

О визуализации решений некоторых экстремальных задач

Куланин Е.Д.*

Московский государственный психолого-педагогический университет
(ФГБОУ ВО МГППУ), г. Москва, Российская Федерация
ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-6093-7012>
e-mail: lucas03@mail.ru

Степанов М.Е.**

Московский государственный психолого-педагогический университет
(ФГБОУ ВО МГППУ), г. Москва, Российская Федерация
ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-4803-8211>
e-mail: mestepanov@yandex.ru

В статье обсуждается задача нахождения прямой на плоскости, сумма квадратов расстояний до которой от n данных точек этой плоскости будет наименьшей. Показывается, как свести эту задачу к решению аналогичной задачи для трех точек, решением которой служит прямая, содержащая большую ось эллипса Штейнера треугольника с вершинами в этих точках. Высказывается также гипотеза о связи рассматриваемой тематики с задачей об областях притяжения в теории фракталов.

Ключевые слова: визуализация, экстремальные задачи, сумма квадратов расстояний, комплексная плоскость, многочлен, производная многочлена, среднее арифметическое корней, центр тяжести корней, эллипс Штейнера, минимальная прямая, главная компонента, фрактал.

Для цитаты:

Куланин Е.Д., Степанов М.Е. О визуализации решений некоторых экстремальных задач // Моделирование и анализ данных. 2022. Том 12. № 4. С. 94–104. DOI: <https://doi.org/10.17759/mda.2022120407>

***Куланин Евгений Дмитриевич**, кандидат физико-математических наук, профессор, Московский государственный психолого-педагогический университет (ФГБОУ ВО МГППУ), г. Москва, Российская Федерация, ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-6093-7012>, e-mail: lucas03@mail.ru

****Степанов Михаил Евграфович**, кандидат педагогических наук, доцент, Московский государственный психолого-педагогический университет (ФГБОУ ВО МГППУ), г. Москва, Российская Федерация, ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-4803-8211>, e-mail: mestepanov@yandex.ru



1. ВВЕДЕНИЕ

Настоящей заметкой мы продолжаем серию статей [1]-[4], посвященных решению экстремальных задач.

2. ЗАДАЧА О НАХОЖДЕНИИ МИНИМАЛЬНОЙ ПРЯМОЙ

Рассмотрим сначала известную задачу нахождения прямой на плоскости, сумма квадратов расстояний до которой от n данных точек этой плоскости будет наименьшей, следуя в основном изложению в [5]. Эта прямая имеет следующий механический смысл: если поместить в данные точки одинаковые массы, то она совпадет с осью, относительно которой полученная система масс имеет наименьший момент инерции.

Пусть z_1, z_2, \dots, z_n – комплексные числа, соответствующие данным n точкам на комплексной плоскости. Составим многочлен $P(z) = (z - z_1)(z - z_2) \dots (z - z_n)$, корнями которого являются числа z_1, z_2, \dots, z_n . После раскрытия скобок получим $P(z) = z^n - c_1 z^{n-1} + c_2 z^{n-2} - \dots + (-1)^n c_n$, где $c_1 = z_1 + z_2 + \dots + z_n$, $c_2 = z_1 z_2 + z_1 z_3 + \dots + z_{n-1} z_n$, $c_n = (-1)^n z_1 z_2 \dots z_n$.

Среднее арифметическое корней многочлена обозначим через g :

$$g = (z_1 + z_2 + \dots + z_n)/n, \text{ откуда } c_1 = z_1 + z_2 + \dots + z_n = ng \quad (1)$$

и найдем среднее арифметическое корней производной многочлена $P(z)$: $P'(z) = nz^{n-1} - (n-1)c_1 z^{n-2} + \dots + (-1)^{n-1} c_{n-1}$.

По теореме Виета сумма корней многочлена $P'(z)$ равна $(n-1)c_1/n = (n-1)ng/n = (n-1)g$, т.е. среднее арифметическое корней z'_1, z'_2, \dots, z'_n многочлена $P'(z)$ равно $(z'_1 + z'_2 + \dots + z'_n)/(n-1)$ и, таким образом, средние арифметические корней многочлена $P(z)$ и его производной $P'(z)$ совпадают.

