, \dots, p_{i_{n(i)}}), i = [1, m]$$

таким образом, чтобы каждый подпуть  $p_{i_j}, j = [1, n(i)]$ , целиком лежал в некотором порожденном сильно связном подграфе  $\vec{G}_s, s \in [1, K]$ .

## 3. МОДИФИКАЦИЯ ЗАДАЧИ

Модифицируем постановку задачи из [1] для учета расписания (времени прохождения точек маршрута из множества путей  $\mathbb{P}$ ). Если перенести это на физическую модель составления расписаний, то набор порожденных сильно связных подграфов  $\vec{G}_s = (V_s, E_s)$ ,  $s = [1, K]$  графа  $\vec{G}$  будет представлять собой, например, «города» или участки сложных маршрутов, тогда в разных «городах» могут иметься разные дороги между двумя пунктами, то есть:

Пусть есть два подграфа  $\vec{G}_i = (V_i, E_i)$  и  $\vec{G}_j = (V_j, E_j)$  и две вершины  $v_m \in V_i, V_j$ ,  $v_n \in V_i, V_j$ , такие, что,  $(v_m, v_n) \in E_i, E_j$ . В зависимости от декомпозиции пути, содержащего ребро  $(v_m, v_n)$ , этот путь будет пролегать либо в подграфе  $\vec{G}_i$  или  $\vec{G}_j$ . Вес ребра  $(v_m, v_n)$  на самом деле не обязан совпадать в подграфах  $\vec{G}_i$  и  $\vec{G}_j$ , то есть  $\exists w_i(v_m, v_n) \neq w_j(v_m, v_n)$ . Физически это может быть обусловлено различным временем стоянки на маршруте, различной длиной дорог или другими внешними факторами.



Пусть имеется таблица  $T_{start}(\tilde{p}, v_m, v_n)$ , которое определяет время отправления из точки  $v_m$  в точку  $v_n$  для варианта прохождения  $\tilde{p}$  пути  $p$ . Тогда задача о декомпозиции заданного множества путей на заданном множестве  $\tilde{G}_s, s = [1, K]$  сильно связанных подграфов с учетом расписания  $T_{start}(\tilde{p}, v_m, v_n)$  состоит в том, чтобы разбить каждый путь из множества  $\mathbb{P}$  на подпути меньшей длины

$$p_i = (p_{i_1}, p_{i_2}, \dots, p_{i_{n(i)}}), i = [1, m]$$

таким образом, чтобы каждый подпуть  $p_{i_j}, j = [1, n(i)]$  целиком лежал в некотором порожденном сильно связном подграфе  $\tilde{G}_s, s \in [1, K]$ , то есть, найти такую декомпозицию  $D$ , для которой выполняются ограничения

$$c(D) \rightarrow \min_j c(D)$$

$$balance(D) \rightarrow \max_j balance(D)$$

$$\Delta t_{max}(D) - \Delta t_{min}(D) \rightarrow \min_j (\Delta t_{max}(D_j) - \Delta t_{min}(D_j))$$

где  $\{D_j, j = 1, 2, \dots\}$  – все возможные декомпозиции заданного множества путей ориентированного графа.

#### 4. МОДИФИКАЦИЯ АЛГОРИТМА ДЕКОМПОЗИЦИИ

Пусть имеется набор времени отправления  $T_{start}(\tilde{p}, v_m, v_n)$ . Для упрощения задачи будем считать, что время задано в одном и том же часовом поясе, например в формате Unix Timestamp и задан мультипликатор времени (например, один час или 3600 секунд). Введем поправку на время начала работы системы, для этого найдем  $T_0 = \min_{i=1, K} T_{start}$  и пересчитаем  $T_{start}(\tilde{p}, v_m, v_n) := (T_{start}(\tilde{p}, v_m, v_n) - T_0) / 3600$ .

Рассмотрим процедуру расчета баланса  $bal_s$ . В терминах путей значение «1» в столбце  $bal_s$  в исходном алгоритме для некоторого  $s \in [1, K]$  означает, что в пути, заданном рассматриваемой строкой, существует подпуть, взаимно обратный с некоторым подпутем в пути, заданном зафиксированной строкой. Причем эти взаимно обратные подпути при фиксированных разбиениях целиком лежат в подграфе с номером  $s$ . Также, при выборе пути для включения в декомпозицию, предпочтение отдается путям, в которых максимальное число взаимно обратных подпутей, другими словами, тех, в которых состав может быть отправлен по обратному маршруту.

При учете расписания, дополнительным критерием для расчета баланса будет учитываться присутствие в расписании обратного рейса в пределах оптимального времени ожидания  $T_e$ , то есть такого, что

$$T_{start}(p, v_n, v_m) - T_{start}(\tilde{p}, v_m, v_n) \leq T_e$$

Таким образом, если в таблице  $M(\mathbb{P})$  после выбора строки в декомпозицию,  $nom$  – строка таблицы, выбранная на предыдущем шаге, в столбце  $mk$  есть больше одного элемента со значением «1», то рассчитываем значение в столбцах  $bal_s$  для строк  $nom_i \neq nom$  следующим образом:



Если для пары строк выполняются условия:

- $mk(nom_i) = 1$ ,
- $Ind(nom) \neq Ind(nom_i)$ ,
- $v_{k+1}(nom) = v_{k+1}(nom_i), s_k(nom) = s_k(nom_i),$   
 $|T_{start}(\tilde{p}(nom), v_{k+1}(nom), v_k(nom)) -$   
 $T_{start}(\tilde{p}(nom_i), v_k(nom_i), v_{k+1}(nom_i))| \leq T_\varepsilon, k = [b_1, b_2]: 1 \leq b_1 \leq b_2 \leq$   
 $l, bal_s(nom) = 0, s: \exists s_k(nom_i) = s,$

то

$$bal_s(nom_i) = 1 \forall s: \exists s_k(nom_i) = s, k \in [b_1, b_2], s \in [1, K]$$

То есть, функция расчета баланса декомпозиции принимает следующий вид:

$$balance(D) = \sum_{s=1}^K \left| \left\{ (p_{i_j}, p_{i_j}^*): n(i_j) = s, \quad \Delta T_{start}(p_{i_j}, p_{i_j}^*) < T_\varepsilon, i \in [1, m], j \in [1, n(i)] \right\} \right|$$

При таком порядке расчета баланса меняется также правило добавления пути в таблицу  $M(\mathbb{P})$ . Допустим, имеется путь  $p = (v_1, v_2, v_3)$ , где  $(v_1, v_2), (v_2, v_3) \in \tilde{G}_1, (v_2, v_3) \in \tilde{G}_2$ . При построении таблицы для декомпозиции в оригинальном алгоритме этот путь включался в таблицу единственным образом, как  $(v_1, 1, v_2, 1, v_3)$ , теперь, с учетом расписания, необходимо включить в таблицу оба варианта прохождения  $(v_1, 1, v_2, 1, v_3), (v_1, 1, v_2, 2, v_3)$ , так как может оказаться, что переназначение маршрута  $(v_2, v_3)$  в другой подграф может оказаться выгоднее с точки зрения затрат времени на прохождение участка маршрута.

Определим также новый порядок расчета значений в столбцах  $N_s$ , положим, что это время прохождения сегмента, тогда каждый участок  $(v_1, v_2)$  сегмента  $s$  будет проходиться за время, равное разнице между отправлением из начальной и конечной точек. Так как из последней точки маршрута нет никаких отправлений, то доопределим таблицу:  $T_{start}(\tilde{p}, v_i) = T_{finish}(\tilde{p}) \forall v_i = v_{finish}(\tilde{p})$ .

$$N_s(nom) = \sum_{i=1}^{l-1} \delta_s(s_i) (T_{start}(\tilde{p}(nom), v_{i+1}, v_{i+2}) - T_{start}(\tilde{p}(nom), v_i, v_{i+1}))$$

где

$$\delta_s(s_i) = \begin{cases} 1, & \text{если } s_i = s; \\ 0, & \text{если } s_i \neq s. \end{cases}$$

## 5. ПРИМЕР РАБОТЫ АЛГОРИТМА ДЕКОМПОЗИЦИИ

Пример 1. Модифицируем пример из [1]. Пусть заданы ориентированный граф  $\tilde{G} = (V, E)$  и набор подграфов  $\tilde{G}_s, s \in [1, 3]$  (на рис. 1), а также набор путей

$$\mathbb{P} = \{ p_1 = (v_1, v_2, v_4, v_6, v_3), p_2 = (v_1, v_4, v_5), p_3 = (v_3, v_6, v_4, v_2, v_1), p_4 = (v_5, v_4, v_2, v_1) \}$$

и таблица с расписанием  $T_{start}$  (табл. 1).

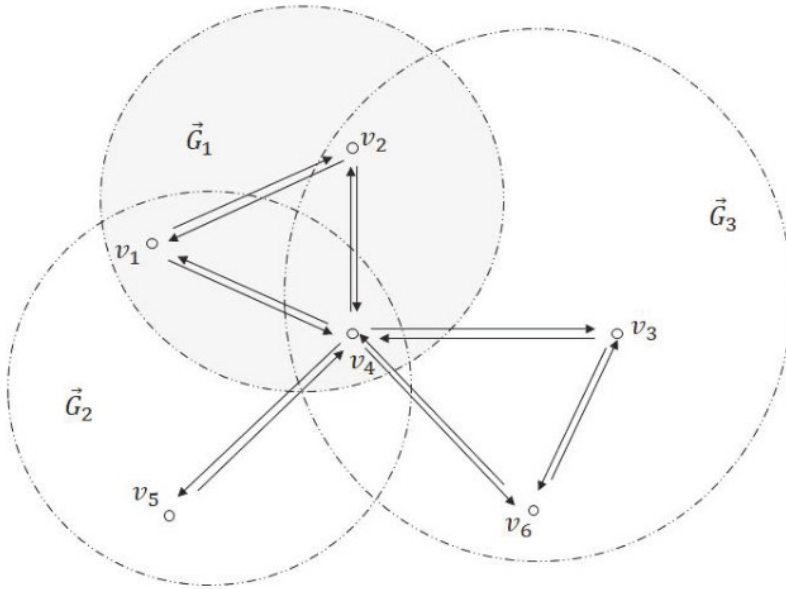


Рис. 1. Ориентированный граф

Таблица 1

**Расписание отправлений**

<i>nom</i>	<i>p</i>	$v_1$	$T_{start}(v_1, v_2)$	$v_2$	$T_{start}(v_2, v_3)$	$v_3$	$T_{start}(v_3, v_4)$	$v_4$	$T_{start}(v_4, v_5)$	$v_5$	$T_{finish}$
1	1	1	00:00	2	01:00	4	02:00	6	03:00	3	04:00
2	1	1	00:00	2	02:00	4	15:00	6	16:00	3	17:00
3	2	1	08:00	4	11:00	5	-	-	-	-	12:00
4	2	1	09:00	4	10:00	5	-	-	-	-	11:00
5	3	3	05:00	6	07:00	4	08:00	2	10:00	1	11:00
6	3	3	05:00	6	07:00	4	09:00	2	11:00	1	12:00
7	4	5	01:00	4	05:00	2	21:00	1	-	-	22:00
8	4	5	01:00	4	03:00	2	08:00	1	-	-	09:00

Построим таблицу  $M(\mathbb{P})$  и пересчитаем  $N_s$  по правилу (2) (табл. 2) с учетом алгоритмов из [1, 2]. Опустим столбцы  $\vec{G}_s$ , т.к. они не участвуют в декомпозиции непосредственно.

Положим  $T_e$  равным 10 часам и выполним алгоритм декомпозиции с учетом (1). На первом проходе алгоритма будет выбран путь с номером 3, так как он проходит через минимальное число подграфов ( $c(nom = 3) = 1, c(nom \neq 3) = 2$ ).





Таблица 2

Таблица  $M(\mathbb{P})$  с пересчитанными значениями  $N_s$ 

$nom$	$p$	$mk$	$Ind$	$v_1$	$s_1$	$v_2$	$s_2$	$v_3$	$s_3$	$v_4$	$s_4$	$v_5$	$c$	$bal_1$	$bal_2$	$bal_3$	$bal_\Sigma$	$N_1$	$N_2$	$N_3$
1	1	1	0	1	1	2	1	4	3	6	3	3	2	0	0	0	0	2	0	2
2	1	1	0	1	1	2	3	4	3	6	3	3	2	0	0	0	0	2	0	15
3	2	1	0	1	2	4	2	5	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	4	0
4	2	1	0	1	1	4	2	5	0	0	0	0	2	0	0	0	0	1	1	0
5	3	1	1	1	1	2	1	4	3	6	3	3	2	0	0	0	0	3	0	3
6	3	1	1	1	1	2	3	4	3	6	3	3	2	0	0	0	0	2	0	5
7	4	1	1	1	1	2	1	4	2	5	0	0	2	0	0	0	0	20	1	0
8	4	1	1	1	1	2	3	4	2	5	0	0	2	0	0	0	0	2	1	5

На втором проходе будет выбран путь с номером 8, который имеет взаимно обратный подпуть с путем номер 3 с отправкой обратного поезда в течение 10 часов ( $c(nom = 7) = c(nom = 8)$ ,  $bal_\Sigma(nom = 7) < bal_\Sigma(nom = 8)$ ).

Таблица 3

Результат работы алгоритма

$nom$	$p$	$mk$	$Ind$	$v_1$	$s_1$	$v_2$	$s_2$	$v_3$	$s_3$	$v_4$	$s_4$	$v_5$	$c$	$bal_1$	$bal_2$	$bal_3$	$bal_\Sigma$	$N_1$	$N_2$	$N_3$
3	2	2	0	1	2	4	2	5	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	4	0
8	4	2	1	1	1	2	3	4	2	5	0	0	2	0	1	0	1	2	1	5
1	1	2	0	1	1	2	1	4	3	6	3	3	2	1	0	0	1	2	0	2
5	3	2	1	1	1	2	1	4	3	6	3	3	2	1	0	1	2	3	0	3
2	1	0	0	1	1	2	3	4	3	6	3	3	2	1	0	0	1	2	0	15
4	2	0	0	1	1	4	2	5	0	0	0	0	2	0	0	0	0	1	1	0
6	3	0	1	1	1	2	3	4	3	6	3	3	2	1	0	1	2	2	0	5
7	4	0	1	1	1	2	1	4	2	5	0	0	2	0	0	0	0	20	1	0

Следующим будет выбран путь с номером 1, т.к. при включении его в декомпозицию, она будет иметь наименьшее время ( $c(nom = 1) = c(nom = 2)$ ,  $bal_\Sigma(nom = 1) = bal_\Sigma(nom = 2)$ ,  $N_\Sigma(nom = 1) < N_\Sigma(nom = 2)$ ). На последнем проходе алгоритма будет выбран путь с номером 5 ( $N_\Sigma(nom = 5) < N_\Sigma(nom = 6)$ ). Результат выполнения алгоритма представлен в табл. 2.

## 6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Алгоритм декомпозиции путей ориентированного графа расширен для учета расписания. Введено дополнительное ограничение на параметр balance, введены правила для пересчета параметров. С помощью модифицированного алгоритма декомпозиции путей ориентированного графа посчитан модельный пример.



***Литература***

1. *Гайнанов Д.Н., Кибзун А.И., Рассказова В.А.* Задача о декомпозиции множества путей ориентированного графа и ее приложение // *Автоматика и телемеханика*. 2018. № 12. С. 142–166.
2. *Золотарев И.А., Рассказова В.А.* Практическая реализация алгоритма декомпозиции путей ориентированного графа // *Моделирование и анализ данных*. 2020. Том 10. № 3. С. 60–68.



## Modification of Algorithm of Directed Graph Paths Decomposition with Schedule

**Igor A. Zolotarev\***

Moscow Aviation Institute, Moscow, Russia,

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-6437-2212>

e-mail: [yngvar.antonsson@gmail.com](mailto:yngvar.antonsson@gmail.com)

**Varvara A. Rasskazova\***

Moscow Aviation Institute, Moscow, Russia,

ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-4943-3133>

e-mail: [varvara.rasskazova@mail.ru](mailto:varvara.rasskazova@mail.ru)

This study aims to refinement of the oriented graph paths decomposition algorithm. An additional constraint on the balance parameter is considered to take into account the locomotive departure schedule. Also new rule to compute  $N_s$  parameters is given. An example of the operation of the oriented graph paths decomposition algorithm with the schedule is given. The scientific and practical novelty of the work lies in a significant reduction in the dimension of the original problem, which is especially important in the conditions of transport networks of complex topology.

**Keywords:** optimization theory, graph optimization, algorithm of directed graph paths decomposition, strongly connected graph, scheduling theory.

### For citation:

Zolotarev I.A., Rasskazova V.A. Modification of Algorithm of Directed Graph Paths Decomposition with Schedule. *Modelirovanie i analiz dannykh = Modelling and Data Analysis*, 2021. Vol. 11, no. 2, pp. 51–58. DOI: <https://doi.org/10.17759/mda.2021110203> (In Russ., abstr. in Engl.).

### References

1. Gainanov D.N., Kibzun A.I., Rasskazova V.A. The Decomposition Problem for the Set of Paths in a Directed Graph and Its Application. *Automation and Remote Control*, 2018, vol. 79, no. 12, pp. 2217–2236
2. Zolotarev I.A., Rasskazova V.A. Practical Realization of Algorithm of Oriented Graph Paths Decomposition. *Modelling and Data Analysis*, 2020. Vol. 10, no. 3, pp. 60–68.

\***Igor A. Zolotarev**, Master Student, Moscow Aviation Institute, Moscow, Russia, ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-6437-2212>, e-mail: [yngvar.antonsson@gmail.com](mailto:yngvar.antonsson@gmail.com)

\*\***Varvara A. Rasskazova**, PhD in Physics and Mathematics, Associate Professor, Moscow Aviation Institute, Moscow, Russia, ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-4943-3133>, e-mail: [varvara.rasskazova@mail.ru](mailto:varvara.rasskazova@mail.ru)



УДК 519.8

## **Разработка программного обеспечения метода глобальной оптимизации, имитирующего поведение стаи серых волков**

***Пантелеев А.В.\****

Московский авиационный институт  
(национальный исследовательский университет),  
г. Москва, Российская Федерация  
ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-2493-3617>  
e-mail: [avpanteleev@inbox.ru](mailto:avpanteleev@inbox.ru)

***Беляков И.А.\*\****

Московский авиационный институт  
(национальный исследовательский университет),  
г. Москва, Российская Федерация  
ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-3457-9914>  
e-mail: [vanbelyakov@yandex.ru](mailto:vanbelyakov@yandex.ru)

В данной статье рассматривается разработка программного обеспечения, позволяющего смоделировать алгоритм поиска экстремума функций многих переменных при параллелепипедных ограничениях, имитирующий поведение стаи серых волков. Для анализа эффективности работы алгоритма создано

### **Для цитаты:**

*Пантелеев А.В., Беляков И.А.* Разработка программного обеспечения метода глобальной оптимизации, имитирующего поведение стаи серых волков // Моделирование и анализ данных. 2021. Том 11. № 2. С. 59–73. DOI: <https://doi.org/10.17759/mda.2021110204>

**\*Пантелеев Андрей Владимирович**, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой математической кибернетики института «Информационные технологии и прикладная математика» Московского авиационного института (национального исследовательского университета), г. Москва, Российская Федерация, ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-2493-3617>, e-mail: [avpanteleev@inbox.ru](mailto:avpanteleev@inbox.ru)

**\*\*Беляков Иван Андреевич**, студент бакалавриата института «Информационные технологии и прикладная математика» Московского авиационного института (национального исследовательского университета), г. Москва, Российская Федерация, ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-3457-9914>, e-mail: [vanbelyakov@yandex.ru](mailto:vanbelyakov@yandex.ru)



программное обеспечение, позволяющее варьировать параметры метода. В статье приведены примеры работы программы на стандартном общепринятом наборе тестовых функций. Целью работы программы является сбор и анализ статистических результатов, позволяющих оценить точность нахождения экстремума и характер сходимости. Программа позволяет построить линии уровня целевых функций и продемонстрировать работу алгоритма по шагам. Анализ статистических данных позволил сформулировать обоснованные рекомендации по выбору параметров алгоритма.

**Ключевые слова:** алгоритм глобальной оптимизации, метаэвристический алгоритм, программное обеспечение, метод имитации поведения стаи серых волков

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Метаэвристические алгоритмы хорошо зарекомендовали себя как эффективный инструмент поиска глобального экстремума. Обширное множество алгоритмов делит на несколько групп, отличающихся по принципу работы: эволюционные методы, биоинспирированные методы, алгоритмы роевого интеллекта, методы, имитирующие физические процессы, мультистартовые методы и т.д. Детальное описание перечисленных методов можно найти, например, в [1–6]. Метод имитации стаи серых волков [7] является оригинальным методом поиска глобального экстремума, он сочетает в себе как элементы роевого интеллекта, проявляемые в обмене информацией между особями, так и элементы биоинспирированных алгоритмов, так как в основе работы метода лежит математическая модель поведения волков в стае.

Метод серых волков (Grey Wolf Optimizer – GWO) имитирует охоту стаи серых волков за жертвой. Он относится к методам роевого интеллекта, в которых используется иерархия лидерства в стае и особый механизм охоты, заключающийся в отслеживании и приближении к жертве, ее последующем окружении и финальном нападении. Положение каждой особи основывается на трех лидерах, которые владеют наиболее полной информацией о положении жертвы (точке экстремума). В соответствии с положением лидеров стаи остальные особи двигаются, постепенно окружая их. Для предотвращения стагнации в точках локального экстремума алгоритм использует стохастические коэффициенты, вынуждающие волков осуществлять поиск на всем множестве допустимых решений. Таким образом, можно сформулировать основные шаги работы метода:

- 1) создание начальной популяции;
- 2) выявление наиболее приспособленных особей – лидеров стаи;
- 3) перемещение остальных особей в пространстве допустимых решений относительно лидеров;
- 4) проверка условия окончания алгоритма.

Существует также модификация алгоритма, в основе которой лежит подбор оптимального параметра, отвечающего за нападение волка на жертву [8].



Программное обеспечение позволяет смоделировать работу алгоритма с возможностью оперативно изменять характерные параметры метода. Полученные данные позволяют провести анализ результатов с целью выработки общих рекомендаций по выбору гиперпараметров алгоритма, которые можно использовать при решении прикладных задач.

## 2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Дана целевая функция  $f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , определенная на множестве допустимых решений  $D \subseteq R^n$ .

Требуется найти условный глобальный максимум функции  $f(x)$  на множестве  $D$ , т.е. такую точку  $x^* \in D$ , что

$$f(x^*) = \max_{x \in D} f(x),$$

где  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ ,  $D = \{x \mid x_i \in [a_i, b_i], i = 1, 2, \dots, n\}$ .

Задача поиска минимума функции  $f(x)$  сводится к задаче поиска максимума путем замены знака перед функцией на противоположный:  $f(x^*) = \min_{x \in D} f(x) = -\max_{x \in D} [-f(x)]$ . Функция  $f(x)$  может быть многоэкстремальной, поэтому искомое решение в общем случае неединственное.

## 3. СТРАТЕГИЯ ПОИСКА РЕШЕНИЯ

В начале работы метода случайным образом, используя предположение о равномерном распределении, на множестве допустимых решений  $D$  генерируется некоторый набор начальных точек (волков в стае):  $I = \{x^j = (x_1^j, x_2^j, \dots, x_n^j)^T, j = 1, \dots, NP\} \subset D$ , где  $x^j$  – вектор координат волка с номером  $j$ ,  $NP$  – количество волков в стае. Поскольку в процессе охоты положение жертвы точно не известно вследствие ее постоянного движения (а в задаче оптимизации не известно положение точки экстремума), то члены стаи ориентируются на лидеров, полагая, что они обладают большей информацией о положении жертвы (точке экстремума).

В стае волков, где каждый волк характеризуется своей позицией в области допустимых решений, выбираются три последовательно лучших  $(\alpha, \beta, \gamma)$  по величине целевой функции  $f(x)$ :  $x^\alpha, x^\beta, x^\gamma$ . Все волки в стае меняют свое положение с учетом сравнения своей текущей позиции с этими тремя наилучшими:

$$x^j(k+1) = \frac{x^{j,1}(k+1) + x^{j,2}(k+1) + x^{j,3}(k+1)}{3},$$

$$x^{j,1}(k+1) = x^\alpha(k) - A_\alpha^j \otimes D_\alpha^j(k),$$

$$x^{j,2}(k+1) = x^\beta(k) - A_\beta^j \otimes D_\beta^j(k),$$

$$x^{j,3}(k+1) = x^\gamma(k) - A_\gamma^j \otimes D_\gamma^j(k),$$



$$D_{\alpha}^j(k) = \left| C_{\alpha}^j \otimes x^{\alpha}(k) - x^j(k) \right|,$$

$$D_{\beta}^j(k) = \left| C_{\beta}^j \otimes x^{\beta}(k) - x^j(k) \right|,$$

$$D_{\gamma}^j(k) = \left| C_{\gamma}^j \otimes x^{\gamma}(k) - x^j(k) \right|,$$

где  $\otimes$  – операция поэлементного произведения векторов по Адамару,  $k$  – номер итерации,  $x^j(k+1), x^j(k)$  – следующее и текущее положения волков,  $j=1, \dots, NP$ ;  $A_{\alpha}^j, A_{\beta}^j, A_{\gamma}^j$  – векторы, определяемые по правилу  $A_m^j = 2a \otimes r_1 - a$ ,  $m = \alpha, \beta, \lambda$ ;  $r_1$  –  $n$ -мерный вектор, каждая компонента которого описывается равномерным распределением на отрезке  $[0, 1]$ ;  $a$  – вектор с одинаковыми компонентами, уменьшающимися линейно по закону  $a_i = 2(1 - \frac{k}{K})$ ,  $i = 1, \dots, n$ ,  $K$  – максимальное число итераций;  $C_{\alpha}^j, C_{\beta}^j, C_{\gamma}^j$  – векторы, определяемые по правилу  $C_m^j = 2r_2$ ,  $m = \alpha, \beta, \lambda$ ;  $r_2$  –  $n$ -мерный вектор, каждая компонента которого описывается равномерным распределением на отрезке  $[0, 1]$ . Имеется модификация, в которой  $a_i = 2(1 - \frac{k^2}{K^2})$ ,  $i = 1, \dots, n$  [8].

