Моделирование и анализ данных
2023. Том 13. № 2. С. 151–179
DOI: https://doi.org/10.17759/mda.2023130209
ISSN: 2219-3758 (печатный)
ISSN: 2311-9454 (online)

Modelling and Data Analysis
2023. Vol. 13, no. 2, pp. 151–179
DOI: https://doi.org/10.17759/mda.2023130209
ISSN: 2219-3758 (print)
ISSN: 2311-9454 (online)

УДК 517.977.55

Суперэллипсоидальные аппроксимации в задаче быстродействия для двумерной линейной дискретной системы с ограниченным управлением

Ибрагимов Д.Н.*
Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет) (МАИ), г. Москва, Российская Федерация
ORCID: https://orcid.org/0000-0001-7472-5520
e-mail: rikk.dan@gmail.com

Подгорная В.М.**
Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет) (МАИ), г. Москва, Российская Федерация
ORCID: https://orcid.org/0009-0004-9956-3002
e-mail: vita1401@outlook.com

В статье рассматривается двумерная линейная дискретная система с ограниченным управлением. Для системы решается задача быстродействия, то есть построение процесса управления, который переводит систему из начального состояния в начало координат за минимальное число шагов. Если множество допустимых значений управления имеет структуру суперэллипса, то задача вычисления оптимального управления может быть сведена к решению системы алгебраических уравнений. Для множеств произвольной структуры разработан метод суперэллипсоидальной аппроксимации. Приведены примеры.

Ключевые слова: линейная система управления, задача быстродействия, множества 0-управляемости, принцип максимума, суперэллипс.

Для цитаты:
Ибрагимов Д.Н., Подгорная В.М. Суперэллипсоидальные аппроксимации в задаче быстродействия для двумерной линейной дискретной системы с ограниченным управлением // Моделирование и анализ данных. 2023. Том 13. № 2. С. 151–179. DOI: https://doi.org/10.17759/mda.2023130209

****Ибрагимов Данис Наилевич,*** кандидат физико-математических наук, доцент кафедры теории вероятностей и компьютерного моделирования, Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет) (МАИ), г. Москва, Российская Федерация, ORCID: https://orcid.org/0000-0001-7472-5520, e-mail: rikk.dan@gmail.com

*****Подгорная Виолетта Михайловна,*** магистрант, инженер кафедры теории вероятностей и компьютерного моделирования, Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет) (МАИ), г. Москва, Российская Федерация, ORCID: https://orcid.org/0009-0004-9956-3002, e-mail: vita1401@outlook.com

1. ВВЕДЕНИЕ

Одним из естественных функционалов качества управления является время, затрачиваемое системой на достижение заданного терминального состояния. На практике полученная задача оптимального управления называется задачей быстродействия. Существенно, что задача быстродействия для линейных дискретных систем обладает рядом серьезных отличий от аналогичной задачи для непрерывных систем. В то время как в случае непрерывного времени решение, полученное на основе принципа максимума Понтрягина [10] для линейной системы, гарантирует релейный характер оптимального по быстродействию управления, аналогичные системы с дискретным временем [11, 12] в силу дискретного характера функционала качества предполагают принципиально иные критерии оптимальности.

Рассмотрение условий оптимальности процесса при использовании различных классических подходов приводит к двум принципиально отличающимся методам формирования оптимального управления. Метод динамического программирования Беллмана [8] позволяет построить оптимальное управление в позиционной форме. В случае, когда множество допустимых значений управления представляет собой многогранник, вычисление каждого управляющего воздействия сводится к решению задачи линейного программирования [6]. Также в [6] продемонстрирован метод формирования оптимального управления в случае произвольных выпуклых ограничений на управление, основанный на проведении полиэдральной аппроксимации [9]. Такой подход обладает рядом недостатков, связанных в основном с вычислительными сложностями. Повышение точности гарантирующего решения в задаче быстродействия достигается за счет наращивания числа вершин полиэдральной аппроксимации, что в итоге приводит к экспоненциальному росту сложности соответствующих задач линейного программирования. По этой причине данный подход при реализации на стандартных вычислительных устройствах отличается либо малой точностью решения, либо сравнительно небольшим временным горизонтом особенно для систем большой размерности.

Напротив, сочетание условий оптимальности с дискретным принципом максимума [10–12] позволяет формировать оптимальное программное управление [4]. Однако существенным условием применимости данных методов является строгая выпуклость множества допустимых значений управления. С другой стороны, соотношение для начального состояния сопряженной системы в случае произвольной структуры ограничений на управление довольно трудно разрешить. В [7] представлен частный случай эллипсоидальной структуры множества допустимых значений управления, а также аналитическое решение задачи быстродействия для такой системы на основе необходимых и достаточных условий оптимальности, представленных в [4].

Естественным подходом является объединение идей построения гарантирующего решения из [6] на основе проведения эллипсоидальной аппроксимации множества допустимых значений управления в сочетании с методами формирования программного управления согласно принципу максимума [4, 7]. Методика эллипсоидальной аппроксимации широко распространена в теории оптимального управления [19, 13].

Однако класс эллипсоидов не позволяет добиться произвольной точности аппроксимации исходного множества, а следовательно, и точности решения задачи оптимального управления. С другой стороны, класс суперэллипсоидальных множеств [14, 15] допускает большой порядок точности при сохранении условий строгой выпуклости, что гарантирует простоту решения поставленной задачи аналогично [7].