Если поместить в данные точки одинаковые массы, то можно сказать, что центры тяжести корней многочлена $P(z)$ и его производной $P'(z)$ совпадают.

Понятно, что число g будет единственным корнем $(n-1)$ -ой производной многочлена $P(z)$. Действительно, $P^{(n-1)}(z) = n(n-1) \dots 2z - c_1(n-1)(n-2) \dots 2 = 0$, откуда после сокращения на $(n-1)! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (n-1)$ получим $nz - c_1 = 0$, $z = c_1/n = g$. Обозначим через u и v корни многочлена $P^{(n-2)}(z)$, т.е. корни уравнения $n(n-1)z^2 - 2(n-1)c_1 z + 2c_2 = 0$. Тогда по теореме Виета

$$u + v = 2(n-1)c_1 / (n(n-1)) = 2c_1/n = 2g, \quad (2)$$

$uv = 2c_2 / (n(n-1)) = 2(z_1 z_2 + z_2 z_3 + \dots + z_{n-1} z_n) / (n(n-1))$, откуда

$$z_1 z_2 + z_2 z_3 + \dots + z_{n-1} z_n = n(n-1)uv/2. \quad (3)$$

Выразим сумму квадратов корней многочлена $P(z)$ через корни u и v $(n-2)$ -ой производной этого многочлена: $(z_1 + z_2 + \dots + z_n)^2 = (z_1^2 + z_2^2 + \dots + z_n^2) + 2(z_1 z_2 + z_2 z_3 + \dots + z_{n-1} z_n)$, откуда, учитывая (1) и (3), получим $z_1^2 + z_2^2 + \dots + z_n^2 = (z_1 + z_2 + \dots + z_n)^2 -$

$2(z_1 z_2 + z_2 z_3 + \dots + z_{n-1} z_n) = n^2 g^2 - n(n-1)uv$. Отсюда легко найти сумму квадратов $(z_1 - g)^2 + (z_2 - g)^2 + \dots + (z_n - g)^2 = z_1^2 + z_2^2 + \dots + z_n^2 - 2g(z_1 + z_2 + \dots + z_n) + ng^2 = n^2 g^2 - n(n-1)uv - 2g \cdot ng + ng^2 = ng^2(n-1) - n(n-1)uv = n(n-1)(g^2 - uv)$.

Поскольку $g = (u + v)/2$ (см.(2)), то $g^2 - uv = ((u + v)/2) - uv = (u^2 + v^2 - 2uv)/4 = (u - v)^2 / 4$, т.е. $n(n-1)(g^2 - uv) = n(n-1)(u - v)^2 / 4$ и $(z_1 - g)^2 + (z_2 - g)^2 + \dots + (z_n - g)^2 = n(n-1)(u - v)^2 / 4$.

Обозначим через $(x_k : y_k)$ координаты комплексного числа $z_k - g$ ($k = 1, 2, \dots, n$) в декартовой системе координат, начало которой совпадает с точкой g , а ось абсцисс проходит через точки u и v (рис.1). Тогда при делении $z_k - g$ на $x_k + iy_k$ из аргумента комплексного числа $z_k - g$ будет вычитаться угол, образуемый вектором $z_k - g$ с осью uv (рис.1), поэтому аргументы чисел $(z_k - g)/(x_k + iy_k)$ равны аргументу числа $v - u$.

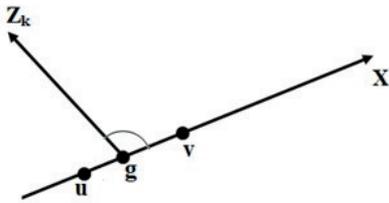


Рис. 1.

Учитывая, что $|z_k - g| = |x_k + iy_k|$, получим: $(z_k - g)/(x_k + iy_k) = \dots = (z_k - g)/(x_k + iy_k) = (v - u)/(2c)$, $2c = |v - u|$, откуда $(x_k + iy_k)^2 = 4c^2 (z_k - g)^2 / (u - v)^2$, $k = 1, 2, \dots, n$ и $(x_1 + iy_1)^2 + \dots + (x_n + iy_n)^2 = 4c^2 / (u - v)^2 ((z_1 - g)^2 + (z_2 - g)^2 + \dots + (z_n - g)^2) = (4c^2 / (u - v)^2) n(n-1) (u - v)^2 / 4 = n(n-1)c^2$.

