

## ТЕОРИЯ УПРАВЛЕНИЯ

УДК 519.8

### РАЗРАБОТКА И ПРИМЕНЕНИЕ МНОГОКРИТЕРИАЛЬНОГО МЕТОДА ФЕЙЕРВЕРКОВ В ЗАДАЧЕ СТАБИЛИЗАЦИИ ДВИЖЕНИЯ ИСКУССТВЕННОГО СПУТНИКА ПО КРУГОВОЙ ОРБИТЕ

**А.В. Пантелеев, А.Ю. Крючков**

В статье рассматривается применение метаэвристических методов условной глобальной оптимизации к нахождению эффективного программного управления в задаче стабилизации спутника на круговой орбите. Изучается задача с фиксированным правым концом и известным конечным временем, где управление ищется в классе кусочно-постоянных функций, удовлетворяющих ограничениям. Управление должно одновременно минимизировать значения квадратичного критерия и критерия, описывающего расход топлива. Под решением многокритериальной задачи понимается множество решений, оптимальных по Парето. Предлагается численный метод многокритериальной оптимизации для приближенного решения задачи на основе генерации допустимых решений методом фейерверков и процедуры недоминируемой сортировки. На первом этапе решается оптимизационная задача относительно каждого из критериев, а для удовлетворения терминальных ограничений подбираются значения параметров штрафа. При этом применяются известные метаэвристические методы: взрыва гранат, большого взрыва-большого сжатия, фейерверков. На втором этапе найденные значения параметров используются для формулировки многокритериальной задачи оптимизации, которая решается с помощью предложенной авторами модификации метода фейерверков.

---

The article discusses the use of metaheuristic methods of global constrained optimization to find an effective programmed control in the problem of satellite stabilization in a circular orbit. We study a problem with a fixed right end and a known finite time, where control is a function in the class of piecewise constant functions satisfying the constraints. The control must minimize the values of the quadratic criterion and the criterion describing fuel consumption simultaneously. Solution of multiobjective optimization problem is a set of Pareto optimal solutions. A numerical multiobjective optimization method is proposed for an approximate solution of the problem based on the generation of feasible solutions by the fireworks method and the non-dominated sorting procedure. At the first stage, the optimization problem is solved for each of the criteria, and the values of the penalty parameters are selected to satisfy the terminal constraints. At the same time, well-known metaheuristic methods are used: grenade explosions, big bang-big crunch and fireworks. At the second stage, the found values of the parameters are used to formulate a multiobjective optimization problem, which is solved using the modification of the fireworks method proposed by the authors.

---

#### КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА

Многокритериальная оптимизация, метаэвристические методы, недоминируемая сортировка, оптимальность по Парето, теория оптимального управления.

## ДЛЯ ЦИТАТЫ

*А.В. Пантелеев, А.Ю. Крючков.* Разработка и применение многокритериального метода фейерверков в задаче стабилизации движения искусственного спутника по круговой орбите // Моделирование и анализ данных. 2019. №3. С. 43-57.

*A.V. Panteleev, A. Yu. Kryuchkov.* Development and application of multi-criteria method of fireworks in the task of stabilizing the motion of an artificial satellite in a circular orbit. Modelirovaniyeianaliz-dannykh=Modelling and data analysis (*Russia*).2019,no.3, pp. 43-57.

## ВВЕДЕНИЕ

В современном мире проектирование новых технических систем становится все более сложным. Требования к системам в различных областях растут, поэтому приходится учитывать множество различных факторов [14, 15]. Эти факторы могут отражать противоположные требования, которые приводят к конфликту целей. Важно найти компромисс между противоречащими друг другу требованиями. Как правило, для выбора оптимальных параметров формулируется задача оптимизации. Сравнение решений происходит на основе значений критериев, каждый критерий должен соответствовать определенному фактору и отражать степень влияния решения на этот фактор.

Для соблюдения компромисса между критериями под оптимальным решением понимается решение, оптимальное по Парето [5]. Нахождение таких решений может быть важным шагом как в дальнейшем процессе принятия решений, так и в получении всех возможных конфигураций какой-то системы, которые не позволяют улучшить значение по одному критерию без ухудшения значений по другим. Поэтому разработка новых эффективных методов для решения задач многокритериальной оптимизации является важным направлением исследований.

На данный момент продолжается разработка различных численных методов для решения задач многокритериальной оптимизации. Здесь можно выделить два направления развития: первое направление основано на аппроксимации оболочки Эджворта-Парето [1], а второе на аппроксимацию границы Парето [13, 16].

Появление новых численных методов [3, 8, 9] для решения многокритериальных задач и их программных реализаций позволяет рассматривать новые постановки задачи, которые раньше было сложно решать даже численно.

Например, в теории управления можно рассматривать задачи нахождения управления, которое минимизирует сразу несколько критериев. Одним из подходов к решению таких задач может быть составление свертки критериев. В этом случае могут существовать решения, оптимальные по Парето, которые невозможно найти (nonsupported solutions) [13]. Представляет интерес найти численное решение задачи без составления свертки критериев. Многокритериальная задач оптимального управления была рассмотрена в работе [4], но основывается на идеях из теории игр.

В статье рассматривается подход на основе аппроксимации границы Парето. Предлагается модификация метода фейерверков однокритериальной оптимизации [10], применимая для решения задач многокритериальной оптимизации. Метод относится к метаэвристическим алгоритмам, которые оказались эффективными при решении различных прикладных задач [12].