Целью данной работы является разработка метода формирования оптимального управления в явном виде для случая суперэллипсоидальной структуры множества допустимых значений управления, а также описание подхода построения суперэллипсоидальной аппроксимации произвольного выпуклого тела с максимально возможной точностью на плоскости. Принципиальным отличие от известных результатов по данной тематике [16–18] является рассмотрение произвольного векторного управления, на значения которого наложены выпуклые ограничения.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. ОБОЗНАЧЕНИЯ

В рамках данной работы будем предполагать, что фазовое пространство совпадает с $\mathbb{R}^2$, которое является евклидовым со скалярным произведением, определяемым соотношением

$$(x, y) = x_1 y_1 + x_2 y_2 .$$

Для произвольного $r \in [1; +\infty)$ введем на $\mathbb{R}^2$ норму

$$\|x\|_r = \left(|x_1|^r + |x_2|^r\right)^{\frac{1}{r}} .$$

При $r = 2$ норма $\|\bullet\|_2$ оказывается согласованной со скалярным произведением. Значение $r = 1$ с точки зрения теории являетя допустимым, но в рамках данной работы рассматриваться не будет, что позволяет ввести число $q > 1$ как сопряженное по Гельдеру числу r:

$$\frac{1}{r} + \frac{1}{q} = 1.$$

Для произвольных множеств $\mathcal{X}, \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2$ и матрицы $D \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ через $\mathcal{X} + \mathcal{U}$ будем обозначать сумму по Минковскому:

$$\mathcal{X} + \mathcal{U} = \{x + u : x \in \mathcal{X}, u \in \mathcal{U}\},$$

а через $D\mathcal{U}$ – образ множества $\mathcal{U}$ при воздействии на него отображения D:

$$D\mathcal{U} = \{Du : u \in \mathcal{U}\}.$$

Через $\partial\mathcal{U}$ и $\operatorname{int}\mathcal{U}$ обозначим множества граничных и внутренних точек $\mathcal{U}$ соответственно. Под $\operatorname{cone}\{\mathcal{U}\}$ будем понимать коническую оболочку множества $\mathcal{U}$ [3, §2 гл. I].

Если множество $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2$ является выпуклым компактом, то для произвольной точки $u \in \mathcal{U}$ через $\mathcal{N}(u,\mathcal{U})$ обозначим нормальный конус множества $\mathcal{U}$ в точке u:

$$\mathcal{N}(u,\mathcal{U}) = \left\{ p \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} : (p,u) = \max_{\tilde{u} \in \mathcal{U}} (p,\tilde{u}) \right\},$$

элементы нормального конуса $\mathcal{N}(u,\mathcal{U})$ будем называть векторами, опорными к $\mathcal{U}$ в точке u. Заметим, что по построению $\mathcal{N}(u,\mathcal{U}) = \varnothing$ тогда и только тогда, когда $u \in \operatorname{int} \mathcal{U}$. Если также верно включение $0 \in \operatorname{int} \mathcal{U}$, то для произвольного $x \in \mathbb{R}^2$ введем функционал Минковского [1, раздел 3 §2 гл. III] или калибровочную функцию [3 §4 гл. I]:

$$M(x,\mathcal{U}) = \inf \{ t > 0 : \ x \in t\mathcal{U} \} = \inf \left\{ t > 0 : \ \frac{x}{t} \in \mathcal{U} \right\}.$$

Будем называть суперэллипсом или суперэллипсоидальным множеством $\mathcal{E}_r(a_1,a_2) \subset \mathbb{R}^2$ для некоторых $a_1 > 0, a_2 > 0, r > 1$ множество вида

$$\mathcal{E}_r(a_1,a_2) = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 : \left| \frac{x_1}{a_1} \right|^r + \left| \frac{x_2}{a_2} \right|^r \le 1 \right\}. \tag{1}$$

Для краткости будем полагать $a = (a_1,a_2)^T$ и обозначать соответствующий суперэллипс через $\mathcal{E}_r(a)$. Под $\operatorname{diag}(a) \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ будем полагать диагональную матрицу, построенную из вектора $a \in \mathbb{R}^2$:

$$\operatorname{diag}(a) = \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix}.$$

3. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ БЫСТРОДЕЙСТВИЯ

Рассматривается линейная дискретная система с ограниченным управлением $(A,\mathcal{U})$:

$$\begin{gathered} x(k+1) = Ax(k) + u(k), \\ x(0) = x, \ u(k) \in \mathcal{U}, \ \ k \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \end{gathered} \tag{2}$$

где $x(k) \in \mathbb{R}^2$ – вектор состояния системы, $u(k) \in \mathbb{R}^2$ – управляющее воздействие, $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ – матрица системы, $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2$ – множество допустимых значений управлений. Предполагается, что $\det A \neq 0$, $\mathcal{U}$ – выпуклый компакт, $0 \in \operatorname{int} \mathcal{U}$.

Для системы (2) решается задача быстродействия, т.е. требуется перевести систему $(A,\mathcal{U})$ из заданного начального состояния $x_0 \in \mathbb{R}^2$ в начало координат за минимальное число шагов $N_{\min}$:

$$N_{\min} = \min \{ N \in \mathbb{N} \cup \{0\} : \ \exists u(0),\ldots,u(N-1) \in \mathcal{U} : \ \ x(N) = 0 \}.$$

Процесс управления $\left\{ x^*(k), u^*(k-1), x_0 \right\}_{k=1}^{N_{\min}}$, удовлетворяющий условию $x^*(N_{\min}) = 0$, будем называть оптимальным. Предполагается, что задача быстродействия для системы $(A,\mathcal{U})$ разрешима, т.е. $N_{\min} < \infty$. Подробно вопросы разрешимости задачи быстродействия для системы (2) рассмотрены в [21].