Итак,

$$(x_1 + iy_1)^2 + \dots + (x_n + iy_n)^2 = n(n-1)c^2.$$

Раскрыв скобки в левой части равенства (3), получим:

$x_1^2 - y_1^2 + \dots + x_n^2 - y_n^2 + 2i(x_1 y_1 + \dots + x_n y_n) = n(n-1)c^2$, а выражение $n(n-1)c^2$ является действительным числом, то

$$x_1^2 - y_1^2 + \dots + x_n^2 - y_n^2 = n(n-1)c^2, x_1 y_1 + \dots + x_n y_n = 0. \quad (4)$$

Учитывая то, что мы приняли g за начало новой системы координат, имеем:

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = 0, y_1 + y_2 + \dots + y_n = 0. \quad (5)$$

Пусть $x \cos \alpha + y \sin \alpha - p = 0$ – нормальное уравнение искомой минимальной прямой, где α – угол между нормалью к прямой и осью абсцисс, p – расстояние от начала координат до этой прямой.

Так как φ – внешний угол прямоугольного треугольника OAB , то $\varphi = \pi/2 + \alpha$ (рис.2), откуда $\alpha = \varphi - \pi/2$, $\cos \alpha = \cos(\varphi - \pi/2) = \sin \varphi$, $\sin \alpha = \sin(\varphi - \pi/2) = -\sin(\pi/2 - \varphi) = -\cos \varphi$ и, таким образом, нормальное уравнение прямой примет вид

$$x \sin \varphi - y \cos \varphi - p = 0, \quad (6)$$

где φ – угол между искомой прямой и осью абсцисс uv новой системы координат. Обозначим

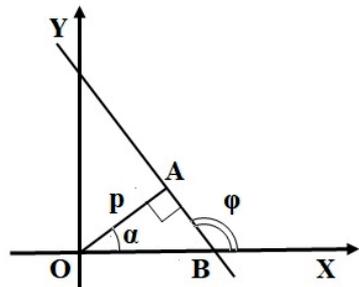


Рис. 2.



через d_k расстояния от точек z_k до прямой (6) ($k = 1, 2, \dots, n$). Тогда $d_k = |x_k \sin \varphi - y_k \cos \varphi - p|$ и $d_1^2 + \dots + d_n^2 = |x_1 \sin \varphi - y_1 \cos \varphi - p|^2 + \dots + |x_n \sin \varphi - y_n \cos \varphi - p|^2 = (x_1 \sin \varphi - y_1 \cos \varphi - p)^2 + \dots + (x_n \sin \varphi - y_n \cos \varphi - p)^2 = (x_1^2 + \dots + x_n^2) \sin^2 \varphi + (y_1^2 + \dots + y_n^2) \cos^2 \varphi + np^2 - 2(x_1 y_1 + \dots + x_n y_n) \sin \varphi \cos \varphi - 2p \sin \varphi (x_1 + x_2 + \dots + x_n) + 2p \cos \varphi (y_1 + y_2 + \dots + y_n)$. Три последних слагаемых равны нулю, поскольку согласно (4) и (5) $x_1 y_1 + \dots + x_n y_n = 0$, $x_1 + x_2 + \dots + x_n = 0$, $y_1 + y_2 + \dots + y_n = 0$.

