
ПСИХОЛОГИЯ ОБРАЗОВАНИЯ EDUCATIONAL PSYCHOLOGY

Подходы к типологии основных ошибок младших школьников при освоении математических понятий

Санина С.П.

*Московский государственный психолого-педагогический университет (ФГБОУ ВО МГППУ),
г. Москва, Российская Федерация*

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-4033-3913>, e-mail: saninasp@mgppu.ru

Соколов В.Л.

*Московский государственный психолого-педагогический университет (ФГБОУ ВО МГППУ),
г. Москва, Российская Федерация*

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-6180-7567>, e-mail: sokolovvl@mgppu.ru

В обзорной статье рассматривается область научных исследований, посвященных анализу ошибок в математике. Проблема освоения младшими школьниками математических понятий продолжает оставаться актуальной в педагогической психологии. Систематическая работа с ошибками учащихся — важный этап в работе учителя. В обзоре показано значение анализа математических ошибок. Обосновывается важность не только обнаружения систематических ошибок учащихся, но и стоящих за ними неправильных представлений о понятиях. Раскрываются основания для типологии ошибок в контексте дискуссии о взаимосвязи концептуальных и процедурных знаний. Описаны различные подходы к типологии математических ошибок. Подробно рассматривается типология ошибок, основанная на выявлении шаблонов ошибок, получившая широкое распространение в исследованиях. В указанной типологии выделяются три большие группы математических ошибок: фактические, процедурные и концептуальные. Приводятся примеры данных ошибок на материале, изучаемом младшими школьниками.

Ключевые слова: обучение математике, младший школьник, математические ошибки, математические представления, анализ ошибок, типология ошибок.

Финансирование. Исследование выполнено в рамках государственного задания Министерства просвещения Российской Федерации № 073-00041-21-05 от 14.07.2021 «Формирование психологической компоненты методической подготовки будущего учителя, необходимой для анализа причин ошибок учащихся в целях развития их предметного понятийного мышления в процессе решения учебных задач».

Для цитаты: Санина С.П., Соколов В.Л. Подходы к типологии основных ошибок младших школьников при освоении математических понятий [Электронный ресурс] // Современная зарубежная психология. 2021. Том 10. № 4. С. 138—146. DOI: <https://doi.org/10.17759/jmfp.2021100413>

Approaches to the typology of the common mistakes of younger schoolchildren in the development of mathematical concepts

Svetlana P. Sanina

*Moscow State University of Psychology & Education, Moscow, Russia
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-4033-3913>, e-mail: saninasp@mgppu.ru*

Vladimir L. Sokolov

*Moscow State University of Psychology & Education, Moscow, Russia
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-6180-7567>, e-mail: sokolovvl@mgppu.ru*

The review article examines the field of scientific research devoted to the analysis of errors in mathematics. The problem of mastering mathematical concepts by younger schoolchildren continues to be relevant in pedagogical psychology. Systematic work with students' mistakes is an important stage in the teacher's work. The review shows the significance of the analysis of mathematical errors. The importance of not only detecting systematic mistakes of students, but also the misconceptions about concepts behind them is substantiated. The reasons for the typology of errors are revealed in the context of a discussion about the relationship between conceptual and procedural knowledge. Various approaches to the typology of mathematical errors are described. The typology of errors based on the identification of error patterns, which has become widespread in research, is considered in detail. In this typology, three large groups of mathematical errors are distinguished: factual, procedural and conceptual. Examples of these errors are given on the material studied by younger schoolchildren.

Keywords: teaching mathematics, junior schoolchildren, mathematical errors, mathematical representations, error analysis, typology of errors.

Funding. The research was carried out with the financial support of the state task of the Ministry of Education of the Russian Federation No. 073-00041-21-05 dated 07/14/2021 «Formation of the psychological component of the methodological training of the future teacher necessary for the analysis of the causes of students' mistakes in order to develop their subject conceptual thinking in the process of solving educational tasks».

For citation: Sanina S.P., Sokolov V.L. Approaches to the typology of the common mistakes of younger schoolchildren in the development of mathematical concepts. *Sovremennaya zarubezhnaya psikhologiya = Journal of Modern Foreign Psychology*, 2021. Vol. 10, no. 4, pp. 138—146. DOI: <https://doi.org/10.17759/jmfp.2021100413> (In Russ.).

Введение

Математические понятия представляют собой сложную логико-гносеологическую категорию и, следовательно, процесс овладения обучающимся математическим понятием является непростым, длительным и многогранным. Проблема освоения младшими школьниками математических понятий является одной из важнейших, как в зарубежной, так и в отечественной педагогической психологии. Этому вопросу посвящено немало работ, но он продолжает оставаться актуальным.

В процессе овладения младшим школьником математическим понятием важно выявлять ошибки, которые он допускает. Качественно проведенный анализ ошибок предоставляет педагогам информацию, на основе которой могут быть приняты наиболее эффективные решения по преодолению индивидуальных трудностей обучающихся. С другой стороны, проведенный М. Левином (2018) обзор исследований в области анализа математических ошибок показал, что авторы используют разные классификации и типологии. Многообразие классификаций ошибок дезорганизует педагогов. Так, П. Риккомини (2005) обнаружил, что до 50% учителей не могут диагностировать конкретную ошибку, не различают типовые и случайные ошибки учащихся. Тем не менее в процессе формирования математических понятий работа над ошибками не просто полезна, но и необходима. Р. Эшлок подчеркивает важность не только обнаружения систематических ошибок учащихся, но и выяснения стоящих за ними неправильных представлений [2].