Вопросы построения оптимальных по быстродействию процессов тесно связаны с аппаратом множеств 0-управляемости [4,6]. Для произвольного $N \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ обозначим через $\mathcal{X}(N) \subset \mathbb{R}^2$ множество 0-управляемости системы (2) за N шагов, т.е. множество тех начальных состояний, из которых систему (2) возможно перевести в 0 за N шагов посредством выбора допустимых управляющих воздействий:

$$\mathcal{X}(N) = \begin{cases} \left\{x_0 \in \mathbb{R}^2 : \exists u(0),\ldots,u(N-1) \in \mathcal{U} : \; x(N) = 0\right\}, & N \in \mathbb{N}, \\ \{0\}, & N = 0. \end{cases} \tag{3}$$

Тогда согласно определению $N_{\min}$ также справедливо представление:

$$N_{\min} = \min\left\{N \in \mathbb{N} \cup \{0\} : \; x_0 \in \mathcal{X}(N)\right\}. \tag{4}$$

При этом управление, как продемонстрировано в [4,6], оптимально тогда и только тогда, когда для всех $k = \overline{0, N_{\min} - 1}$ верно включение

$$x^*(k+1) = Ax^*(k) + u^*(k) \in \mathcal{X}(N_{\min} - k - 1). \tag{5}$$

Известно решение задачи быстродействия в форме принципа максимума для строго выпуклого $\mathcal{U}$.

Теорема 1 ([4, теорема 5]). *Пусть* $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2$ *– строго выпуклое и компактное множество,* $0 \in \operatorname{int} \mathcal{U}$, $\det A \neq 0$, *класс множеств* $\{\mathcal{X}(N)\}_{N=0}^{\infty}$ *определяется согласно* (3)*, процесс управления* $\{x^*(k), u^*(k-1), x_0\}_{k=1}^{N_{\min}}$ *и траектория сопряженной системы* $\{\psi(k)\}_{k=1}^{N_{\min}-1}$ *удовлетворяют соотношениям*

$$\begin{gathered} x^*(k+1) = Ax^*(k) + u^*(k), \\ u^*(k) = \alpha \arg\max_{u \in \mathcal{U}} \left(\left(A^{-1}\right)^T \psi(k), u\right), \\ \psi(k+1) = \left(A^{-1}\right)^T \psi(k), \\ x^*(0) = x_0, \\ -\psi(0) \in \mathcal{N}\left(x_0, \alpha \mathcal{X}(N_{\min})\right), \\ \alpha = M\left(x_0, \mathcal{X}(N_{\min})\right). \end{gathered}$$

Тогда

1. $\{x^*(k), u^*(k-1), x_0\}_{k=1}^{N_{\min}}$ *– оптимальный по быстродействию процесс системы* $(A,\mathcal{U})$*;*
2. *если* $\alpha = 1$*, то оптимальный процесс единственный;*
3. $-\psi(k) \in \mathcal{N}\left(x^*(k), \alpha\mathcal{X}(N_{\min} - k)\right), k = \overline{0, N_{\min} - 1}$.

4. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ АППРОКСИМАЦИИ

С вычислительной точки зрения вопрос применения теоремы 1 сводится к определению α и $\psi(0)$ из условий

$$\begin{gathered} -\psi(0) \in \mathcal{N}\left(x_0, \alpha\mathcal{X}(N_{\min})\right), \\ \alpha = M\left(x_0, \mathcal{X}(N_{\min})\right), \end{gathered} \tag{6}$$

что в случае произвольного выпуклого тела $\mathcal{U}$ может быть нетривиальной задачей.

Основной целью данной работы является построение эффективных методов разрешения условий (6) относительно $\psi(0) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ и $\alpha > 0$ для частного случая, когда $\mathcal{U}$ допускает представление

$$\mathcal{U} = B\mathcal{E}_r(a), \ \ B \in \mathbb{R}^{2\times 2}, \det B \neq 0, a_1, a_2 > 0, r > 1. \tag{7}$$

Другой целью статьи является разработка метода аппроксимации произвольного выпуклого тела $\mathcal{U}$ вложенным в него множеством $\hat{\mathcal{U}}$ вида (7), минимизирующим меру Лебега разности двух множеств $\mu\left(\mathcal{U} \setminus \hat{\mathcal{U}}\right)$, с целью построения гарантирующего решения в задаче быстродействия для системы $(A, \mathcal{U})$.

5. ОПТИМАЛЬНЫЙ ПРОЦЕСС В СЛУЧАЕ СУПЕРЭЛЛИПСОИДАЛЬНОЙ СТРУКТУРЫ ОГРАНИЧЕНИЙ НА УПРАВЛЕНИЕ

Покажем, что условия (6) можно свести к эквивалентной системе алгебраических уравнений в случае (7). Для этого приведем аналитическое описание множеств 0-управлляемости и некоторые свойства строго выпуклых и суперэллипсоидальных множеств.