Итак, $d_1^2 + \dots + d_n^2 = (x_1^2 + \dots + x_n^2) \sin^2 \varphi + (y_1^2 + \dots + y_n^2) \cos^2 \varphi + np^2 = (1/2)(x_1^2 + \dots + x_n^2) \sin^2 \varphi + (1/2)(x_1^2 + \dots + x_n^2)(1 - \cos^2 \varphi) + (1/2)(y_1^2 + \dots + y_n^2) \cos^2 \varphi + (1/2)(y_1^2 + \dots + y_n^2)(1 - \sin^2 \varphi) + np^2 = (1/2)(x_1^2 + y_1^2 + \dots + x_n^2 + y_n^2) + (1/2)(x_1^2 + \dots + x_n^2)(\sin^2 \varphi - \cos^2 \varphi) + (1/2)(y_1^2 + \dots + y_n^2)(\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi) + np^2 = (1/2)(x_1^2 + y_1^2 + \dots + x_n^2 + y_n^2) - (1/2)(x_1^2 + \dots + x_n^2) \cos 2\varphi + (1/2)(y_1^2 + \dots + y_n^2) \cos 2\varphi + np^2 = (1/2)(x_1^2 + y_1^2 + \dots + x_n^2 + y_n^2) - (1/2)(x_1^2 - y_1^2 + \dots + x_n^2 - y_n^2) \cos 2\varphi + np^2 = (1/2)(x_1^2 + y_1^2 + \dots + x_n^2 + y_n^2) - (1/2)n(n-1)c^2 \cos 2\varphi + np^2 \geq (1/2)(x_1^2 + y_1^2 + \dots + x_n^2 + y_n^2) - (1/2)n(n-1)c^2$, причем равенство в последнем неравенстве достигается только в случае $\varphi = 0$, $p = 0$.

Таким образом, минимальная прямая, т.е. прямая в плоскости n данных точек, для которой сумма расстояний от этих точек является наименьшей, проходит через корни u и v $(n-2)$ -ой производной $P^{(n-2)}(z)$ многочлена $P(z)$.

Рассмотрим случай $n=3$. Тогда первое из соотношений (4), а именно

$$x_1^2 - y_1^2 + \dots + x_n^2 - y_n^2 = n(n-1)c^2$$

примет вид

$$x_1^2 - y_1^2 + x_2^2 - y_2^2 + x_3^2 - y_3^2 = 3 \cdot 2 \cdot c^2 = 6c^2. \quad (7)$$

Положим

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 6a^2, \quad a y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = 6b^2. \quad (8)$$

Тогда равенство (7) преобразуется в $x_1^2 - y_1^2 + x_2^2 - y_2^2 + x_3^2 - y_3^2 = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) - (y_1^2 + y_2^2 + y_3^2) = 6a^2 - 6b^2 = 6(a^2 - b^2) = 6c^2$, откуда

$$a^2 - b^2 = c^2, \quad \text{где } 2c = |v - u|. \quad (9)$$

Таким образом, фокусы эллипса с уравнением

$$x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1, \quad (10)$$

где a , b и c определяются равенствами (8) – (9) совпадают с точками u и v .

Покажем, что середины сторон треугольника ABC , где $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$, $C(x_3; y_3)$ лежат на этом эллипсе. Пусть M_a , M_b , M_c – середины сторон BC , CA , AB треугольника ABC соответственно. Тогда $M_a((x_2 + x_3)/2; (y_2 + y_3)/2)$, $M_b((x_1 + x_3)/2; (y_1 + y_3)/2)$, $M_c((x_1 + x_2)/2; (y_1 + y_2)/2)$. Поскольку начало выбранной нами системы координат совпадает с центром тяжести треугольника ABC , то

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0, \quad y_1 + y_2 + y_3 = 0. \quad (11)$$

Кроме того, с учетом (4), имеем

$$x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 = 0, \quad (12)$$



откуда $x_3y_3 = -x_1y_1 - x_2y_2$, но согласно (11) $y_3 = -y_1 - y_2$, поэтому $x_3(-y_1 - y_2) = -x_1y_1 - x_2y_2$ или $x_3y_1 + x_3y_2 = x_1y_1 + x_2y_2$, $x_3y_1 - x_1y_1 = x_2y_2 - x_3y_2$, $y_1(x_3 - x_1) = y_2(x_2 - x_3)$, т.е. $y_1/(x_2 - x_3) = y_2/(x_3 - x_1)$.