## 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим задачу об устойчивости стационарного движения спутника относительно оси, ортогональной к плоскости ее круговой орбиты [6]. Если пренебрегать гравитационными моментами по сравнению с управляющими моментами, то уравнения Эйлера заменяются следующими:

$$\begin{aligned}\dot{\omega}_x &= a \cdot \omega_z + u_1, \\ \dot{\omega}_z &= -a \cdot \omega_x + u_2, \\ \dot{\omega}_y &= u_3, \\ \omega_x(t_0) &= \omega_{x0}, \\ \omega_y(t_0) &= \omega_{y0}, \\ \omega_z(t_0) &= \omega_{z0},\end{aligned}$$

где  $\omega_x, \omega_y, \omega_z$  – угловые скорости вращения спутника,  $a = \omega_y (I_y - I) / I, I = I_x = I_z$ ,  $I_x$  – момент инерции относительно оси  $x$ ,  $I_y$  – момент инерции относительно оси  $y$ ,  $I_z$  – момент инерции относительно оси  $z$ . Управления  $u_1, u_2$  равны отношению соответствующего реактивного момента относительно оси  $Cx, Cz$  к моменту инерции  $I$ ,  $u_3$  – отношение реактивного момента относительно оси  $Cy$  к  $I_y$ ,  $Cx, Cy, Cz$  – оси, связанные с центром масс спутника,  $u_3$  считается равным нулю. Управление вращением осуществляется с помощью реактивных двигателей, поэтому на него наложены интервальные ограничения:  $-h_i \leq u_i \leq h_i, i = 1, 2$ .

Система примет следующий вид:

$$\begin{aligned}\dot{\omega}_x &= a \cdot \omega_z + u_1, & \omega_x(t_0) &= \omega_{x0}, \\ \dot{\omega}_z &= -a \cdot \omega_x + u_2, & \omega_z(t_0) &= \omega_{z0},\end{aligned}$$

где  $a = \text{const}$ ,  $t_0$  – момент начала процесса.

Управление ищется с целью минимизации двух критериев:

$$I_1 = \int_{t_0}^T [u_1^2(t) + u_2^2(t)] dt \rightarrow \min_{u_1 \in U_N^1, u_2 \in U_N^2}, \quad I_2 = \int_{t_0}^T [|u_1(t)| + |u_2(t)|] dt \rightarrow \min_{u_1 \in U_N^1, u_2 \in U_N^2},$$

где  $T$  – известное конечное время, множество допустимых управлений  $U_N^j = \left\{ \sum_{i=0}^N b_i \cdot \chi(t - t_i) : |b_i| \leq h_j, t_0 < t_1 < \dots < t_N \leq T \right\}, j = 1, 2$ ,  $t_0, t_1, \dots, t_N$  – моменты переключения,  $N$  – параметр, определяющий число промежутков знакопостоянства управления,  $\chi(\cdot)$  – функция Хевисайда. Конечные условия:  $\omega_x(T) = 0, \omega_z(T) = 0$ . Выбор множества допустимых управлений следует из анализа условий выполнения принципа максимума для заданной линейной динамической системы с ограниченным по модулю управлением. Минимизация критерия  $I_2$  соответствует задаче оптимизации расхода топлива [6].

Для нахождения управления, которое минимизирует два критерия одновременно необходимо сформулировать задачу многокритериальной оптимизации. Так как задача решается численно, а не аналитически, то предлагается следующий подход:

1. Модифицировать определения критериев для учета терминальных ограничений с помощью введения параметров штрафа  $\lambda_i > 0, i = 1, \dots, 4$ :

$$\begin{aligned}J_1 &= \int_{t_0}^T [u_1^2(t) + u_2^2(t)] dt + \lambda_1 \omega_x(T)^2 + \lambda_2 \omega_z(T)^2 \rightarrow \min_{u_1 \in U_N^1, u_2 \in U_N^2}, \\ J_2 &= \int_{t_0}^T [|u_1(t)| + |u_2(t)|] dt + \lambda_3 \omega_x(T)^2 + \lambda_4 \omega_z(T)^2 \rightarrow \min_{u_1 \in U_N^1, u_2 \in U_N^2}.\end{aligned}$$

2. Выбрать в качестве параметра, описывающего законы управления  $u_1(t)$ ,  $u_2(t)$ , число переключений управления  $N$ .

3. Найти значения параметров  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$  и управления  $u_1(t)$ ,  $u_2(t)$  с помощью численных методов однокритериальной оптимизации. При этом должно обеспечиваться выполнение конечных условий  $\omega_x(T) = 0, \omega_z(T) = 0$  с определенной точностью. Искомое решение кодируется в виде числового вектора  $x \in \mathbb{R}^{2N+4}$ : сначала кодируется управление  $u_1(t)$ , потом  $u_2(t)$ , а затем параметры штрафных функций  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ . Здесь используется допущение о том, что управление принимает постоянные значения на одинаковых по длине промежутках времени:

$$u_1 = \begin{cases} x_i, t \in [h \cdot (i-1); h \cdot i), \\ x_N, t \in [h \cdot (N-1); h \cdot N), \end{cases}$$

$$u_2 = \begin{cases} x_j, t \in [h \cdot (i-N-1); h \cdot (j-N)), \\ x_{2N}, t \in [h \cdot (N-1); h \cdot N), \end{cases}$$

где  $x_i \in [-h_1; h_1], i = 1, \dots, N, x_j \in [-h_2; h_2], j = N+1, \dots, 2N-1, h = T/N$ . Параметры штрафов  $\lambda_i, i = 1, \dots, 4$  составляют последние две компоненты вектора  $x$ :  $x_{2N+i} = \lambda_i, i = 1, 2$  для первого критерия,  $x_{2N+i} = \lambda_{i+2}, i = 1, 2$  для второго критерия. Задачи оптимизации имеют следующий вид:

$$J_1(x) \rightarrow \min_{x \in D}, \quad J_2(x) \rightarrow \min_{x \in D},$$

где  $D = \{x \in \mathbb{R}^{2N+2} \mid |x_i| \leq h_1, i = 1, \dots, N; |x_i| \leq h_2, i = N+1, \dots, 2N, a_1 \leq x_{2N+1} \leq b_1, a_2 \leq x_{2N+2} \leq b_2\}$ ;  $a_i, b_i, i = 1, 2$  – границы множества значений параметров штрафа.