Безусловно, данная проблема является значимой для педагогической работы, нацеленной на поддержку осмысленного изучения младшими школьниками математики.

Обзор исследований типологий основных ошибок младших школьников при освоении математических

понятий даст возможность обобщить результаты в данной области педагогической психологии и обозначить актуальные направления будущих исследований.

Значение анализа математических ошибок

Анализ ошибок в математике — это область научных исследований в психологии образования, которая имеет давнюю историю.

Одна из первых публикаций, посвященных анализу математических ошибок, принадлежит американскому ученому Х. Радац. Он отметил, что в конце 1970-х годов появился интерес к изучению ошибок в математике, отчасти потому, что процесс индивидуализации и дифференциации обучения математике потребовал четкого понимания конкретных проблемных зон учащихся. Точная диагностика затруднений учащихся позволяет строить эффективное обучение. Х. Радац утверждал, что без понимания причин ошибок невозможно принимать обоснованные решения в обучении математики. При этом утверждалось, что разные учащиеся могут совершать однотипные ошибки в задаче по математике, но при этом иметь разные причины и разные затруднения. Следовательно, с обучающимся необходимо выстраивать разные стратегии по исправлению их трудностей [22].

Своим исследованием Р. Бораси (R. Borasi) также показал, что точный и оперативный анализ математических ошибок учащихся может предоставлять учителям своевременную информацию, которую можно использовать для корректировки обучения в соответствии с индивидуальными потребностями учащихся.

Также в конце 1970-х годов в образовании стала популярной идея о том, что в процессе изучения математики и естествознания у учащихся могут развиваться ошибочные представления. Этому способствовали

авторитетные высказывания Пиаже о том, что дети думают о мире иначе, чем взрослые [18]. Таким образом, при анализе математических ошибок многие исследователи стали включать такой тип ошибок, как «заблуждения/ошибочные или неверные представления». В образовании стал развиваться конструктивистский подход, согласно которому любое обучение предполагает интерпретацию явлений, ситуаций и событий, включая обучение в классе, с точки зрения имеющихся у учащегося знаний. В рамках этого подхода опровергается утверждение о том, что обучение в школе ребенок начинает «с чистого листа». Даже у начинающего ученика имеются свои представления, на основе которых он может объяснить некоторые математические понятия [8; 7; 18].

Фундаментальное исследование Р. Эшлока [2], посвященное анализу шаблонов ошибок в вычислениях, позволило собрать коллекцию различных типов ошибок, встречающихся у учащихся в процессе изучения математики, призвано помочь учителям выявить распространенные математические ошибки у детей и получить представление о том, почему ребенок мог усвоить неправильный математический алгоритм действия.

Р. Эшлок дифференцировал неосторожные ошибки, которые мы все совершаем, от неправильных представлений о математических идеях и процедурах, которые приводят к появлению типичных ошибок. Он полагал, что в процессе изучения нового понятия ученики сосредотачиваются на своем имеющемся опыте, ищут в нем то общее, что связано с новым понятием, связывают новую информацию с тем, что они уже знают. Однако такое предварительное знание не всегда является правильным, что может привести к ошибочному усвоению нового знания.

Работа Р. Эшлока [2] по анализу ошибок породила множество аналогичных исследований по всему миру. Было показано, что анализ ошибок является эффективным методом выявления шаблонов математических ошибок для любого учащегося, изучающего математику.

При систематическом анализе детских ошибок учитель получает ряд преимуществ:

- определить, какие шаги ученик выполняет правильно (в отличие от простой фиксации правильных и неправильных ответов, что не дает возможности точно установить правильно выполняемые действия);

- выявить, какие типы ошибок допускает учащийся;

- определить, является ли ошибка случайной, однократной или встречается постоянно, указывая на пробел в освоении математического понятия или алгоритма действия;

- выбрать эффективный подход для устранения проблем учащегося, скорректировать понимание изученных ранее математических понятий, алгоритмов действия [2].

К. Лунета и П. Дж. Маконье, в своем исследовании описали различия между математическими ошибками и заблуждениями. Несмотря на то, что эти понятия связаны между собой, тем не менее они имеют разное

происхождение. Ошибка — это промах, неточность, несоответствие между объектом или явлением, принятым за эталон [20]. Согласно Рикомини, бессистемные ошибки являются непреднамеренными, которые учащиеся могут легко исправить сами. Наиболее часто повторяющиеся систематические ошибки являются симптомами ошибочной линии мышления, вызывающей, их и называются заблуждением или ошибочным представлением [13; 24]. Характерно, что ошибочные представления интуитивно понятны учащимся, могут быть устойчивы во времени и трудны в исправлении [8; 7; 18]. Ошибки видны в письменном тексте и устной речи учащихся, но стоящие за ними ошибочные представления часто скрыты от наблюдателя. Иногда они могут быть скрыты даже в правильных ответах, если правильные ответы случайны.