Общая схема работы метода серых волков представлена на рис. 1.

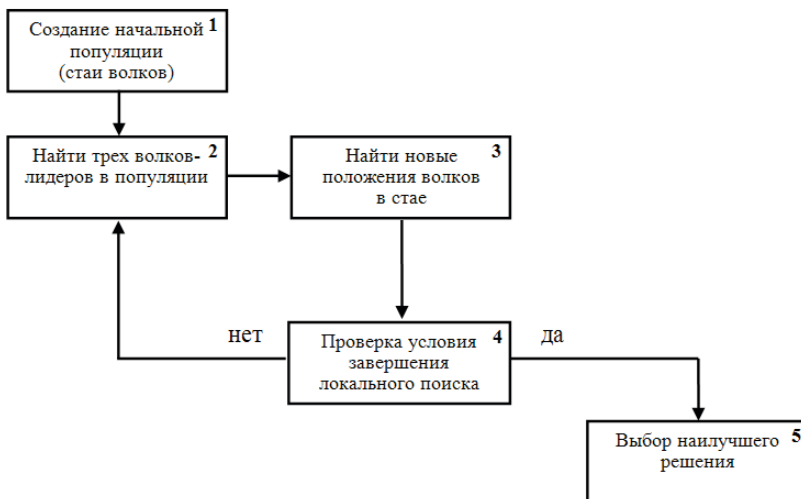


Рис.1. Общая схема работы метода, имитирующего поведение стаи серых волков

## 4. АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ

**Шаг 1. Генерация начальной популяции.**

Шаг 1.1. Задать параметры метода:

число элементов в популяции  $NP$ ;

максимальное число итераций  $K$ ;

Положить  $k = 1$  (счетчик числа итераций).



Шаг 1.2. Используя равномерный закон распределения на множестве, сгенерировать начальную популяцию

$$I_k = \{x^j(k) = (x_1^j(k), x_2^j(k), \dots, x_n^j(k))^T, j = 1, \dots, NP\} \subset D.$$

Шаг 1.3. Для каждого волка в стае вычислить соответствующее значение целевой функции:  $f(x^1(k)), \dots, f(x^{NP}(k))$ .

Шаг 1.4. Среди сгенерированных частиц найти три наилучших решения, которым соответствуют наибольшие значения целевой функции:

$x^\alpha = \arg \max_{j \in \{1, \dots, NP\}} f(x^j(k))$  – лучшее решение;  $x^\beta$  – второе по величине функции;  $x^\gamma$  – третье по величине функции.

### Шаг 2. Вычисление параметров.

Для каждого волка в стае с номером  $j$  найти:

- а)  $a$  – вектор с одинаковыми компонентами  $a_i = 2(1 - \frac{k}{K})$ ,  $i = 1, \dots, n$ , или  $a_i = 2(1 - \frac{k^2}{K^2})$ ,  $i = 1, \dots, n$ , в зависимости от используемой модификации;
- б)  $A_\alpha^j, A_\beta^j, A_\gamma^j$  – векторы, определяемые по правилу  $A_m^j = 2a \otimes r_1 - a$ ,  $m = \alpha, \beta, \lambda$ ; где  $r_1$  –  $n$ -мерный вектор, каждая компонента которого описывается равномерным распределением на отрезке  $[0, 1]$ ;  $\otimes$  – операция поэлементного произведения векторов по Адамару;
- в)  $C_\alpha^j, C_\beta^j, C_\gamma^j$  – векторы, определяемые по правилу  $C_m^j = 2r_2$ ,  $m = \alpha, \beta, \lambda$ , где  $r_2$  –  $n$ -мерный вектор, каждая компонента которого описывается равномерным распределением на отрезке  $[0, 1]$ .

### Шаг 3. Генерация новой стаи.

Шаг 3.1. Найти новые положения волков в стае

$$D_\alpha^j(k) = |C_\alpha^j \otimes x^\alpha(k) - x^j(k)|,$$

$$D_\beta^j(k) = |C_\beta^j \otimes x^\beta(k) - x^j(k)|,$$

$$D_\gamma^j(k) = |C_\gamma^j \otimes x^\gamma(k) - x^j(k)|,$$

$$x^{j,1}(k+1) = x^\alpha(k) - A_\alpha^j \otimes D_\alpha^j(k),$$

$$x^{j,2}(k+1) = x^\beta(k) - A_\beta^j \otimes D_\beta^j(k),$$

$$x^{j,3}(k+1) = x^\gamma(k) - A_\gamma^j \otimes D_\gamma^j(k),$$

$$x^j(k+1) = \frac{x^{j,1}(k+1) + x^{j,2}(k+1) + x^{j,3}(k+1)}{3}, \quad j = 1, \dots, NP.$$

Шаг 3.2. Для каждого волка в стае вычислить соответствующее ему значение целевой функции:  $f(x^1(k+1)), \dots, f(x^{NP}(k+1))$ .

Шаг 3.3. Найти новые три наилучших решения, которым соответствуют наибольшие значения целевой функции:





$$x^\alpha = \arg \max_{j \in \{1, \dots, NP\}} f(x^j(k+1)),$$

$x^\beta$  – второе по величине функции;

$x^\gamma$  – третье по величине функции.

**Шаг 4.** Проверка условия завершения поиска.

Если  $k = K$ , то процесс поиска завершить, перейти к шагу 5, а иначе положить  $k = k + 1$  и перейти к шагу 2.

**Шаг 5.** Выбор решения из последней популяции.

Закончить работу алгоритма. В качестве решения (приближенного) задачи  $f(x^*) = \max_{x \in D} f(x)$  выбрать волка с положением  $x^\alpha$ , которому соответствует наибольшее значение целевой функции.

Замечание.

1. Компоненты векторов  $A_m^j$ , где  $m = \alpha, \beta, \lambda$ , являются случайными на отрезке  $[-a_i, a_i]$ , при этом  $a_i$  уменьшается от 2 до нуля. При  $|A_{m_i}^j| \geq 1$  волк может удаляться от жертвы, осуществляя исследование множества допустимых решений, а при  $|A_{m_i}^j| < 1$ ,  $i = 1, \dots, n$ , волк приближается к жертве, нападая на нее.
2. Если новое положение волка на шаге 3.1 не принадлежит множеству допустимых решений, следует генерировать параметры метода заново до тех пор, пока ограничения не будут выполнены. Второй способ – если какая-то компонента вышла за границы отрезка  $[a_i, b_i]$ , то в качестве нового значения выбрать соответствующую ближайшую границу.

## 5. ПРОГРАММНОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ

На основе изложенного алгоритма разработана программа поиска глобального экстремума функций. Для ее создания использовалась среда разработки Microsoft Visual Studio, язык программирования C# [1].

Возможности программы позволяют изучить алгоритм метода, а также влияние параметров метода на результат его работы. В список выбираемых функций включены стандартные многоэкстремальные тестовые функции двух переменных, для которых известно точное решение.

На рис. 2 представлено главное окно метода, имитирующего поведение стаи серых волков, где пользователь может выбрать вид целевой функции, задать множество допустимых решений и параметры метода, просматривать результаты работы.

Разработанная программа предусматривает возможность анализа работы метода по шагам. На рис. 3 представлено окно пошаговой работы метода, где изображена общая схема метода, отображаются результаты работы после выполнения каждого шага (график изменения наилучшего значения целевой функции, а также графическое изображение популяции) и после завершения работы метода.

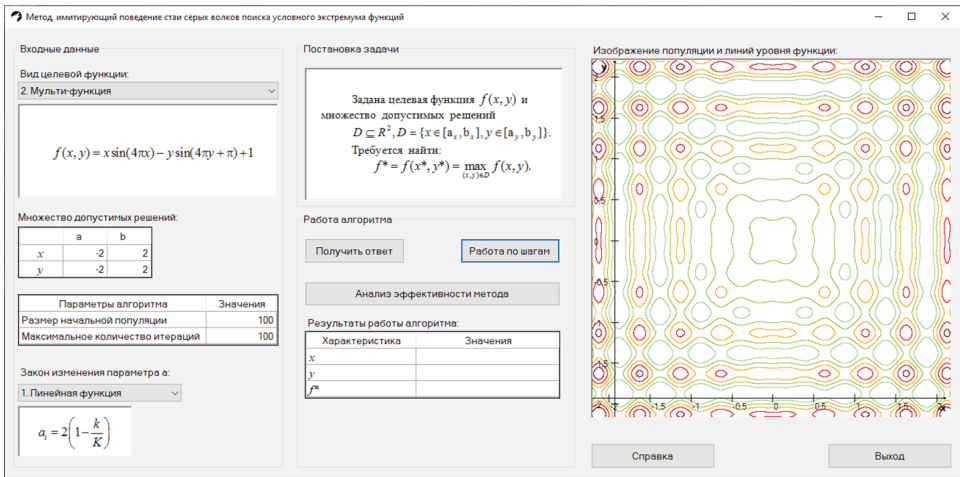


Рис. 2. Главное окно программы метода, имитирующего поведение стаи серых волков

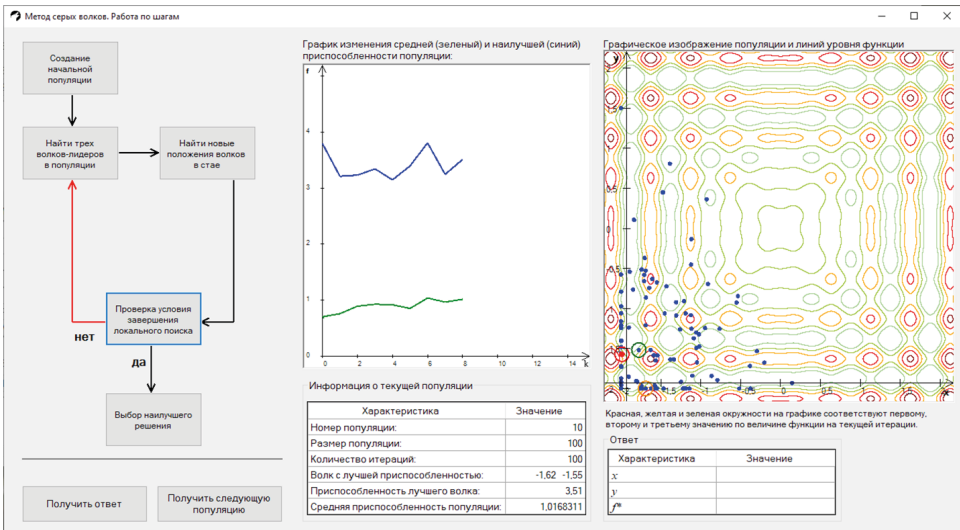


Рис. 3. Окно пошаговой работы метода, имитирующего поведение стаи серых волков

## 6. ТЕСТОВЫЕ ПРИМЕРЫ

В качестве тестовых функций использовались следующие функции (табл. 1).



Таблица 1

## Примеры стандартных тестовых функций

Название функции	Формула	Глобальный экстремум	Точки глобального экстремума
Корневая функция	$-\frac{1}{1+ z^6-1 }, z \in \mathbb{C}, z = x + iy$	1	$(-1,6288;-1,6288)^T$ ; $(1,6288;1,6288)^T$ ; $(-1,6288;1,6288)^T$ ; $(1,6288;-1,6288)^T$ .
Функция Розенброка	$-(1-x)^2 - 100(y-x^2)^2$	0	$(1;1)^T$
Функция Швевеля	$x \sin(\sqrt{ x }) + y \sin(\sqrt{ y })$	837,9657	$(420,9687;420,9687)^T$

**Пример 1.** Найдем глобальный максимум корневой функции. Зададим множество допустимых решений  $x, y \in [-2; 2]$ . Выберем следующие параметры алгоритма:

число элементов в популяции  $NP = 100$ ;

максимальное число итераций  $K_{\max} = 100$ .

На рис. 4 представлена популяция на начальной ( $k = 1$ ), промежуточных ( $k = 10$ ,  $k = 25$ ) и конечной ( $k = 200$ ) итерациях. Красная точка соответствует наиболее приспособленному решению – лидеру стаи. Красная, желтая и зеленая окружности на графике соответствуют лучшему, второму и третьему значению по величине функции на текущей итерации.

Результаты работы алгоритма:

наилучшее решение  $(x^*; y^*) = (0,9999; 0,0003)$ ;

значение целевой функции  $f(x^*, y^*) = 0,9984$ ;

отклонение от точного решения  $\Delta = 0,0016$ .

Графики изменения наилучшего и среднего значений целевой функции представлены на рис. 5.

**Пример 2.** Найдем глобальный максимум функции Розенброка. Зададим множество допустимых решений  $x \in [-3; 3]$ ,  $y \in [-1; 5]$ . Выберем следующие параметры алгоритма:

число элементов в популяции  $NP = 50$ ;

максимальное число итераций  $K_{\max} = 200$ .

На рис. 6 представлена популяция на начальной ( $k = 1$ ), промежуточных ( $k = 10$ ,  $k = 25$ ) и конечной ( $k = 200$ ) итерациях. Красная точка соответствует наиболее приспособленному решению – лидеру стаи. Красная, желтая и зеленая окружности на графике соответствуют наилучшему, второму и третьему значению по величине функции на текущей итерации.

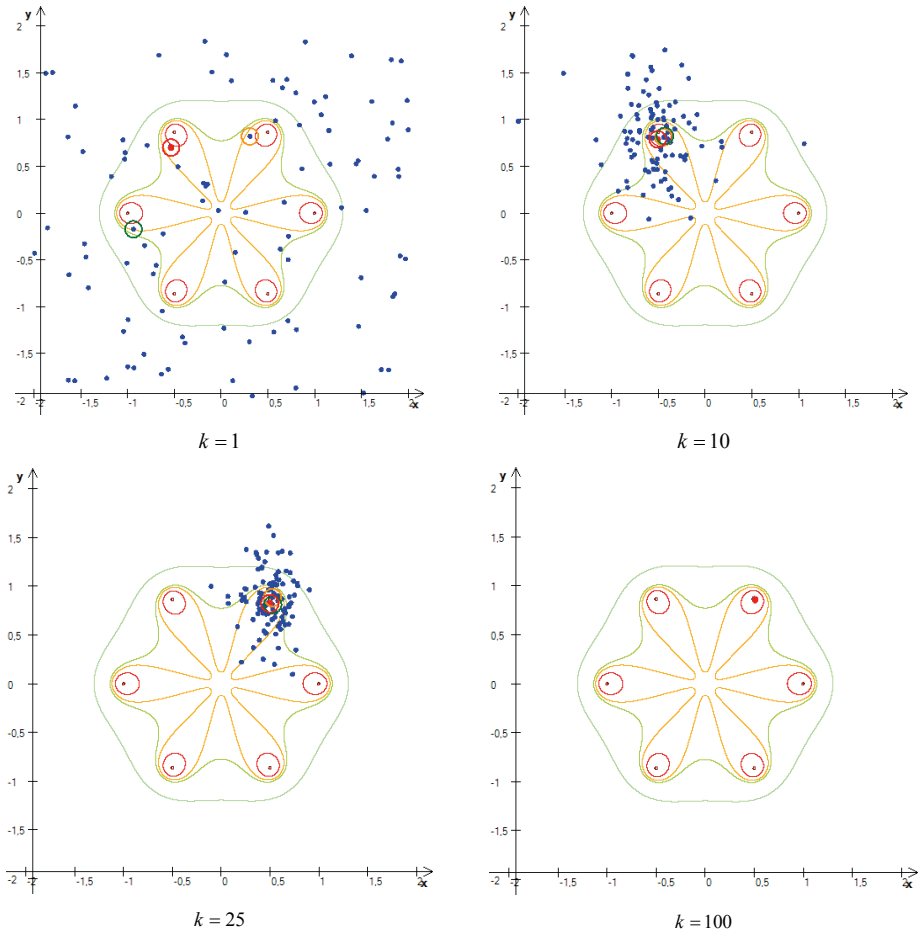


Рис. 4. Начальная, промежуточные и конечная итерации

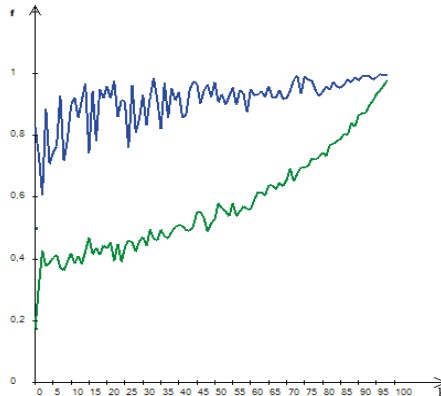


Рис. 5. Графики изменения наилучшего (синий) и среднего значения (зеленый) целевой функции



Результаты работы алгоритма:

наилучшее решение  $(x^*; y^*) = (1, 0056; 1, 0113)$ ;

значение целевой функции  $f(x^*, y^*) = 0$ ;

отклонение от точного решения  $\Delta = 0$ .

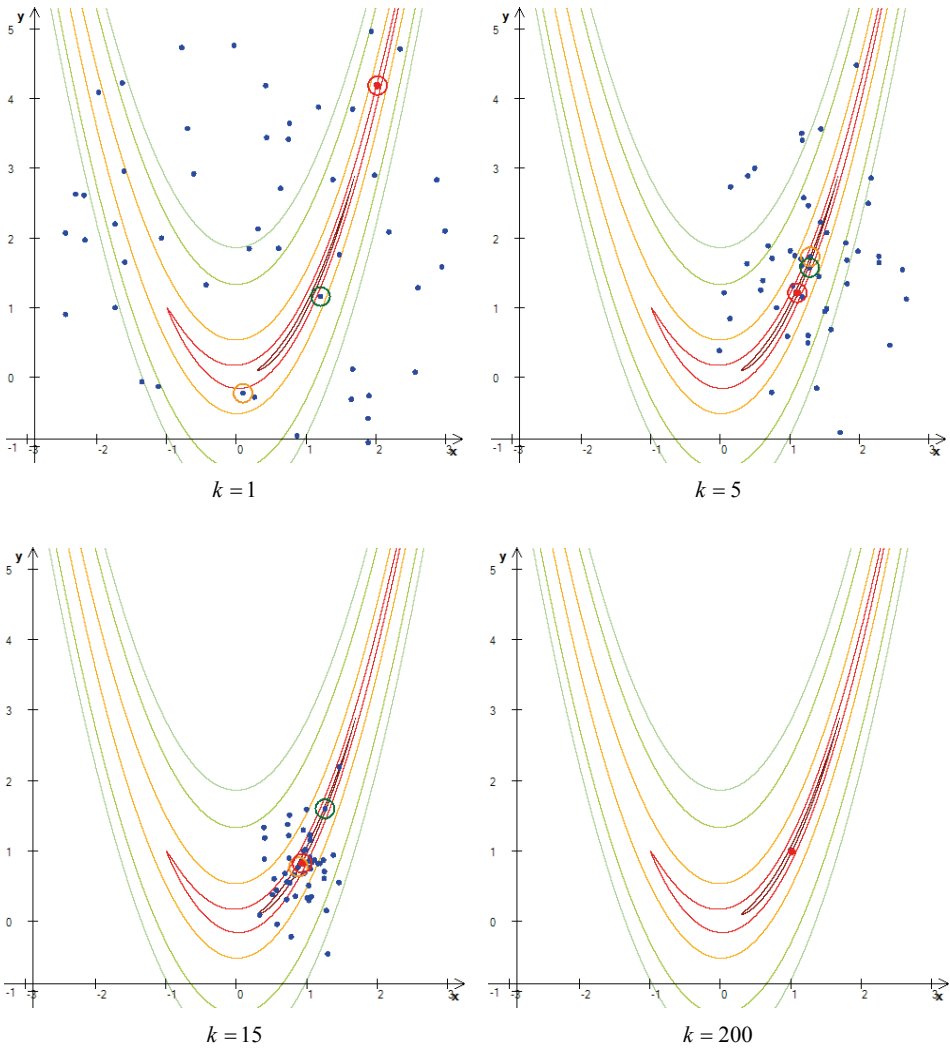


Рис. 6. Начальная, промежуточные и конечная популяции

Графики изменения наилучшего и среднего значений целевой функции представлены на рис. 7.

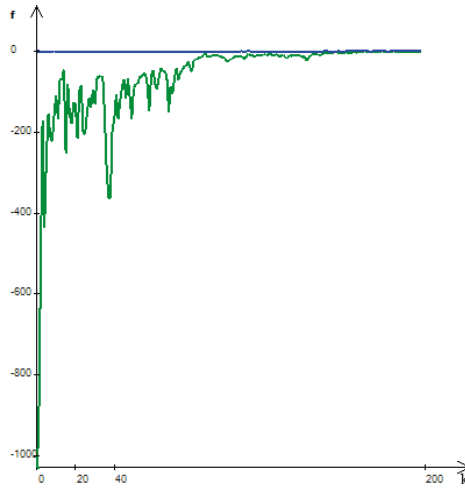


Рис. 7. Графики изменения наилучшего (синий) и среднего значения (зеленый) целевой функции

Рассмотрим подробнее процесс перехода от одной популяции к другой. Формирование новой популяции состоит из трех основных этапов. На первом этапе происходит вычисление значения целевой функции для каждого волка.

Второй этап содержит в себе выбор трех наиболее приспособленных особей. Наиболее приспособленная особь (ей соответствует наибольшее значение целевой функции) с положением  $x^{\alpha}$  окрашивается в красный цвет и выделяется красным кругом. Вторая по приспособленности особь с положением  $x^{\beta}$  выделяется оранжевым кругом. Третья по величине целевой функции особь с положением  $x^{\gamma}$  выделяется зеленым кругом.

Третий этап соответствует движению волков вокруг трех лучших особей, выделенных на втором этапе. В ходе движения, как лучшие, так и все остальные особи меняют свое положение. Процесс перехода от одной популяции к другой изображен на рис. 8.

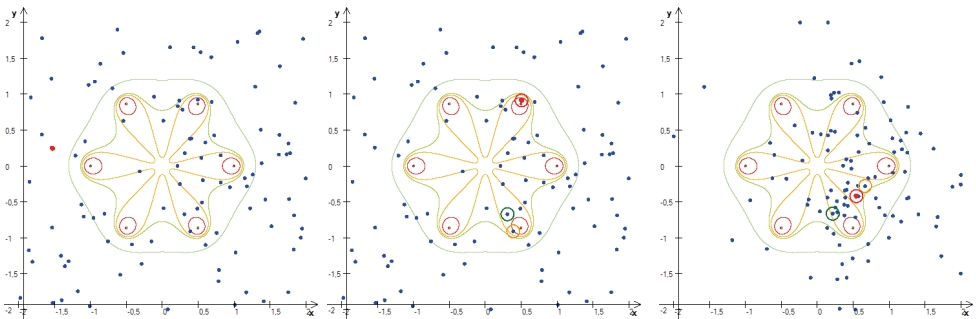


Рис. 8. Процесс перехода от одной популяции к другой



## 7. АНАЛИЗ ЭФФЕКТИВНОСТИ МЕТОДА

### 7.1. Рекомендации по выбору параметров

**Размер популяции**  $NP$  определяет количество вычислений целевой функции на каждой итерации. Для задачи с большой областью допустимых решений рекомендуется выбирать большее значение параметра  $NP$ . Рекомендуемые значения параметра  $NP \in [100; 1000]$ .

**Число итераций**  $ITER$  определяет, как долго будет продолжаться поиск новых решений. Чем больше величина  $ITER$ , тем более точным будет решение. Для рассмотренного набора стандартных тестовых функций рекомендуемые значения  $ITER \in [200; 1500]$  в зависимости от сложности целевой функции.