Лемма 1 ([4, лемма 1]). *Пусть* $\det A \neq 0$*, класс множеств* $\{\mathcal{X}(N)\}_{N=0}^{\infty}$ *определяется соотношениями* (3)*. Тогда для любого* $N \in \mathbb{N}$ *верно представление*

$$\mathcal{X}(N) = -\sum_{k=1}^{N} A^{-1}\mathcal{U}.$$

Лемма 2 ([5, лемма 3]). *Пусть* $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2$ *– строго выпуклый компакт. Тогда для любых различных* $u^1, u^2 \in \mathcal{U}$ *верно*

$$\mathcal{N}\left(u^1, \mathcal{U}\right) \cap \mathcal{N}\left(u^2, \mathcal{U}\right) = \varnothing.$$

Лемма 3 ([5, леммы 5,6]). *Пусть* $\mathcal{U}, \mathcal{X} \subset \mathbb{R}^2$ *– выпуклые компакты,* $u \in \mathcal{U}$ *,* $x \in \mathcal{X}$ *,* $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ *,* $\det A \neq 0$.

Тогда

1. $\mathcal{N}(u + x, \mathcal{U} + \mathcal{X}) = \mathcal{N}(u, \mathcal{U}) \cap \mathcal{N}(x, \mathcal{X})$;
2. $\mathcal{N}(Ax, A\mathcal{X}) = \left(A^{-1}\right)^T \mathcal{N}(x, \mathcal{X})$.

Лемма 3 определяет преобразование нормального конуса выпуклых множеств при невырожденном линейном преобразовании и сложении по Минковскому. С учетом леммы 1 это позволяет описать произвольный нормальный конус любого множества 0-управляемости в терминах нормальных конусов множества $\mathcal{U}$ или $\mathcal{E}_r(a_1, a_2)$ в случае (7). С другой стороны, лемма 2 позволяет установить взаимооднозначное соответствие между граничной точкой и ее нормальным конусом для строго выпуклого множества. Если данную зависимость описать в явном виде, то можно получить алгебраические уравнения, эквивалентные условиям (6).

Введем для произвольного $r > 1$ биективный оператор $I_r : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, действующий по правилу

$$I_r(x) = \left(\operatorname{sign}(x_1)|x_1|^{r-1}, \operatorname{sign}(x_2)|x_2|^{r-1}\right)^T.$$

Лемма 4. *Пусть множество* $\mathcal{E}_r(a)$ *определяется соотношениями* (1). *Тогда*

1. для любого $x \in \partial\mathcal{E}_r(a)$
$$\mathcal{N}(x, \mathcal{E}_r(a)) = \operatorname{cone}\left\{\operatorname{diag}(a)^{-1} I_r\left(\operatorname{diag}(a)^{-1} x\right)\right\} \setminus \{0\}.$$
2. для любого $p \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ *существует единственная*
$$x^*(p) = \arg\max_{x \in \mathcal{E}_r(a)} (p, x) = \frac{\operatorname{diag}(a) I_q\left(\operatorname{diag}(a) p\right)}{\operatorname{diag}(a) p_q^{q-1}}.$$

Доказательство. 1) Поскольку функционал Минковского множества (1) является гладкой функцией на всем $\mathbb{R}^n$:

$$M(x, \mathcal{E}_r(a)) = \left(\left|\frac{x_1}{a_1}\right|^r + \left|\frac{x_2}{a_2}\right|^r\right)^{\frac{1}{r}},$$

то согласно [3, теорема 26.1] для произвольного $x \in \partial\mathcal{E}_r(a)$ верно представление

$$\mathcal{N}(x, \mathcal{E}_r(a)) = \operatorname{cone}\left\{\nabla_x M(x, \mathcal{E}_r(a))\right\} \setminus \{0\} =$$

$$= \operatorname{cone}\left\{\frac{1}{r}\left(\left|\frac{x_1}{a_1}\right|^r + \left|\frac{x_2}{a_2}\right|^r\right)^{\frac{1}{r}-1}\left(\frac{r|x_1|^{r-1}\operatorname{sign}(x_1)}{|a_1|^r}, \frac{r|x_2|^{r-1}\operatorname{sign}(x_2)}{|a_2|^r}\right)^T\right\} \setminus \{0\} =$$

$$= \operatorname{cone}\left\{\left(\frac{|x_1|^{r-1}\operatorname{sign}(x_1)}{|a_1|^r}, \frac{|x_2|^{r-1}\operatorname{sign}(x_2)}{|a_2|^r}\right)^T\right\} \setminus \{0\}.$$

Отсюда следует пункт 1 леммы 4.

2) Согласно определению нормального конуса верно включение

$$p \in \mathcal{N}(x^*(p), \mathcal{E}_r(a)).$$

Тогда с учетом пункта 1 леммы 4 найдется $\alpha > 0$ такое, что

$$p = \alpha\left(\frac{|x_1^*(p)|^{r-1}\operatorname{sign}(x_1^*(p))}{|a_1|^r}, \frac{|x_2^*(p)|^{r-1}\operatorname{sign}(x_2^*(p))}{|a_2|^r}\right)^T,$$

$$x^*(p)=\frac{1}{\alpha^{\frac{1}{r-1}}}\left(\left|p_1a_1^r\right|^{\frac{1}{r-1}}\operatorname{sign}(p_1),\left|p_2a_2^r\right|^{\frac{1}{r-1}}\operatorname{sign}(p_2)\right)^T=$$

$$=\frac{1}{\alpha^{q-1}}\left(\left|p_1\right|^{q-1}a_1^q\operatorname{sign}(p_1),\left|p_2\right|^{q-1}a_2^q\operatorname{sign}(p_2)\right)^T=\frac{1}{\alpha^{q-1}}\operatorname{diag}(a)I_q\left(\operatorname{diag}(a)p\right).$$