4. После нахождения параметров штрафов для каждого критерия они фиксируются, и решается задача многокритериальной оптимизации:

$$J(x) = \begin{pmatrix} J_1(x) \\ J_2(x) \end{pmatrix} \rightarrow \min_{x \in D^1},$$

где  $D^1 = \{x \in \mathbb{R}^{2N} \mid |x_i| \leq h_1, i = 1, \dots, N; |x_i| \leq h_2, i = N+1, \dots, 2N\}$ .

Далее обозначим  $J(x) = F(x), J_1(x) = f_1(x), J_2(x) = f_2(x), D^1 = D$ .

## 2. СТРАТЕГИЯ ПОИСКА РЕШЕНИЯ

Исходная задача теории управления свелась к задаче многокритериальной оптимизации. Далее рассматривается алгоритм решения таких задач в общей постановке. Рассматривается задача многокритериальной оптимизации с параллелепипедными ограничениями. Предполагается, что все критерии имеют одинаковую важность и уменьшение значения одного критерия при фиксированных значениях остальных критериев более предпочтительно:

$$F(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_m(x) \end{pmatrix} \rightarrow \min_{x \in D},$$

где  $m \geq 2$  – число критериев,  $D = \{x \in \mathbb{R}^n \mid a_i \leq x_i \leq b_i, i = 1, \dots, n\}$ ,  $f_j : D \rightarrow \mathbb{R}, j = 1, \dots, m$ .

Требуется найти аппроксимацию множества допустимых решений, оптимальных по Парето. Для того чтобы дать определение решений, оптимальных по Парето, необходимо ввести несколько дополнительных определений.

**Определение 1.** Вектор  $F(x) \in \mathbb{R}^m : F(x) = (f_1(x), \dots, f_m(x))^T$  называется векторной оценкой решения  $x \in D$ .

**Определение 2.** Пусть  $F^1 = F(x^1), F^2 = F(x^2)$  – векторные оценки решений  $x^1 \in D, x^2 \in D$ . Оценка  $F^1$  доминирует  $F^2$  ( $F^1 \prec F^2$ ), если  $\forall i \in \{1, \dots, m\}, F_i^1 \leq F_i^2$  и  $\exists j \in \{1, \dots, m\} : F_j^1 < F_j^2$ .

**Определение 3.** Решение  $x_1 \in D$  предпочтительнее решения  $x_2 \in D : x_1 \prec x_2 \Leftrightarrow F(x_1) \prec F(x_2)$ .

**Определение 4.**  $P = \{x \in D \mid \nexists x' \in D : F(x') \prec F(x)\}$  является множеством решений, оптимальных по Парето.

**Определение 5.** Множество  $F(P) = \{F(x) \mid x \in P\}$  называется границей Парето.

Приближенным решением задачи будет конечное множество решений, в котором каждый элемент достаточно близко расположен к какому-то элементу из  $P$ .

Для решения задачи будет использоваться модификация метода фейерверков [10], основанного на имитации процесса, происходящий во время фейерверка (салюта). Фейерверк сопровождается облаком светящихся осколков, заполняющих окрестность взорвавшегося заряда. В задачах оптимизации этот процесс ассоциируется с процедурой локального поиска.

Каждый залп салюта определяет переход от одной итерации поиска к другой (от одного поколения решений к другому). Сначала для реализации первого залпа определяются  $NP$  точек (решений) в множестве допустимых решений. В этих точках происходит взрыв, генерирующий определенное количество осколков, разлетающихся от точек взрыва в окрестности некоторого радиуса, определяемого для каждой точки в отдельности.

Далее идет процесс формирования нового поколения решений. Проводится недоминируемая сортировка – ранжирование решений на основе их векторных оценок. Пусть  $I = \{x^p \mid x^p \in D, p = 1, \dots, NP\}$  – множество решений на текущей итерации. Результатом сортировки является разбиение множества  $I$  на  $k$  непересекающихся подмножеств  $Q_i, i = 1, \dots, k, 1 \leq k \leq NP$ , где  $k$  – номер последнего подмножества в разбиении:

$$\begin{aligned}
 I &= \bigcup_{i=1}^k Q_i, \quad Q_i \cap Q_j = \emptyset, \quad i \neq j, \\
 Q_1 &= \{x \in I \mid \nexists x' \in I : F(x') \prec F(x)\}, \\
 &\vdots \\
 Q_l &= \left\{ x \in I, \bigcup_{i=1}^{l-1} Q_i \mid \nexists x' \in I, \bigcup_{i=1}^{l-1} Q_i : F(x') \prec F(x) \right\}, \\
 &\vdots \\
 Q_k &= I, \bigcup_{i=1}^{k-1} Q_i.
 \end{aligned}$$

Другими словами, недоминируемая сортировка представляет собой повторяющуюся процедуру выделения предпочтительных решений. На первом шаге выбираются предпочтительные решения из  $I$ . Далее эти предпочтительные решения удаляются из  $I$ , и процедура повторяется к оставшейся части.

Среди решений, соответствующих точкам взрыва и полученным осколкам, выбираются решения с недоминируемыми векторными оценками (множество  $Q_1$ ). Остальные решения выбираются из оставшихся случайным образом с вероятностью, определяемой расстоянием в пространстве критериев до других точек (чем больше суммарное расстояние, тем больше вероятность выбора), либо выбираются решения из множеств  $Q_1, Q_2, \dots, Q_k$ , пока количество выбранных решений не будет равно  $NP$ . Если в каком-то подмножестве решений больше, чем необходимо взять, то часть решений выбирается случайным образом на основе расстояний до других решений в пространстве критериев.

Процесс поиска завершается при достижении заданного числа итераций.

В работе [11] был предложен алгоритм недоминируемой сортировки, имеющий сложность  $O(n \log^{m-1} n)$ , где  $n$  – число возможных решений на текущей итерации, а  $m$  – число критериев. Позже в [7] была предложена модификация алгоритма с такой же оценкой сложности, но в худшем случае.

### 3. АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ

Далее описаны шаги работы модифицированного метода «фейерверков».