### 7.2. Анализ работы метода при различных значениях параметров

В данном разделе приводится статистический анализ и сравнение работы метода, имитирующего поведение стаи серых волков, при различных значениях его параметров. Исследуемый метод применялся к некоторым функциям из набора тестовых функций (табл. 1). Для каждой функции проводились серии из 100 решений одной и той же задачи с одними и теми же значениями параметров. Для полученной выборки  $\{f^1, f^2, \dots, f^{100}\}$  вычислялись среднее значение отклонения полученного решения от точного  $\bar{\Delta f} = \frac{1}{100} \sum_{i=1}^{100} \Delta f_i$ , где  $\Delta f_i = |f(x^*) - f^i|$ ; наименьшее значение отклонения  $\Delta f_{best} = \min_i \Delta f_i$ ; среднеквадратическое отклонение  $\bar{\sigma}_f = \sqrt{\bar{S}_{100}}$ , где  $\bar{S}_{100} = \frac{1}{100} \sum_{i=1}^{100} (\Delta f_i - \bar{\Delta f})^2$ ; количество успехов  $n_{усп}$  (успехом считалось попадание лучшей точки в  $\varepsilon$ -окрестность точного решения,  $\varepsilon = \frac{\max_{i=1, \dots, n} |b_i - a_i|}{1000}$ ). Результаты, полученные для каждой функции, представлены в табл. 2–3.

Таблица 2

Влияние параметров метода. Корневая функция

Параметры метода		$\bar{\Delta f}$	$\Delta f_{best}$	$\bar{\sigma}_f$	$n_{усп}$
$NP$	$ITER$				
100	100	0,005039	0,000284	0,003659	100
200	100	0,002689	0,000130	0,001656	100
200	200	0,001483	0,000057	0,001414	100
500	100	0,001567	0,000026	0,000881	100
500	500	0,000245	0,000002	0,000212	100
500	200	0,000720	0,000007	0,000606	100
1000	200	0,000440	0,000010	0,000329	100
50	50	0,012814	0,003722	0,007206	91
100	50	0,009087	0,000778	0,006744	96
80	80	0,007032	0,000430	0,004969	99



Таблица 3

**Влияние параметров метода. Функция Швепеля**

Параметры метода		$\overline{\Delta f}$	$\Delta f_{best}$	$\overline{\sigma_f}$	$n_{ycn}$
<i>NP</i>	<i>ITER</i>				
100	100	56,868254	0,000956	61,493337	53
200	100	34,356351	0,000346	53,740254	71
200	200	20,137841	0,000102	44,488405	83
500	100	8,296381	0,000041	30,218292	93
500	500	0,000235	0,000041	0,000207	100
500	200	3,554438	0,000041	20,204130	97
1000	200	0,000525	0,000041	0,000447	100
1000	1000	0,000053	0,000041	0,000026	100
500	1000	1,184456	0,000041	11,784464	99
1000	200	0,000719	0,000041	0,000680	100

Анализируя работу метода, имитирующего поведение стаи серых волков, было установлено, что алгоритм успешно находит экстремум большинства тестовых функций. Вариация параметров позволяет в серии из 100 запусков найти глобальный максимум функций с высокой точностью.

Алгоритм испытывает трудности при нахождении экстремума функций Швепеля, Шаффера и Розенброка. Однако данная проблема решается благодаря увеличению числа итераций или увеличению популяции стаи.

Проведенный анализ позволяет рекомендовать данный алгоритм для решения разнообразных задач теории управления [9].

**Литература**

1. Пantelev A.V., Skavinskaya D.V. Метаэвристические алгоритмы глобальной оптимизации. М.: Вузовская книга, 2019.
2. Карпенко А.П. Современные алгоритмы поисковой оптимизации. Алгоритмы, вдохновленные природой. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2014.
3. Гладков В.А., Курейчик В.В. Биоинспирированные методы в оптимизации. М.: Физматлит, 2009.
4. Glover F.W., Kochenberger G.A. (eds.). Handbook of Metaheuristics. Boston, MA: Kluwer Academic Publishers, 2003
5. Floudas C.A., Pardalos P.M. (eds.). Encyclopedia of Optimization. Springer, 2009.
6. Clerc M. Particle swarm optimization. ISTE Ltd, 2006.
7. Mirjalili S., Mirjalili S.M., Lewis A. Grey wolf optimizer //Advances in Engineering Software. 2014. Vol. 69. P. 46–61.
8. Mittal N., Singh U., Sohi B.S. Modified grey wolf optimizer for global engineering optimization // Applied Computational Intelligence and Soft Computing. 2016. Article ID 7950348. <http://dx.doi.org/10.1155/2016/7950348>
9. Пantelev A.V. Метаэвристические алгоритмы оптимизации законов управления динамическими системами. М.: Факториал, 2020.





## Developing Software of Global Optimization Method Based on Grey Wolf Optimizer

**Andrei V. Panteleev\***

MAI (National Research University), Moscow, Russia

ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-2493-3617>

e-mail: [avpanteleev@inbox.ru](mailto:avpanteleev@inbox.ru)

**Ivan A. Belyakov\*\***

MAI (National Research University), Moscow, Russia

ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-3457-9914>

e-mail: [vanbelyakov@yandex.ru](mailto:vanbelyakov@yandex.ru)

This article discusses the development of software that allows to simulate the algorithm of the “Grey Wolf Optimizer” method. This algorithm belongs to the class of metaheuristic algorithms that allow finding a global extremum on a set of admissible solutions. This algorithm is being the most efficiently used in a situation where the cost function is specified in the form of a black box. The algorithm belongs to both bioinspired algorithms and to the class of algorithms of Particle Swarm Optimization. To analyze the efficiency of the algorithm, software was created that allows to vary the parameters of the method. The article contains examples of the program’s work on various test functions. The purpose of the program is to collect and analyze statistical results, making possible to evaluate the final result. The program provides to build graphs that make it possible to make a more thorough assessment of the results obtained. The program has a step-by-step function that allows one to analyze the specifics and features of the algorithm. Analysis of statistical data provides more detailed selection of the parameters of the algorithm.

**Keywords:** global optimization algorithm, metaheuristic algorithm, software, GWO, Grey Wolf Optimizer

### For citation:

Panteleev A.V., Belyakov I.A. Developing Software of Global Optimization Method Based on Grey Wolf Optimizer. *Modelirovanie i analiz dannykh = Modelling and Data Analysis*, 2021. Vol. 11, no. 2, pp. 59–73. DOI: <https://doi.org/10.17759/mda.2021110204> (In Russ., abstr. in Engl.).

\***Panteleev Andrei Vladimirovich**, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Head of the Department of Mathematics and Cybernetics, Institute of Information Technologies and Applied Mathematics, Moscow Aviation Institute (National Research University), Moscow, Russia, ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-2493-3617>, e-mail: [avpanteleev@inbox.ru](mailto:avpanteleev@inbox.ru)

\*\***Belyakov Ivan Andreevich**, Undergraduate Student of the Institute of Information Technologies and Applied Mathematics, Moscow Aviation Institute (National Research University), Moscow, Russia, ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-3457-9914>, e-mail: [vanbelyakov@yandex.ru](mailto:vanbelyakov@yandex.ru)



### **References**

1. Panteleev A.V., Skavinskaya D.V. *Metaevristichskie algoritmy global'noj optimizacii*. M.: Vuzovskaya kniga, 2019.
2. Karpenko A.P. *Sovremennye algoritmy poiskovoj optimizacii*. Algoritmy, vdohnovlennyye prirodoy. M.: MGTU im. N.E. Baumana, 2014.
3. Gladkov V.A., Kurejchik V.V. *Bioinspirirovannyye metody v optimizacii*. M.: Fizmatlit, 2009.
4. Glover F.W., Kochenberger G.A. (eds.). *Handbook of Metaheuristics*. Boston, MA: Kluwer Academic Publishers, 2003
5. Floudas C.A., Pardalos P.M. (eds.). *Encyclopedia of Optimization*. Springer, 2009.
6. Clerc M. *Particle swarm optimization*. ISTE Ltd, 2006.
7. Mirjalili S., Mirjalili S.M., Lewis A. Grey wolf optimizer // *Advances in Engineering Software*. 2014. Vol. 69. P. 46–61.
8. Mittal N., Singh U., Sohi B.S. Modified grey wolf optimizer for global engineering optimization // *Applied Computational Intelligence and Soft Computing*. 2016. Article ID 7950348. <http://dx.doi.org/10.1155/2016/7950348>
9. Panteleev A.V. *Metaevristicheskie algoritmy optimizacii zakonov upravleniya dinamicheskimi sistemami*. M.: Faktorial, 2020.

## ◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇МЕТОДИКА ОБУЧЕНИЯ◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇

УДК 378.018.43

### Дистанционное обучение: проблемы и решения

**Лукин В.Н.\***

Московский государственный психолого-педагогический университет  
(ФГБОУ ВО МГППУ), г. Москва, Российская Федерация  
ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-8906-2686>  
e-mail: [lukinvn@list.ru](mailto:lukinvn@list.ru)

Жизнь распорядилась кардинально пересмотреть форму преподавания в вузе: от традиционно очной к достаточно странной заочной, названной дистанционной. Что мы потеряли в качестве преподавания? Сумели компенсировать потери? Если да, то за счёт чего и какими усилиями? Что можно сказать об уровне выпускников? Так ли туманны перспективы?

**Ключевые слова:** качество обучения, дистанционная форма, учёт посещаемости, работа в семестре, контрольные мероприятия, оценка студенческих работ, программное обеспечение.

#### Для цитаты:

Лукин В.Н. Дистанционное обучение: проблемы и решения // Моделирование и анализ данных. 2021. Том 11. № 2. С. 74–88. DOI: <https://doi.org/10.17759/mda.2021110205>

*«Чем отличается соловей от воробья?» –  
«Соловей закончил консерваторию очно, а воробей заочно».  
Старинная мудрость*

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Совершенно неожиданно нам, обычным вузовским преподавателям, почти три семестра пришлось обучать обычных нормальных студентов в непривычном дистанционном формате. Сказать, что такой вариант обучения сам по себе какое-то новое явление, нельзя. Просто он применялся обычно для категории обучающихся, которые, как правило, уже имели высшее образование. Основная его цель – либо повышение квалификации, либо изменение профессиональной деятельности [3]. В любом случае

\*Лукин Владимир Николаевич, к.ф.-м.н., профессор, Московский государственный психолого-педагогический университет (ФГБОУ ВО МГППУ), г. Москва, Российская Федерация, ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-8906-2686>, e-mail: [lukinvn@list.ru](mailto:lukinvn@list.ru)



подразумевалось, что слушатели в состоянии самостоятельно разобраться в достаточно сложных вопросах курса. А до этого успешно функционировала система заочного образования, качество которого, конечно, не дотягивало до очного, но благодаря усилиям методистов и преподавателей было вполне сносным, а иногда и хорошим.

В нынешней ситуации всё получилось гораздо хуже. Сразу стали очевидными принципиальные преимущества очного образования: возможность донести мысль до каждого студента, давать материал в оптимальном темпе, пользоваться всеми наработанными техническими приёмами, получать отклик от аудитории. Не последнее дело – контролировать посещение и удерживать внимание слушателей. Со стороны студентов – возможность сосредоточить внимание на преподаваемом материале и оперативно получить необходимые разъяснения. Дистанционный вариант не может этого дать принципиально. Кроме того, не было наработанной или хотя бы продуманной методики преподавания в таком формате. Известны случаи, когда опытные преподаватели уходили с работы, чтобы не участвовать, по их словам, профанации образования.

Правда, и раньше были энтузиасты дистанционной формы для обычных студентов, которые утверждали, что это передовой подход, а ретрограды-профессора не хотят понять его преимущества. Но когда им выпала доля показать, как всё здорово получается с дистанционным обучением, восторженных откликов слышно не было, особенно в начальный период удалёнки. К тому же сразу выявилась неспособность используемых средств программной поддержки дать хотя бы то, что можно было бы от них потребовать. Результат – практически потерянные три семестра.

В работе предлагается рассмотреть некоторые аспекты преподавания дисциплин, связанных с созданием программного обеспечения, с которыми пришлось столкнуться автору. Заметим, что математические и технические дисциплины, не говоря уж о гуманитарных, имеют свою специфику, и не все обсуждаемые далее проблемы имеют для них такое же решение.

## 2. КАЧЕСТВО ОБУЧЕНИЯ СТУДЕНТА

Цель любого специалиста, если он действительно специалист, – сделать свою работу качественно. Конечно, надо иметь в виду уровень качества: достижение идеала может потребовать слишком больших ресурсов, что помешает выполнить остальные задачи, например, своевременность выполнения работы. Таким образом, квалифицированный специалист поддерживает баланс между качеством и остальными характеристиками продукта. Если работа занимает всё отведённое для неё время, улучшение какой-либо характеристики требует дополнительных усилий, то есть «личного» времени, потраченного на работу. По многочисленным оценкам преподавателей, даже просто удержание качества обучения на прежнем уровне в условиях удалёнки увеличило нагрузку на подготовку и проведение занятий в 2,5–3,5 раза против обычной (речь идёт о первом семестре этого несчастья). Подготовка потребовала скрупулёзной выверки подаваемого материала, и по содержанию, и по форме, и по темпу по-



дачи, чтобы студент в течение обычного учебного времени мог его воспринять. Если в аудитории фокус внимания – преподаватель, то здесь – экран, от которого можно отвернуться или вообще отойти, потеряв, разумеется, при этом нить рассуждения.

Но особенно напрягала технология дистанционного проведения экзаменов и зачётов. Впрочем, другие контрольные мероприятия, в частности, контрольные и лабораторные работы, тоже проводить стало трудно. Практически невозможно стало предложить в ходе семинарского занятия выполнить короткое задание (минут на 5) с последующим разбором вариантов решений у доски, что даёт возможность студентам надёжно усвоить материал.

В этой ситуации неожиданно весьма полезными оказались предложения по динамической оценке знаний студентов в течение семестра, представленные, в частности, в [2]. Там, правда, оценивание производится в пятибалльной шкале, что довольно неудобно при наличии большого количества измеряемых параметров. Мы для оценки будем использовать условную  $N$ -балльную шкалу, а в финале отметку приведём к привычному виду.

### 3. ВИДЫ ЗАНЯТИЙ

В обычных условиях обучение студента в течение семестра подразумевает динамическое восприятие материала: помимо лекций, выполнение и защита различных программных и проектных заданий и другая активность в учебном процессе. Если есть обратная связь с аудиторией, преподавателю не так сложно оценить уровень подготовки студента. В дистанционном варианте общение со студентами крайне ограничено, и в финале ориентироваться приходится, в основном, на экзамен, результат которого нередко практически не зависит от работы в семестре (все мы, бывшие студенты, знаем массу историй с неожиданным получением пятёрки или, что чаще, тройки, а то и двойки).

Прежде, чем говорить об оценке качества обученности, посмотрим, чем отличаются технологии проведения различных видов занятий в дистанционной и обычной очной форме.

Начнём с лекций. Традиционно лектор устно даёт теоретический материал, используя различные средства: доска для динамического формирования информационного ряда, презентация для иллюстрирования учебного материала, наглядные пособия в разной форме (что, впрочем, не характерно для математических или программистских дисциплин). В дистанционном формате всё сводится, по сути, к презентациям. При наличии некоторого опыта их создания большинство лекций можно давать без существенной потери качества. Но если присутствует динамика, характерная для многих математических дисциплин, да и для программистских, особенно связанных с технологией создания проектных диаграмм, базами данных и т.п., презентации становятся неудобными, а то и вообще практически не годятся. Даже простое написание программы для начинающих удобно показывать не на слайде, а в процессе.



На слайде приходится либо заведомо ухудшать качество лекции, показывая начальное и конечное состояние текста программы, либо придумывать псеводинамические варианты: последовательность слайдов, ролик или ещё что. Особенно трудно показывать процесс написания программы, с рассмотрением вариантов, объяснять, почему в данной ситуации выбран тот, а не иной. В любом случае, если слушателю непонятно, и нужно изложить материал альтернативным способом, лектор оказывается бессильным. Тут мы сразу оценим возможность обратной связи. В аудитории, если лектор чувствует некоторую напряжённость, вызванную непониманием, он попытается выяснить причину и дать материал подробнее или по-другому. В дистанционной форме такой возможности практически нет, лектор должен ориентироваться на интуицию и, если он знает уровень восприимчивости аудитории, на её возможности. Но в течение года могут появиться такие студенты, которых лектор и в глаза не видел, и приходится действовать вслепую, ориентируясь на мнение преподавателей, которые работали с ними ранее. Таким образом, практически всегда эффективность лекционных занятий в дистанционной форме будет ниже, чем в очной.

Теперь о текущей учебной работе в группе. Она складывается, в основном, из семинарских и лабораторных занятий и домашних работ.

Семинарские занятия обычно сводятся к практическому закреплению лекционного материала. Если это программирование или базы данных – решение задач на темы, которые давались на лекциях. Семинары принципиально предполагают активное взаимодействие студентов и преподавателя. Идёт не только решение, но и разбор задач, демонстрация методов, закрепление путём обсуждения получившихся результатов и, что ещё важнее, типовых ошибок. Здесь же обсуждаются вопросы эффективности и качества решения, демонстрируются пути их достижения.

Понятно, что даже если отбросить остальные нюансы, практически ни одна из целей семинара в дистанционном варианте не может быть достигнута. И это наибольшая, невосполнимая потеря. Здесь мы понимаем, что *рассказать* можно всё, в интернете надёргать ещё больше (хоть и не систематизированно), а вот по-настоящему *научить* не получится.

Собственные наработки студента в течение семестра складываются из лабораторных и домашних работ. Выполнение домашних работ в очном и дистанционном варианте практически не отличается, кроме обсуждения результатов, которое в первом случае существенно более продуктивно. Лабораторные работы в очном варианте проводятся в аудитории. Студенты выполняют и предъявляют свои работы, выполненные в среде программного обеспечения вуза, то есть соответствующего конкретной дисциплине и решаемым задачам. Каждая работа обсуждается, решение корректируется в процессе диалога с преподавателем, а зачастую и с аудиторией. Студент получает устойчивые знания по изучаемому вопросу. В случае работы вне аудитории студент далеко не обязательно имеет ту же рабочую среду, что в вузе. Более того, преподаватель просто физически не может детально рассматривать и комментировать работы в процессе их выполнения. Таким образом, суть лабораторных работ как, в некотором



смысле, «ремесленная» практика, выхолащивается. С точки зрения формирования навыков работы в области разработки программного обеспечения ситуация близка к катастрофической. К сожалению, именно в этом месте изменить её невозможно. Тогда нужно подумать, как модифицировать форму лабораторных работ, чтобы они в условиях дистанционки дали эффект, близкий к желаемому.

Самое простое, что приходит в голову – сделать вместо лабораторной расширенную домашнюю работу. Но такой вариант неконструктивен: студент, конечно, нагружается, но никаких новых профессиональных навыков не получает. А проверка таких лабораторных, выявление недостатков, комментирование или корректировка, да ещё совместно со студентом, убьёт всё и так небольшое свободное время преподавателя. Значит, чем-то надо пожертвовать, но добавить что-то новое. Пожертвуем, разумеется, личной беседой со студентом по поводу каждой лабораторки (а таких бесед, если в группе 15 человек, да 3 работы на каждого, да 2–3 подхода, выходит под сотню, даже больше). Но оценивать работу надо!

Тогда сгруппируем студентов в команды по 3–5 человек и будем проводить лабораторки в командах. Каждая команда имеет своего руководителя (из этих же студентов) со своими полномочиями. Плюсы подхода: экономится время преподавателя, студент получает неоценимый навык работы в команде в условиях, близких производственным. Для реального производства программного обеспечения характерна нечёткая постановка задачи, требующая проведения исследования, необходимо соблюдение достаточно жёстких сроков сдачи и выполнение разумных требований к качеству. Как, где и в каком формате встречаться студентам для проведения работы решает руководитель. Минусы подхода: нет контактов с преподавателем, который играет роль заказчика, студент не может оперативно задать ему вопрос, а тот не может вовремя указать на ошибку. Очевидно, что минусы гораздо весомее плюсов, но это хоть какой-то выход.

Оценивание лабораторных работ производится одинаково что в очном, что в дистанционном варианте. Так как выполнение становится командным, а оценивается работа в целом, уровень отметки должен быть пропорционален количеству участников (если  $k$  участников, то при  $N$ -балльной шкале максимальный балл  $kN$ ). Далее руководитель внутри команды распределяет отметки (баллы) самостоятельно. По идее, он должен бы учитывать персональный вклад каждого участника. В сильных командах так и есть, но реально, к сожалению, по разным причинам есть тенденция к уравниловке.

Деятельность студентов не ограничивается лабораторными и домашними работами. Есть и другие варианты, самый популярный из которых – это доклад по теме дисциплины. В дистанционном варианте надо учитывать буквально всё, спектр работ должен быть больше, а их веса в общей отметке значительнее, чтобы стимулировать занятия в семестре.

Естественно предположить, что в условиях удалёнки, где практически невозможно эффективно проводить семинары, лабораторные работы наиболее полно говорят о достижениях студента в семестре, значит, рейтинг отметки за них должен быть очень значимым, даже учитывая экзамен.



## 4. ФИНАЛЬНАЯ ОЦЕНКА

Начнём с конца.

Рассмотрим сценарий сдачи экзамена. Прежде всего, обратим внимание на то, что экзаменационные вопросы, подготовленные для очного варианта, не всегда удобны для дистанционного. Например, в дистанционном непонятно, как, скажем, провести доказательство теоремы. Поэтому приходится пересматривать и редактировать экзаменационные вопросы, а в билете задачу заменять ещё одним вопросом.

Теперь о процедуре сдачи. Конечно, можно бы воспользоваться рекомендациями и заставить студента показать на камеру свою квартиру. Но это плохо как по моральным, так и по техническим соображениям: изобретательный студент может не показать на камеру какой-то уголок, пригодный для шпаргалки, или отговориться отсутствием необходимого оборудования. Гораздо лучше использовать контроль времени. На подготовку ответа выделяется короткий интервал времени, о чём студенты заранее предупреждаются. Устанавливается таймер, подготовка пошла. Если при ответе студент путается, всё понятно. Как всегда, в сомнительных случаях используются дополнительные вопросы, которые, конечно, должны быть достаточно простыми, решение задач не проходит. Но зато можно увидеть, в какой степени студент понимает смысл вопроса. Что касается величины интервала времени на подготовку, практика показала, что вполне хватает минуты: подготовленные студенты даже её не используют, а уже полторы минуты приводят к «совещанию» с интернетом. Конечно, в интернет можно влезть и за минуту, но читать приходится по слогам, особенно малознакомые термины. Коль скоро значительная часть работ выполняется в течение семестра, вес оценки устного ответа, естественно, ниже обычного, и это позволяет отказаться от общей двойки на экзамене при неверном ответе на один из вопросов.

## 5. ПРОИЗВОДСТВЕННАЯ ДИСЦИПЛИНА

В очном варианте в течение семестра студент должен пройти ряд контрольных точек, включая финальную: экзамен или зачёт. Формально дистанционный случай ничем не отличается. Но здесь студент не связан явками на аудиторские занятия и демонстрацией своих работ. Тем не менее, а может и в большей степени, студент должен соблюдать то, что называют «производственной дисциплиной»: своевременное представление своих наработок. В реальной жизни, если программист не сдал заказчику работу в срок, он не получит ожидаемого вознаграждения. В дистанционном варианте мы пробуем компенсировать ослабление «академической» подготовки практической, поэтому возьмём из реальной жизни практику штрафных санкций за нарушение производственной дисциплины.

Итак, работа в семестре стала явно влиять на итоговую отметку, значит, контролировать сроки следует более жёстко: от штрафных баллов за их несоблюдение до отказа в приёме работы после срока («поезд ушёл») с выставлением нулевого балла за работу. Сроки сдачи для каждой работы, конечно, различны. Так, срок лабораторных, которых обычно 3–4 в семестр, определяется датой, его нарушение влечёт по-





терю баллов. Контрольная работа длительностью 1–2 пары выполняется дома за то же время, результат присылается, например, по почте. За нарушение срока присылки выставляется 0 баллов. Время запланированных докладов в нашей практике ни разу не нарушалось, так что опыта штрафных санкций нет.

Теперь о посещаемости занятий, которая тоже относится к понятию производственной дисциплины. Чтобы не уравнивать прогульщиков и нормальных студентов, итоговая отметка должна зависеть от уровня посещений (исключая, конечно, уважительные причины). В дистанционном варианте мы видим список участников, которые присутствуют на занятиях, поэтому переключка не нужна, как и регистрация в бумажном журнале. Но слушатель – это ещё не участник, он в это время может пить чай на кухне, валяться на диване или ехать в транспорте. Если у нас семинар, активное общение решает проблему. На потоковой лекции, конечно, сложнее, но не тоже не безнадёжно: как показывает практика, 10 минут на опрос аудитории, где потенциально может быть до 100 участников, бывает достаточно. Итак, сделаем, чтобы финальная отметка зависела от уровня посещений. Однако статистика говорит, что «посетить» дистанционное занятие студенту проще, чем в очном режиме, и если использовать одинаковые весовые коэффициенты посещения [2], слишком большая доля участников получит значительные преференции, что снижает стимул к изучению предмета. Так что в дистанционном варианте влияние посещений должно быть ниже.

## 6. ДИФФЕРЕНЦИРОВАННАЯ ОЦЕНКА

Раз оценка работы студента в семестре существенно влияет на качество обучения, посмотрим, каким образом выявить и оценить эту самую работу в дистанционном варианте. Из-за того, что нет возможности живого общения, приходится выявлять и учитывать множество косвенных фактов, из которых должна сложиться картинка, более-менее адекватная реальному уровню каждого студента. Впрочем, полностью или даже близко к реальной мы эту картинку не увидим. Например, студент устроился работать в области информатики, занятия прогуливает, но квалификацию повышает, правда, порой не в той области, которая соответствует учебной программе. Если фирма серьёзная, он потеряет мало, но, скорее всего, его возьмут в мелкую контору по производству неизвестно чего никакого качества по agile-технологии, восходящей к Scrum. В очном варианте вы его сможете ещё наставить на путь истинный, да и то не всегда, а в дистанционном он будет только изображать посещение, и ваши усилия пропадут втуне.