Величину α можно вычислить из условия $x^*(p)\in\partial\mathcal{E}_r(a)$, которое эквивалентно равенству

$$\left(\left|\frac{x_1^*(p)}{a_1}\right|^r+\left|\frac{x_2^*(p)}{a_2}\right|^r\right)^{\frac{1}{r}}=1,$$

$$1=\frac{1}{\alpha^{q-1}}\left(\left|\frac{\left|p_1\right|^{q-1}a_1^q}{a_1}\right|^r+\left|\frac{\left|p_2\right|^{q-1}a_2^q}{a_2}\right|^r\right)^{\frac{1}{r}}=\frac{1}{\alpha^{q-1}}\left(\left|p_1a_1\right|^q+\left|p_2a_2\right|^q\right)^{\frac{1}{r}},$$

$$\alpha^{q-1}=\left(\left|p_1a_1\right|^q+\left|p_2a_2\right|^q\right)^{\frac{1}{r}}=\left\|\operatorname{diag}(a)p\right\|_q^{q-1}.$$

Второй пункт леммы 4 полностью доказан.

Лемма 5. *Пусть* $\mathcal{U}=D\mathcal{E}_r(a)$, *где* $\mathcal{E}_r(a)$ *определяется соотношениями* (1), $D\in\mathbb{R}^{2\times2}$, $\det D\neq0$. *Тогда*

1. для любого $u\in\partial\mathcal{U}$

$$\mathcal{N}(u,\mathcal{U})=\operatorname{cone}\left\{\left(D^{-1}\right)^T\operatorname{diag}(a)^{-1}I_r\left(\operatorname{diag}(a)^{-1}\left(D^{-1}\right)^Tu\right)\right\}\setminus\{0\}.$$

2. для любого $p\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$ *существует единственная*

$$u^*(p)=\arg\max_{u\in\mathcal{U}}(p,u)=\frac{D\operatorname{diag}(a)I_q\left(\operatorname{diag}(a)D^Tp\right)}{\left\|\operatorname{diag}(a)D^Tp\right\|_q^{q-1}}.$$

Доказательство. Пункт 1 следует из пункта 1 леммы 4, пункта 2 леммы 3 и представления

$$\mathcal{N}(u,\mathcal{U})=\mathcal{N}\left(DD^{-1}u,D\mathcal{E}_r(a)\right).$$

Пункт 2 следует из пункта 2 леммы 4 и цепочки равенств

$$\arg\max_{u\in\mathcal{U}}(p,u)=D\arg\max_{x\in\mathcal{E}_r(a)}(p,Dx)=D\arg\max_{x\in\mathcal{E}_r(a)}\left(D^Tp,x\right).$$

Лемма 5, с одной стороны, позволяет вычислить оптимальное управление согласно теореме 1 в случае (7) при выборе $D=B$. С другой стороны, лемма 5 в сочетании с леммами 1 и 2 позволяет связать точку на границе множества 0-управляемости с элементом ее нормального конуса при выборе $D=-A^{-k}B$, что позволяет свести условия (6) к эквивалентным алгебраическим уравнениям. Сформулируем данный факт в виде теоремы.

Теорема 2. *Пусть* $\mathcal{U}$ *определяется согласно* (7), $x_0 \neq 0$. *Тогда* $\psi(0) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ *и* $\alpha > 0$ *удовлетворяют условиям* (6) *тогда и только тогда, когда справедливы соотношения*

$$\begin{cases} -x_0 = \alpha \sum\limits_{k=1}^{N_{\min}} \dfrac{A^{-k} B \operatorname{diag}(a) I_q \left(\operatorname{diag}(a) \left(A^{-k} B \right)^T \psi(0) \right)}{\left\| \operatorname{diag}(a) \left(A^{-k} B \right)^T \psi(0) \right\|_q^{q-1}}, \\ \alpha > 0. \end{cases}$$

Доказательство. Пусть $\psi(0) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ и α удовлетворяют условиям (6). Поскольку $x_0 \neq 0$, согласно определению функционала Минковского $\alpha > 0$ и верно включение $\dfrac{x_0}{\alpha} \in \partial \mathcal{X}(N_{\min})$. С учетом леммы 1 и представления (7) также справедливо

$$\frac{x_0}{\alpha} \in \partial \left(-\sum_{k=1}^{N_{\min}} A^{-1} \mathcal{U} \right) = \partial \sum_{k=1}^{N_{\min}} A^{-k} B \mathcal{E}_r(a).$$

Тогда в силу определения алгебраической суммы множеств найдутся такие $x^1 \in A^{-1} B \mathcal{E}_r(a), \ldots, x^{N_{\min}} \in A^{-N_{\min}} B \mathcal{E}_r(a)$, что

$$\frac{x_0}{\alpha} = \sum_{k=1}^{N_{\min}} x^k. \tag{8}$$

С учетом пункта 1 леммы 3

$$-\psi(0) \in \mathcal{N}\left(\frac{x_0}{\alpha}, \mathcal{X}(N_{\min}) \right) = \mathcal{N}\left(\sum_{k=1}^{N_{\min}} x^k, \sum_{k=1}^{N_{\min}} A^{-k} B \mathcal{E}_r(a) \right) =$$

$$= \bigcap_{k=1}^{N_{\min}} \mathcal{N}\left(x^k, A^{-k} B \mathcal{E}_r(a) \right),$$

откуда в силу пункта 2 леммы 5 следует, что

$$x^k = \frac{A^{-k} B \operatorname{diag}(a) I_q \left(-\operatorname{diag}(a) \left(A^{-k} B \right)^T \psi(0) \right)}{\left\| \operatorname{diag}(a) \left(A^{-k} B \right)^T \psi(0) \right\|_q^{q-1}}.$$

Поскольку $I_q(-x) = -I_q(x)$ для любого $x \in \mathbb{R}^2$, из (8) получим

$$\frac{x_0}{\alpha} = \sum_{k=1}^{N_{\min}} x^k = -\frac{A^{-k} B \operatorname{diag}(a) I_q \left(\operatorname{diag}(a) \left(A^{-k} B \right)^T \psi(0) \right)}{\left\| \operatorname{diag}(a) \left(A^{-k} B \right)^T \psi(0) \right\|_q^{q-1}},$$

т.е. $\psi(0) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ и $\alpha > 0$ удовлетворяют указанной в условии теоремы 2 системе.