Исследователи университета Северной Каролины отметили, что заблуждения достаточно устойчивы и могут оставаться в течение всей жизни человека. Ошибочные представления имеются и у учителей начальных классов. Даже если учителя знают точный алгоритм вычисления, у них все равно могут оставаться ошибочные представления о некоторых математических операциях (например о том, что сложение и умножение всегда увеличивают число и, наоборот, вычитание и деление всегда уменьшают число) [12]. Д. Тирош (D. Tirosh) показал, что ошибочное представление порождается заученным и доведенным до автоматизма алгоритмом действия. Также отмечается, что некоторые учителя начальных классов иногда пропускают тему урока «Деление ноль на ноль», не видят необходимости в этой теме. Это говорит о том, что учитель не владеет базовым пониманием того, что такое деление [27]. Некоторые исследователи утверждают, что ошибочные представления и заблуждения поддаются исправлению. В настоящее время разрабатываются программы подготовки учителей, нацеленные на преодоление ошибочных представлений у педагогов, а также развитие профессиональных компетенций по организации обучения, основанного на артефактах, организации обучения по формированию математических понятий и развитию математического мышления у учащихся [12].

Несмотря на широкое распространение идеи о наличии у детей и взрослых ошибочных представлений, сформированных до систематического обучения, не все исследователи разделяют это мнение. Р. Нешер, Л. Резник и др. считают, что в элементарной математике ошибочные представления возникают только в процессе обучения, поскольку учащиеся обобщают предыдущие знания, чтобы справиться с новыми задачами, но могут делать это неверно [23].

Основания для типологии ошибок

Вопрос построения типологии ошибок напрямую связан с другим принципиальным вопросом: каким

способом ребенок получает знания? Исследования последних десятилетий убедительно доказывают, что способ обучения, основанный на механическом запоминании учебного материала, является неэффективным. В качестве лучших практик называются те, которые поддерживают осмысленное изучение математики, опирающееся на освоение научных понятий [17]. В работах по психологии образования стали обсуждать концептуальные и процессуальные знания. В качестве иллюстрации принципиальных отличий между концептуальными и процессуальными знаниями Ритл-Джонсон предложил следующий пример. Концептуальные знания можно определить как знание концепций, теорий. По сути, они являются абстрактными и необязательно должны быть вербализованы. Процедурные знания могут быть описаны как шаги или действия для достижения цели [25].

Поньше остается дискуссионным вопрос о характере концептуальных и процедурных знаний и их взаимосвязи [3; 25]. В теориях, основанных на идее концептуализации, утверждается, что дети сначала приобретают концептуальные знания, а затем получают процедурные. В теориях, ориентируемых на процедуры, утверждается, что в процессе исследования ребенок осваивает процедурные знания и лишь затем абстрактные концепции. Имеются также ряд работ, в которых показано, что концептуальные и процедурные знания взаимосвязаны и усваиваются также во взаимосвязи [17].

В зависимости от того, как исследователь отвечает на вопрос о способе образования понятий у ребенка, он предлагает способ типологизации ошибок. Так, например, Ритл-Джонсон и Зиглер (1998) считают, что знания, которые ученики должны усвоить первыми, не имеют никакого значения. Другого мнения придерживаются Ортон (1983) и Виннер (1989), которые утверждают, что основная проблема с обучением математическим вычислениям и появлением у обучающихся систематических ошибок заключается в том, что процедурные знания преподаются за счет или до концептуальных знаний [15].

Подходы к типологии математических ошибок

Одна из первых типологий математических ошибок была предложена Х. Радацем, в ее основе лежали разные способы обработки информации. Согласно этой типологии, все математические ошибки могут быть объединены в 4 группы. К первой группе можно отнести ошибки, связанные с трудностями понимания математического языка, математического текста. Ко второй группе предложено относить трудности, связанные с пространственным анализом. Третья группа — это ошибки, связанные с трудностями овладения фундаментальными концепциями. Четвертая группа — неверное применение правил, стратегий, решений [22].

Ряд исследователей предлагали описывать типы ошибок в зависимости от типа математических задач.

Например, С. Фиори и Л. Цуккери выявили закономерности ошибок, допущенных младшими школьниками и подростками при выполнении задач на вычитание многозначных чисел. Их классификация ошибок включала ошибки, допущенные при выборе стратегии решения задачи и ошибки вычислений при правильном выборе стратегии решения (например, учащийся допускает ошибку в вычислении $5 - 2 = 2$, но остальная часть задачи выполнена правильно) [11]. Эта типология стала достаточно распространенной и получила развитие. Так, она была дополнена конкретными ошибками, при решении задач с дробями (например, неверно выполненные действия сложения и вычитания дробей с одинаковыми или разными знаменателями и др.) [9].