В варианте очного обучения студент в течение семестра воспринимает и усваивает материал динамически, выполняя определённые упражнения (такие, как разработка и отладка программных и проектных артефактов) или непосредственно участвуя в учебном процессе на семинарах, лекциях и т.п. Преподаватель зачастую уже представляет качество того или иного студента, и оценка на экзамене смещается от «объективной», связанной с ответом, к «справедливой», характеризующей общий уровень студента. В этой ситуации трудно объяснить, почему за примерно равный ответ раз-



ные студенты получили различные отметки. Тем более, что экзамен соответствует лекционному курсу и практически не учитывает работу студента в семестре.

Оценка качества студента и нюансов его владения предметом традиционно производится с использованием экспертного подхода, где в роли эксперта выступает преподаватель (мы, разумеется, исключаем тестирование, которое в информационных технологиях, да и в математике, ничего разумного не даёт). В роли заданной оценочной шкалы обычно выступает пятибалльная (реально – четырёхбалльная). Однако для «тонкой» оценки, к которой приходится прибегать в дистанционном варианте, она слишком грубая, не всегда для будущего специалиста по информационным технологиям есть явное «знает – не знает» или «почти знает – почти не знает». Пятнадцати- или десятибалльные шкалы удобнее, но для детальной оценки, при которой учитывается множество параметров, и её не достаточно. Далее будем считать, что используется некоторая шкала в  $N$  баллов, которая в финале приводится к принятой в конкретном вузе.

Итак, для контроля эффективности студента в семестре ему следует продемонстрировать определённую активность: выполнить контрольные, лабораторные, самостоятельные работы, выступить с кратким сообщением по теме дисциплины и т.п. Результаты этой деятельности полезно учитывать в итоговой отметке, что особенно актуально в дистанционном варианте. Конечно, сбор и обработка данных по каждому студенту отнимает много времени, которого и так нет, не только из-за вынужденного дистанционного режима, но и из-за так называемого «эффективного контракта», пожирающего у преподавателя всё свободное время. И для подготовки и проверки выполнения контрольных мероприятий преподаватели нередко прибегают к средствам автоматизации [6]. Правда, применять их на очном экзамене не только не актуально, но порой и довольно неудобно, в отличие от удалённого варианта, когда экзаменатор на своём экране видит реальную картинку успехов экзаменуемого.

Для индивидуального учёта отметок как в очном, так и в дистанционном вариантах можно использовать следующую расчётную функцию:

$$m = a(p) \cdot m_b + \sum k_i,$$

где

$m_b$  – базовая отметка,

$a(p)$  – функция от посещаемости занятий  $p$ ,

$k_i$  – корректирующие параметры, которые учитывают взвешенные отметки за контрольные, активность на семинарах, своевременность сдачи самостоятельных и лабораторных работ.

Параметры  $k_i$  включают и необязательные работы, и нештатные ситуации (например, долг предыдущего семестра).

В очном варианте базовую отметку можно было бы вычислить так:

$$m_b = (m_1 + m_2 + m_3) / 3,$$

где  $m_1$  и  $m_2$  – отметки за ответы на вопросы экзамена, а  $m_3$  – оценка задачи билета или средняя за лабораторные работы, если задачи по какой-то причине нет. Но для



дистанционного варианта  $m_i$  не равноценны, и приходится учитывать вес каждой составляющей. Поэтому лучше использовать скалярное произведение вектора локальных отметок за работы в семестре на вектор их весов:

$$m_b = (\mathbf{m}, \mathbf{w}).$$

Компоненты векторов:  $m_i$  – отметка за  $i$ -тую работу,  $w_i$  – её вес, причём,  $\sum w_i = 1$ .

Вид функции  $a(p)$  подбирается так, чтобы студент-прогульщик не получил «неуд» при отличном  $m_b$ , а аккуратно посещающий занятия при  $m_b$  уровня «удовлетворительно» получил «отлично». Подбор функции должен отражать равномерность изменения величины базовой отметки и не слишком «подтягивать» прилежно посещающих особенно в дистанционном режиме.

Корректирующие параметры – это то, что должно добавляться к общей отметке или вычитаться из неё. В первую очередь – это сообщения на семинарах по теме курса, которые часто бывают весьма информативными и полезными. Здесь же рубежный контроль, «премия» студенту или долг за ним.

Приведём некоторые примеры параметров и их значимости. Сообщение на семинаре (в зависимости от объёма и качества) – от  $0,7N$  (при  $N$ -балльной шкале) до минимальной величины, но не было случая, чтобы она была меньше  $0,5N$ . Рубежный контроль –  $0,1N$  в силу его значительной формальности. Долг формируется из старых «грехов» студента, за которые приходится расплачиваться величиной отметки (пример – в прошлом семестре вместо «двойки» студенту была поставлена минимальная «тройка», но с отдачей в следующем). Наоборот, есть иногда ситуации, когда студента хочется поощрить, и в предлагаемой модели это возможно.

Вес отметки за контрольную работу зависит от её сложности и статуса, но вряд ли разумно делать его больше  $0,2$ : в этом случае при оценке  $N$  баллов уже добавляется балл (по пятибалльной шкале) к базовой отметке. По опыту, студентов вполне удовлетворяет такая прибавка.

Точно так же и лабораторные работы. Их темы не равнозначны по сложности, и им естественно дать разный вес. Вес домашних работ, вообще говоря, ниже, но бывают такие интересные решения, для которых не жалко самой высокой оценки. Приходится ставить оценку  $kN$ ,  $k > 1$ .

Своевременность сдачи работы определяется прохождением контрольных сроков для каждой работы. За нарушение каждого снимается часть баллов таким образом, чтобы каждый участник команды в среднем терял чувствительное, но не катастрофическое количество баллов. Например, команда студентов может терять по баллу (по пятибалльной шкале), если к очередному этапу работа будет ещё не готова. Если в семестре  $R$  этапов, тогда первая работа при сдаче в конце семестра теряет  $R$  баллов, вторая  $(R-1)$  и т.д. В любом случае, наказание оказывается заметным, и студент старается не запаздывать.

Конечно, можно сказать, что предложенные выше изменения в критериях и способах оценки не соответствуют методическим указаниям [7]. Но мы хотим в экстремальной ситуации уменьшить потери и обеспечить приемлемое качество! В подтверждение можно обратиться к авторитету Э. Йордона [1]: «Идеалисты могут



заявить, что нельзя разработать такую структуру вознаграждения, которая бы гарантировала идеальное выполнение процесса. Но во многих случаях любое изменение в структуре вознаграждения будет улучшением по сравнению с существующей ситуацией, которая практически гарантирует неправильную работу».

## 7. КАК ВЫЖИТЬ

Оперативно обработать столь объёмный числовой материал для формирования отметки по каждому студенту без вспомогательных средств практически невозможно. Поэтому используем прикладные программные средства, как предлагается в [2], благо работа по коррекции отметок хоть и объёмная, но техническая. Исходные данные формирует, конечно, преподаватель, который регулярно фиксирует своевременность сдачи работ, отметки за них, активность на семинарах, посещаемость. Коллективные работы оцениваются одной отметкой на команду, персональные в её границах расставляют сами участники [5]. На экзамене достаточно провести опрос и занести отметки в базу.

Технология разработки ПО. 2020-2															0,3 0,3 0,2 0,2								
Группа 3.2															диаграммы				ср.		докл		
№	Фамилия	тема	9.2	23.2	2.3	9.3	16.3	23.3	8.4	22.4	6.5	20.5	3.6	проп	% пр.	П	К	Д	?	ср.	РК1	долг	0,7
1	Боровецкий Глеб	18	нн			нн								6	33%					0	0	-1	
2	Гайдуков Михаил	16												0	0%	12	14	10		9,8	7,8	-1,5	13
3	Галамага Мария	5									нн			2	11%	15	15	15		12	9		
4	Голованова Ал-дра	12	нн											2	11%	10	13	12		9,3	6,9	-0,5	11
5	Завадин Никита	12								нн				2	11%	11	15	16		11	7,8	-0,5	
6	Зенин Филипп	18	нн				нн			нн	нн			8	44%			33		6,6	0	-0,5	
7	Кохан Антон	4												0	0%	18	17	18		14	11	-1,5	
8	Кузнецова Анастасия	5								6				0	0%	13	13	14		11	7,8		
9	Лазарев Даниил	4												0	0%	12	12	11		9,4	7,2	-1,5	
10	Марков Александр	17								нн	нн			4	22%	10	10	11		8,2	6	-0,5	
11	Масленцева Анастасия	5												0	0%	16	15	17		13	9,3	-0,5	
12	Медведев Николай	17									нн			2	11%	11	11	12		9	6,6	-0,5	
13	Осирянский Александр	18			н	нн	нн	нн						7	39%					0	0		
14	Панина Алина	16												0	0%	15	18	15		13	9,9	-1,5	
15	Семенов Никита	4												0	0%	15	15	16		12	9	-1,5	
16	Сергеев Алексей	12									нн			2	11%	10	14	16		10	7,2	-0,5	
17	Фролков Иван	17									нн			2	11%	11	11	12		9	6,6		
18	Щекочкин Владислав	16												0	0%	13	13	20		12	7,8	-1,5	
	Пропуски занятий		3	0	1	2	1	2	0	6	5	0	0										
	Процент пропущенных		27%	0%	9%	18%	9%	18%	0%	55%	45%	0%	0%										

Рис. 1. Регистрация учебного процесса с 9 февраля по 6 мая

Но посещение занятий – это не экзамен, и её регистрация – не эпизодическая, а повседневная работа. В обычной практике для неё традиционно используются бумажные журналы, что, несмотря на пресловутую «цифровизацию», вполне устраивает канцелярскую среду. Обычно они находятся у старосты группы. В конце занятий преподаватель просматривает журнал и расписывается в нём, исполняя бессмысленный ритуал. Но посещение занятий, как мы уже говорили, ему не безразлично, и он вынужден вести и свои записи тоже. На рис. 1 приводится вид такой таблицы. Здесь всё очевидно: список студентов формируется раз в семестр, даты проведения занятий заносятся из расписания, присутствие студентов регистрируется преподавателем. Пять минут времени, потраченные в течение семинарского занятия, с лихвой компенсируются возможностью контролировать процесс. Процент пропущенных занятий, естественно, вычисляется. Для статистики считается и посещаемость по дням.



Теперь обратим внимание на таблицу. Мы видим, что до 8 апреля студенты ходили хорошо, а дальше – так себе, половина студентов гуляла. Это прекрасная иллюстрация качества дистанционного обучения: до 8 апреля была дистанционка, а далее студентов вывели на очное обучение, где они должны были присутствовать физически, а не в виде включённого компьютера.

Правая часть таблицы относится к отметкам за лабораторные работы, темы которых указаны в третьем столбце. В этом семестре выполнялись четыре работы (диаграммы), отметки за которые проставлены в соответствующих столбцах, причём, каждая работа имеет свой вес. Средняя (следующий столбец) вычисляется с учётом весов:

$$m_{cp} = \sum m_i w_i,$$

где  $m_i$  – отметка за  $i$ -тую работу,  $w_i$  – её вес, причём,  $\sum w_i = 1$ .

Далее идут отметки за рубежный контроль, долг (в данном случае – поощрение) и отметки за доклад. Отметок за домашнюю работу нет: в этом семестре по этой дисциплине она не предусмотрена. Всё это учитывается при формировании отметки за семестр. Заметим, в очном варианте тоже можно использовать эту бухгалтерию, но имеет ли смысл?

Технология разработки ПО, 2020-2										лаб1	лаб2	лаб3	лаб4	
Группа 3.2										16.3	6.4	6.5	3.6	
тема	Руководитель	чел.	прец	класс	деят	?	сп3							
		оц	оц	оц	оц	оц	оц							
1	Учебный процесс студентов	0	0	0	0	0	0							
2	Выполнение лабораторных работ	0	0	0	0	0	0							
3	Выполнение заказов на изготовление изделий	0	0	0	0	0	0							
4	Ремонтная мастерская	Кохан Антон	3	45	0	44	0	45	0	0	9,9	16.3	7.4	28.4
5	Гостиница	Галамага Мария	3	44	0	43	0	46	0	0	9,7	16.3	5.4	16.4
6	Туристическая фирма		0	0	0	0	0	0	0	0				
7	Санаторий		0	0	0	0	0	0	0	0				
8	Агентство недвижимости		0	0	0	0	0	0	0	0				
9	Продажа и отчетность в магазине		0	0	0	0	0	0	0	0				
10	Магазин заказов		0	0	0	0	0	0	0	0				
11	Аптека		0	0	0	0	0	0	0	0				
12	Библиотека вуза	Завадин Никита	3	31	0	42	0	44	0	0	8,1	4.4		
13	Домашняя библиотека		0	0	0	0	0	0	0	0				
14	Разработка программного проекта		0	0	0	0	0	0	0	0				
15	Музей		0	0	0	0	0	0	0	0				
16	Сервис психологических онлайн тестиров	Щекожихин Влад	3	40	0	45	0	45	0	0	9,4	16.3	2.4	3.5
17	Салон сотовой связи Skytech	Медведев Никол	3	32	0	32	0	35	0	0	7,1			
18	Хостел	Зенин Филипп	3	0	0	0	33	0	0	0				
19	Поликлиника		0	0	0	0	0	0	0	0				
Количество исполнителей			18											

Рис. 2. Оценка и контроль сроков выполнения лабораторных работ 9 февраля по 6 мая

На рис. 2 приведена таблица учёта выполнения лабораторных работ командами студентов. Оценивание проводится по 15-балльной шкале. Так как в каждой команде по три человека, максимальная отметка – 45 баллов. Кроме того, команда, сдавшая работу первой, получает призовой балл (отсюда у пятой команды за третью работу 46 баллов).

Для каждой работы выделяется две колонки: оценка группы и контрольная сумма, которая формируется из индивидуальных оценок участников (если 0 – сумма совпадает с оценкой). В верхней части колонок «лаб» стоят плановые сроки сдачи, в таблице – реальные. Пропуск срока приводит к потере баллов по числу участников. Отсутствие



отметок о сдаче означает, что команда нарушила последний срок. Колонка «ср3» – среднее для каждого участника по всем запланированным работам. Значение «0» в этой колонке означает, что не была выполнена хотя бы одна из предыдущих работ.

Контроль сроков выравнивает семестровую нагрузку как студентов, так и преподавателей, что особенно актуально на дистанционке, когда пиковые нагрузки в конце семестра, по опыту двух предыдущих семестров, становятся запредельными. Кроме того, он вырабатывает привычку сдавать работу в срок, что не помешает в реальной производственной среде в дальнейшем.

Технология разработки ПО, 2020-2										
Группа 3.2		0,50	0,25	0,25						
№	Фамилия	ЛР	В1	В2	оц15	оц5	проп	норм.оц	0,7	0,5
1	Боровецкий Глеб	0	5	5	2,5	неуд	33%	2,8		
2	Гайдуков Михаил	9,8	5	5	7,4	уд	0%	21,2	докл	15
3	Галамага Мария	12	5	5	8,5	уд	11%	10,8		11
4	Голованова Ал-дра	9,3	5	5	7,2	уд	11%	17,3	докл	15
5	Завадин Никита	11	5	5	8	уд	11%	10,7		11
6	Зенин Филипп	6,6	5	5	5,8	неуд	44%	4,6		5
7	Кохан Антон	14	5	5	9,6	уд	0%	15,1		15
8	Кузнецова Анастасия	11	5	5	7,8	уд	0%	11,1		11
9	Лазарев Даниил	9,4	5	5	7,2	уд	0%	11,8		12
10	Марков Александр	8,2	5	5	6,6	неуд	22%	7,8		8
11	Масленцева Анастасия	13	5	5	8,9	уд	0%	13,1		13
12	Медведев Николай	9	5	5	7	уд	11%	9,4		9
13	Озиранский Александр	0			0	неуд	39%	0,0		
14	Панина Алина	13	5	5	9	уд	0%	14,3		14
15	Семенов Никита	12	5	5	8,6	уд	0%	13,8		14
16	Сергеев Алексей	10	5	5	7,7	уд	11%	10,3		10
17	Фролков Иван	9	5	5	7	уд	11%	8,9		9
18	Щекоцижин Владислав	12	5	5	8,4	уд	0%	13,5		14

Рис. 3. Потенциальная экзаменационная отметка на 6 мая

Теперь рассмотрим влияние всех выполненных студентом работ на итоговую отметку (рис. 3). В очном варианте в колонке ЛР из формы (рис. 1) переносится взвешенная средняя отметка за лабораторные работы или проставляется оценка за задачу в билете, в колонках В1, В2 проставляются за ответы на вопросы экзамена. Автоматически вычисляется средняя и записывается в колонку Оц15. В дистанционном варианте вес лабораторной работы должен быть выше, в данном случае вдвое (вес стоит над соответствующей колонкой).

В этой форме преподавателю уже ничего не надо делать, кроме как проставить отметки за ответ на каждый вопрос билета. На рис. 3 в этих колонках стоят цифры 5, что означает двойку по 15-балльной шкале. Смысл состоит в том, чтобы в течение семестра контролировать уровень притязаний студента, с учётом его работы, чтобы понять, сможет ли он получить положительную отметку, даже не сдавая экзамен (пресловутый автомат). Но здесь это вовсе не автомат, который ставят студенту преподаватели за особые заслуги, как награду. Здесь это честно заработанный рейтинг, выраженный в баллах. В колонке Оц15 стоит средняя взвешенная отметка. Можно считать её чистой, полученной за работу в семестре. Но теперь необходимо учесть и посещаемость! И тут мы видим, что у всех студентов, кроме одного, отметки выросли (колонка «норм.оц»). Конечно, такое сильное влияние посещаемости нельзя считать



нормальным. Ошибка состояла в том, что была взята формула из очного варианта, а мы видим, как легко при дистанционке стать прилежным студентом (посещения до 22 апреля, рис. 1). Значит, в этом случае нужно снизить влияние посещаемости или вообще отказаться от её учёта. Но так как правила были объявлены студентам заранее, в конце семестра их менять было бы неправильно. Справедливости ради надо сказать, что эта группа была очень сильная, и критерии оценивания за предыдущие годы для них оказались достаточно простыми.

Как показывает наш опыт [4], использование подобных программных средств существенно облегчает работу преподавателя и позволяет пусть не компенсировать, но упростить проблему образования в условиях дистанционки. Сокращение трудозатрат на рутинные операции позволит преподавателям сосредоточиться на методической работе в новых условиях.

## 8. ЭПИЛОГ

Несмотря на многочисленные призывы энтузиастов дистанционного обучения, которые задолго до всяких эпидемических ограничений старались внедрить его элементы в высшую школу, реальность оказалась намного печальнее радужных надежд. В ней переплелись и завышенные ожидания, и неверные представления о качестве (в разных смыслах) виртуальной образовательной среды, как программной, так и аппаратной, особенно в личном пользовании участников, и недостаточность адекватных методических материалов (то, что представлено в [3] не относится, вообще говоря, к массовому образованию), и отсутствие какой бы то ни было подготовки как у студентов, так и у преподавателей, и, самое главное – невозможность и затруднённость выполнения некоторых существенных с точки зрения качества образования действий. Следствие этого – наплевательское отношение как к посещаемости занятий, так и к интересу к ним. И, к сожалению, ожидаемый результат этого – заметно более слабый уровень защищаемых в этом году дипломных работ.

Конечно, третий «дистанционный» семестр – это пока только время обучения, адаптации, однако и в этом случае результат мог бы быть лучше. Но самое лучшее, если не будет этого «пока» и мы все вернёмся в аудитории, будем давать нормальное образование и, конечно, не будем забывать сегодняшние уроки: мало ли что!

### *Литература*

1. Йордон Э. Управление Интернет-проектами. М.: «Лори», 2021. – 344 с.
2. Лукин В.Н. Дифференцированная оценка знаний студентов. Материалы XIII Международной конференции по неравновесным процессам в соплах и струях (NPNJ-2020). – М.: МАИ, 2020. – С. 742–744.
3. Лукин В.Н., Сидоров С.И., Фомин С.С., Чернышов Л.Н. Проектирование программных систем: дистанционное обучение. Информатизация образования и науки. № 4. – М.: 2012. – С. 24–37.
4. Лукин В.Н., Чернышов Л.Н. Дистанционное обучение программированию на 5 Лукин В.Н., Чернышов Л.Н. Оценка знаний студентов по дисциплинам программирования. Материалы



- ХII Международной конференции по неравновесным процессам в соплах и струях (NPNJ-2018). – М.: МАИ, 2018. – С. 731–734.
5. *Лукин В.Н., Чернышов Л.Н.* Дистанционное обучение программированию на Google-платформе // Четырнадцатая конференция «Свободное программное обеспечение в высшей школе»: Сборник материалов конференции / Переславль, 25–27 января 2019 года. М.: МАКС Пресс, 2019., С.97–101.
  6. *Лукин В.Н., Чернышов Л.Н.* Проблемы подготовки студентов в области информационных технологий: контроль качества. Образовательные технологии, № 3/2018. – М.: ООО «НИИ школьных технологий». – С. 119–130.
  7. *Куравский Л.С., Нуркаева И.М., Юрьев Г.А.* Дисциплина «Информатика и программирование»: программа, методические рекомендации и учебные пособия: Учебное пособие. – 2-е издание дополненное. – М.: ФГБОУ ВО МГППУ, 2017. – 102 с.





## Distance Learning: Problems and Solutions

**Vladimir N. Lukin\***

Moscow State University of Psychology and Education, Moscow, Russia

ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-8906-2686>

e-mail: [lukinvn@list.ru](mailto:lukinvn@list.ru)

Life has drastically revised the form of higher education, transitioning from the traditional face-to-face learning to the distance learning. What have we lost in the educational process? Have we managed to compensate the losses? If so, then how? What can be said about the graduates educational level? Are the prospects actually so dim?

**Keywords:** quality of training, distance learning, attendance records, work in the semester, control measures, evaluation of student papers, software.

### For citation:

Lukin V.N. Distance Learning: Problems and Solutions. *Modelirovanie i analiz dannykh = Modelling and Data Analysis*, 2021. Vol. 11, no. 2, pp. 74–88. DOI: <https://doi.org/10.17759/mda.2021110205> (In Russ., abstr. in Engl.).

### References

1. Iordon E. Upravlenie Internet-proektami. M.: «Lori», 2021. – 344 p.
2. Lukin V.N. Differentsirovannaya otsenka znaniy studentov. Materialy XIII Mezhdunarodnoi konferentsii po neravnovesnym protsessam v soplakh i struyakh (NPNJ-2020). – M.: MAI, 2020. – P. 742–744.
3. Lukin V.N., Sidorov S.I., Fomin S.S., Chernyshov L.N. Proektirovanie programmnykh sistem: distantsionnoe obuchenie. Informatizatsiya obrazovaniya i nauki. № 4. – M.: 2012. – P. 24–37.
4. Lukin V.N., Chernyshov L.N. Distantsionnoe obuchenie programmirovaniyu na 5 Lukin V.N., Chernyshov L.N. Otsenka znaniy studentov po distsiplinam programmirovaniya. Materialy XII Mezhdunarodnoi konferentsii po neravnovesnym protsessam v soplakh i struyakh (NPNJ-2018). – M.: MAI, 2018. – P. 731–734.
5. Lukin V.N., Chernyshov L.N. Distantsionnoe obuchenie programmirovaniyu na Google-platfome // Chetyrnadstataya konferentsiya «Svobodnoe programmnoe obespechenie v vysshei shkole»: Sbornik materialov konferentsii / Pereslavl', 25–27 yanvarya 2019 goda. M.: MAKSPress, 2019., P. 97–101
6. Lukin V.N., Chernyshov L.N. Problemy podgotovki studentov v oblasti informatsionnykh tekhnologii: kontrol' kachestva. Obrazovatel'nye tekhnologii, № 3/2018. – M.: OOO «NII shkol'nykh tekhnologii». – P. 119–130.
7. Kuravskiy L.S., Nurkaeva I.M., Yuryev G.A. Distiplina «Informatika i programmirovaniye»: programma, metodicheskie rekomendatsii i uchebnye posobiya: Uchebnoe posobie. – 2-e izdanie dopolnennoe. – M.: FGBOU VO MGPPU, 2017. – 102 p.

\***Vladimir N. Lukin**, candidate of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Moscow State University of Psychology and Education, Moscow, Russia, ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-8906-2686>, e-mail: [lukinvn@list.ru](mailto:lukinvn@list.ru)

## Межпредметные связи в общем курсе высшей математики

**Степанов М.Е. \***

Московский государственный психолого-педагогический университет  
(ФГБОУ ВО МГППУ), г. Москва, Российская Федерация  
ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-4803-8211>  
e-mail: mestepanov@yandex.ru

В статье обсуждаются вопросы методики преподавания высшей математики, возникающие при современном уровне образования в нашей стране. Автор опирается на опыт работы на факультете информационных технологий МГППУ.