**Шаг 1.** Задать параметры метода: число зарядов на каждой итерации  $NP \in \mathbb{N}$ ; параметр  $m > 0$ , контролирующий число осколков;  $s_{\min}, s_{\max} \in \mathbb{N}, s_{\min} \leq s_{\max}$  – минимальное и максимальное число осколков для каждого заряда; максимальная амплитуда взрыва  $A_{\max} > 0$ ; максимальное число итераций  $Iter_{\max} \in \mathbb{N}$ .

**Шаг 2.** Положить  $iter = 1$  (счетчик числа итераций). Генерировать  $NP$  решений на множестве допустимых решения  $D$ ,  $I^{iter} = \{x^{1,1}, \dots, x^{NP,1}\}$ :

$$x_i^{p,1} = a_i + Urand(0;1) \cdot (b_i - a_i),$$

где  $i = 1, \dots, n, p = 1, \dots, NP, Urand(0;1)$  – случайная величина, имеющая равномерное распределение на отрезке  $[0;1]$ .

**Шаг 3.** Провести недоминируемую сортировку множества  $I^{iter}$ . Оно разбивается на  $1 \leq l \leq |I^{iter}|$  подмножеств  $Q_i$ :  $I^{iter} = \bigcup_{i=1}^l Q_i$ .

**Шаг 4.** Процедура взрыва и генерации осколков.

**Шаг 4.1.** Для всех  $p = 1, \dots, NP$  вычислить:

1. Номер подмножества  $q$ :  $x^{p,iter} \in Q_q, 1 \leq q \leq l$ .

2. Число осколков:

$$s^{p,iter} = m \cdot \log_2 \left( 1 + \frac{l}{q} \right) \cdot \left( 1 - \frac{|Q_q|}{NP} \right), \quad \hat{s}^{p,iter} = \begin{cases} s_{\min}, & [s^{p,iter}] \leq s_{\min}, \\ s_{\max}, & [s^{p,iter}] \geq s_{\max}, \\ [s^{p,iter}], & \text{в остальных случаях,} \end{cases}$$

где  $l$  – номер последнего подмножества в разбиении,  $\hat{s}^{p,iter}$  – количество осколков, порождаемых взрывом в точке  $x^{p,iter}$ .

**Шаг 4.2.** Определение положения осколков. Для каждого  $p = 1, \dots, NP$  найти положения осколков с номерами  $s = 1, \dots, \hat{s}^{p,iter}$ :

1. Найти  $q$ :  $x^{p,iter} \in Q_q, 1 \leq q \leq l$ .

2. Положить  $\tilde{x}^{p,iter,s} = x^{p,iter}$ .

3. Для каждого номера осколка  $s$ :

3.1. Положить  $\xi = Urand(0;1)$ .

3.2. Найти число исследуемых координатных направлений:  $\hat{n} = [n \cdot \xi]$ , где  $[\cdot]$  – целая часть числа.

4. Если сгенерированная случайная величина  $\xi < 0,5$ , то применить первый способ определения положения осколков:

4.1. Выбрать случайным образом  $\hat{n}$  координат для каждого номера осколка  $s$ .

4.2. Вычислить амплитуду (радиус) взрыва для всех  $p = 1, \dots, NP$ :

$$A^{p,iter} = A_{\max} \cdot \log_2 \left( 1 + \frac{q}{l} \right) \cdot \frac{|Q_q|}{NP}.$$

4.3. Для каждого выбранного номера  $i$  из  $\hat{n}$  координат вектора  $\tilde{x}^{p,iter,s}$  и номера осколка  $s$  вычислить приращение:

$$h_i^s = A^{p,iter} \cdot Urand(-1;1),$$

$$\tilde{x}_i^{p,iter,s} = x_i^{p,iter} + h_i^s.$$

5. Если сгенерированная случайная величина  $\xi \geq 0,5$ , то применить второй способ определения положения осколков:

5.1. Выбрать случайным образом  $\hat{n}$  координат для каждого номера осколка  $s$ .

5.2. Для каждого выбранного номера  $i$  из  $\hat{n}$  координат вектора  $\tilde{x}^{p,iter,s}$  и номера осколка  $s$  вычислить приращение:

$$\tilde{x}_i^{p,iter,s} = x_i^{p,iter} \cdot Nrand(1;1),$$

где  $Nrand(1;1)$  – случайная величина, имеющая нормальное распределение с математическим ожиданием, равным 1, и дисперсией, равной 1.

**Шаг 4.3.** Проверка выхода за границу множества допустимых решений  $D$ .

1. Для каждого  $p = 1, \dots, NP$  проверить:

1.1. Для каждого  $s = 1, \dots, \hat{s}^{p,iter}$  проверить:

$$\text{Если } \tilde{x}_i^{p,iter,s} \notin [a_i; b_i], \text{ то } \tilde{x}_i^{p,iter,s} = \begin{cases} Urand(a_i; 0,5 \cdot (a_i + b_i)), & \tilde{x}_i^{p,iter,s} < a_i, \\ Urand(0,5 \cdot (a_i + b_i); b_i), & \tilde{x}_i^{p,iter,s} > b_i, \end{cases}$$

где  $i = 1, \dots, n$ .

1.2. Добавить  $\tilde{x}_i^{p,iter,s}$  к  $I^{iter} : I^{iter} = I^{iter} \cup \{\tilde{x}_i^{p,iter,s}\}$ .

**Шаг 5.** Создание новых решений.

**Шаг 5.1.** Провести недоминируемую сортировку  $I^{iter} = \bigcup_{i=1}^l Q_i$ ,  $l$  – номер последнего подмножества в разбиении  $I^{iter}$ . Увеличить счетчик числа итераций:  $iter = iter + 1$ ,  $I^{iter} = \emptyset$ .

**Шаг 5.2.** Найти  $u_{\min} : u_{\min} = \min_{1 \leq u \leq l} \left\{ u : \left| \bigcup_{i=1}^u Q_i \right| \geq NP \right\}$ .

Если  $\left| \bigcup_{i=1}^{u_{\min}} Q_i \right| = NP$ , то  $I^{iter} = \bigcup_{i=1}^{u_{\min}} Q_i$ ,  $P = \emptyset$ , иначе  $I^{iter} = \bigcup_{i=1}^{u_{\min}-1} Q_i$ ,  $P = Q_{u_{\min}}$ .