Однако не все математические ошибки можно было объяснить неверным пониманием той или иной концепции или применения правил. А. Пэн и З. Ло на основе проведенного анализа литературы, предложили при анализе ошибок учитывать не только сами ошибки учащихся, но и способность учителей интерпретировать эти ошибки. Они считали, что все ошибки образуют четыре группы: математические, логические, стратегические и психологические. Примечательно, что несколько категорий ошибок, предложенных Х. Радацем и А. Пэном, фактически связаны не с математической вычислительной способностью, а с другими областями, такими как язык и визуально-пространственные навыки [21].

М. Клементс, изучая трудности с письменными или устными задачами, отметил, что они иногда связаны не столько с математическими трудностями, сколько с чтением и трудностями понимания языка. Возможно, на овладение умением решать математические задачи влияют не только математические способности, но и другие факторы, например язык, память и зрительно-пространственные навыки [6].

По мере того, как в разных странах мира стали разрабатываться новые образовательные стандарты, в которых обращалось внимание на необходимость осмысленного изучения учащимися математики, с учетом роли концептуальных и процессуальных знаний, исследователи начинают более детально подходить к разработке типологии математических ошибок.

Дюфрен (Dufresne) выделил восемь категорий ошибок, которые обычно совершают учащиеся, и определил их следующим образом.

Ошибка в знаниях — недостаточная осведомленность об основных фактах, свойствах или принципах.

Ошибка в навыках — механические ошибки в точности, неправильное копирование математических выражений из одной строки в другую, часто приводящие к неосторожным или «глупым» ошибкам.

Ошибка в концепции — есть недостаток в понимании или неправильное представление.

Ошибка в установлении связей — ученик понимает несколько различных концепций, но ему трудно сформулировать эти концепции вместе, чтобы установить между ними связь и решить задачу.

Ошибка в эффективности стратегии — существует более эффективная стратегия, которая позволила бы за меньшее время прийти к правильному выводу.

Ошибка в соглашении — несоблюдение общепринятых правил, таких как ошибки округления, пропуск единиц измерения и т. д.

Ошибка в процессе — отсутствие каких-либо шагов в решении, таких как определение переменных, указание на применяемые формулы, отсутствие ответа.

Ошибка в формате — написание нелогичных или непоследовательных шагов, некорректное использование знаков равенства, стрелок [5].

Д. Фишер и Н. Фрей предложили при определении типа ошибок, которые допускают учащиеся, решая математические задания, выявлять шаблоны ошибок. Если учащиеся допускают от трех до пяти ошибок в заданиях определенного типа, это и составляет шаблон ошибки. Так, по мнению исследователей, математические ошибки учащихся можно распределить на три большие группы: фактические, процедурные и концептуальные. Каждая из этих ошибок связана либо с дефицитом знания, либо с недопониманием, неверным представлением. Наиболее распространенным типом ошибок являются процедурные ошибки. Поскольку концептуальные и процедурные знания часто пересекаются, бывает трудно отличить концептуальные ошибки от процедурных ошибок [28].

Рассмотрим подробнее примеры, иллюстрирующие предложенную типологию математических ошибок [4].

К распространенным фактическим ошибкам относятся следующие.

Ученик не знает базовые математические факты, допускает ошибки при сложении, вычитании, умножении или делении однозначных чисел: $3 + 2 = 7$; $2 \times 3 = 7$; $7 - 4 = 2$; $8 : 4 = 3$.

Ученик ошибочно идентифицирует знаки арифметических действий: $2 \times 3 = 5$ (определяет знак умножения как знак сложения); $8 : 4 = 4$ (определяет знак деления как знак минус).

Ошибочно идентифицирует цифры: например, 5 идентифицирует как 2.

Делает ошибку при подсчете: 1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9 (пропускает 6).

Не знает математических терминов (запас слов): не понимает значения терминов: числитель, знаменатель, сумма, прямоугольник.

Не знает математических формул: например, не знает формулу для вычисления площади прямоугольника.

Распространенные процедурные ошибки возникают из-за дефицита процедурных знаний. Процедурные знания — это понимание того, какие шаги или алгоритмы необходимы для решения математического задания. Процедурные ошибки возникают, когда ученик неправильно применяет правило или алгоритм, т. е. формулу или пошаговый алгоритм решения задания.

Например, ученик забывает перенести единицы счета при сложении, вычитании или умножении с переходом через разряд.

77
+ 54
——

121

123
- 76
——

53

56
 $\times 2$
——

102

В первом примере ученик правильно сложил $7 + 4$, но не перенес единицу в разряд десятков. Во втором примере ученик не занимает единицу в разряде десятков, вместо этого он вычел меньшее число (3) из большего числа (6) в разряде единиц. В третьем примере ученик после умножения 6×2 не добавляет единицу к разряду десятков.

Ошибки в случае с одним или несколькими нулями в уменьшаемом.

304
- 21
——

323

Ученик вычитал 0 из 2 вместо того, чтобы занять единицу в разряде сотен.

Выполнение неправильного действия. Хотя ученик может правильно определять знаки, например, плюс и минус, в то же время он может выполнить вычитание вместо сложения или наоборот.

234
- 45
——

279

Ученик выполнил сложение вместо вычитания. Или: $3 + 2 = 6$ — ученик не прибавил, а умножил. Распространенные концептуальные ошибки возникают, когда ученик придерживается неправильных представлений или не понимает основополагающих принципов и идей, относящихся к данной математической задаче.