**Ключевые слова:** межпредметные связи, высшее образование, методика преподавания математики, элементарная математика, аналитическая геометрия, математический анализ, комплексный анализ, функциональный анализ, общая алгебра, линейная алгебра, дифференциальные уравнения, уравнения математической физики, комбинаторика, теория вероятностей, теория чисел, математическая теория принятия решений, теория групп, математическая логика, дискретная математика, вычислительная математика.

### Для цитаты:

Степанов М.Е. Межпредметные связи в общем курсе высшей математики // Моделирование и анализ данных. 2021. Том 11. № 2. С. 89–123. DOI: <https://doi.org/10.17759/mda.2021110206>

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Можно смело утверждать, что методика преподавания высшей математики по целому ряду причин не является достаточно развитым разделом педагогической науки. По общему мнению, этой темой должны заниматься крупные математики-творцы. Однако, они свои основные усилия направляют на чисто математическое творчество. В лучшем случае им удаётся написать несколько статей методического характера, которые содержат отдельные соображения по соответствующей тематике. Кроме того, данная тема слишком сложна и обширна. Здесь уместно вспомнить историю, связанную с трактатом Леонарда Эйлера «Теория музыки». Про эту книгу говорили, что

\***Степанов Михаил Евграфович**, кандидат педагогических наук, доцент, Московский государственный психолого-педагогический университет (ФГБОУ ВО МГППУ), г. Москва, Российская Федерация, ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-4803-8211>, e-mail: mestepanov@yandex.ru



в ней слишком много математики для музыкантов, и слишком много музыки для математиков. Точно также можно сказать, что в методике преподавания высшей математики слишком много педагогики для математиков, и слишком много математики для педагогов. Тем не менее, данным вопросом необходимо заниматься, в том числе, и рядовым преподавателям математики. В данной статье делается попытка дать обзор ряда вопросов, относящихся к межпредметным связям в общем курсе высшей математики.

Автор полагает, что эта тематика достаточно актуальна, хотя её разработка и требует значительных усилий. Автор не может претендовать на достаточно подробное обсуждение вопроса, но считает, что даже не слишком детальное его рассмотрение может оказать определённую помощь молодым преподавателям высшей математики. В значительной степени это связано с тем, что изучение данного вопроса позволяет воссоздать общую картину математического знания, изучаемого в вузах, а наличие общей картины всей совокупности математических предметов в их взаимосвязи позволяет лучше понять место и каждого отдельного предмета. Кроме того, это может помочь выделить наиболее важные темы каждого курса.

## **2. ОБЩИЙ КУРС МАТЕМАТИКИ КАК СОВОКУПНОСТЬ ОТДЕЛЬНЫХ ПРЕДМЕТОВ**

Сложность проблем, связанных с межпредметными связями в общем курсе высшей математики, проявляется уже на самых первых стадиях рассмотрения соответствующих вопросов, в частности при перечислении предметов, составляющих корпус общего курса математики в вузах. Это, прежде всего, связано с тем обстоятельством, что в разных учебных заведениях ставятся различные образовательные цели, что приводит к различным совокупностям предметов математического цикла. По этой причине список предметов, которые будут рассматриваться в данной статье, никоим образом не может рассматриваться как универсальный. Однако он тесно связан с совокупностью предметов, составляющих корпус классической математики.

Начнём с перечисления предметов, составляющих ядро курса, и с их краткого (и выборочного) содержания, ориентируясь на приблизительный порядок их изучения.

Непосредственным продолжением курса математического анализа являются курсы теории функций комплексного переменного, теория обыкновенных дифференциальных уравнений, уравнения математической физики и функциональный анализ. Сюда же можно отнести курсы, посвящённые изучению численных методов, за исключением вопросов относящихся к линейной алгебре.

Самостоятельными курсами являются курсы теории вероятностей и математической статистики. Особое место в современном математическом образовании играет комплекс дисциплин, получивших название «Дискретная математика». Сюда входят математическая логика, теория графов, теория алгоритмов и т.д. В рамки курса математической логики часто включают раздел, связанный с терминологией теории множеств. Конечно, в том случае, когда среди предметов отсутствуют специальные курсы теории множеств или общей топологии.



<b>Элементарная математика, как основа изучения курса высшей математики</b>		
<ul style="list-style-type: none"> <li>• Арифметика. Умение работать с целыми и дробными числами; вычислительные алгоритмы.</li> <li>• Алгебра. Работа с символикой; преобразование формул; уравнения и системы уравнений; арифметическая и геометрическая прогрессии.</li> <li>• Геометрия. Основные геометрические фигуры и их свойства.</li> <li>• Тригонометрия. Тригонометрические функции острого угла; основные формулы.</li> <li>• Азы метода координат. Уравнения и графики прямых, окружностей; квадратный трёхчлен; обратная пропорциональность.</li> </ul>		
↓	↓	↓
<b>Линейная и общая алгебра</b>	<b>Аналитическая геометрия</b>	<b>Математический анализ функций действительного переменного</b>
<p>Линейные пространства и вектора. Линейная зависимость. Базис. Подпространства. Важные примеры линейных пространств. Линейные преобразования и матрицы. Обратные преобразования. Собственные вектора.</p> <p>Теория систем линейных уравнений.</p> <p>Евклидовы пространства. Скалярное произведение. Длина вектора. Угол между векторами. Ортогональность.</p> <p>Алгебра многочленов. Поле комплексных чисел. Основная теорема алгебры многочленов. Теория делимости. Сравнение с теорией чисел. Кольца, поля, группы. Примеры колец, полей, групп, в том числе, связанных с геометрией.</p>	<p>Метод координат на плоскости. Алгебра векторов. Скалярное произведение. Прямые, окружности, канонические уравнения кривых второго порядка. Аффинные преобразования и общая теория кривых второго порядка.</p> <p>Метод координат в пространстве. Векторное и смешанное произведение. Плоскости, поверхности второго порядка. Методы изучения формы поверхностей второго порядка.</p>	<p>Множество действительных чисел. Элементарные функции. Пределы. Непрерывность. Производная и её смысл. Правила дифференцирования. Использование производной. Дифференциал.</p> <p>Первообразная и интеграл. Методы интегрирования. Формула Ньютона – Лейбница. Использование интеграла.</p> <p>Числовые ряды и ряды Тейлора.</p> <p>Функции двух и более переменных. Частные производные. Дифференциал. Неявные функции.</p>

Относительно новые курсы связаны с кругом вопросов, который определяется названиями «Исследование операций» или «Математическая теория принятия решений».

Отметим несколько угнетённое состояние «царицы математики» – теории чисел, изучение которой часто совмещают с изучением общей алгебры. Что же касается дисциплин, связанных с идеями геометрии, то им могут быть посвящены курсы проективной геометрии, дифференциальной геометрии и топологии. Однако очень часто тематика этих курсов распределяется между другими предметами.



Следует отметить, что современное образование в значительной степени включено во всё более ускоряющиеся процессы преобразования общественных структур. В частности это отражается на оценке значения тех или иных предметов в рамках общего комплекса изучаемых вопросов. Так, в общем и целом, возрастает роль теории вероятностей, математической статистики, математической теории принятия решений и дискретной математики.

Естественно, что компетентное решение вопросов, связанных с усовершенствованием структуры комплекса преподаваемых предметов, является чрезвычайно сложной задачей. По этой причине мы будем исходить из соображений, высказанных автором в одной из его статей: «Выбор целей преподавания определяет содержание курсов и отбор материала, а также выбор уровня строгости и определение удельного веса образного и логического мышления. **В нашем конкретном случае целью является воспитание математика-прикладника или математика-инженера**, что в частности предполагает свободное владение понятиями и методами современной информатики. Ядро комплекса математических дисциплин имеет традиционный характер» [1].

Итак, речь идёт о курсах аналитической геометрии, математического анализа, комплексного анализа, функционального анализа, объединённого курса общей алгебры и теории чисел, курсах линейной алгебры, дифференциальных уравнений, уравнений математической физики, теории вероятностей и математической статистики, математической теории принятия решений, вычислительной математики и разделённых курсов математической логики и дискретной математики, Вопросы, относящиеся к теории множеств, топологии и дифференциальной геометрии, рассматриваются в рамках других предметов.

### 3. О ПОНЯТИЯХ ДЕЙСТВИТЕЛЬНОГО ЧИСЛА И ЧИСЛОВОЙ ПРЯМОЙ

На первом курсе практически одновременно начинается изучение аналитической геометрии, линейной алгебры, математического анализа и алгебры многочленов. Важнейшим понятием, на котором основываются эти предметы, является **понятие действительного числа**. Более точно, речь идёт об изучении структуры поля действительных чисел. Эта структура обладает алгебраическими, геометрическими и топологическими свойствами. Изучение этих свойств может проводиться различными способами, в частности, действительные числа можно определять как сечения на множестве рациональных чисел. Данный подход является логически безупречным, но при подготовке математика-прикладника следует избрать иной подход, при котором **действительное число определяют как десятичную дробь, конечную или бесконечную**.

Этот подход имеет ряд преимуществ. Прежде всего, на практике действительные числа предстают именно как десятичные дроби. Студенты младших курсов связывают с десятичными дробями соответствующие вычислительные алгоритмы. В то же время действительное число, определяемое через сечение, воспринимается как в высшей степени абстрактный объект. Соответствие между конечными и бесконечными



периодическими десятичными дробями, с одной стороны, и с рациональными числами, с другой, осуществляется упомянутыми алгоритмами (деление целого числа на натуральное) и с помощью суммирования бесконечных геометрических прогрессий.

Установление взаимно однозначного соответствия между множеством десятичных дробей и точками евклидовой прямой осуществляется с помощью наглядной процедуры измерения отрезков. Именно так происходит формирование понятие числовой прямой, которая является геометрическим образом множества действительных чисел. Несомненным является тот факт, что соединение алгебраического лица действительных чисел как десятичных дробей с их совокупным геометрическим образом как точек евклидовой прямой является основой двойственного восприятия действительных чисел в аналитической геометрии и математическом анализе. Можно взять десятичное число и говорить о нём как о точке на числовой прямой, и можно выбрать точку на числовой прямой, и сказать, что рассматривается число.

Это важнейшее обстоятельство лежит в основе всей классической математики. По этой причине, памятуя о том, что повторение – мать учения, следует о понятии числовой прямой говорить в курсах аналитической геометрии, математического анализа и линейной алгебры. Естественно, в курсе аналитической геометрии требуется менее подробное рассмотрение свойств числовой прямой, чем в курсе математического анализа. В курсе геометрии, прежде всего, следует подчёркивать, что координата точки является расстоянием по горизонтали или вертикали до осей координат с учётом знака. Именно этот факт определяет способы вычисления расстояний в евклидовых пространствах.

В математическом анализе требуется несравненно более детальное изучение структуры числового континуума, которое, по сути, является топологическим исследованием. Это связано с тем обстоятельством, что в математическом анализе используется сложное понятие предела.

Тем не менее, и при рассмотрении этих вопросов важнейшим понятием является расстояние между точками числовой прямой. Именно с его помощью вводится топологическое понятие окрестности точки. На данном, фактически начальном, этапе изучения числового континуума желательно ввести понятие **метрического пространства**. Это понятие, несомненно, является сквозным для всего курса математики в целом. Особенно важным моментом является фиксация того факта, что если в рамках аналитической геометрии расстояние вводится на основе теоремы Пифагора, то в линейной алгебре исходным является понятие скалярного произведения. Это обстоятельство позволяет перенести идеи линейной алгебры на другие разделы математики, включая математический анализ, что приводит в итоге к возникновению функционального анализа.

Вернёмся, однако, к числовой прямой. Введение понятия предела связано с ещё одним вездесущим объектом математики, который является настолько естественным, что работа с ним считается само собой разумеющейся. Речь идёт о понятии **числовой последовательности**. Числовые последовательности изучались и в курсе элементарной математики, и проявляют себя во всех разделах математика, например,



как коэффициенты в формулах кривых второго порядка, как коэффициенты многочленов, как коэффициенты рядов Тейлора и Фурье и т.д. Понятие предела вводится, прежде всего, для последовательностей. При этом в рамках математического анализа доказываются важные теоремы о пределе монотонных ограниченных последовательностей и о вложенных промежутках.

Важнейшим понятием общего курса математики является **понятие функции**. Формальное определение функции является весьма простым, но одним из проблемных мест преподавания математики как раз и является разрыв между простыми, но крайне абстрактными математическими определениями типа функции или алгебраической группы и образами этих объектов. А ведь именно образы являются истинным материалом любого мышления и в частности научного, поскольку понимание проблем достигается на уровне образного мышления. Таким образом, путь к пониманию такого важнейшего понятия как функция должен включать работу по формированию соответствующих образов. Одним из путей к этому является компьютерная визуализация математических объектов [3]. Другим способом формирования образа функций определённого вида является переход от более наглядного понятия числовой последовательности, или иными словами функции от натурального аргумента, к функциям действительного аргумента с помощью уплотнения множества аргументов [1].

На самом деле рассмотрение функций и графиков в школьном курсе математики фактически основано на таком же уплотнении. Речь идёт о построении графиков по точкам и проведении через полученные точки достаточно гладкой кривой. Именно на этом этапе и возникают исходные образы основных элементарных функций.

Отметим, что полезно использовать и пластические образы кривых, когда график функции трактуется как гибкая нить, первоначально расположенная на оси абсцисс. Далее координата  $y$ , возникающая при аналитическом описании функции  $y = f(x)$ , трактуется как вертикальное смещение каждой точки эластичной нити по декартовой плоскости.

Следует отметить ещё и тот факт, что аналитическая геометрия и математический анализ несколько по-разному рассматривают аналитическое описание кривых на координатной плоскости. Об этом следует говорить и на том, и на другом предмете. Это позволит подойти к понятию неявной функции.

Добавим, что сведения, которые студент должен получить по теории множеств достаточно успешно сочетаются с представлением о множестве действительных чисел как десятичных дробей. В частности эта точка зрения позволяет естественным образом доказать несчётность точек единичного отрезка. Кроме того, на той же основе можно доказать равномощность множества точек отрезка и квадрата.

Связь между теорией множеств и основами математического анализа, кроме всего прочего, определяется историческими обстоятельствами. Возникновение теории множеств Георга Кантора началось с выработки учёным особой точки зрения на важные понятия анализа. По этой причине на занятиях по математическому анализу, как и на более поздних занятиях связанных с изложением азов теории множеств долж-



ны рассматриваться как операции над множествами, так и многие другие вопросы теории множеств. Это обстоятельство нужно учитывать, что требует согласования содержания двух предметов.

Возвращаясь к понятию функции, следует отметить, что **важнейшим видом функций в высшей математике являются многочлены**. Они являются неизменными действующими лицами во всех предметах математического цикла, включая, в том числе, и математическую логику (полиномы Жегалкина). Именно это обстоятельство делает соответствующую часть курса высшей алгебры исключительно важной. Этот факт необходимо особо отметить по следующей причине. Современная алгебра в отличие от алгебры классической, которая являлась теорией уравнений, превратилась в теорию алгебраических структур. Соответственно, изучение групп, колец и полей рассматривается как наиболее важная часть алгебры. Конечно, это так, но недостаточное внимание к алгебре многочленов может привести к пробелам в понимании многих других математических предметов.

Первой важной особенностью многочленов с действительными коэффициентами является то, что возможны задачи, связанные с конструированием многочленов, обладающих особыми свойствами. Примером является построение интерполяционного многочлена Лагранжа. Второй особенностью является повелительное поведение многочленов, определившее направление развитие математики даже вопреки желаниям самих математиков. Речь идёт о появлении **мнимых и комплексных чисел**. Итак, алгебра многочленов является стартовым пунктом для изучения комплексных чисел. Поле комплексных чисел рассматривается в рамках общей алгебры, в математическом анализе функций пока ещё действительного переменного, в курсе комплексного анализа, теории дифференциальных уравнений, в уравнениях математической физики, в линейной алгебре. Естественно, изучение комплексных чисел основано на хорошем знании действительных чисел. И, надо полагать, что даже при бурном развитии абстрактной алгебры всё же именно действительные и комплексные числа являются чувственными образами произвольных алгебраических полей.

## 4. ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА КАК ТОЧКА СБОРКИ В ОБЩЕМ КУРСЕ МАТЕМАТИКИ

Линейная алгебра возникла в точке соприкосновения алгебры и геометрии. Видимо, именно по этой причине она стала языком, связывающим практически все остальные разделы математики. С одной стороны в них используется терминология линейной алгебры. Так, например, последовательности, функции, решения линейных дифференциальных уравнений и т.д. являются векторами и образуют векторные пространства, в которых различным образом задаются скалярные произведения. С другой стороны объекты общей алгебры, математического анализа и геометрии в рамках линейной алгебры рассматриваются как содержательные примеры линейных пространств.

Рассмотрим конкретный пример межпредметных связей. В нём будут рассматриваться бесконечные числовые последовательности, ряды Тейлора и линейные одно-





родные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами. Сразу отметим, что в книге [4] описано параллельное использование методов линейной алгебры в дискретном и непрерывном случае. Наш пример имеет иной характер. Сначала нами будет получен результат для последовательностей, а затем он будет использован для получения результата для дифференциальных уравнений. Таким образом, в нашем примере методы линейной алгебры применяются в дискретном и непрерывном случае последовательно.

Начнём с рассмотрения частного случая, относящегося к решению линейных однородных дифференциальных уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами. Более того, вначале предположим, что характеристическое уравнение имеет простые корни.

**Пример совокупности заданий для студентов при изучении однородных линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.** Начнём с определения. Говорят, что последовательность  $\{a_i\}$  определяется рекуррентным отношением, если для любых нескольких  $m + 1$  последовательных членов которой выполняется равенство  $c_1 a_i + c_2 a_{i+1} + \dots + c_m a_{i+m-1} + c_{m+1} a_{i+m} = 0$ , где  $c_1, c_2, \dots, c_m, c_{m+1}$  — константы. Выполнение этого равенства в частности означает, что начальные  $m$  членов последовательности определяют значение  $m + 1$  члена. Затем может быть вычислен  $m + 2$  член и т.д. Таким образом, чтобы задать всю рекуррентную последовательность достаточно задать начальные  $m$  членов последовательности.

Например, последовательность чисел Фибоначчи определяется равенством  $a_{i+1} - a_i - a_{i-1} = 0$ . Понятно, что таких последовательностей может быть бесконечно много. Чтобы рассмотреть непосредственно последовательность чисел Фибоначчи, нужно положить, что  $a_1 = a_2 = 1$ . Поскольку очередной член равен сумме двух предыдущих, возникнет последовательность: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55...

**Задание 1.** Доказать, что все рекуррентные последовательности, определяемые равенством с коэффициентами  $c_1, c_2, \dots, c_m, c_{m+1}$ , образуют линейное пространство. *Указание.* Сумма двух таких последовательностей также является такой последовательностью. Произведение такой последовательности на действительное число также является такой последовательностью.

**Задание 2.** Доказать, что пространство всех рекуррентных последовательностей, задаваемых формулой  $c_1 a_i + c_2 a_{i+1} + \dots + c_m a_{i+m-1} + c_{m+1} a_{i+m} = 0$ , имеет размерность  $n$ .

**Задание 3.** Пусть рекуррентная последовательность описывается уравнением  $a_{n+1} + p \cdot a_n + q \cdot a_{n-1} = 0$  ( $c_1 = q; c_2 = p; c_3 = 1$ ) и уравнение  $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$  имеет два различных действительных корня  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$ . Тогда геометрические прогрессии  $\{1, \lambda_1, \lambda_1^2, \dots\}$  и  $\{1, \lambda_2, \lambda_2^2, \dots\}$  являются соответствующими рекуррентными последовательностями. Кроме того, любая рекуррентная последовательность этого вида является их линейной комбинацией.

**Задание 4.** Найти соответствующие корни  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  для чисел Фибоначчи и выразить последовательность чисел Фибоначчи в виде линейной комбинации двух геометрических прогрессий (формула Бине).



**Задание 5.** Пусть разложение функции в ряд Тейлора имеет вид  $f(x) = u_0 + \frac{u_1}{1!}x + \frac{u_2}{2!}x^2 + \frac{u_3}{3!}x^3 + \dots$ . Доказать, что производная  $n$ -го порядка получается заменой индекса 0 на  $n$ , 1 на  $n+1$ , 2 на  $n+2$ ...

**Задание 6.** Если функция удовлетворяет дифференциальному уравнению второго порядка  $y'' + py' + q = 0$ , то коэффициенты ряда Тейлора удовлетворяют рекуррентной формуле ... Значит, коэффициенты ряда Тейлора являются соответствующим образом описанной рекуррентной последовательностью.

**Задание 7.** Пусть функция удовлетворяет дифференциальному уравнению второго порядка  $y'' + py' + q = 0$ . Уравнение  $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$  называется характеристическим уравнением. Если это уравнение имеет два различных действительных корня, то можно найти коэффициенты ряда Тейлора, являющиеся геометрическими прогрессиями. Более того, ряды Тейлора можно свернуть в экспоненты. Доказать этот факт.

При решении последнего задания мы получаем два ряда Тейлора, которые дают два решения исходного уравнения. В принципе, отправляясь от рекуррентной формулы, можно получить и другие ряды Тейлора. Однако ряды, связанные с геометрическими прогрессиями, легко свернуть в экспоненты:

$$f(x) = u_0 + \frac{u_1}{1!}x + \frac{u_2}{2!}x^2 + \frac{u_3}{3!}x^3 + \dots = 1 + \frac{\lambda_1}{1!}x + \frac{\lambda_1^2}{2!}x^2 + \frac{\lambda_1^3}{3!}x^3 + \dots = e^{\lambda_1 x}.$$

В итоге, решив указанные задания, студент получает утверждение о том, что дифференциальное уравнение второго порядка  $y'' + py' + q = 0$ , характеристическое уравнение имеет простые (некратные) корни  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$ , имеет два решения  $y = e^{\lambda_1 x}$  и  $y = e^{\lambda_2 x}$ . Кроме того, доказано, что любое другое решение того же уравнения является линейной комбинацией двух этих базовых решений. Особое значение имеет тот факт, что результат, хотя и частный, получен самим студентом. Далее можно перейти к рассмотрению случая кратных корней, а затем и общего случая. Эти вопросы мы сейчас и рассмотрим.

Но предварительно отметим, что опыт показывает наличие затруднений у студентов с использованием рядов Тейлора, в частности с их свёртыванием в функции. Этот вопрос мы тоже ещё обсудим ниже.

**Пример совокупности заданий для студентов при изучении однородных линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами в случае кратных корней.** Начнём с уравнений второго порядка.

**Задание 8.** Пусть характеристическое уравнение дифференциального уравнения второго порядка  $y'' + py' + q = 0$  имеет кратные корни. Найти общее решение дифференциального уравнения.

**Решение.** Чтобы характеристическое уравнение  $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$  имело кратные корни, необходимо, чтобы  $q = \frac{p^2}{4}$ . Во избежание недоразумений отметим, что  $\lambda$  в данном случае является переменной. Корень кратности два равен  $-\frac{p}{2} = \lambda$ . И опять отмечаем, что с этого момента  $\lambda$  обретает смысл постоянной величины. Таким образом, рекуррентная последовательность описывается уравнением  $a_{n+1} + p \cdot a_n + \frac{p^2}{4} \cdot a_{n-1} = 0$



$(c_1 = \frac{p^2}{4}; c_2 = p; c_3 = 1)$ . Выражая коэффициенты через значение корня  $\lambda$ , можно записать то же уравнение в виде  $a_{n+1} \pm 2\lambda \cdot a_n + \lambda^2 \cdot a_{n-1} = 0$  ( $c_1 = \lambda^2; c_2 = -2\lambda; c_3 = 1$ ) ..

Как и в случае простых корней, последовательность коэффициентов ряда Тейлора, начинающаяся двумя членами 1 и  $\lambda$ , приводит к решению  $y = e^x$ . Задача состоит в том, чтобы найти ещё один вектор  $(a_1; a_2; a_3)$  перпендикулярный к вектору  $(c_1; c_2; c_3)$ . При этом хотелось бы получить ряд Тейлора, который легко свернуть в элементарную функцию.

Рекуррентное описание последовательности показывает, что скалярное произведение векторов  $(a_{n-1}; a_n; a_{n+1})$  и  $(\lambda^2; -2\lambda; 1)$  равно нулю, то есть  $a_{n-1}\lambda^2 - a_n 2\lambda + a_{n+1} = 0$ . Следовательно,  $a_{n+1} = 2\lambda a_n - \lambda^2 a_{n-1}$ .

Поскольку  $\lambda$  к данному моменту является константой, для записи характеристического уравнения используем переменную  $\xi$ :  $\xi^2 - 2\lambda\xi + \lambda^2 = 0$ . Это уравнение можно переписать в виде  $(\xi - \lambda)^2 = 0$ . Продифференцируем это уравнение по  $\lambda$ , и эта производная будет равна нулю, именно по той причине, что корень  $\lambda$  имеет кратность два. Используем это обстоятельство следующим образом.