**Шаг 5.5.** Если  $P \neq \emptyset$ , то для каждой точки  $x^w \in P$  подсчитать  $R(x^w)$  – сумму расстояний до остальных точек,  $p(x^w)$  – вероятность взрыва:

$$R(x^w) = \sum_{x^b \in P} \rho(F(x^w), F(x^b)), \quad p(x^w) = \frac{R(x^w)}{\sum_{x^b \in P} R(x^b)},$$

где  $\rho(x, y)$  – евклидово расстояние между векторами  $x, y \in \mathbb{R}^n$ .

**Шаг 5.6.** Используя вероятность  $p(x^w)$ , случайным образом выбрать из множеств  $P$  множество точек (решений) в количестве  $NP - |I^{iter}|$  и добавить их в множество  $I^{iter}$ .

**Шаг 5.7.** Если  $iter \leq Iter_{max}$ , то перейти к шагу 3. Иначе в качестве приближенного решения взять  $I^{iter}$ .

#### 4. ЧИСЛЕННЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ

Параметры математической модели:

$t_0 = 0, \omega_x(0) = 0,5, \omega_z(0) = 1, a = 0, 00007292123518 \cdot \sqrt{3}, T = 1,5, h_1 = 10, h_2 = 10, a_1 = a_2 = 100,$

$b_1 = b_2 = 50000$ . Сначала задача была решена отдельно 10 раз для каждого критерия при  $N = 10$  с помощью трех методов: «большого взрыва-большого сжатия», «фейерверков», «взрыва гранат» [2]. По результатам решения были выбраны значения параметров штрафов  $\lambda_i, i = 1, \dots, 4$ . Пять наилучших результатов решения по значению критериев приведены в табл. 0, **Ошибка! Источник ссылки не найден.**, 0.

Результаты решения для задачи оптимизации критерия  $J_1$ .

**Таблица 1. Параметры для метода «большого взрыва-большого сжатия»**

$Iter_{max}$	$NP$	$\alpha$	$\beta$
500	900	0,4	0,5
400	300	0,2	0,1
1000	200	0,5	0,5
400	300	0,5	0,9
600	200	0,5	0,5

**Таблица 2. Результат решения методом «большого взрыва-большого сжатия»**

$J_1$	$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\omega_x(T)$	$\omega_z(T)$
8,3225E-01	7,0235E+03	3,6154E+02	-5,6318E-05	1,5652E-03
8,3265E-01	1,0367E+02	2,4607E+04	3,6409E-03	4,6027E-07
8,3266E-01	1,0000E+02	4,3773E+04	3,0450E-03	5,3619E-05
8,3303E-01	1,0000E+02	4,1237E+04	4,0956E-03	-2,2131E-05
8,3372E-01	3,7777E+04	1,2980E+03	-1,9639E-05	6,8706E-04

**Таблица 3. Параметры для метода «фейерверков»**

$Iter_{max}$	$NP$	$\alpha$	$\beta$	$A_{max}$	$m$
150	20	0,31	0,94	2	32
130	30	0,30	0,91	9	33
300	100	0,32	0,65	2,5	31
200	200	0,25	0,75	0,9	40
900	60	0,20	0,60	1	50



**Таблица 4. Результат решения методом «фейерверков»**

$J_1$	$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\omega_x(T)$	$\omega_z(T)$
8,6922E-01	1,4126E+02	1,5356E+02	-3,7524E-02	2,3628E-02
9,1172E-01	1,0768E+02	2,3702E+02	1,2666E-02	-2,1778E-02
9,1584E-01	2,3659E+02	8,5597E+03	-1,3250E-02	-7,4596E-04
1,0798E+00	3,3007E+02	1,2880E+02	-1,3281E-02	1,9269E-02
1,3799E+00	1,4160E+04	1,7089E+03	2,8006E-03	-1,1412E-03

**Таблица 5. Параметры для метода «взрыва гранат»**

$Iter_{max}$	$N_g$	$N_q$	$R_{t-initial}$	$m_{min}$	$m_{max}$	$P_{sin}$	$P_{TS}$	$R_{rd}$
600	2	100	3,3166247903554	0,1	0,9	5	0,8	200
500	1	100	9,38083151964686	0,1	0,9	5	0,8	150
900	2	50	3,3166247903554	0,1	0,9	5	0,8	150
250	2	50	3,3166247903554	0,1	0,9	5	0,8	10
500	1	100	9,38083151964686	0,1	0,9	5	0,8	10

**Таблица 6. Результат решения методом «взрыва гранат»**

$J_1$	$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\omega_x(T)$	$\omega_z(T)$
8,3171E-01	6,6158E+03	1,0000E+02	4,3551E-05	6,5883E-03
8,3173E-01	6,1231E+03	1,0003E+02	7,8882E-05	7,2206E-03
8,3614E-01	1,6241E+02	3,4727E+03	2,6880E-03	1,8520E-04
8,3732E-01	6,6917E+03	1,0030E+02	1,8416E-04	9,7681E-03
8,3786E-01	8,4896E+03	1,0014E+02	1,0110E-04	6,8511E-03

Результаты решения задачи оптимизации критерия  $J_2$  приведены в табл. 0–9. Параметры методов такие же, как и для первого критерия.