Аналогично, $y_2/(x_3 - x_1) = y_3/(x_1 - x_2)$. Итак,

$$y_1/(x_2 - x_3) = y_2/(x_3 - x_1) = y_3/(x_1 - x_2) = k$$

и

$$y_1 = k(x_2 - x_3), y_2 = k(x_3 - x_1), y_3 = k(x_1 - x_2). \quad (13)$$

Но согласно (8) $y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = 6b^2$, поэтому

$$k^2((x_2 - x_3)^2 + (x_3 - x_1)^2 + (x_1 - x_2)^2) = 6b^2, \\ k^2(2(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) - 2(x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3)) = 6b^2.$$

После возведения в квадрат обеих частей равенства $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ (см.(11)), получим $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2(x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3) = 0$, откуда

$$2(x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3) = -x_1^2 - x_2^2 - x_3^2$$

и

$$k^2(2(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) - 2(x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3)) = \\ k^2(2(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) = 3k^2(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) = 3k^2 * 6a^2 = 6b^2,$$

т.е.

$$3k^2a^2 = 6b^2, k^2 = b^2/3a^2. \quad (14)$$

Найдем значение выражения $x_1^2/a^2 + y_1^2/b^2$, учитывая (13) и (14):

$$x_1^2/a^2 + y_1^2/b^2 = x_1^2/a^2 + k^2(x_2 - x_3)^2/b^2 = \\ x_1^2/a^2 + b^2(x_2 - x_3)^2/3a^2b^2 = (3x_1^2 + (x_2 - x_3)^2)/3a^2 = \\ (2x_1^2 + x_1^2 + (x_2 - x_3)^2)/3a^2 = (2x_1^2 + (-x_2 - x_3)^2 + (x_2 - x_3)^2)/3a^2 = \\ 2(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)/3a^2 = 2*6a^2/3a^2 = 4.$$

Итак,

$$x_1^2/a^2 + y_1^2/b^2 = 4. \quad (15)$$

Подставим теперь в уравнение (10) координаты точки $M_a((x_2 + x_3)/2; (y_2 + y_3)/2)$, заменив $x_2 + x_3$ и $y_2 + y_3$ на $-x_1$ и $-y_1$ соответственно (см. (11) и (15)): $(-x_1/2)^2/a^2 + (-y_1/2)^2/b^2 = (1/4)(x_1^2/a^2 + y_1^2/b^2) = (1/4)*4 = 1$.

Таким образом, координаты точки M_a удовлетворяют уравнению (10), т.е. точка M_a лежит на этом эллипсе. Точно так же можно убедиться в том, что и середины M_b и M_c сторон AC и AB тоже лежат на эллипсе (10) с центром в центре тяжести треугольника ABC и фокусами в точках u и v , совпадающих с корнями производной кубического многочлена, корнями которого являются вершины треугольника ABC . Поскольку любой треугольник можно перевести аффинным преобразованием в правильный треугольник, то при таком преобразовании центр тяжести треугольника ABC перейдет в центр правильного треугольника, а середины сторон треугольника ABC – в середины сторон правильного треугольника, а наш эллипс –



во вписанную окружность правильного треугольника. Итак, рассматриваемый эллипс касается сторон треугольника ABC в их серединах. Такой эллипс называется вписанным эллипсом Штейнера. Прямая, проходящая через фокусы эллипса Штейнера, и дает решение задачи о минимизации суммы квадратов расстояний от вершин треугольника до произвольной прямой в плоскости этого треугольника. В общем случае эта минимальная прямая наклонена как к сторонам треугольника, так и к осям системы координат.

Приведем теперь определение эллипса Штейнера, вернее двух эллипсов Штейнера – вписанного и описанного.

Пусть заданы правильный треугольник $A_0B_0C_0$ и произвольный треугольник ABC . Существует аффинное преобразование, которое переводит вершины первого треугольника в соответствующие вершины второго. Образ вписанной в правильный треугольник окружности называется **вписанным эллипсом Штейнера**. Образ описанной вокруг правильного треугольника окружности называется **описанным эллипсом Штейнера**. Различные задачи, связанные с эллипсами Штейнера, рассматриваются в статье авторов [10].