Рекуррентное описание геометрической прогрессии имеет вид  $c_1 \cdot (\lambda^{n-1}) + c_2 \cdot (\lambda^n) + c_3 \cdot (\lambda^{n+1}) = 0$ . Продифференцируем это уравнение по параметру  $\lambda$  и получим уравнение  $c_1 \cdot (n-1) \cdot (\lambda^{n-2}) + c_2 \cdot n \cdot (\lambda^{n-1}) + c_3 \cdot (n+1) \cdot (\lambda^n) = 0$ . Это означает, что в данном случае получена ещё одна последовательность, удовлетворяющее рекуррентному описанию. Речь идёт о последовательности  $\{a_n = (n-1) \cdot \lambda^{n-2}\}$ , где  $n = 1, 2, 3, \dots$ . Первые члены  $0, 1, 2\lambda, 3\lambda^2, \dots$

Остаётся свернуть соответствующий ряд Тейлора в функцию, хотя результат можно предвидеть заранее – это производная по  $\lambda$  функции  $y = e^{\lambda x}$ . Соответственно мы получаем решение в виде  $y = x e^{\lambda x}$ . Тем не менее, рассмотрим и ряд Тейлора:

$$y = x + x \frac{\lambda x}{1!} + x \frac{(\lambda x)^2}{2!} + x \frac{(\lambda x)^3}{3!} + \dots = x e^{\lambda x}.$$

**Задание 9.** Пусть характеристическое уравнение дифференциального уравнению  $n$ -го порядка имеет  $n$  кратных корней. Найти общее решение дифференциального уравнения.

Аналогичным образом можно рассмотреть и уравнения в общем случае.

## 5. РЯДЫ ТЕЙЛОРА В МЕЖПРЕДМЕТНЫХ СВЯЗЯХ

Ряды Тейлора возникают в рамках математического анализа, но они открывают ворота в новые разделы математики. Ограничимся упоминанием комплексного анализа и анализа функционального. Именно по этой причине им следует уделить особое внимание. Однако этого не происходит, видимо, по той причине, что достаточно просто, так сказать, в лоб, можно получить только несколько разложений функций в ряды Тейлора.

Конечно, разложение в ряды Тейлора экспоненты, синуса и косинуса является важнейшим результатом, который студенты могут получить самостоятельно.



Но крайне желательно получить и разложения в ряд Тейлора и других функций. И в этом помогает работа с бесконечными геометрическими прогрессиями и их суммами. Аналогичные задания давались во времена Леонарда Эйлера при проведении экзамена на должность адъюнкта.

Рассмотрение формулы суммы бесконечной геометрической прогрессии с определённой точки зрения может быть полезным при вычислении рядов Тейлора, поскольку формулу суммы бесконечной геометрической прогрессии

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots + x^n + \dots$$

можно рассматривать как разложение функции  $y = \frac{1}{1-x}$  в ряд Тейлора.

Возможны простые модификации этой формулы. Рассмотрим случай, заменив в исходной формуле  $x$  на  $-x$ . Получим формулу

$$\frac{1}{x+1} = 1 - x + x^2 - \dots + (-1)^n x^n + \dots$$

Начнём с полезного задания, направленного на вычисление производных обратных функций.

**Задание 10.** Получить формулу вычисления производной натурального логарифма.

**Решение.** Натуральный логарифм является обратной функцией к экспоненте. Таким образом, если  $y = \ln x$ , то  $x = e^y$ . Тогда  $x'_y = e^y$ . Но производная обратной функции равна единице, делёной на производную исходной функции. То есть  $y'_x = \frac{1}{e^y} = \frac{1}{x}$ . Итак,  $(\ln x)' = \frac{1}{x}$ . Из этого следует, что

$$(\ln(1+x))' = \frac{1}{x+1}.$$

**Задание 11.** Получить разложение натурального логарифма в ряд Тейлора.

**Решение.** Отправляемся от формулы  $\frac{1}{x+1} = 1 - x + x^2 - \dots + (-1)^n x^n + \dots$  и интегрируем обе её части. В результате получаем разложение логарифма в бесконечный степенной ряд, то есть в ряд Тейлора:

$$\ln(x+1) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} + \dots$$

Рассмотрим второй случай модификации суммы бесконечной геометрической прогрессии, заменив в исходной формуле  $x$  на  $-x^2$ . Получим формулу

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - \dots + (-1)^n x^{2n} + \dots$$

**Задание 12.** Получить формулу вычисления производной арктангенса.

**Решение.** Арктангенс является обратной функцией к тангенсу. Таким образом, если  $y = \arctg x$ , то  $x = tg y$ . Тогда  $x'_y = \frac{1}{\cos^2 y}$ . Но производная обратной функции равна единице, делёной на производную исходной функции. То есть  $y'_x = \cos^2 y = \frac{1}{1+tg^2 y} = \frac{1}{1+x^2}$ . Итак,  $(\arctg x)' = \frac{1}{1+x^2}$ .

**Задание 13.** Получить разложение арктангенса в ряд Тейлора.



**Решение.** Отправляемся от формулы  $\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - \dots + (-1)^n x^{2n} + \dots$  и интегрируем обе её части. В результате получаем разложение арктангенса в бесконечный степенной ряд, то есть в ряд Тейлора:

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1}$$

Конечно, используя этот ряд, следует получить формулу для числовой квадратуры. Напомним, что термин «квадратура» возник в Древней Греции в связи с задачей о построении циркулем и линейкой квадрата, имеющего такую же площадь как у заданного круга. В конечном счёте, задача сводится к вычислению числа пи. Лейбниц, используя разложение арктангенса в ряд Тейлора, заметил, что при  $x = 1$  возникает числовой ряд:  $\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \dots$ , который и назвали числовой квадратурой, поскольку простая форма ряда давала надежду на его суммируемость.

Попутно отметим один методический принцип, который многими крупными математиками двадцатого века яростно оспаривался. Речь идёт о том, как относиться к классическому математическому наследию. Ряд математиков, среди которых особой активностью выделялись члены группы Бурбаки, сбрасывали с корабля современности любые результаты, которые они считали устаревшими. В книге [5] яростный экстремист в области преподавания математики Жан Дьедонне с глубоким презрением упоминает устаревшие разделы математики: «синтетическая геометрия», «аналитическая геометрия», «тригонометрия», «проективная геометрия», «конформная геометрия», «неевклидова геометрия», «теория комплексных чисел». Заменить их он предлагает на линейную алгебру. Основанием является логическая простота этой науки. На самом деле параллельно из математики изгоняются чувственные образы, исторический и культурный контекст и, в конечном счёте, смысл. Процессы, происходящие в современном обществе и связанные с его дегуманизацией, требуют противодействия и возвращения такого аспекта образования как воспитание. Именно для этого нужно обращаться к драгоценному фонду человеческой мысли, в том числе и математической. Нужно доносить её жемчужины [6] до студентов.

## 6. КОМБИНАТОРИКА В МЕЖПРЕДМЕТНЫХ СВЯЗЯХ

Ряды Тейлора подводят к ещё одному разделу математики, который не имеет столь высокого статуса как линейная алгебра, но используется весьма существенным образом в алгебре многочленов, математическом анализе и теории вероятностей. Речь идёт о комбинаторике. Поскольку круг задач теории вероятностей, связанных с комбинаторикой широко известен, отметим только тот факт, что, например, задачи нахождения математического ожидания и дисперсии числа успехов при испытаниях Бернулли требуют довольно сложных преобразований.

Рассмотрим теперь задачи, связанные с рядами Тейлора. Прежде всего, речь идёт о связи бинома Ньютона в школьном понимании (формула для возведения бино-



ма в натуральную степень) и бинорма Ньютона как разложения степенной функции  $y = (1+x)^\mu$  при любом значении  $\mu$ .

Применим формулу ряда Тейлора

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \dots$$

к функции  $y = (1+x)^\mu$ . Если  $\mu$  – натуральное число, то ряд оборвётся, поскольку функция является многочленом. По этой причине нас будут интересовать отрицательные и дробные значения показателя  $\mu$ .

Разложение функции  $y = (1+x)^\mu$  будет иметь вид

$$(1+x)^\mu = 1 + \mu x + \frac{\mu(\mu-1)}{2!}x^2 + \dots + \frac{\mu(\mu-1)\dots(\mu-n+1)}{n!}x^n + \dots$$

**Задание 14.** Получить формулу бинорма Ньютона для случая, когда  $\mu$  является натуральным числом.

**Задание 15.** Получить разложение арксинуса в ряд Тейлора.

**Указание.** Порядок выполнения задания таков. Получить формулу для дифференцирования арксинуса. Получить формулу для разложения в ряд функции Тейлора

$y = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ , используя бинорм Ньютона для  $\mu = \frac{1}{2}$ . Кроме того, нужно заменить  $x$  на  $-x^2$ . Наконец, интегрированием получить формулу для разложения арксинуса в ряд Тейлора.

Несмотря на то, что разложение экспоненты в ряд Тейлора имеет, пожалуй, наиболее простой вид, желательно предложить студентам задачи, которые заставляют установить связь между свойствами экспонент и рядов, в которые они разлагаются. Эти задания были достаточно хорошо известны, но, возможно, о них следует напомнить.

**Задание 16.** Перемножив два ряда Тейлора, в которые разлагаются экспоненты  $e^x$  и  $e^y$ , доказать, что  $e^{x+y}$ .

**Решение.** Перемножим два бесконечных ряда

$$\left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots\right) \left(1 + \frac{y}{1!} + \frac{y^2}{2!} + \frac{y^3}{3!} + \dots\right).$$

В ряде, который будет получен, соберём в отдельные скобки все члены степени  $n$ :

$$\begin{aligned} & \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n-1}y}{(n-1)!1!} + \frac{x^{n-2}y^2}{(n-2)!2!} + \dots + \frac{xy^{n-1}}{1!(n-1)!} + \frac{y^n}{n!} = \\ & = \frac{1}{n!} \left( \frac{n!x^n}{n!} + \frac{n!x^{n-1}y}{(n-1)!1!} + \frac{n!x^{n-2}y^2}{(n-2)!2!} + \dots + \frac{n!xy^{n-1}}{1!(n-1)!} + \frac{n!y^n}{n!} \right) = \\ & = \frac{1}{n!} \left( \frac{n!x^n}{n!} + \frac{n!x^{n-1}y}{(n-1)!1!} + \frac{n!x^{n-2}y^2}{(n-2)!2!} + \dots + \frac{n!xy^{n-1}}{1!(n-1)!} + \frac{n!y^n}{n!} \right) = \\ & = \frac{1}{n!} \left( C_n^0 x^n y^0 + C_n^1 x^{n-1} y^1 + \dots + C_n^n x^0 y^n \right) = \frac{(x+y)^n}{n!}. \end{aligned}$$

Что и требовалось доказать.

**Задание 17.** Перемножив два ряда Тейлора, в которые разлагаются экспоненты  $e^x$  и  $e^{-x}$ , доказать, что  $e^x \cdot e^{-x} = 1$ .



**Указание.** Перемножить ряды и сгруппировать члены одинаковой степени по аналогии с предыдущим заданием.

Задачи, связанные с комбинаторикой возникают и в таком разделе математики, как математическая логика. Приведём несколько примеров таких заданий без решения.

**Задание 18.** Сколько строк имеет таблица истинности булевой функции с  $n$  аргументами?

**Задание 19.** Сколько существует булевых функций с  $n$  аргументами?

**Задание 20.** Сколько существует булевых функций с  $n$  аргументами, которые имеют истинные значения ровно для  $m$  комбинаций аргумента?

В настоящее время преподавание комбинаторики выносится в курс дискретной математики. Сюда же часто помещают знакомство с азами теории множеств. При этом порой возникает проблема, связанная с тем, что в некоторых курсах математики, преподаваемых раньше курса дискретной математики, используются понятия и теоремы теории множеств и формулы комбинаторики. В любом случае данный вопрос следует продумывать и обсуждать в коллективе преподавателей.

Заодно отметим и теорию графов, которая также носит межпредметный характер. Графы являются наглядными объектами. При этом с их помощью можно изобразить эволюционирующие сложные системы, например, марковские цепи и связанные с ними системы массового обслуживания. Но, конечно, не следует забывать, что исходным пунктом возникновения теории графов стала зарождающаяся топология. Создателем топологии и теории графов стал Леонард Эйлер, решивший задачу о кенигсбергских мостах. В дальнейшем в теории графов возникли задачи, направленные на решение топологических задач, связанных с планарностью, симметрией и раскраской графов.

Скажем также, что такие геометрические объекты как симплексы могут рассматриваться как графы. Что же касается большинства разделов исследования операций и математики, относящейся к математическим аспектам информатики, то теория графов здесь повсеместно используется. Достаточно упомянуть теорию сетей и теорию алгоритмов.

Отметим, что общеизвестные факты широкого использования комбинаторики или теории графов в данной статье упоминаются, чтобы повысить у преподавателей математики интерес к рассмотрению межпредметных связей.

## 6. ПРЕОБРАЗОВАНИЯ В ОБЩЕМ КУРСЕ МАТЕМАТИКИ

Понятие преобразований в общем курсе математики, несомненно, являются важнейшей точкой сборки. Во всех курсах от аналитической геометрии до уравнений математической физики умение пользоваться преобразованиями является насущно необходимым. При этом вся связанная с преобразованиями тематика усваивается студентами недостаточно хорошо. Эта ситуация имеет объективные основания и связана, в частности, со сложностью соответствующих понятий и формальной трудностью аналитических операций, на которых основываются различные виды преобразований.

Улучшить знания студентов, относящиеся к различным аспектам теории преобразований, можно с помощью достаточно простой системы заданий на эту тему. Эти задания студент должен проделать самостоятельно. В результате он начинает понимать смысл вопроса, пусть и в простой постановке. Это позволяет облегчить переход к общим формулировкам. Например, изучение преобразований в курсе аналитической геометрии является пропедевтикой значительно более общих понятий линейной алгебры.

Итак, в рамках аналитической геометрии изучение преобразований проводится на достаточно простом уровне. Но именно здесь можно и нужно добиться высокой степени понимания целого ряда вопросов. Прежде всего, речь идёт о понимании смысла линейных и аффинных преобразований. Далее мы будем говорить об аффинных преобразованиях, поскольку линейные преобразования можно трактовать как аффинные преобразования без сдвига.

В статье [7] автор предлагает кинематическую интерпретацию аффинных преобразований. В статье [1] говорится о классификации аффинных преобразований, основанной на этих соображениях. На наш взгляд эта интерпретация облегчает понимание и запоминание соответствующих формул. Рассмотрим аффинное пространство размерности  $n$ . Пусть в нём задан ортонормированный базис, координаты в котором обозначим через  $(t_1; t_2; \dots; t_n)$ . Зададим также точку  $P$  и  $n$  линейно независимых векторов  $\{e_i\}$ , образующих второй базис пространства с координатами  $(x_1; x_2; \dots; x_n)$ .

Пусть в первом базисе задана точка  $T(t_1; t_2; \dots; t_n)$ . В точку  $P(p_1; p_2; \dots; p_n)$  осуществим сдвиг начала второй системы координат. Пусть вектора базиса  $\{e_i\}$  имеют координаты  $(a_{1i}; a_{2i}; \dots; a_{ni})$ . Наконец, рассмотрим точку  $Q$ , имеющую во втором базисе координаты  $(t_1; t_2; \dots; t_n)$ . Вычислим её координаты в первой системе координат. Будем отождествлять координаты  $(t_1; t_2; \dots; t_n)$  со временем, засечённым  $n$  секундомерами. При этом начнём перемещение из точки  $T$  в точку  $Q$ .

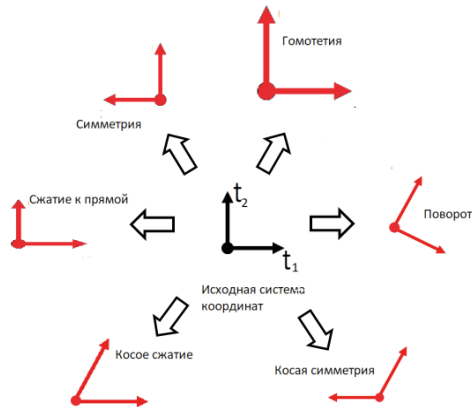
Сначала из точки  $T$  мгновенно сдвинемся в точку  $P$ . Далее время  $t_1$  будем двигаться в направлении, заданным вектором  $e_1$ . Затем время  $t_2$  будем двигаться в направлении, заданным вектором  $e_2$  и т.д. В итоге перемещение можно записать векторным уравнением

$$Q = P + t_1 e_1 + \dots + t_n e_n.$$

Теперь можно расписать это уравнение в координатах

$$q_i = p_i + t_1 a_{i1} + t_2 a_{i2} + \dots + t_n a_{in}.$$

Ясно, что речь идёт об обычной форме аффинных преобразований, которую можно записать и в матричной форме. Отличие в том, что координаты базисных векторов







тракуются как скорости, а уравнения как описание движения вдоль одной из осей исходной системы координат.

Поскольку преобразование задаётся выбором векторов второго базиса можно предлагать студентам задачи, в которых они должны получить формулы конкретных преобразований. При этом студенты должны учитывать, что вид преобразования определяется длиной и углами наклона новых векторов, а также их расположением относительно исходного базиса. Естественно, наиболее доступные задания связаны с декартовой плоскостью, то есть с вопросами аналитической геометрии.

**Задание 21.** Вывести формулы поворота декартовой плоскости на заданный угол против часовой стрелки.

**Решение.** Чтобы решить задачу, нужно построить ортонормированный базис, вектора которого повернуты на заданный угол  $\alpha$  против часовой стрелки. По определению тригонометрических функций вектор  $e_1$ , наклонённый относительно оси абсцисс на угол  $\alpha$ , имеет координаты  $(\cos \alpha; \sin \alpha)$ . Ортогональный ему вектор  $e_2$  имеет координаты  $(\cos(\alpha + \frac{\pi}{2}); \sin(\alpha + \frac{\pi}{2}))$  или  $(-\sin \alpha; \cos \alpha)$ . Сдвига системы координат при повороте нет, таким образом, для поворота мы получаем формулы

$$x_1 = x \cdot \cos \alpha - y \cdot \sin \alpha,$$

$$y_1 = x \cdot \sin \alpha + y \cdot \cos \alpha.$$

где  $(x; y)$  – координаты исходной точки, а  $(x_1; y_1)$  – координаты этой точки после поворота. Это преобразование можно записать в матричной форме

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

**Задание 22.** Вывести формулы обратного преобразования, то есть поворота декартовой плоскости на заданный угол по часовой стрелке. Проверить, что матрицы соответствующих преобразований являются обратными друг к другу.

**Решение.** Чтобы получить нужные формулы достаточно в ранее выведенных формулах поворота заменить угол  $\alpha$  на угол  $-\alpha$ .

Соответствующие преобразования поворота в высшей степени наглядны. Кроме того, очевидно, что поворот на угол  $\alpha$  и поворот на угол  $-\alpha$  являются обратными преобразованиями. Формулы при этом обретают плоть.

В рамках этого же простого примера преобразований следует акцентировать внимание на групповых свойствах геометрических преобразований. В частности на занятиях по аналитической геометрии можно дать определение группы, предваряя знакомство с этим понятием на занятиях по общей алгебре. При этом акцент можно сделать на том обстоятельстве, что группа преобразований обладает определённой целостностью, универсальностью и замкнутостью. И именно аксиомы группы обеспечивают эти её свойства.

**Задание 23.** Доказать, что повороты плоскости вокруг начала координат образуют группу

- используя геометрические свойства поворота.
- используя матричную формулу поворота.



Ещё раз подчеркнём, что в данном случае мы наполняем абстрактную алгебраическую структуру геометрическим содержанием. Это облегчает усвоение важнейшего понятия группы. Здесь же можно ввести понятие подгруппы.

**Задание 24.** Пусть задан ненулевой угол  $\alpha_0$ . Рассмотреть множество поворотов на углы  $n \cdot \alpha_0$ , где  $n$  – целое число. Доказать, что соответствующие этим углам повороты плоскости вокруг начала координат образуют группу.

**Задание 25.** Доказать, что повороты плоскости на углы  $n \cdot \alpha_0$ , где  $\alpha_0 = \frac{2\pi}{m}$ , где  $m$  некоторое натуральное число, образуют конечную циклическую группу.

В свою очередь в курсе общей алгебры при изучении групп и подгрупп перестановок, то есть отображений конечных множеств на себя тоже по возможности следует использовать геометрическое содержание. При этом можно рассматривать группы преобразований (симметрий) правильных многоугольников, многогранников и других геометрических фигур и тел.

**Задание 26.** Рассмотреть группу отображений квадрата на себя и сравнить её с группой перестановок множества из четырёх элементов. Выделить все подгруппы этих двух групп.

Вернувшись к повороту плоскости, отметим, что с помощью этого преобразования в аналитической геометрии осуществляется приведение общего уравнения кривых второго порядка к каноническому виду. Общая стратегия этого действия такова: сначала производится поворот, обнуляющий коэффициент при произведении координат «икс» и «игрек»; затем осуществляется выделение полного квадрата. При приведении квадратичных форм к сумме квадратов в пространствах любого числа измерений в курсе линейной алгебры используется та же стратегия. Что же касается линейной алгебры, то её можно рассматривать как развёрнутое учение о линейных преобразованиях в конечномерных пространствах. Оно естественным образом переходит в совокупность идей функционального анализа, который часто называют не разделом математики, а другой точкой зрения на математический анализ. Основой же этой точки зрения являются понятия линейной алгебры.

Если рассматривать весь комплекс подобных вопросов, то автору в очередной раз хочет сослаться на книгу [8]. Один из авторов этой книги не дождался её выхода в свет. Вот что пишет о нём его соавтор, неявно обосновывая необходимость изучения курса «архаичной» аналитической геометрии.

«30 мая 1968 года, когда эта книга была в наборе, не стало Израиля Марковича Глазмана, которому всецело принадлежит основной замысел книги – конечномерное «моделирование» функционального анализа. Когда кто-нибудь рассказывал ему о сложных бесконечномерных построениях, он обычно спрашивал: «А как это выглядит в двумерном случае?» – и нередко этот шокирующий вопрос помогал лучше понять суть дела. Вся математическая деятельность этого яркого таланта была направлена на то, чтобы увидеть простую основу сложных вещей».

Теперь обратимся к преобразованиям в курсе обычного математического анализа. Эти преобразования принято обозначать термином «замена переменных». Здесь, естественно, возрастает сложность вычислений, поскольку кроме переменных здесь



необходимо вычислять производные. Замена переменных является ключевым методом в интегральном исчислении, в теории обыкновенных дифференциальных уравнений, в теории дифференциальных уравнений в частных производных. По этой причине замене переменных уделяется значительное внимание. Однако, на наш взгляд, нужно подчёркивать суть и единство идей, связанных с заменой переменных в любом из упомянутых предметов. Рассмотрим несколько примеров различного характера.

Замена переменных в аналитической геометрии связана не только с аффинными преобразованиями, но и с получением уравнений некоторых линий в полярных координатах. Отметим, что уравнения кривых второго порядка в полярных координатах могут использоваться в задаче движения планет, то есть в курсе теории обыкновенных дифференциальных уравнений или в широко понимаемом курсе математической физики, выходящем за пределы теории уравнений в частных производных.

**Задание 27.** Вывести полярное уравнение эллипса, используя фокус эллипса как начало координат.

**Указание.** Пусть  $F_1$  – фокус эллипса, а  $M$  – точка на эллипсе. Обозначим угол наклона вектора  $F_1M$  к оси абсцисс через  $\varphi$ , а длину этого вектора через  $r$ . Используя геометрическое определение эллипса, следует выразить расстояние  $F_2M$  через  $F_1M$  и длину горизонтальной полуоси  $a$ . Затем нужно упростить уравнение

**Задание 28.** Доказать, что параметрические уравнения сжатой окружности  $x = a \cdot \cos \alpha$  и  $y = b \cdot \sin \alpha$  являются также и уравнениями эллипса с полуосями  $a$  и  $b$ .

**Указание.** Подставить соответствующие выражения в каноническое уравнение эллипса.

**Задание 29.** Доказать, что параметрические уравнения  $x = a \cdot \operatorname{ch} t$  и  $y = b \cdot \operatorname{sh} t$  являются уравнениями гиперболы с полуосями  $a$  и  $b$ .

**Указание.** Подставить соответствующие выражения в каноническое уравнение гиперболы.

Результаты последних двух заданий позволяют без проблем писать программы на языках программирования с графическим расширением, которые строят эллипсы и гиперболы с заданными полуосями. Написание подобных программ студентами позволяют им увидеть объекты, стоящие за формулами.

Как известно, при интегрировании рациональных выражений вида  $R(\sin x, \cos x)$  используется универсальная подстановка  $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$  ( $-\pi < x < \pi$ ). Чтобы студент мог взглянуть на неё несколько иными глазами, можно предложить следующее задание.

**Задание 30.** Доказать что  $\sin x$  и  $\cos x$  рациональны тогда и только тогда, когда рационален.

**Решение.** Доказательство основывается на формулах

$$\operatorname{tg} \frac{x}{2} = \frac{\sin x}{1 + \cos x}, \quad \sin x = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} \quad \text{и} \quad \cos x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}.$$

**Задание 31.** Решить в целых числах диофантово уравнение  $x^2 + y^2 = z^2$ .



**Решение.** Исходное уравнение можно записать в виде  $(\frac{x}{z})^2 + (\frac{y}{z})^2 = 1$ . Нужно

найти рациональные дроби  $\frac{x}{z}$  и  $\frac{y}{z}$ . Положим, что  $\frac{x}{z} = \sin \alpha$ , тогда  $\frac{y}{z} = \cos \alpha$ .