Приведем примеры концептуальных ошибок.

Ученик не понимает принципа десятичной записи числа, значения единиц каждого разряда.

67
+ 4
——

17

Ученик сложил все числа ($6 + 7 + 4 = 17$), не различая ценности чисел в разрядах десятков и единиц.

10
+ 9
——

91

Ученик записал ответ, поменяв в нем местами десятки и единицы. Посмотрим, как ученик выполнил

следующее задание: запишите цифрами числа: 1) семьдесят шесть; 2) девятьсот семьдесят четыре; 3) шесть тысяч сто двадцать четыре.

Ответ ученика: 1) 76; 2) 90074; 3) 600010024.

Ученик при записи чисел, состоящих более чем из двух цифр, демонстрирует непонимание принципа записи десятичных чисел.

К концептуальным ошибкам относятся ситуации чрезмерного обобщения, когда из-за отсутствия концептуального понимания ученик неправильно применяет правила или знания в новой ситуации.

$$\begin{array}{r} 321 \\ - 245 \\ \hline \end{array}$$

124

Независимо от того, находится ли число в уменьшаемом или вычитаемом, ученик всегда вычитает из большего числа меньшее.

Р. Эшлок [2] приводит пример ситуации чрезмерной специализации, когда из-за отсутствия концептуального понимания ученик демонстрирует слишком узкое понимание данного понятия: часто ученики ограничивают свое представление о высоте треугольника только тем, что может содержаться внутри треугольника. Слева показано, как ученик провел высоту к нижней стороне треугольника, справа — правильное построение (рис. 1).

Рассмотренная типология математических ошибок получила широкое распространение и успешно применяется в различных исследованиях, например, при изучении закономерностей ошибок в сложении среди детей дошкольного возраста [19], при выявлении шаблонов ошибок учащихся в действиях с обыкновенными дробями [16], в задачах сложения и вычитания у португальских школьников [10], при анализе ошибок по математике в начальных классах [26].

В последнее время разрабатывается еще одно направление в области типологии математических ошибок, когда с ошибками и ошибочными представ-

лениями учитель работает непосредственно в классе. Урок строится в форме учебного диалога, в ходе которого учитель акцентирует внимание учащихся и поддерживает неверное, ошибочное мнение. Эта ошибка обсуждается всеми учащимися класса, подбираются аргументы, почему то или иное мнение, математическое решение является неверным. Так, дети осваивают концептуальное знание. При таком подходе ошибка рассматривается не как неудача, а как важный аспект формирующей оценки, инструментом преодоления ошибочных представлений и более серьезных ошибок в дальнейшем. Однако типология таких ошибок еще только оформляется [14].

Заключение

Данная статья имеет обзорный характер и ориентирована на более глубокое понимание проблемы возникновения основных ошибок младших школьников при освоении математических понятий. Важно отметить, что в современных зарубежных исследованиях существуют разные подходы к типологии математических ошибок. Каждая типология основывается на определенном подходе к обучению, связанном с характером взаимосвязи концептуальных и процессуальных знаний. Исследователи образования придерживаются разных взглядов на процесс овладения учащимися концептуальных знаний. Также нет единого мнения в вопросе о природе ошибочных представлений детей. Дальнейшие исследования могут быть направлены на построение типологии ошибочных математических представлений обучающихся, связанной с детскими ошибками. Одним из перспективных направлений также может стать анализ и отбор лучших практик деятельности общеобразовательных организаций по развитию исходных математических представлений у обучающихся.



Рис. 1. Построение высоты треугольника

Литература

1. A Framework for Evaluating Stopping Rules for Fixed-Form Formative Assessments: Balancing Efficiency and Reliability [Электронный ресурс] / L.R. Ketterlin-Geller [et al.] // Practical Assessment, Research, and Evaluation. 2020. Vol. 25. Article ID 8. 18 p. URL: <https://scholarworks.umass.edu/pare/vol25/iss1/8> (дата обращения: 08.10.2021).
2. Ashlock R.B. Error patterns in computation (10th ed.). Boston: Allyn & Bacon, 2010. 241 p.
3. Baroody A.J., Feil Y., Johnson A.R. An Alternative reconceptualization of procedural and conceptual knowledge // Journal of Research in Mathematical Education. 2007. Vol. 38. № 2. P. 115—131. DOI:10.2307/30034952