Для того, чтобы сделать картинку более наглядной, рассмотрим обратную задачу: пусть дан эллипс. Найти треугольники, для которых прямая, содержащая большую ось этого эллипса является минимальной.

Выберем систему координат Oxy так, чтобы её начало совпало с центром эллипса, а его фокусы лежали на оси Ox . Тогда координаты точек должны удовлетворять соотношениям (11) – (12): $x_1 + x_2 + x_3 = 0$, $y_1 + y_2 + y_3 = 0$, $x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 = 0$. Легко подобрать следующее целочисленное решение этих уравнений: $x_1 = 1$, $y_1 = 5$, $x_2 = 2$, $y_2 = -4$, $x_3 = -3$, $y_3 = -1$.

Для того, чтобы координаты середин сторон треугольника ABC также были целочисленными, достаточно удвоить найденные координаты.

Тогда $A(10; 2)$, $B(-8; 4)$, $C(-2; 6)$, $M_a(-5; -1)$; $M_b(4; -2)$, $M_c(1; 3)$.

Треугольник, имеющий такие координаты вершин, вместе с его вписанным эллипсом Штейнера изображен на рис.3. Минимальная прямая этого треугольника совпадает с осью Ox .

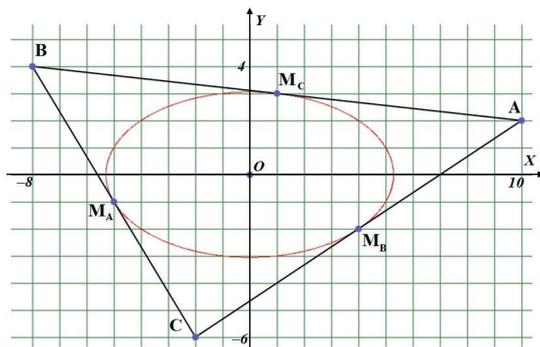


Рис. 3.



То, что ось Ox действительной прямой, легко проверить непосредственно. Сумма квадратов расстояний от вершин A, B, C до оси Ox равна $2^2 + 4^2 + 6^2 = 56$. Понятно, что минимальная прямая должна проходить через центр тяжести треугольника ABC , т.е. через начало координат O . Сумма квадратов расстояний от вершин A, B, C до оси Oy равна $10^2 + 8^2 + 2^2 = 168 > 56$. Уравнение любой прямой, проходящей через начало координат и отличной от оси Oy , имеет вид $y = kx$, поэтому $d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 = ((kx_1 - y_1)^2 + (kx_2 - y_2)^2 + (kx_3 - y_3)^2)/(k^2 + 1) = (4/(k^2 + 1)) * ((5k - 1)^2 + (-4k - 2)^2 + (-k + 3)^2) = 4(42k^2 + 14)/(k^2 + 1) = 56(3k^2 + 1)/(k^2 + 1) = 56(k^2 + 1 + 2k^2)/(k^2 + 1) = 56(k^2 + 1)/(k^2 + 1) + 56 * 2k^2/(k^2 + 1) = 56 + 112k^2/(k^2 + 1) \geq 56$, причем минимум, равный 56, достигается при $k = 0$. В этом случае $y = 0$, т.е. минимальная прямая действительно совпадает с осью Ox .

3. ПРИМЕНЕНИЯ В МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКЕ

Заметим, что в математической статистике минимальная прямая называется главной компонентой. Основы метода главных компонент (англ.

Principal component analysis, PCA) были заложены знаменитым английским ученым, основателем математической статистики Карлом Пирсоном (1857–1936) в статье [6]. Именно в этой статье и была поставлена задача нахождения прямой, минимизирующей сумму квадратов расстояний от n данных точек плоскости до этой прямой. В настоящее время метод главных компонент разросся до обширной прикладной дисциплины, занимающейся в том числе и вопросами визуализации данных ([7]-[8]).

4. ГИПОТЕЗА ОТНОСИТЕЛЬНО ПРОБЛЕМЫ А. КЭЛИ ДЛЯ КОМПЛЕКСНЫХ ПОЛИНОМОВ

Рассмотрим в заключение некоторую гипотезу относительно проблемы А. Кэли (1821–1895) для комплексных полиномов. В заметке «Комплексная проблема Ньютона-Фурье», опубликованной в 1879г., Кэли предложил применить метод, названный им методом Ньютона-Фурье к комплексным многочленам.