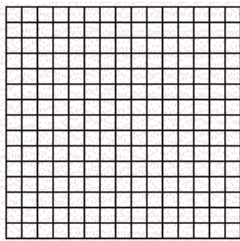
Рассмотрим углы  $\alpha$ , для которых  $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{m}{n}$ . Тогда  $\frac{x}{z} = \sin \alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}} = \frac{2mn}{n^2 + m^2}$ .

Отсюда следует, что  $\frac{y}{z} = \frac{n^2 - m^2}{n^2 + m^2}$ . Как итог получаем решение исходного уравнения:

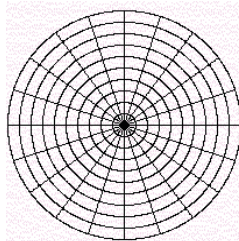
$$x = 2mn, \quad y = n^2 - m^2, \quad z = n^2 + m^2.$$

Отметим, что диофантовы уравнения в вузовском курсе математики практически не упоминаются. И это при том, что в современной математике они играют важную роль. Так или иначе, следует упомянуть об этих уравнениях и продемонстрировать суть соответствующей проблематики хотя бы на примере пифагоровых треугольников (что и сделано в последнем задании).

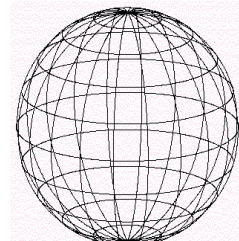
Особое значение имеют образы геометрического характера, связанные с преобразованиями. Прежде всего, речь идёт об образном представлении различных видов систем координат. Так декартова система координат связана с сеткой двух семейств прямых. Прямые каждого семейства параллельны друг другу, а прямые из разных семейств перпендикулярны. Если говорить о полярной системе координат, то рассматриваются семейства концентрических окружностей и лучей, исходящих из общего центра окружностей. Это относится и к другим системам координат, например, сферическим.



*Сетка декартовой системы координат*



*Сетка полярной системы координат*

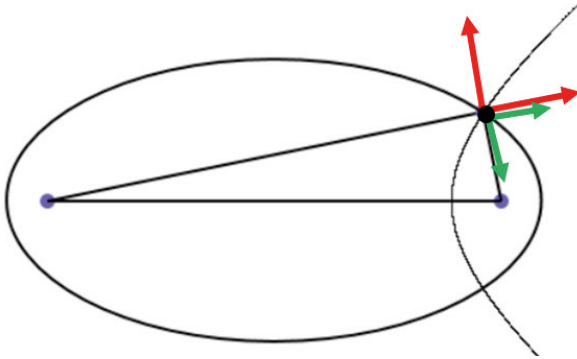


*Сетка меридианов и параллелей на сфере*

Аффинные преобразования преобразуют сетку из квадратов в сетку из параллелограммов. Другие отображения дают намного более сложные картины, которые очерчиваются разнообразными сетками, часто довольно сложными.

По этой причине изучение различных сеток, возникающих при удачном комбинировании семейств кривых, является одним из способов изучения всевозможных преобразований.

**Задание 32.** Пусть на плоскости заданы две точки  $F_1$  и  $F_2$ . Доказать, что семейства софокусных эллипсов и гипербол образуют два взаимно ортогональных семейства.



**Указание.** Длина фокальных радиусов гиперболы возрастает с одинаковой скоростью. Направление касательной к гиперболе определяется направлением суммы этих скоростей, то есть скоростью точки, движущейся по гиперболу. Длина одного фокального радиуса эллипса возрастает, а другого с такой же скоростью

убывает. Направление касательной к эллипсу определяется направлением суммы этих скоростей, то есть скоростью точки, движущейся по эллипсу. Из этого следует, что касательные к этим кривым ортогональны.

Функции комплексного переменного дают яркие примеры интереснейших преобразований со сложной геометрией.

**Задание 33.** Рассмотреть характер преобразования сетки полярной системы координат в новую сетку с помощью функции Жуковского.

**Решение.** Функция Жуковского задаётся уравнением  $w = \frac{1}{2} \left( z + \frac{1}{z} \right)$ . Зададим независимую переменную в тригонометрической форме, что соответствует полярной системе координат:  $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ . Тогда действительная часть функции Жуковского равна  $u = \frac{1}{2} \left( r + \frac{1}{r} \right) \cos \varphi$ , а мнимая часть равна  $v = -\frac{1}{2} \left( r - \frac{1}{r} \right) \sin \varphi$ . Исключив тригонометрические функции от угла  $\varphi$ , получим уравнение эллипса

$$\frac{u^2}{\frac{1}{4} \cdot \left( \frac{1}{r} + r \right)^2} + \frac{v^2}{\frac{1}{4} \cdot \left( \frac{1}{r} - r \right)^2} = 1.$$

Таким образом, окружности полярной системы координат переходят в эллипсы, фокусы которых отстоят от начала координат на единичное расстояние. Исключив радиус  $r$ , получим уравнение гиперболы

$$\frac{u^2}{\cos^2 \varphi} - \frac{v^2}{\sin^2 \varphi} = 1.$$

Таким образом, лучи полярной системы координат переходят в гиперболы, фокусы которых отстоят от начала координат на то же самое единичное расстояние. Значит, полярная система координат перешла в семейство софокусных эллипсов и гипербол, образующих два взаимно ортогональных семейства.

Ортогональность полностью соответствует свойствам конформных отображений. Переход в новую систему координат меняет форму окружности и превращает её в профиль крыла, сохраняя аэродинамические свойства. Этот факт хорошо известен, но мы подчёркиваем его связь с заменой переменных и аналитической геометрией.

Перейдём к вопросам замены переменных, связанных с дифференцированием и интегрированием. Замена переменных в обыкновенных дифференциальных уравнениях используется повсеместно. Но мы рассмотрим пример из теории уравнений в частных производных. Рассмотрим линейное уравнение второго порядка



$$a_{11}u_{xx} + 2a_{12}u_{xy} + a_{22}u_{yy} + b_1u_x + b_2u_y + cu + f = 0.$$

Чтобы использовать формулы преобразования переменных  $\xi = \varphi(x, y)$  и  $\eta = \psi(x, y)$ , нужно найти с помощью дифференцирования сложных функций. Например, частные производные до второго порядка имеют вид

$$u_x = u_\xi \xi_x + u_\eta \eta_x,$$

$$u_y = u_\xi \xi_y + u_\eta \eta_y,$$

$$u_{xx} = u_{\xi\xi} \xi_x^2 + 2u_{\xi\eta} \xi_x \eta_x + u_{\eta\eta} \eta_x^2 + u_\xi \xi_{xx} + u_\eta \eta_{xx},$$

$$u_{xy} = u_{\xi\xi} \xi_x \xi_y + u_{\xi\eta} (\xi_x \eta_y + \xi_y \eta_x) + u_{\eta\eta} \eta_x \eta_y + u_\xi \xi_{xy} + u_\eta \eta_{xy},$$

$$u_{yy} = u_{\xi\xi} \xi_y^2 + 2u_{\xi\eta} \xi_y \eta_y + u_{\eta\eta} \eta_y^2 + u_\xi \xi_{yy} + u_\eta \eta_{yy}.$$

**Задание 34.** Показать, что уравнение колебаний струны  $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$  с помощью замены переменных по формулам  $\xi = x + at$  и  $\eta = x - at$  (обратные преобразования  $x = \frac{\xi + \eta}{2}$  и  $t = \frac{\xi - \eta}{2a}$ ) можно привести к виду  $\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0$ .

**Задание 35.** Показать, что положив  $\frac{\partial u}{\partial \eta} = v$  и перейдя к уравнению  $\frac{\partial v}{\partial \xi} = 0$ , можно проинтегрировать уравнение и получить общее решение

$$u(x, t) = \varphi(x - at) + \psi(x + at).$$

Коснёмся, наконец, приёмов интегрирования, связанных с заменой переменных. Речь идёт об одном знаменитом интеграле, связанном с интегральной предельной теоремой Муавра-Лапласа, которая изучается в курсе теории вероятностей. Как известно, несобственный интеграл  $I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx$  равен  $\sqrt{\pi}$ . Знаменит же он, кроме всего прочего, тем, что лорд Кельвин сказал про это равенство: «Математик – это тот, для кого справедливость этого равенства так же очевидна как дважды два четыре». Надо признать, что это утверждение ставило в тупик многих студентов-математиков, а, пожалуй, даже вгоняло их уныние. Однако есть достаточно наглядный путь к вычислению данного интеграла.

Следуя книге [9], наметим соответствующую линию вычисления интеграла  $I$ , которая даёт возможность понять, не вдаваясь в детали, как получается итоговый результат. Прежде всего, двойной интеграл, записанный как повторный,  $\int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2 - y^2} dy$  по двум независимым переменным равен  $I^2$ . Проведём замену переменных декартовых координат на полярные, вспомнив, что якобиан в этом случае равен  $r$ . Далее получаем  $I^2 = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\infty} r e^{-r^2} dr$ . Этот интеграл берётся с помощью ещё одной замены переменных  $r^2 = t$ . Он равен  $\pi$ . Следовательно,  $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$ .



## 7. ФУНКЦИИ ДВУХ И БОЛЕЕ ПЕРЕМЕННЫХ

Говоря о различных видах преобразований, мы особое внимание обращали на образное восприятие соответствующих понятий. Это наша принципиальная позиция. В то же время сейчас существует точка зрения, состоящая в том, что современная математика настолько абстрактна, что исчезла возможность опираться на геометрическую интуицию и образное мышление. Математическое мышление, с этих позиций, базируется на логической основе, в том числе на конструировании неких абстрактных структур, которое часто характеризуют как некую языковую игру.

Естественно, в рамках математики происходит постоянная борьба между математиками, исходящими из представлений о глубинной связи математики с реальным миром, и, условно говоря, «игровиками». Примером такого противостояния являлся спор между И.В. Арнольдом и Ю.И. Маниным. Не углубляясь в суть этого эмоционального диспута, автор хочет поделиться одним воспоминанием. Оно, на его взгляд как раз и затрагивает вопрос о роли образов в математическом мышлении.

На защите докторской диссертации Виктором Ивановичем Буслаевым слово взял академик Борис Сергеевич Кашин, выдающийся специалист в области функций действительного переменного. В частности он несколько пренебрежительно отозвался о теореме Пуанкаре [10]. Как результат, ему возразил академик Андрей Александрович Гончар, также выдающийся специалист, но в области функций комплексного переменного. Он сказал, что в рамках функций действительного переменного теорема может представляться достаточно тривиальной. Но всё в корне меняется при переходе в комплексную область. После этого он привёл ряд довольно простых вопросов, которые для функций действительного переменного вообще не стоят, но для функций комплексного переменного ответы неизвестны.

Причина, по нашему мнению, состоит в том, что образ функции комплексного переменного четырёхмерен. Значит, здесь опора на образное мышление слабеет. А как итог, проблемы решаются с неизмеримо большим напряжением. Наш вывод таков. Образное мышление необходимо, в том числе и такая его составляющая как пространственное воображение. К сожалению, опыт показывает, что у современных студентов в этом отношении часто возникают проблемы. Например, понятие функции двух переменных слабо или вообще не связано с естественным образом поверхности.

Формирование соответствующих образов и установление их связи с математическими понятиями должно происходить в рамках математического анализа и аналитической геометрии. Здесь, также как и в случае понятия функции, полезно использовать пластические образы поверхностей. При этом «график» функции двух переменных трактуется как гибкая эластичная ткань, первоначально расположенная на координатной плоскости  $Oxy$ . Далее координата  $z$ , возникающая при аналитическом описании функции  $z = F(x, y)$ , трактуется как вертикальное смещение каждой точки эластичной ткани. При этом эластичная ткань деформируется и превращается в соответствующую поверхность. Образ, конечно, весьма простой, но он объясняет, по какой причине уравнение  $z = F(x, y)$  описывает поверхность.

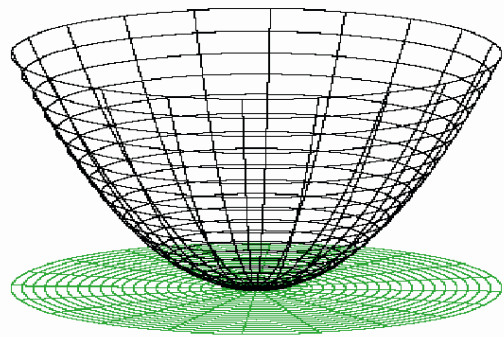
Аналитическая геометрия должна являться естественным полигоном по изучению поверхностей, но, надо признать, что на практике этого не происходит. Дело в том, что курс аналитической геометрии довольно обширен и таит в себе целый ряд сложных для первокурсников вопросов. Речь идёт об активном освоении векторной алгебры, об упомянутых ранее аффинных преобразованиях, об общей теории кривых второго порядка. По этой причине студент к моменту выхода в трёхмерное пространство уже перегружен тем, что обнаружил на декартовой плоскости. Тут, конечно, мы выходим на сложную проблематику содержания общего курса математики в вузе. Устарела аналитическая геометрия или жизненно нужна? Впрочем, решение подобных вопросов выходит не только за рамки данной статьи, но за рамки нашей компетенции.

Что же касается изучения поверхностей в курсе аналитической геометрии, то до студентов в любом случае необходимо познакомить с изучением поверхностей методом сечений. В плане межпредметных связей важно отметить то обстоятельство, что этот метод имеет тесную связь с понятием частной производной. Не останавливаясь на соответствующих задачах аналитической геометрии, обратимся к задачам связанным с решением экстремальных задач и оптимизацией. Важность этих задач широко известна [11]. Некоторые из них могут решаться методом сечений, либо заменой переменных.

**Задание 36.** Изучить функцию  $z = x^2 + y^2$ . Изобразить соответствующую ей поверхность и описать основные её свойства. Найти максимум и минимум этой функции в области  $(x - a)^2 + (y - b)^2 \leq r^2$ .

**Решение.** Перейдём цилиндрической системе координат. При этом переменная  $z$  сохраняется, а переменные  $x$  и  $y$  заменяются на переменные  $r$  и  $\varphi$ . Уравнение  $z = x^2 + y^2$  примет вид  $z = r^2$ . При постоянном  $z$  постоянно и  $r$ , следовательно, поверхность ограничивает тело вращения. Легко понять, что любое сечение поверхности плоскостью, проходящей через ось  $OZ$ , является параболой  $z = r^2$ , таким образом, чем дальше от начала координат находится точка  $(x; y)$ , тем больше значение  $z$ .

Очевидно, что область  $(x - a)^2 + (y - b)^2 \leq r^2$  является кругом. Характер функции показывает, что максимум находится на границе этого круга. Если начало координат не попадает в круг, то это же можно сказать и о минимуме. Если же начало координат попадает в круг, то минимум функции находится как раз в начале координат. По этой причине далее будем рассматривать только случай, когда начало координат лежит вне круга.



Направлениями наиболее быстрого возрастания функции являются лучи, исходящие из начала координат. Таким образом, максимум на границе области достигается





в самой далёкой от начала координат точке, а минимум – в самой близкой. Обе эти точки лежат на луче, соединяющем центр окружности и начало координат, то есть они являются концами диаметра, лежащего на луче, исходящем из начала координат.

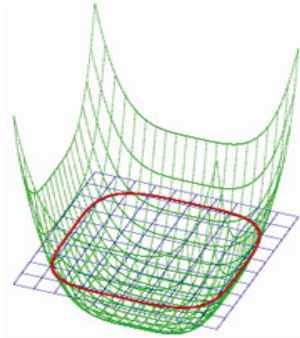
Образное представление о функциях двух переменных как о поверхностях связано с двумя важными вопросами. Речь идёт о понятии неявной функции и о геометрическом смысле неравенств. Эти темы тесно связаны между собой, хотя вопрос о неявных функциях относится к математическому анализу, а вопрос о неравенствах относится в первую очередь к математической теории принятия решений.

**Задание 37.** Каков геометрический смысл неравенства  $F(x_1, x_2) \leq b$ .

**Решение.** Пусть нам задано неравенство  $F(x_1, x_2) \leq b$ . Рассмотрим функцию от двух переменных  $z = F(x_1, x_2)$ . Она задаёт поверхность в трёхмерном пространстве. Пересечение этой поверхности с плоскостью  $z = b$  является некоторой кривой. Уравнение этой кривой имеет вид  $F(x_1, x_2) = b$ . Её проекция на координатную плоскость  $Ox_1x_2$  разбивает плоскость на две области. В одной области выполняется неравенство  $F(x_1, x_2) \leq b$ , а в другой  $F(x_1, x_2) \geq b$ .

Итак, неравенство  $F(x_1, x_2) \leq b$  задаёт на плоскости область, ограниченную кривой  $F(x_1, x_2) = b$ .

Система же из нескольких неравенств задаёт область, представляющую собой пересечение нескольких таких областей.



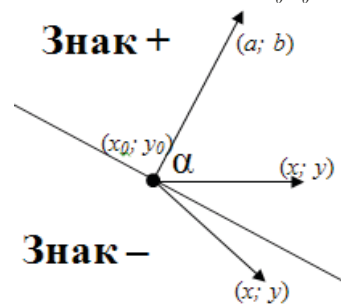
**Задание 38.** Обязательно ли область, заданная уравнением  $F(x_1, x_2) \leq b$ . Является ли связной? Привести пример.

Вопрос о геометрическом смысле неравенств является центральным при решении задач линейного программирования, хотя в этом случае рассматриваются только линейные уравнения. Здесь кроме геометрической картины возникает возможность простого получения результата с помощью скалярного произведения. При этом в случае линейного неравенства с двумя переменными результат и его вывод являются весьма наглядными. Кроме того, переход от двух переменных к любому их количеству не представляет никаких затруднений. В основу вычислений кладутся методы линейной алгебры.

**Задание 39.** Каков смысл линейного неравенства с двумя переменными?

**Решение.** Выведем уравнение прямой. Пусть она проходит через точку  $(x_0, y_0)$  и задан вектор  $(a, b)$ , перпендикулярный этой прямой. Пусть точка  $(x, y)$  лежит на прямой, тогда вектор  $(x - x_0, y - y_0)$  направлен вдоль данной прямой. Следовательно, скалярное произведение ортогональных векторов с координатами  $(a, b)$  и  $(x - x_0, y - y_0)$  равно нулю, то есть  $a \cdot (x - x_0) + b \cdot (y - y_0) = 0$  или  $ax + by + c = 0$ , где  $c = (-x_0 \cdot a - y_0 \cdot b)$ .

При выводе уравнения прямой точка  $(x, y)$  лежала на прямой. Теперь будем выбирать точку на плоско-





сти произвольным образом. В этом случае скалярное произведение векторов с координатами  $(a, b)$  и  $(x - x_0, y - y_0)$  уже не будет равно нулю. Его знак зависит от угла  $\alpha$  между этими векторами. Если угол острый, то произведение положительно.

Действительно, скалярное произведение векторов равно произведению их модулей на косинус угла между ними. Косинус острого угла положителен, значит, и скалярное произведение положительно. Если же угол тупой, оно отрицательно. Вектор  $(a, b)$  направлен в одну из полуплоскостей, на которые прямая вида  $ax + by + c = 0$  делит плоскость. Очевидно, что все вектора, исходящие из точки  $(x_0, y_0)$  в эту полуплоскость образуют с вектором  $(a, b)$  острые углы. Это означает, что для всех точек этой полуплоскости верно неравенство вида  $ax + by + c > 0$ . Наоборот, все вектора, исходящие из точки  $(x_0, y_0)$  во вторую полуплоскость образуют с вектором  $(a, b)$  тупые углы. Это означает, что для всех точек второй полуплоскости верно неравенство вида  $ax + by + c < 0$ . Итак, решением как неравенства  $ax + by + c > 0$ , так и неравенства  $ax + by + c < 0$  являются координаты всех точек одной из двух полуплоскостей, на которые прямая делит плоскость. Мы будем допускать вольность речи и говорить: «Решением неравенства является полуплоскость».

**Задание 40.** Прояснить смысл линейного неравенства с двумя переменными с помощью соображений, связанных с функцией  $z = ax + by + c$ .

При изучении линейного программирования используются геометрический метод для задачи с двумя переменными и симплекс-метод. Симплекс-метод связан с обсуждаемой нами ранее темой о замене переменных. При этом используются жордановы исключения.

Что же касается геометрического метода, то целесообразно решить хотя бы одну задачу для трёх переменных. Здесь студенту в большей мере приходится опираться не на плоскую картинку многоугольника, а на понимание метода решения задачи.

**Задание 41.** Для системы линейных неравенств с тремя переменными найти область, задающую решение системы неравенств:

$$\begin{aligned}5x + y - 7z &\geq -21; \\7x - 4y + z &\leq 3; \\14x + 19y - 25z &\geq -48; \\2x + y - z &\geq -6.\end{aligned}$$

**Указание.** Каждое из неравенств описывает полупространство. Пересечение четырёх полупространств, предположительно, может оказаться тетраэдром. Этот факт нужно проверить. Кроме того, необходимо найти координаты вершин этого тетраэдра.

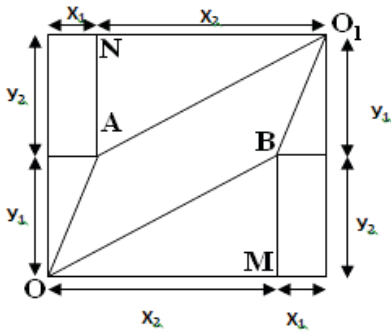
Вершина тетраэдра является пересечением трёх плоскостей, каждая из которых возникает в результате замены неравенства равенством. Итак, вершина определяется системой трёх линейных неравенств с тремя неизвестными. Таких систем в нашем случае возникает четыре (одно из неравенств отбрасывается).

При этом координаты найденной из соответствующей системы уравнений вершины тетраэдра нужно подставить в отброшенное неравенство и проверить его выполнение. Если все предполагаемые вершины благополучно пройдут проверку, то область является тетраэдром.



Возможно и рассмотрение задач с четырьмя переменными, но для ускоренного их решения следует использовать, например, электронные таблицы.

## 8. ОПРЕДИТЕЛЬ КАК ОБЪЁМ



Очень важным для математики вообще является то обстоятельство, что определитель квадратной матрицы  $n$  на  $n$  с точностью до знака равен объёму параллелепипеда, натянутого на вектора, соответствующие столбцам (строкам) этой матрицы. Для матрицы  $3$  на  $3$  этот факт доказывается в рамках аналитической геометрии при рассмотрении смешанного произведения. Однако для матриц всех остальных размерностей, включая и матрицу  $2$  на  $2$  об этом факте обычно не

упоминают. По этой причине желательно уделить данному вопросу особое внимание. Дело в том, само это обстоятельство используется во многих разделах математики, например, при замене переменных в многократных интегралах.

По нашему мнению преподавателю нужно акцентировать внимание студентов на этом вопросе, чтобы хотя бы для матрицы  $2$  на  $2$  получить указанный результат, тем более, что это не представляет труда:

$$S_{\text{параллелограмма}} = (x_1 + x_2)(y_1 + y_2) - 2x_1y_2 - x_2y_2 - x_1y_1 = x_1y_1 + x_2y_1 + x_1y_2 + x_2y_2 - 2x_1y_2 - x_2y_2 - x_1y_1 = x_2y_1 - x_1y_2.$$

Вычисления весьма простые, но проведём их ещё раз в несколько ином виде. Это понадобится в дальнейшем. Положим, что  $y_1 + y_2 = h$ . Чтобы получить площадь параллелограмма, из площади большого прямоугольника нужно вычесть сумму площадей двух составных прямоугольников. Один составлен из треугольников  $OBM$  и  $ANO_1$  и имеет площадь  $x_2 \cdot (h - y_1)$ , а второй составлен из двух прямоугольных трапеций и имеет площадь  $x_1 \cdot (h + y_2)$ . Вычисления принимают более простую форму:

$$S_{\text{параллелограмма}} = (x_1 + x_2) \cdot h - x_2 \cdot (h - y_1) - x_1 \cdot (h + y_2) = x_2y_1 - x_1y_2.$$

Отметим, что мы рассматриваем только тот частный случай, когда вектора, соответствующие столбцам или строкам матрицы, направлены в первый квадрант. Аналогичное ограничение будет использоваться и далее.

Сравним только что проведённое доказательство для матриц два на два с доказательством с помощью смешанного произведения для матриц три на три. Предельно прозрачное доказательство, упомянутое вторым, в отличие от первого не соотносит координаты векторов и объём. Рассуждение основано на других соображениях. Желательно получить аналог доказательства три на три, которое показывало бы, как вектора с заданными координатами обеспечивают параллелепипеду соответствующий объём.

Что же касается матриц большего размера, то, конечно, здесь всё обстоит куда сложнее. Разбираться в деталях многомерных конструкций трудно, хотя и полезно.

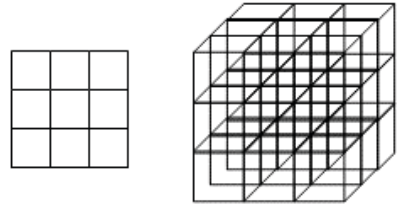


Нарастание сложности ситуации можно оценить по двум картинкам – плоской и объёмной. Тем не менее, перейдём к рассмотрению случая, когда  $n$  больше или равно трём.