**Таблица 7. Результат решения методом «большого взрыва-большого сжатия»**

$J_2$	$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\omega_x(T)$	$\omega_z(T)$
1,4824E+00	2,8955E+04	1,0000E+02	2,0993E-05	5,2831E-03
1,4898E+00	1,0000E+02	2,9430E+03	5,7883E-03	1,3434E-04
1,4981E+00	1,0427E+02	1,0000E+02	5,4160E-03	5,3007E-03
1,4995E+00	1,1092E+03	5,2595E+02	7,4190E-05	6,9520E-05
1,4998E+00	1,0000E+02	1,0000E+02	5,6356E-03	5,1495E-03

**Таблица 8. Результат решения методом «фейерверков»**

$J_2$	$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\omega_x(T)$	$\omega_z(T)$
1,4574E+00	1,1553E+02	2,9858E+02	3,1319E-03	1,8813E-03
1,5140E+00	2,3681E+02	2,7550E+03	8,3000E-04	-1,4398E-03
1,5246E+00	1,6537E+03	2,4593E+02	2,3205E-04	8,9217E-03
1,5328E+00	4,9613E+04	6,2813E+02	1,5197E-04	-1,2262E-03
1,5409E+00	1,8570E+04	6,6686E+03	4,4783E-04	-1,0467E-03

Таблица 9. Результат решения методом «взрыва гранат»

$J_2$	$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\omega_x(T)$	$\omega_z(T)$
1,4893E+00	1,1459E+02	4,6065E+03	3,8559E-03	1,4278E-04
1,5092E+00	1,0002E+02	5,2854E+03	5,0449E-03	9,9260E-05
1,7387E+00	5,9148E+02	7,7513E+03	9,6819E-04	2,2912E-04
1,7487E+00	6,8401E+02	7,3797E+03	8,4178E-04	2,6503E-04
1,7895E+00	5,6953E+03	7,8550E+02	-1,3422E-04	4,1820E-04

По результатам решения для критерия  $J_1$  были выбраны следующие параметры штрафов:  $\bar{\lambda}_1 = 2432,68352872262$ ,  $\bar{\lambda}_2 = 30435,8281212343$ . Для критерия  $J_2$ :  $\bar{\lambda}_3 = 1109,19969907866$ ,  $\bar{\lambda}_4 = 525,950390067471$ .

Значения управления представлены в таблице 0. Время  $t$  обозначает левую границу полуинтервала  $[h \cdot (i-1); h \cdot i)$ ,  $h = T / N$ ,  $i = 1, \dots, N-1$  и отрезка  $[h \cdot (N-1); h \cdot T]$ , на котором управление принимает постоянное значение.

Таблица 10. Значения управления для критерия  $J_1$ 

$t$	$u_1$	$u_2$
0,00	-0,315795867831327	-0,667551772357002
0,14	-0,347384665736553	-0,698030202307178
0,27	-0,333472381165657	-0,649465549307917
0,41	-0,302877980090241	-0,622076668602682
0,55	-0,357874406218113	-0,656067490313982
0,68	-0,356851105891396	-0,672022507698742
0,82	-0,337891330744718	-0,650119960382363
0,95	-0,355272152878461	-0,669057200816244
1,09	-0,314741674410461	-0,647108193150537
1,23	-0,310340410526755	-0,730173958249525

Таблица 11. Значения управления для критерия  $J_2$ 

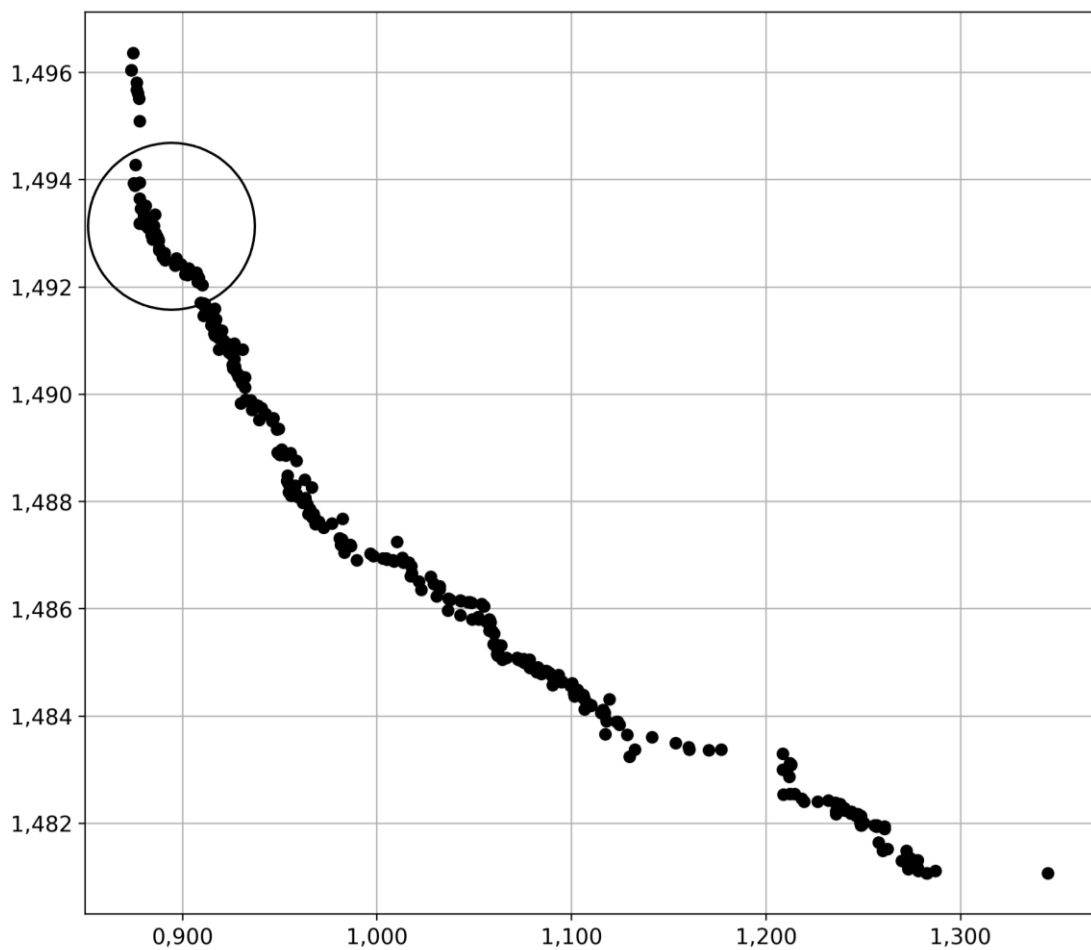
$t$	$u_1$	$u_2$
0,00	-0,578206372881966	-0,00241566231274039
0,14	-0,175153094139935	-0,0209622089868902
0,27	-0,0917709421697187	-0,153505708124111
0,41	-0,0785982502511476	-0,00282732473422981
0,55	-0,509755144150984	-2,39778400416888
0,68	-0,538402242156696	-0,0360743403068624
0,82	-0,285214859126735	-0,00100635198195707
0,95	-0,362993060968003	-0,033422127779118
1,09	-0,426165977332734	-3,94010046975938
1,23	-0,285078289881728	-0,071413664305942

Для решения многокритериальной задачи были выбраны следующие параметры, которые представлены в табл. 0.