В действительном случае метод Ньютона состоит в построении рекуррентной последовательности

$$\{x_k - p(x_k)/p'(x_k), k = 0, 1, 2, \dots\} \quad (16)$$

В формулировке Кэли «... задача состоит в разделении плоскости на области так, чтобы, выбрав по желанию точку P (начальную точку x_0 в (16)), где бы то ни было внутри одной области, мы в конечном счете пришли бы к точке A (равной корню, т.е. $p(A) = 0$); где бы то ни было внутри другой области пришли бы к точке B и так далее для каждой из нескольких точек, представляющих корни нашего уравнения.

В случае квадратного уравнения решение оказывается простым и изящным, но уже следующий сменяющий его случай кубического уравнения, по-видимому, представляет значительную трудность [9]. Действительно, для квадратных уравнений данная последовательность всегда сходится к ближайшему корню, за исключением случая, когда начальная точка z_0 лежит на серединном перпендикуляре отрезка



с концами, совпадающими с корнями данного квадратного уравнения. В этом случае точки z_k будут все время оставаться на этом серединном перпендикуляре, совершая хаотическое движение. Для многочленов более высоких степеней, например, кубических, эта задача так и осталась нерешенной, хотя еще в 1879 г. Артур Кэли соби-рался представить решение в следующей публикации, но она, увы, так никогда и не появилась [9].

Компьютерные эксперименты для кубических многочленов показали, что суще-ствуют хорошие по отношению к методу Ньютона многочлены, т.е. такие, для кото-рых почти все начальные точки сходятся к одному из корней, и плохие, для которых начальные точки не сходятся ни к одному из корней уравнения. Однако оказалось, что центр тяжести корней может служить хорошей контрольной точкой: если после-довательность с начальной точкой в центре тяжести корней сходится к одному из корней многочлена, то этот многочлен хороший. Если же после достаточно большого числа итераций она не подходит близко ни к одному из корней, то велика вероят-ность того, что многочлен плохой [9].

Поскольку минимальная прямая проходит через центр тяжести корней и фокусы эллипса Штейнера, совпадающие с корнями производной кубического многочлена, то естественно предположить, что существует какая-то связь между проблемой Нью-тона-Фурье для кубического многочлена и геометрией треугольника с вершинами в корнях этого кубического многочлена. Тогда эта связь будет иметь место и для многочленов высших степеней, так как центр тяжести корней многочлена степени n совпадает с центром тяжести корней его производной $(n-3)$ -го порядка, т.е. с центром тяжести корней кубического многочлена.

К сожалению, авторы не имеют доступа к быстродействующей вычислительной технике и мониторам с высоким разрешением и, таким образом, не имеют возможно-сти экспериментально проверить эту гипотезу.

Литература

1. Куланин Е.Д., Нуркаева И.М. О двух геометрических задачах на экстремум. Математика в школе. 2019. № 4. С. 35–40.
2. Куланин Е.Д., Степанов М.Е., Нуркаева И.М. Пропедевтика решения экстремальных задач в школьном курсе математики. Моделирование и анализ данных. 2019. № 4. С. 127–144.
3. Куланин Е.Д., Нуркаева И.М. Еще раз о задаче Мавло. Математика в школе. 2020. № 2. С. 76–79.
4. Куланин Е.Д., Степанов М.Е., Нуркаева И.М. О различных подходах к решению экстре-мальных задач. Моделирование и анализ данных. 2020. Т.11. № 1. С. 40–60.
5. Чезаро Э. Элементарный учебник алгебраического анализа и исчисления бесконечно ма-лых. Часть первая. ОНТИ, Л-М: 1936.
6. Pearson K. On lines and planes of closest fit to systems of points in space, Philosophical Magazine, (1901) 2, 559–572; <http://pca.narod.ru/>
7. Зиновьев А.Ю. Визуализация многомерных данных, Красноярск, Изд. КГТУ, 2000.
8. (Электронный ресурс) URL: <https://dic.academic.ru/dic.nsf/ruwiki/1105612?ysclid=la3pdtghsn961871750>



9. *Пайтген Х.-О., Рихтер П.Х.* Красота фракталов. Образы комплексных динамических систем. М: «Мир», 1993.
10. *Куланин Е.Д., Степанов М.Е.* Всестороннее рассмотрение математических понятий как методический прием. Моделирование и анализ данных. 2022. Т. 12. № 4.