Возникает мысль, что и в общем случае тоже можно вычислить определитель вида

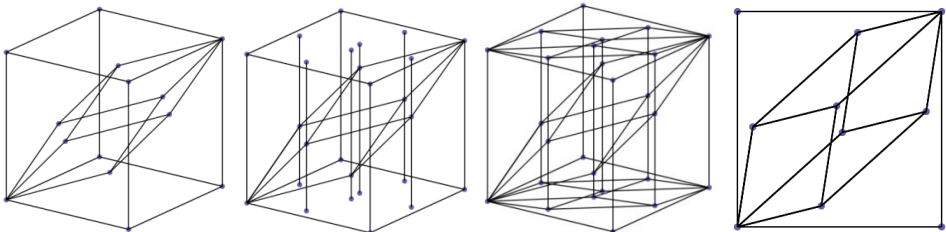
$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ w_1 & w_2 & \dots & w_n \end{vmatrix}$$

подобно тому, как это



делалось в двумерном случае. До начала вычислений можно предположить, что из произведения вида  $\prod_{i=1}^n (x_i + y_i + \dots + w_i)$  будут вычитаться «лишние объёмы». При этом те слагаемые, в которых есть одинаковые индексы, уничтожаются, а некоторые (в зависимости от чётности подстановки) меняют знак. На самом деле мы вскоре скорректируем это предположение.

Конечно, для детального изучения ситуации требуется небольшое исследование. И начать нужно со случая  $n = 3$ , несмотря на то, что, как уже упоминалось, именно этот случай рассматривается при изучении векторной алгебры в трёхмерном пространстве. Тем не менее, именно трёхмерная картинка позволит лучше понять общую линию, которой следует придерживаться далее. На рисунках показано, как параллелепипед, натянутый на три исходных вектора, вписывается в первый октант, как он проектируется на горизонтальную плоскость, в какую призму он заключён, и как выглядит основание этой призмы.



Предварительно очертим наши дальнейшие рассуждения без детализации. Исходный параллелепипед проектируется на горизонтальную плоскость в виде выпуклой оболочки проекции своих вершин. Эта оболочка представляет собой шестиугольник, противоположные стороны, которого параллельны. Исходный параллелепипед заключён в прямую призму, основанием которой как раз и является соответствующий шестиугольник. По этой причине лишние объёмы будут вычитаться не из произведения  $(x_1 + x_2 + x_3)(y_1 + y_2 + y_3)(z_1 + z_2 + z_3)$ , а из объёма призмы.

Шестиугольное основание призмы является проекцией параллелепипеда на плоскость  $Oxy$ . Этот шестиугольник накрыт в два слоя тремя парами параллелограммов, площади которых являются определителями второго порядка, как было доказано



выше. Поскольку любая точка на границе и внутри шестиугольника принадлежит в точности двум параллелограммам, площадь шестиугольника равна сумме трёх параллелограммов, натянутых на всевозможные пары векторов  $(x_1; y_1)$ ,  $(x_2; y_2)$  и  $(x_3; y_3)$ .

Таким образом, площадь основания призмы равна  $\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_3 & y_3 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix}$ .

Высота этой призмы равна  $(z_1 + z_2 + z_3)$ . Теперь можно указать, чему равен объём  $V$ , из которого будут вычитаться некоторые лишние объёмы, чтобы вычислить объём параллелепипеда:

$$V = (z_1 + z_2 + z_3) \left( \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_3 & y_3 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix} \right).$$

Далее проводятся рассуждения подобные двумерному случаю, хотя и несколько более сложные. Отметим также, что факт использования результата, полученного для двумерного случая, указывает на необходимость использования индукции.

Рассмотрим детальный чертёж. Свяжем с точками, определяющими параллелепипед следующие координаты:  $A(x_1; y_1; z_1)$ ,  $B(x_2; y_2; z_2)$ ,  $C(x_3; y_3; z_3)$ .

Трёхгранный угол  $OABC$  расположен так, что грань  $OCA_1B$  отгораживает от горизонтальной координатной плоскости грани  $OBC_1A$  и  $OCB_1A$ . Вычесть из объёма исходной призмы нужно три объёма составных прямых призм. Они получаются совмещением равных граней параллелепипеда.

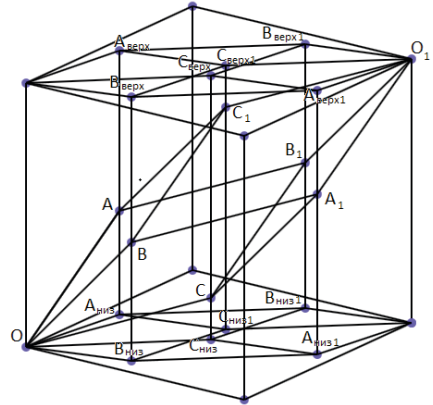
Призма, полученная совмещением граней  $OCA_1B$  и  $OC_1AB_1$ , имеет объём  $V_1 = \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} (z_2 + z_3)$ . Призма, полученная совмещением граней  $OBC_1A$  и  $OB_1CA_1$ ,

имеет объём  $V_3 = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} (z_1 + z_2 + 2z_3)$ . Призма, полученная совмещением граней

$OCB_1A$  и  $OC_1BA_1$ , имеет объём  $V_2 = \begin{vmatrix} x_3 & y_3 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix} (z_1 + 2z_2 + z_3)$ . Остаётся найти объём

параллелепипеда, построенного на исходных векторах. Он равен  $V - V_1 - V_2 - V_3$ . В результате будет получена формула разложения определителя три на три по одной из строк. Таким образом, получен нужный результат.

Он может послужить для обоснования такого же утверждения в общем случае. Делается индуктивное предположение, что для определителя  $n-1$ -го порядка утверждение верно. Для определителя  $n$ -го порядка рассматриваем параллелепипед, вписанный в прямую призму с основанием  $n-1$ -го порядка. Грани многогранного угла поочередно перекрывают друг друга – одна грань ближе, следующая грань дальше от гиперпространства, в котором лежит основание призмы. Далее рассматриваются составные призмы. Призмы, связанные с прилежащими гранями, после вычитания дают положитель-





ные слагаемые разложения определителя по строке. Призмы, связанные с удалёнными гранями, после вычитания дают отрицательные слагаемые разложения определителя по строке. Но, конечно, речь идёт об образном объяснении, а не о доказательстве.

## **9. ИЗУЧЕНИЕ МАТЕМАТИКИ КАК АКТИВНАЯ ДЕЯТЕЛЬНОСТЬ**

Одним из важнейших показателей качества учебного процесса является уровень активности студентов при выполнении заданий по различным предметам. Поскольку согласно нашим исходным установкам целью учебного процесса является воспитание математика-прикладника, мы должны ориентироваться на задачи прикладного характера. По этой причине нужно хотя бы в общих чертах описать круг подобных задач. При этом мы будем говорить о вещах хорошо известных, но не становящихся от этого менее актуальными.

Перечислим некоторые особенности задач прикладного характера. Прежде всего, такая задача должна быть направлена на освоение каких-либо математических методов, понятий и идей. Постановка же подобной задачи должна иметь характер, который очевидным образом подразумевает практическую значимость получаемого результата. Главной целью использования прикладных задач является демонстрация эффективности математических теорий, применяемых на практике.

Рассмотрим содержательную сторону прикладных задач. В первую очередь речь идёт о задачах, относящихся к области геометрии, физики, вычислительной математики и особенно к задачам, которые направлены на различные формы компьютерной реализации математических методов.

Что касается геометрии и физики, то задачи на соответствующие темы традиционно используются в курсах математического анализа, обыкновенных дифференциальных уравнений и математической физики. Если рассматривать вопросы, связанные с межпредметными связями, то желательно продумать, какой должна быть совокупность соответствующих задач, проходящих через все эти предметы, как единое целое.

Задачи вычислительной математики вынесены в отдельный предмет, но они возникают в курсах общей и линейной алгебры, а также в курсе математического анализа. Здесь имеет место та же ситуация, что и в случае задач, связанных с геометрией и физикой. Речь идёт о рассмотрении целостной совокупности заданий, используемых в различных предметах.

Что же касается связи математических предметов с информационными технологиями, то здесь мы сталкиваемся с необозримым кругом проблем. В частности всю проблематику, связанную с аналитической геометрией, математическим анализом, дифференциальной геометрией и дифференциальными уравнениями можно объединить в комплекс задач компьютерной геометрии. Сюда же можно отнести ряд вопросов геометрического характера из теории функций комплексного переменного.

Значительно более обширным и важным комплексом задач являются вопросы математического моделирования, состыкованные с вопросами компьютерного



моделирования. Сюда можно включить практически все математические теории и все способы использования компьютерных технологий. Фактически речь идёт о творческом освоении и взаимном увязывании содержания двух наук – математики и информатики. Сюда же можно отнести вопросы о выборе содержания общих курсов математики и информатики. Однако возникающая при этом проблематика фактически необозрима.

## 10. ЗАДАЧИ, ЗАТРАГИВАЮЩИЕ МЕЖПРЕДМЕТНЫЕ СВЯЗИ

Наконец, рассмотрим некоторые типы задач, затрагивающих межпредметные связи и их конкретные примеры. Начнём с нашего призыва по возможности доводить до студентов замечательные исторические результаты, полученные в прошлом. Здесь можно усмотреть важный воспитательный момент, который можно трактовать как связь с мировой культурой. Кроме того, отметим следующий момент. Некоторые вопросы, традиционно входившие в прошлые математические курсы, в наше время не могут рассматриваться в силу большого удельного веса и меньшей актуальности, чем у более современных результатов. По этой причине исторические математические задачи можно предлагать студентам для самостоятельного решения. Приведём два примера подобных задач в курсах общей алгебры при изучении алгебры многочленов и математического анализа при изучении дифференциала.

**Задание 42.** Доказать, что  $\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20-14\sqrt{2}} = 4$ .

**Указание.** Обозначить левую часть через  $x$ , возвести в куб, получить кубическое уравнение и найти его целые корни.

**Задание 43.** Найти приближённое значение синуса одного градуса.

Отметим, что эти и другие задачи этого типа должны дополняться интересным и содержательным историко-математическим комментарием.

Следующим типом задач, о которых мы упомянем, являются задачи, направленные на получение известных результатов новыми методами. Это важный способ демонстрации внутренних математических связей. Ограничимся простым примером.

**Задание 44.** С помощью скалярного произведения векторов вывести формулу косинуса разности.

**Указание.** Использовать тот факт, что угол между векторами  $(\cos \alpha; \sin \alpha)$  и  $(\cos \beta; \sin \beta)$  равен  $\alpha - \beta$ .

Ещё одним типом задач являются задачи, направленные на получение новых результатов известными методами. Также ограничимся одним примером. Эту задачу можно рассмотреть в курсе математического анализа при изучении бесконечных произведений.

**Задание 45.** С помощью формулы синуса половинного угла получить формулу Виета

$$\frac{2}{\pi} = \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2} \dots$$



**Указание.** Разложить синус в произведение вида  $\sin x = 2^n \sin \frac{x}{2^n} \prod_{k=1}^n \cos \frac{x}{2^k}$ .

В пределе перейти к формуле  $\frac{\sin x}{x} = \prod_{k=1}^{\infty} \cos \frac{x}{2^k}$  и подставить  $x = \frac{\pi}{2}$ .

Далее рассмотрим задания, которые предлагаются студенту в рамках одного предмета, а формулируются в терминах другого предмета. Например, в курсе общей алгебры можно предложить следующее задание.

**Задание 46.** Найти предел  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 2x^2 - x + 2}{x^2 - 5x + 6}$ .

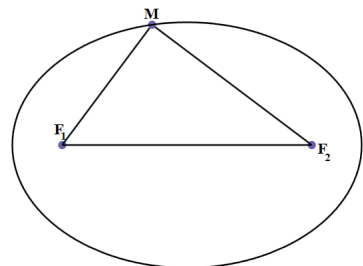
Отметим, что в общем курсе высшей математики есть темы, которые в равной степени принадлежат к двум и более предметам. Ярким примером являются гармонические функции, которые изучаются и в курсе теории функций комплексного переменного и в курсе уравнений в частных производных. Автор статьи вспоминает, как в его студенческие годы один из его однокурсников недоумённо спрашивал у лектора, по какой причине гармонические функции изучаются в рамках двух различных предметов. На это он получил ответ, что наиболее глубокие знания о каком-либо объекте удаётся получить, изучая его с различных точек зрения. Видимо, эту точку зрения желательно донести до студентов даже в том случае, когда сами студенты никаких вопросов по этому поводу не зададут.

Упомянем ещё об одной теме, которая может встречаться в разных предметах, хотя основным местом для её изучения является курс вычислительной математики. Речь идёт о схеме Горнера. О ней часто сообщают в курсе общей алгебры. Можно предположить, что такое раннее упоминание об этом вычислительном алгоритме в целом件 полезно, поскольку, как известно, повторение – мать учения. К тому же это даёт возможность использовать схему Горнера при изучении рядов Тейлора в курсе математического анализа.

**Задание 47.** Разработать модифицированную схему Горнера для приближённого вычисления экспоненты с помощью ряда Тейлора. Требование к вычислительной схеме состоит в том, чтобы одновременно с постепенными вычислениями степеней вычислялись и факториалы.

Приведём ещё две задачи аналитической геометрии, связанных с теорией чисел и линейной алгеброй. Первый пример кроме всего прочего даёт возможность студенту понять, как формируются задания с удобными для вычислений данными. При этом используются сведения о диофантовых уравнениях.

**Задание 48.** Расстояние между фокусами  $F_1$  и  $F_2$  эллипса равно  $2c$ . На эллипсе выбрана точка  $M$ , такая, что треугольник  $F_1MF_2$  является прямоугольным ( $M$  – вершина прямого угла). Косинус угла  $MF_1F_2$  равен  $\frac{m^2 - n^2}{m^2 + n^2}$ , где  $m$  и  $n$  натуральные числа. Получить каноническое уравнение данного эллипса. Для параметров  $a$  и  $b$  дать точные значения, выражаемые обыкновенными дробями.







Следующее задание связано с понятием пучка геометрических линий, в простейшем случае речь идёт о прямых. Понятие пучка основывается на понятии линейной зависимости.

**Задание 48.** Пусть заданы две пересекающиеся в точке  $A$  прямые с уравнениями  $A_i x + B_i y + C_i = 0$ , где  $i = 1, 2$ . Совокупность прямых с уравнениями  $p(A_1 x + B_1 y + C_1) + q(A_2 x + B_2 y + C_2) = 0$  образует пучок. Доказать, что все прямые, составляющие пучок, проходят через точку  $A$ .

Значительно более содержательные задачи возникают при рассмотрении пучков кривых второго порядка. Работа с пучками помогает взглянуть на понятие линейной зависимости под несколько другим углом.

В рамках математической логики естественным образом можно рассматривать теоремы из других областей математики с точки зрения их логической структуры. Рассмотрим теорему, логическая структура которой имеет вид  $A \Rightarrow B$ . Тогда обратной теоремой называется теорема с логической структурой вида  $B \Rightarrow A$ . Противоположной теоремой называется теорема с логической структурой вида  $\overline{A} \Rightarrow \overline{B}$ . Обратной к противоположной теореме называется теорема с логической структурой вида  $\overline{B} \Rightarrow \overline{A}$ . В качестве исходной теоремы выберем следующую теорему математического анализа:

Если дифференцируемая на отрезке функция имеет во внутренней точке отрезка экстремум, то производная функции в точке экстремума равна нулю.

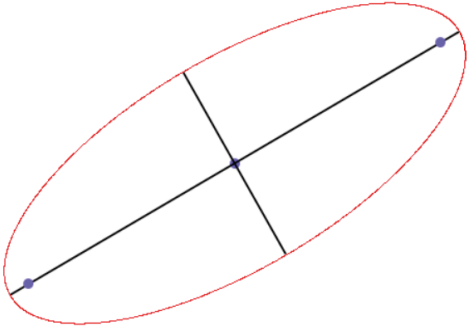
**Задание 49.** Для указанной теоремы выделить посылку (А) и следствие (В). Сформулировать обратную, противоположную и обратную к противоположной. Выяснить, какие из этих утверждений верны.

Наконец, приведём пример задания, связанного с применением математических знаний при написании программы, строящей изображение геометрического объекта. Отметим, что основные знания, которыми должен обладать студент, пишущий программу, являются именно математическими.

**Задание 50.** Написать программу, которая строит на экране изображение эллипса, у которого заданы длины полуосей эллипса, а его большая полуось наклонена к горизонтали под заданным углом. Кроме того, требуется выделить фокусы этого эллипса.

**Решение.** Кроме знания некоторых фактов об эллипсе студенту необходимо построить наклонную систему координат, в которой и будет построен эллипс с помощью параметрических уравнений эллипса и формул для аффинных преобразований плоскости.



‘Начало программы	‘Продолжение программы
<p><i>‘Язык Small Basic</i> <i>‘Параметры графического экрана в пикселах</i> GraphicsWindow.Width = 600 GraphicsWindow.Height = 600 pi = Math.Pi <i>‘Экранные координаты начала координат</i> x0 = 300 y0 = 300 ed = 250 GraphicsWindow.FillEllipse(x0-5,y0-5,10,10) <i>‘Угол наклона и длины полуосей в пикселах</i> ugol = pi/6 a = 250 b = 100 c = Math.SquareRoot(a*a - b*b) <i>‘Координаты векторов-полуосей эллипса</i> bp = a*Math.Cos(ugol) bq = -a*Math.Sin(ugol) mp = b*Math.Cos(ugol+pi/2) mq = -b*Math.Sin(ugol+pi/2)</p>	<p><i>‘Диаметры эллипса и фокусы</i> GraphicsWindow.DrawLine(x0-bp,y0-bq,x0+bp,y0+bq) GraphicsWindow.DrawLine(x0-mp,y0-mq,x0+mp,y0+mq) GraphicsWindow.FillEllipse(x0-bp*c/a-5,y0-bq*c/a-5,10,10) GraphicsWindow.FillEllipse(x0+bp*c/a-5,y0+bq*c/a-5,10,10) <i>‘Построение эллипса</i> For u = 0 To 2*pi Step pi/1000 x = x0 + bp*Math.Cos(u) + mp*Math.Sin(u) y = y0 + bq*Math.Cos(u) + mq*Math.Sin(u) GraphicsWindow.SetPixel(x,y,"red") EndFor</p> 

## 11. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной статье сделана попытка дать обзор ряда вопросов, относящихся к межпредметным связям в общем курсе высшей математики. Автор рассматривает ряд вопросов, имеющих отношение к этой обширной теме.

В первую очередь автор рассматривал ряд тем, которые являются общими для различных разделов математики. Речь идёт о понятиях действительного числа, последовательности и функции. Обсуждается место линейной алгебры в общем курсе высшей математики. Рассмотрены вопросы, связанные с рядами Тейлора и комбинаторикой. Важное место занимает обсуждение тематики, которая относится к различным видам математических преобразований. Особый акцент при этом сделан на геометрические образы, возникающие в данной теме. Важность образного мышления обсуждается в связи с понятием функции от двух и более переменных. Проводится обсуждение вопроса о геометрическом смысле определителя квадратной матрицы как объёма параллелепипеда, построенного на векторах, координатами которых яв-



ляются строки или столбцы матрицы. В статье приведено большое количество заданий, связанных межпредметными связями в общем курсе высшей математики.

Автор не претендует на сколь-нибудь важные выводы. Тема слишком обширна. Цель автора состояла в том, чтобы привлечь внимание преподавателей математики к обсуждаемой проблеме. Кроме того, автор надеется оказать хотя бы небольшую помощь молодым преподавателям.

### *Литература*

1. Степанов М.Е. Некоторые вопросы методики преподавания высшей математики. Моделирование и анализ данных. Научный журнал. – 2017г.
2. Куланин Е.Д., Степанов М.Е., Нуркаева И.М. Роль образного мышления в научном мышлении. Моделирование и анализ данных. Научный журнал. – 2020г., Том 10, № 2.
3. Степанов М.Е. Компьютерные технологии как средство приобщения учащегося к математической реальности. Моделирование и анализ данных. Научный журнал. – 2018г., № 1.
4. Арнольд В.И. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М., Наука, 1971.
5. Дьедонне Ж. Линейная алгебра и элементарная геометрия. М., Наука, 1972.
6. Хинчин А.Я. Три жемчужины теории чисел. М., Наука, 1979.
7. Степанов М.Е. Метод сложных движений в компьютерной геометрии. Моделирование и анализ данных. Научный журнал. – Вып. 1, 2011г.
8. Глазман И.М., Любич Ю.И.. Конечномерный линейный анализ в задачах. М., Наука, 1969.
9. Стивак М. Математический анализ на многообразиях. М., Мир, 1968.
10. Гельфонд А.О. Исчисление конечных разностей. М., Наука, 1967.
11. Куланин Е.Д., Степанов М.Е., Нуркаева И.М. Пропедевтика решения экстремальных задач в школьном курсе математики. Моделирование и анализ данных. Научный журнал. – 2019 г., № 4.



# Interdisciplinary Connections in the General Course of Higher Mathematics

**Mikhail E. Stepanov\***

Moscow state University of Psychology & Education, Moscow, Russia

ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-4803-8211>

e-mail: [mestepanov@yandex.ru](mailto:mestepanov@yandex.ru)

The article discusses the methods of teaching higher mathematics, arising at the modern level of education in our country. The author relies on his experience working at the Faculty of Information Technologies of the Moscow State Psychological and Pedagogical University.

**Keywords:** interdisciplinary relations, higher education, methods of teaching mathematics, elementary mathematics, analytical geometry, mathematical analysis, complex analysis, functional analysis, general algebra, linear algebra, differential equations, equations of mathematical physics, combinatorics, probability theory, number theory, mathematical decision theory, group theory, mathematical logic, discrete mathematics, computational mathematics.

## For citation:

Stepanov M.E. Interdisciplinary Connections in the General Course of Higher Mathematics. *Modelirovanie i analiz dannykh = Modelling and Data Analysis*, 2021. Vol. 11, no. 2, pp. 89–123. DOI: <https://doi.org/10.17759/mda.2021110206> (In Russ., abstr. in Engl.).

## References

1. Stepanov M.E. Nekotorye voprosy metodiki prepodavaniya vysshei ma-tematiki. *Modelirovanie i analiz dannykh*. Nauchnyi zhurnal. – 2017g.
2. Kulanin E.D., Stepanov M.E., Nurkaeva I.M. Rol' obraznogo myshleniya v nauchnom myshlenii. *Modelirovanie i analiz dannykh*. Nauchnyi zhurnal. – 2020g., Tom 10, № 2.
3. Stepanov M.E. Komp'yuternye tekhnologii kak sredstvo priobshcheniya uchashchegosya k matematicheskoi real'nosti. *Modelirovanie i analiz dan-nykh*. Nauchnyi zhurnal. – 2018g., № 1.
4. Arnol'd V.I. Obyknovennye differentsial'nye uravneniya. M., Nauka, 1971.
5. D'edonne Zh. Lineinaya algebra i elementarnaya geometriya. M., Nauka, 1972.
6. Khinchin A. Ya. Tri zhemchuzhiny teorii chisel. M., Nauka, 1979.
7. Stepanov M.E. Metod slozhnykh dvizhenii v komp'yuternoi geometrii. *Modelirovanie i analiz dannykh*. Nauchnyi zhurnal. – Vyp. 1, 2011g.
8. Glazman I.M., Lyubich Yu. I. Konechnomernyi lineinyi analiz v zadachakh. M., Nauka, 1969.
9. Spivak M. Matematicheskii analiz na mnogoobraznykh. M., Mir, 1968.
10. Gel'fond A.O. Ischislenie konechnykh raznostei. M., Nauka, 1967.
11. Kulanin E.D., Stepanov M.E., Nurkaeva I.M. Propedevtika resheniya ekstremal'nykh zadach v shkol'nom kurse matematiki. *Modelirovanie i analiz dannykh*. Nauchnyi zhurnal. –2019g., № 4.

\***Mikhail E. Stepanov**, candidate of pedagogical Sciences, associate Professor, Moscow state University of Psychology & Education, Moscow, Russia, ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-4803-8211>, e-mail: [mestepanov@yandex.ru](mailto:mestepanov@yandex.ru)

**Моделирование и анализ данных 2021. Том 11. № 2.**  
Научный журнал

Издаётся с 2011 года

Учредитель  
Федеральное государственное бюджетное  
образовательное учреждение высшего образования  
«Московский государственный психолого-педагогический университет»

Адрес редколлегии:  
г. Москва, ул. Сретенка, 29, факультет информационных технологий  
Тел.: +7 (499) 167-66-74  
E-mail: mad.mgppu@gmail.com

Журнал зарегистрирован в Государственном комитете РФ по печати.  
Свидетельство о регистрации средств массовой информации  
ПИ № ФС77-52058 от 7 декабря 2012 года

ISSN: 2219-3758  
ISSN: 2311-9454 (online)

Подписано в печать: 21.06.2021.  
Формат: 70\*90/16. Бумага офсетная.  
Гарнитура Times. Печать цифровая.  
Усл. печ. п. 7,8. Усл.-изд. л. 9,6.  
Тираж 500 экз.