4. *Brown J., Skow K.* Mathematics: Identifying and Addressing Student Errors [Электронный ресурс]. [Nashville, TN]: Iris center, 2016. 34 p. URL: https://iris.peabody.vanderbilt.edu/wp-content/uploads/pdf_case_studies/ics_matherr.pdf (дата обращения: 08.10.2021).
5. *Chirume S.* A Critical Analysis of Errors Made by Rural and Urban Students in ‘O’ Level Mathematics Paper 1 (4008/1) in Shurugwi and Gweru Districts, Zimbabwe [Электронный ресурс] // Asian Journal of Education and e-Learning. 2017. Vol. 5. № 2. P. 63—73. URL: <https://ajouronline.com/index.php/AJEEL/article/view/4652> (дата обращения: 08.10.2021).
6. *Clements M.K.* Analyzing children’s errors on written mathematical tasks // Educational Studies in Mathematics. 1980. Vol. 11. P. 1—21. DOI:10.1007/BF00369157
7. *diSessa A.A.* A Friendly Introduction to “Knowledge in Pieces”: Modeling Types of Knowledge and Their Roles in Learning [Электронный ресурс] // Compendium for Early Career Researchers in Mathematics Education. ICME-13 Monographs / Eds. G. Kaiser, N. Presmeg. Cham: Springer, 2019. P. 245—265. URL: https://link.springer.com/chapter/10.1007/978-3-030-15636-7_11 (дата обращения: 08.10.2021).
8. *diSessa A.A.* Toward an epistemology of physics [Электронный ресурс] // Cognition and Instruction. 1993. Vol. 10. № 2/3. P. 105—225. URL: <https://www.jstor.org/stable/3233725> (дата обращения: 08.10.2021).
9. Effects of Formative Assessment Strategies on the Fractions Computation Skills of Students with Disabilities / B.A. Bottge [et al.] // Remedial and Special Education. 2021. Vol. 42. № 5. P. 279—289. DOI:10.1177/0741932520942954
10. Error patterns in Portuguese students’ addition and subtraction calculation tasks: Implications for teaching” / S.R. Watson [et al.] // Journal for Multicultural Education. 2018. Vol. 12. № 1. P. 67—82. DOI:10.1108/JME-01-2017-0002
11. *Fiori C., Zuccheri L.* An experimental research on error patterns in written subtraction // Educational Studies in Mathematics. 2005. Vol. 60. P. 323—331. DOI:10.1007/s10649-005-7530-6
12. *Green M., Piel J.A., Flowers C.* Reversing Education Majors’ Arithmetic Misconceptions with Short-Term Instruction Using Manipulatives // The Journal of Educational Research. 1993. Vol. 101. № 4. P. 234—242. DOI:10.3200/JOER.101.4.234-242
13. *Hwang J., Riccomini P.J.* A Descriptive Analysis of the Error Patterns Observed in the Fraction-Computation Solution Pathways of Students With and Without Learning Disabilities // Assessment for Effective Intervention. 2021. Vol. 46. № 2. P. 132—142. DOI:10.1177/1534508419872256
14. *Justice E., Zanele N.* Formative assessment: A tool for rectifying learners’ errors and misconceptions in mathematics // Integrity journal of education and training. 2020. Vol. 4. № 3. P. 48—52. DOI:10.31248/IJET2020.085
15. *Kakoma L., Themane K.M.* Misconceptions and associated errors in the learning of mathematics place value in south african primary schools: a literature review. Preprints, 2021. 24 p. DOI:10.20944/preprints202105.0456.v1
16. *Lestiana H.T., Rejeki S., Setyawan F.* Identifying Students’ Errors on Fractions // Journal of Research and Advances in Mathematics Education. 2016. Vol. 1. № 2. P. 131—139. DOI:10.23917/jramathedu.v1i2.3396
17. *Levin M.* Conceptual and Procedural Knowledge During Strategy Construction: A Complex Knowledge Systems Perspective // Cognition and Instruction. 2018. Vol. 36. № 3. P. 247—278. DOI:10.1080/07370008.2018.1464003
18. Misconceptions Reconceived: A Constructivist Analysis of Knowledge in Transition / J.P. Smith [et al.] // The Journal of the Learning Sciences. 1994. Vol. 3. № 2. P. 115—163. DOI:10.1207/s15327809jls0302_1
19. *Muthukrishnan P., Kee M.S., Sidhu G.K.* Addition Error Patterns Among the Preschool Children // International Journal of Instruction. 2019. Vol. 12. № 2. P. 115—132. DOI:10.29333/iji.2019.1228a
20. Patterns of Cognitive Strengths and Weaknesses and Relationships to Math Errors / T. Koriakin [et al.] // Journal of Psychoeducational Assessment. 2017. Vol. 35. № 1—2. P. 155—167. DOI:10.1177/0734282916669909
21. *Peng A., Luo Z.* A framework for examining mathematics teacher knowledge as used in error analysis [Электронный ресурс] // For the Learning of Mathematics. 2009. Vol. 29. № 3. P. 22—25. URL: <https://www.jstor.org/stable/25594562> (дата обращения: 08.10.2021).
22. *Radatz H.* Error analysis in mathematics education // Journal for Research in Mathematics Education. 1979. Vol. 10. № 3. P. 163—172. DOI:10.5951/jresmetheduc.10.3.0163
23. *Resnick L.B., Ford W.W.* Psychology of mathematics for instruction. Hillsdale, NJ: L. Erlbaum Associates, 1981. 266 p.
24. *Riccomini P.J.* Identification and remediation of systematic error patterns in subtraction // Learning Disability Quarterly. 2005. Vol. 28. № 3. P. 233—242. DOI:10.2307/1593661
25. *Rittl-Johnson B., Schneider M.* Development of conceptual and procedural knowledge in mathematics // Oxford handbook of numerical cognition / Eds. R.C. Kadosh, A. Dowker. Oxford: Oxford University Press, 2015. P. 1102—1118. DOI:10.1093/oxfordhb/9780199642342.013.014
26. *Roelien H., Ingrid S.* An error analysis in the early grades mathematics — A learning opportunity // South African Journal of Childhood Education. 2014. Vol. 4. № 1. P. 43—60. DOI:10.4102/sajce.v4i1.46
27. Site Quora [Электронный ресурс] / Quora, Inc. 2021. URL: <https://www.quora.com/Is-it-true-that-in-a-division-the-quotient-is-always-less-than-the-divisor> (дата обращения: 08.10.2021).