**Таблица 12. Параметры для модифицированного метода «фейерверков»**

$Iter_{max}$	$NP$	$s_{min}$	$s_{max}$	$A_{max}$	$m$
2000	100	2	5	20	5
500	250	4	5	20	15
500	250	3	10	30	10
300	400	2	5	20	10
1000	350	0,5	10	20	5

Для каждого набора параметров задача решалась 10 раз. На рис. изображена приближённая граница Парето (на горизонтальной оси представлены значения модифицированного критерия  $J_1$ , на вертикальной оси значения модифицированного критерия  $J_2$ ).

**Рисунок 1. Приближённая граница Парето.**

В табл. 0 представлены значения критериев для найденных решений и состояния системы в конечный момент времени, соответствующие выделенной области на рис. выше.

**Таблица 13. Значения критериев и конечные состояния**

$J_1$	$J_2$	$\omega_x(T)$	$\omega_z(T)$
8,77961E-01	1,49395E+00	7,01232E-05	-5,54943E-05
8,78504E-01	1,49346E+00	-3,71983E-05	3,06117E-04
8,79660E-01	1,49343E+00	7,75859E-05	2,03039E-05

8,79725E-01	1,49343E+00	7,75531E-05	1,08797E-05
8,80112E-01	1,49335E+00	5,54851E-04	3,88280E-06
8,80991E-01	1,49331E+00	6,86856E-04	1,17572E-04
8,81000E-01	1,49352E+00	9,16741E-04	2,01850E-05
8,81217E-01	1,49327E+00	7,76348E-04	2,10140E-04
0,881365660	1,49315E+00	1,41683E-04	3,05835E-04

В табл. А приложения представлены значения управления. Пустые строки в таблице отделяют значения управления для разных решений.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В статье предложена идея численного решения многокритериальных задач нахождения программного управления. Рассмотрена задача стабилизации спутника, в которой управление в силу линейности системы искалось в классе кусочно-постоянных функций. Исходная задача сведена к задаче параметрической оптимизации, в которой решением являлся вектор из действительных чисел.

Для решения многокритериальной задачи нахождения управления была сформирована новая задача с модифицированными исходными критериями, в которые добавлены штрафные функции, параметры которых найдены при решении оптимизационных задач для каждого критерия. Предложен алгоритм решения многокритериальных задач оптимизации. Алгоритм является численным и не гарантирует нахождения точного решения. Из-за этого найденное управление является лишь субоптимальным. В прикладных задачах, где нахождение точного аналитического решения невозможно, найденные решения могут считаться приемлемыми в зависимости от требований к системе.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Березкин В.Е., Лотов А.В., Лотова Е.А. Изучение гибридных методов аппроксимации оболочки Эджворта–Парето в нелинейных задачах многокритериальной оптимизации // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2014. № 6 (54). С. 905–918. doi: 10.7868/S0044466914060039
2. Пантелеев А.В., Крючков А.Ю. Метаэвристические методы оптимизации в задачах оценки параметров динамических систем // Научный вестник МГТУ ГА. 2017. № 20(2). С. 37-45. doi: 10.26467/2079-0619-2017-20-2-37-45
3. Евтушенко Ю.Г., Посыпкин М.А. Метод неравномерных покрытий для решения задач многокритериальной оптимизации с гарантированной точностью // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2013. № 2 (53). С. 144–157. doi: 10.7868/S0044466913020087
4. Прасад У.К., Сарма И.Д. Многокритериальные задачи оптимального управления: игровое кооперативное решение по Нэш-Харсани // Автомат. и телемех. 1975. № 6 (36). С. 95–105.
5. Подиновский В.В., Ногин В.Д. Парето-оптимальные решения многокритериальных задач. Москва: Наука, 1982. 256 с.
6. Бабаджанянц Л.К., Потоцкая И.Ю. Управление по критерию расхода в механических системах, Санкт - Петербург., 2003. 137 с.
7. Buzdalov M., Shalyto A. A Provably Asymptotically Fast Version of the Generalized Jensen Algorithm for Non-dominated Sorting // Parallel Problem Solving from Nature - PPSN XIII: 13th International Conference, Ljubljana, Slovenia, September 13-17, 2014. Proceedings, Cham: Springer International Publishing, 2014, pp. 528–537. doi: 10.1007/978-3-319-10762-2\_52

8. Deb K., Jain H. An Evolutionary Many-Objective Optimization Algorithm Using Reference-Point-Based Nondominated Sorting Approach, Part I: Solving Problems With Box Constraints // IEEE Transactions on Evolutionary Computation. 2014. № 4 (18). С. 577–601. doi: 10.1109/TEVC.2013.2281535
9. Jamwal P.K., Abdikenov B., Hussain S. Evolutionary Optimization Using Equitable Fuzzy Sorting Genetic Algorithm (EFSGA) // IEEE Access. 2019. (7). С. 8111–8126. doi: 10.1109/TEVC.2013.2281535
10. Tan Y., Zhu Y. Fireworks Algorithm for Optimization, Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2010, pp. 355–364. doi: 10.1007/978-3-642-13495-1\_44.
11. Fortin F.-A., Grenier S., Parizeau M. Generalizing the improved run-time complexity algorithm for non-dominated sorting // Proc. 15th Annu. Conf. Genet. Evol. Comput. 2013, pp. 615–622. doi: 10.1145/2463372.2463454
12. Glover F., Kochenberger G.A. (eds.). Handbook of Metaheuristics. Boston, MA: Kluwer Academic Publishers, 2003.
13. Talbi E.G. Metaheuristics: From Design to Implementation / E.G. Talbi, Hoboken: John Wiley & Sons, Inc., 2009.
14. Arias-Montano, Alfredo, A. Coello Coello, Carlos Mezura-Montes, Efrén. Multiobjective Evolutionary Algorithms in Aeronautical and Aerospace Engineering// IEEE Transactions on Evolutionary Computation, 2012,16, pp. 662-694. doi: 10.1109/TEVC.2011.2169968.
15. Rangaiah G.P. Multi-Objective Optimization. G.P. Rangaiah, 2nd-e., World Scientific, 2017. doi: 10.1142/10240