Пусть $\psi(0) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ и $\alpha > 0$ удовлетворяют указанной в условии теоремы 2 системе. Введем обозначение

$$x^k = \frac{A^{-k} B \operatorname{diag}(a) I_q \left(-\operatorname{diag}(a) \left(A^{-k} B \right)^T \psi(0) \right)}{\left\| \operatorname{diag}(a) \left(A^{-k} B \right)^T \psi(0) \right\|_q^{q-1}}.$$

Тогда с учетом нечетности оператора I_q справедливо равенство (8). При этом в силу пункта 2 леммы 5 для всех $k = \overline{1, N_{\min}}$ верно

$$x^k = \arg \max_{u \in A^{-k} B \mathcal{E}_r(a)} \left(-\psi(0), u \right),$$

что согласно определению нормального конуса эквивалентно включению

$$-\psi(0) \in \mathcal{N}\left(x^k, A^{-k} B \mathcal{E}_r(a) \right).$$

Тогда равенство (8) и пункт 1 леммы 3 приводят к соотношениям

$$-\psi(0) \in \bigcap_{k=1}^{N_{\min}} \mathcal{N}\left(x^k, A^{-k} B \mathcal{E}_r(a) \right) = \mathcal{N}\left(\frac{x_0}{\alpha}, \sum_{k=1}^{N_{\min}} A^{-k} B \mathcal{E}_r(a) \right),$$

что с учетом симметричности относительно нуля множеств вида (1) и леммы 1 эквивалентно включению

$$-\psi(0) \in \mathcal{N}\left(\frac{x_0}{\alpha}, \mathcal{X}(N_{\min}) \right) = \mathcal{N}\left(x_0, \alpha \mathcal{X}(N_{\min}) \right).$$

Поскольку $\mathcal{N}\left(x_0, \alpha \mathcal{X}(N_{\min}) \right) \neq \varnothing$, то $x_0 \in \alpha \mathcal{X}(N_{\min})$, что с учетом определения функционала Минковского приводит к равенству

$$\alpha = M\left(x_0, \mathcal{X}(N_{\min}) \right),$$

то есть справедливы соотношения (6).

Теорема 2 полностью доказана.

Система уравнений, представленная в теореме 2, вообще говоря имеет не единственное решение, поскольку правая часть инвариантна к домножению вектора $\psi(0)$ на любое положительное число. Для использования численных методов можно предложить модификацию данной системы, которая имеет единственное решение.

Следствие 1. *Пусть* $\mathcal{U}$ *определяется согласно* (7). *Тогда для любого* $x_0 \neq 0$ *существует единственно решение системы уравнений*

$$\begin{cases} -x_0 = \alpha \displaystyle\sum_{k=1}^{N_{\min}} \frac{A^{-k} B \operatorname{diag}(a) I_q \left(\operatorname{diag}(a) \left(A^{-k} B \right)^T \psi(0) \right)}{\left\| \operatorname{diag}(a) \left(A^{-k} B \right)^T \psi(0) \right\|_q^{q-1}}, \\ \left(\psi(0), \psi(0) \right) = 1, \\ \alpha > 0, \end{cases}$$

которое также удовлетворяет условиям (6).

Доказательство. В силу теоремы 2 решение системы существует и удовлетворяет условиям (6). Тогда в силу леммы 1 и симметрии множеств вида (1) найдутся такие $x^1 \in A^{-1}B\mathcal{E}_r(a), \ldots, x^{N_{\min}} \in A^{-N_{\min}}B\mathcal{E}_r(a)$, что справедливо равенство $x_0 = x^1 + \ldots + x^{N_{\min}}$. Откуда в силу пункта 1 леммы 3 следует, что любое решение $(\psi(0), \alpha)$ удовлетворяет включению

$$-\psi(0) \in \mathcal{N}(x_0, \alpha\mathcal{X}(N_{\min})) = \bigcap_{k=1}^{N_{\min}} \mathcal{N}(x^k, A^{-k}B\mathcal{E}_r(a)).$$

Но согласно пункту 1 леммы 5 для всех $k = \overline{1, N_{\min}}$ множества $\mathcal{N}(x^k, A^{-k}B\mathcal{E}_r(a))$ являются одномерными лучами с началом в 0, т.е. содержат единственный вектор – $\psi(0)$, удовлетворяющий равенству $(\psi(0), \psi(0)) = 1$. Единственность величины $\alpha > 0$ следует из определения функционала Минковского и условий (6).

Теорема 2 и следствие 1 в совокупности с теоремой 1 позволяют полностью решить задачу быстродействия для линейной дискретной системы в случае (7). Следствие 1 позволяет численно разрешить (6). Одновременно оптимальный процесс и траектория сопряженной системы могут быть вычислены по рекуррентным соотношениям, представленным в теореме 1. Оптимальное управление явным образом определяется пунктом 2 леммы 5.