28. Visible Learning for Mathematics, Grades K-12 [Электронный ресурс]: What Works Best to Optimize Student Learning [Электронный ресурс] / D. Fisher [et al.]. Corwin Press, 2016. 304 p. URL: <https://books.google.ru/books?id=fjcbDQAAQBAJ&lpq=PP1&hl=ru&pg=PR3#v=onepage&q&f=false> (дата обращения: 08.10.2021).

References

1. Ketterlin-Geller L.R. et al. A Framework for Evaluating Stopping Rules for Fixed-Form Formative Assessments: Balancing Efficiency and Reliability [Elektronnyi resurs]. *Practical Assessment, Research, and Evaluation*, 2020. Vol. 25, article 8, 18 p. URL: <https://scholarworks.umass.edu/pare/vol25/iss1/8> (Accessed 08.10.2021).
2. Ashlock R.B. Error patterns in computation (10th ed.). Boston: Allyn & Bacon, 2010. 241 p.
3. Baroody A.J., Feil Y., Johnson A.R. An Alternative reconceptualization of procedural and conceptual knowledge. *Journal of Research in Mathematical Education*, 2007. Vol. 38, no. 2, pp. 115—131. DOI:10.2307/30034952
4. Brown J., Skow K. Mathematics: Identifying and Addressing Student Errors [Elektronnyi resurs]. [Nashville, TN]: Iris center, 2016. 34 p. 2016. URL: https://iris.peabody.vanderbilt.edu/wp-content/uploads/pdf_case_studies/ics_matherr.pdf (Accessed 08.10.2021).
5. Chirume S. A Critical Analysis of Errors Made by Rural and Urban Students in ‘O’ Level Mathematics Paper 1 (4008/1) in Shurugwi and Gweru Districts, Zimbabwe [Elektronnyi resurs]. *Asian Journal of Education and e-Learning*, 2017. Vol. 5, no. 2, pp. 63—73. URL: <https://ajouronline.com/index.php/AJEEL/article/view/4652> (Accessed 08.10.2021).
6. Clements M.K. Analyzing children’s errors on written mathematical tasks. *Educational Studies in Mathematics*, 1980. Vol. 11, pp. 1—21. DOI:10.1007/BF00369157
7. diSessa A.A. A Friendly Introduction to “Knowledge in Pieces”: Modeling Types of Knowledge and Their Roles in Learning [Elektronnyi resurs]. In Kaiser G., Presmeg N. (eds.), *Compendium for Early Career Researchers in Mathematics Education. ICME-13 Monographs*. Cham: Springer, 2019, pp. 245—265. URL: https://link.springer.com/chapter/10.1007/978-3-030-15636-7_11 (Accessed 08.10.2021).
8. diSessa A.A. Toward an epistemology of physics [Elektronnyi resurs]. *Cognition and Instruction*, 1993. Vol. 10, № 2/3, pp. 105—225. URL: <https://www.jstor.org/stable/3233725> (Accessed 08.10.2021).
9. Bottge B.A. et al. Effects of Formative Assessment Strategies on the Fractions Computation Skills of Students With Disabilities. *Remedial and Special Education*, 2021. Vol. 42, no. 5, pp. 279—289. DOI:10.1177/0741932520942954
10. Watson S.R. et al. Error patterns in Portuguese students’ addition and subtraction calculation tasks: Implications for teaching”. *Journal for Multicultural Education*, 2018. Vol. 12, no. 1, pp. 67—82. DOI:10.1108/JME-01-2017-0002
11. Fiori C., Zuccheri L. An experimental research on error patterns in written subtraction. *Educational Studies in Mathematics*, 2005. Vol. 60, pp. 323—331. DOI:10.1007/s10649-005-7530-6
12. Green M., Piel J.A., Flowers C. Reversing Education Majors’ Arithmetic Misconceptions with Short-Term Instruction Using Manipulatives. *The Journal of Educational Research*, 1993. Vol. 101, no. 4, pp. 234—242. DOI:10.3200/JOER.101.4.234-242
13. Hwang J., Riccomini P.J. A Descriptive Analysis of the Error Patterns Observed in the Fraction-Computation Solution Pathways of Students with and Without Learning Disabilities. *Assessment for Effective Intervention*, 2021. Vol. 46, no. 2, pp. 132—142. DOI:10.1177/1534508419872256
14. Justice E., Zanele N. Formative assessment: A tool for rectifying learners’ errors and misconceptions in mathematics. *Integrity journal of education and training*, 2020. Vol. 4, no. 3, pp. 48—52. DOI:10.31248/IJET2020.085
15. Kakoma L., Themane K.M. Misconceptions and associated errors in the learning of mathematics place value in south african primary schools: a literature review. Preprints, 2021. 24 p. DOI:10.20944/preprints202105.0456.v1
16. Lestiana H.T., Rejeki S., Setyawan F. Identifying Students’ Errors on Fractions. *Journal of Research and Advances in Mathematics Education*, 2016. Vol. 1, no. 2, pp. 131—139. DOI:10.23917/jramathedu.v1i2.3396
17. Levin M. Conceptual and Procedural Knowledge During Strategy Construction: A Complex Knowledge Systems Perspective. *Cognition and Instruction*, 2018. Vol. 36, no. 3, pp. 247—278. DOI:10.1080/07370008.2018.1464003
18. Smith J.P. et al. Misconceptions Reconceived: A Constructivist Analysis of Knowledge in Transition. *The Journal of the Learning Sciences*, 1994. Vol. 3, no. 2, pp. 115—163. DOI:10.1207/s15327809jls0302_1
19. Muthukrishnan P., Kee M.S., Sidhu G.K. Addition Error Patterns Among the Preschool Children. *International Journal of Instruction*, 2019. Vol. 12, no. 2, pp. 115—132. DOI:10.29333/iji.2019.1228a
20. Koriakin T. et al. Patterns of Cognitive Strengths and Weaknesses and Relationships to Math Errors. *Journal of Psychoeducational Assessment*, 2017. Vol. 35, no. 1—2, pp. 155—167. DOI:10.1177/0734282916669909
21. Peng A., Luo Z. A framework for examining mathematics teacher knowledge as used in error analysis [Elektronnyi resurs]. *For the Learning of Mathematics*, 2009. Vol. 29, no. 3, pp. 22—25. URL: <https://www.jstor.org/stable/25594562> (Accessed 08.10.2021).
22. Radatz H. Error analysis in mathematics education. *Journal for Research in Mathematics Education*, 1979. Vol. 10, no. 3, pp. 163—172. DOI:10.5951/jresmetheduc.10.3.0163