*Работа поступила 07.02.2019г.*

**ПРИЛОЖЕНИЕ****Таблица А Значения управления**

$t$	$u_1$	$u_2$
0	-0,116777347135913	-0,64347424219014
0,14	-0,763617264589562	-0,924913911885555
0,27	-0,475265214053838	-0,604500308734183
0,41	-0,0635808250046609	-0,192259516652091
0,55	-0,257031484385978	-0,747997377267124
0,68	-0,309989069088767	-0,910863469252059
0,82	-0,351933643558613	-0,480523492048333
0,95	-0,439683710430459	-0,712860197215246
1,09	-0,257307152431782	-0,584814027259812
1,23	-0,264430406971226	-0,828064423016133
0	-0,119704571482957	-0,574790335007096
0,14	-0,770290780522579	-0,924913911885555
0,27	-0,56846822915606	-0,624939187611926
0,41	-0,0635808250046609	-0,329524813014482
0,55	-0,27072386551977	-0,714692368782115
0,68	-0,329657358014621	-0,838250027220922
0,82	-0,270949745630636	-0,513334067697749
0,95	-0,445235635011104	-0,691850752661164
1,09	-0,19367157564399	-0,584814027259812
1,23	-0,267874925510781	-0,838460166257422
0	-0,133042736709025	-0,659080612591865
0,14	-0,743598828077231	-0,770166081918147
0,27	-0,510638346595172	-0,620849225849534
0,41	-0,0780825325071861	-0,248860379155827
0,55	-0,257031484385978	-0,721354149373302
0,68	-0,320909142176579	-0,889319867153305
0,82	-0,269094876545157	-0,572096518945298
0,95	-0,423745136800312	-0,697473245482482
1,09	-0,254521150569836	-0,611254959704191
1,23	-0,310007723684112	-0,84818152931034
0	-0,0167364378807819	-0,589990687568241
0,14	-0,877047601646155	-1,125381797534
0,27	-0,532540596891435	-0,363244404015854
0,41	-0,0147319916158053	-0,0201110681920746
0,55	-0,319366423825968	-0,899407927064835
0,68	-0,223851280433262	-0,940570742928454
0,82	-0,191213818915751	-0,471429998931931
0,95	-0,543580473194273	-0,828452270887579
1,09	-0,182132217994879	-0,474858954631752
1,23	-0,38694037591476	-0,897270178594986
0	-0,00197237752998104	-0,7075081129184
0,14	-0,89380927717082	-1,24841197105909
0,27	-0,61905869949184	-0,250128158828336
0,41	-0,0111704748869217	-0,00638511107124473



$t$	$u_1$	$u_2$
0,55	-0,200499865408784	-0,755305946313305
0,68	-0,335161428607905	-0,973828048811906
0,82	-0,16050476708821	-0,41455839088386
0,95	-0,473400797386018	-0,760354188218232
1,09	-0,182363259378794	-0,572378325653548
1,23	-0,407184233997685	-0,919143555927196
0	-0,0167364378807819	-0,592249992039861
0,14	-0,877047601646155	-1,09126558599171
0,27	-0,51902923667774	-0,363244404015854
0,41	-0,0147319916158053	-0,0201110681920746
0,55	-0,319366423825968	-0,899407927064835
0,68	-0,223851280433262	-0,940570742928454
0,82	-0,191213818915751	-0,51313158707544
0,95	-0,543580473194273	-0,870040674903245
1,09	-0,181811174696301	-0,474858954631752
1,23	-0,39976788737068	-0,850316770216569
0	-0,0167364378807819	-0,589990687568241
0,14	-0,877047601646155	-1,12915215999761
0,27	-0,532540596891435	-0,363244404015854
0,41	-0,0147319916158053	-0,0201110681920746
0,55	-0,319366423825968	-0,899407927064835
0,68	-0,223851280433262	-0,940570742928454
0,82	-0,191213818915751	-0,471429998931931
0,95	-0,543580473194273	-0,828452270887579
1,09	-0,182132217994879	-0,474858954631752
1,23	-0,38694037591476	-0,89277440699825
0	-0,0276335898975985	-0,604294141884208
0,14	-0,980673602818751	-1,17219307984364
0,27	-0,540184583796175	-0,370319194242069
0,41	-0,0147319916158053	-0,0201110681920746
0,55	-0,348139900574337	-0,897288499248298
0,68	-0,230216347483512	-0,90399996243435
0,82	-0,0899981023980858	-0,471449100500253
0,95	-0,533639100234947	-0,847934671919879
1,09	-0,223703858685371	-0,515553981399353
1,23	-0,297102511998559	-0,808170239639153
0	-0,0211381334070979	-0,699336598051957
0,14	-1,08541234625744	-1,48432195326865
0,27	-0,633374143707881	-0,168759931865482
0,41	-0,0107745046404701	-0,00432412095745466
0,55	-0,210929764017602	-0,875244962912363
0,68	-0,273140659684813	-0,988887737014331
0,82	-0,0927426488397662	-0,15930198069882
0,95	-0,482563124537189	-0,829088649444176
1,09	-0,175683688692378	-0,52013066002091
1,23	-0,296023244342393	-0,868804849766737