Пример 1. Рассмотрим пример составления системы алгебраических уравнений, представленной в следствии 1 для следующих параметров:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}, a_1 = 2, a_2 = 3, r = \frac{4}{3}, q = 4, x_0 = \left(\frac{1}{3}, \frac{4}{3}\right)^T.$$

Для $N = 2$ система имеет вид:

$$\begin{cases} \dfrac{0.20(0.20\psi_{01} + 0.81\psi_{02})^3 + 0.91(0.91\psi_{01} - 0.61\psi_{02})^3}{((0.20\psi_{01} + 0.81\psi_{02})^4 + (0.91\psi_{01} - 0.61\psi_{02})^4)^{\frac{3}{4}}} + \\ + \dfrac{0.17(0.17\psi_{01} - 0.32\psi_{02})^3 + 0.17(0.17\psi_{01} + 0.39\psi_{02})^3}{((0.17\psi_{01} - 0.32\psi_{02})^4 + (0.17\psi_{01} + 0.39\psi_{02})^4)^{\frac{3}{4}}} = -\dfrac{1}{3\alpha}, \\ \dfrac{0.81(0.20\psi_{01} + 0.81\psi_{02})^3 - 0.61(0.91\psi_{01} - 0.61\psi_{02})^3}{((0.20\psi_{01} + 0.81\psi_{02})^4 + (0.91\psi_{01} - 0.61\psi_{02})^4)^{\frac{3}{4}}} + \\ + \dfrac{-0.32(0.17\psi_{01} - 0.32\psi_{02})^3 + 0.39(0.17\psi_{01} + 0.39\psi_{02})^3}{((0.17\psi_{01} - 0.32\psi_{02})^4 + (0.17\psi_{01} + 0.39\psi_{02})^4)^{\frac{3}{4}}} = -\dfrac{4}{3\alpha}, \\ \psi_{01}^2 + \psi_{02}^2 = 1, \\ \alpha > 0. \end{cases}$$

Решение данной системы имеет следующий вид

$$\psi_{01} = -0.35, \psi_{02} = -0.94, \alpha = 1.08.$$

Как видно, $\alpha > 1$, откуда следует, что $x_0 \notin \mathcal{X}(2)$.

В таком случае рассмотрим систему для $N = 3$:

$$\begin{cases} \dfrac{0.20(0.20\psi_{01}+0.81\psi_{02})^3+0.91(0.91\psi_{01}-0.61\psi_{02})^3}{((0.20\psi_{01}+0.81\psi_{02})^4+(0.91\psi_{01}-0.61\psi_{02})^4)^{\frac{3}{4}}}+ \\ +\dfrac{0.17(0.17\psi_{01}-0.32\psi_{02})^3+0.17(0.17\psi_{01}+0.39\psi_{02})^3}{((0.17\psi_{01}-0.32\psi_{02})^4+(0.17\psi_{01}+0.39\psi_{02})^4)^{\frac{3}{4}}}+ \\ +\dfrac{0.004(0.004\psi_{01}-0.16\psi_{02})^3+0.11(0.11\psi_{01}-0.14\psi_{02})^3}{((0.004\psi_{01}-0.16\psi_{02})^4+(0.11\psi_{01}-0.14\psi_{02})^4)^{\frac{3}{4}}}=-\dfrac{1}{3\alpha}, \\ \dfrac{0.81(0.20\psi_{01}+0.81\psi_{02})^3-0.61(0.91\psi_{01}-0.61\psi_{02})^3}{((0.20\psi_{01}+0.81\psi_{02})^4+(0.91\psi_{01}-0.61\psi_{02})^4)^{\frac{3}{4}}}+ \\ +\dfrac{-0.32(0.17\psi_{01}-0.32\psi_{02})^3+0.39(0.17\psi_{01}+0.39\psi_{02})^3}{((0.17\psi_{01}-0.32\psi_{02})^4+(0.17\psi_{01}+0.39\psi_{02})^4)^{\frac{3}{4}}}+ \\ +\dfrac{0.17(0.004\psi_{01}+0.16\psi_{02})^3-0.14(0.11\psi_{01}-0.14\psi_{02})^3}{((0.004\psi_{01}+0.16\psi_{02})^4+(0.11\psi_{01}-0.14\psi_{02})^4)^{\frac{3}{4}}}=-\dfrac{4}{3\alpha}, \\ \psi_{01}^2+\psi_{02}^2=1, \\ \alpha>0. \end{cases}$$

Решение данной системы имеет следующий вид:

$$\psi_{01} = -0.50, \psi_{02} = -0.87, \alpha = 0.96.$$

Как можно видеть, $\alpha < 1$. Отсюда следует, что $x_0 \in \mathcal{X}(3)$, и в соответствии с (4)

$$N_{min} = 3.$$

6. ВНУТРЕННЯЯ СУПЕРЭЛЛИПСОИДАЛЬНАЯ АППРОКСИМАЦИЯ ВЫПУКЛОГО ТЕЛА

Случай (7) является достаточно частным. Более того зачастую невозможно гарантировать даже строгую выпуклость множества $\mathcal{U}$. В связи с чем оказывается актуальной внутренняя аппроксимация множества $\mathcal{U}$ множеством $\hat{\mathcal{U}}$ вида (7). Переход в задаче быстродействия от исходной системы $(A, \mathcal{U})$ к вспомогательной системе $(A, \hat{\mathcal{U}})$ позволяет построить гарантирующее управление в исходной системе на основе методов, представленных в разделе 3, применительно к системе вспомогательной.