On Visualization of Solutions to Some Extreme Problems

Yevgeny D. Kulanin*

Moscow State University of Psychology & Education (MSUPE), Moscow, Russia

ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-6093-7012>

e-mail: lucas03@mail.ru

Mikhail E. Stepanov**

Moscow State University of Psychology & Education (MSUPE), Moscow, Russia

ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-4803-8211>

e-mail: mestepanov@yandex.ru

The article discusses the problem of finding a straight line on a plane, the sum of the squares of the distances to which from n given points of this plane will be the smallest. It is shown how to reduce this problem to solving a similar problem for three points, the solution of which is a straight line containing the major axis of the Steiner ellipse of a triangle with vertices at these points. There is also a hypothesis about the connection of the subject under consideration with the problem of the fields of attraction in the theory of fractals.

Keywords: visualization, extreme problems, sum of squared distances, complex plane, polynomial, derivative of polynomial, arithmetic mean of roots, center of gravity of roots, Steiner ellipse, minimum straight line, principal component, fractal.

For citation:

Kulanin Y.D., Stepanov M.E. Comprehensive Consideration of Mathematical Concepts as a Methodical Technique. *Modelirovanie i analiz dannykh = Modelling and Data Analysis*, 2022. Vol. 12, no. 4, pp. 94–104. DOI: <https://doi.org/10.17759/mda.2022120407> (In Russ., abstr. in Engl.).

References

1. Kulanin E.D., Nurkaeva I.M. On two geometric problems on extremums. *Mathematics at school*. 2019. No. 4. P. 35–40.
2. Kulanin E.D., Stepanov M.E., Nurkaeva I.M. Propaedeutics of solving extremal problems in the school course of mathematics. *Modeling and data analysis*. 2019. No. 4. P. 127–144.
3. Kulanin E.D., Nurkaeva I.M. Once again about the Mavlo problem. *Mathematics at school*. 2020. No. 2. P. 76–79.

****Yevgeny D. Kulanin***, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Moscow State University of Psychology & Education (MSUPE), Moscow, Russia, ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-6093-7012>, e-mail: lucas03@mail.ru

*****Mikhail E. Stepanov***, Candidate of Pedagogical Sciences, Associate Professor, Moscow State University of Psychology & Education (MSUPE), Moscow, Russia, ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-4803-8211>, e-mail: mestepanov@yandex.ru



4. Kulanin E.D., Stepanov M.E., Nurkaeva I.M. About different approaches to solving extreme problems. *Modeling and data analysis*. 2020. T.11. No. 1. P. 40–60.
5. Cesaro E. Elementary textbook of algebraic analysis and infinitesimal calculus. Part one. ONTI, L-M: 1936.
6. Pearson K. On lines and planes of closest fit to systems of points in space, *Philosophical Magazine*, (1901) 2, 559–572; <http://pca.narod.ru/>
7. Zinoviev A. Yu. Visualization of multidimensional data, Krasnoyarsk, KSTU Publishing House, 2000.
8. (Electronic resource) URL: <https://dic.academic.ru/dic.nsf/ruwiki/1105612?ysclid=la3pdt-hsn961871750>
9. Paytgen H.-O., Richter P.H. The beauty of fractals. Images of complex dynamic systems. Moscow: Mir, 1993.
10. Kulanin Y.D., Stepanov M.E. Comprehensive Consideration of Mathematical Concepts as a Methodical Technique. *Modelirovanie i analiz dannykh = Modelling and Data Analysis*, 2022. Vol. 12, no. 4.

Получена 07.11.2022

Received 07.11.2022

Принята в печать 28.11.2022

Accepted 28.11.2022