23. Resnick L.B., Ford W.W. Psychology of mathematics for instruction. Hillsdale, NJ: L. Erlbaum Associates, 1981. 266 p.
24. Riccomini P.J. Identification and remediation of systematic error patterns in subtraction. *Learning Disability Quarterly*, 2005. Vol. 28, no. 3, pp. 233—242. DOI:10.2307/1593661
25. Rittl-Johnson B., Schneider M. Development of conceptual and procedural knowledge in mathematics. In Kadosh R.C., Dowker A. (eds.), *Oxford handbook of numerical cognition*. Oxford: Oxford University Press, 2015, pp. 1102—1118. DOI:10.1093/oxfordhb/9780199642342.013.014
26. Roelien H., Ingrid S. An error analysis in the early grades mathematics — A learning opportunity. *South African Journal of Childhood Education*, 2014. Vol. 4, no. 1, pp. 43—60. DOI:10.4102/sajce.v4i1.46
27. Site Quora [Elektronnyi resurs]. *Quora, Inc.* 2021. URL: <https://www.quora.com/Is-it-true-that-in-a-division-the-quotient-is-always-less-than-the-divisor> (Accessed 08.10.2021)
28. Fisher D. et al. Visible Learning for Mathematics, Grades K-12: What Works Best to Optimize Student Learning [Elektronnyi resurs]. Corwin Press, 2016. 304 p. <https://books.google.ru/books?id=fjcbDQAAQBAJ&lpg=PP1&hl=ru&pg=PR3#v=onepage&q&f=false> (Accessed 08.10.2021).

Информация об авторах

Санина Светлана Петровна, кандидат педагогических наук, доцент кафедры педагогической психологии имени профессора В.А. Гуружапова, Московский государственный психолого-педагогический университет (ФГБОУ ВО МГППУ), г. Москва, Российская Федерация, ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-4033-3913>, e-mail: saninasp@mgppu.ru

Соколов Владимир Леонидович, кандидат психологических наук, доцент кафедры педагогической психологии имени профессора В.А. Гуружапова, Московский государственный психолого-педагогический университет (ФГБОУ ВО МГППУ), г. Москва, Российская Федерация, ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-6180-7567>, e-mail: sokolovvl@mgppu.ru

Information about the authors

Svetlana P. Sanina, PhD in in Education, Associate Professor, Chair of Pedagogical Psychology named after Professor V.A. Guruzhapov, Moscow State University of Psychology & Education, Moscow, Russia, ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-4033-3913>, e-mail: saninasp@mgppu.ru

Vladimir L. Sokolov, PhD in Psychology, Associate Professor, Chair of Pedagogical Psychology named after Professor V.A. Guruzhapov, Moscow State University of Psychology & Education, Moscow, Russia, ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-6180-7567>, e-mail: sokolovvl@mgppu.ru

Получена 08.10.2021

Принята в печать 06.11.2021

Received 08.10.2021

Accepted 06.11.2021