При этом погрешность гарантирующего решения в сравнении с решением оптимальным будет тем меньше, чем больше по включению аппроксимирующее множество $\hat{\mathcal{U}}$. Данный факт приводит к необходимости решения задачи оптимальной суперэллипсоидальной аппроксимации выпуклого компактного тела $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2$

множеством вида (7). В качестве критерия качества аппроксимации рассмотрим меру Лебега двумерного множества $\mu(\bullet)$ [1]. Результирующая оптимизационная задача примет вид

$$\mu\left(\mathcal{U} \setminus B\mathcal{E}_r\left(a_1, a_2\right)\right) \to \min_{a_1, a_2, r, B}$$

$$a_1 > 0, a_2 > 0,$$

$$r > 1,$$

$$B \in \mathbb{R}^{2\times 2},\ \det B \neq 0,$$

$$\mathcal{E}_r\left(a_1, a_2\right) \subset \mathcal{U}.$$

Данную задачу можно разбить на два отдельных этапа: подбор матрицы ориентации суперэллипса $B \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ и подбор чисел $a_1, a_2 > 0$, $r > 1$, параметризующих множество (1).

7. ПОДБОР МАТРИЦЫ ОРИЕНТАЦИИ СУПЕРЭЛЛИПСОИДАЛЬНОГО МНОЖЕСТВА

Поскольку суперэллипс является симметричным множеством, то предлагается искать матрицу B в виде матрицы поворота. Таким образом, все сводится к тому, чтобы понять, как надо ориентировать аппроксимируемое множество $\mathcal{U}$, чтобы в него можно было вписать максимальный по мере суперэллипс $\mathcal{E}_r\left(a\right)$. В качестве осей симметрии произвольного выпуклого тела $\mathcal{U}$ можно рассмотреть главные оси эллипсоида инерции, которые определяются тензором инерции. Тензор инерции можно рассчитать по следующим соотношениям:

$$J = \begin{pmatrix} J_{xx} & J_{xy} \\ J_{yx} & J_{yy} \end{pmatrix},$$

$$J_{xx} = \int_{\mathcal{U}} y^2\, dx\, dy, \quad J_{yy} = \int_{\mathcal{U}} x^2\, dx\, dy, \quad J_{xy} = J_{yx} = -\int_{\mathcal{U}} xy dx\, dy.$$

Поскольку тензор инерции задается симметрической матрицей, то его собственные векторы будут действительными и взаимно ортогональными [20]. Матрица S, составленная из таких собственных векторов, является ортогональной матрицей, то есть является матрицей поворота:

$$S^{-1} JS = \operatorname{diag}\left(\lambda_1, \lambda_2\right), S^{-1} = S^T.$$

Тогда для перехода в базис собственных векторов тензора инерции необходимо использовать S в качестве матрицы перехода. Будем полагать, что искомая матрица B совпадает с S.

Пример 2. Продемонстрируем, как работает данный метод на примере различных множеств. Рассмотрим в качестве $\mathcal{U}$ многогранник

$$\mathcal{U} = \operatorname{conv}\left\{\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}\right\}.$$

В ходе расчетов было получено следующее значение матрицы B :

$$B = \begin{pmatrix} 0.64 & -0.77 \\ 0.77 & 0.64 \end{pmatrix}.$$

Процедура ориентации множества $\mathcal{U}$ изображена на рисунке 1.

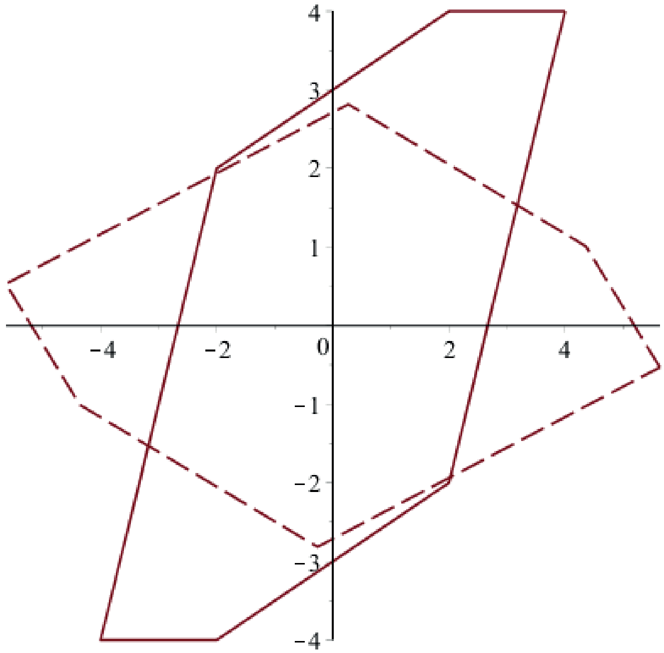

Рис. 1. Исходное множество $\boldsymbol{\mathcal{U}}$ (непрерывной линией) и ориентированное $\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{\mathcal{U}}$ (пунктирной линией)

Пример 3. Рассмотрим в качестве множества $\mathcal{U}$ выпуклое тело, заданное системой ограничений

$$\begin{cases} 0.25y^2 + x^2 \le 4, \\ 0.0625y^2 + x^2 \le 1, \\ 3x - y \le 6, \\ -4x - 3y \le 5, \\ y + 2x \ge -2. \end{cases}$$

Матрица B для такого выпуклого тела имеет вид:

$$B = \begin{pmatrix} 0.08 & -0.99 \\ 0.99 & 0.08 \end{pmatrix}.$$

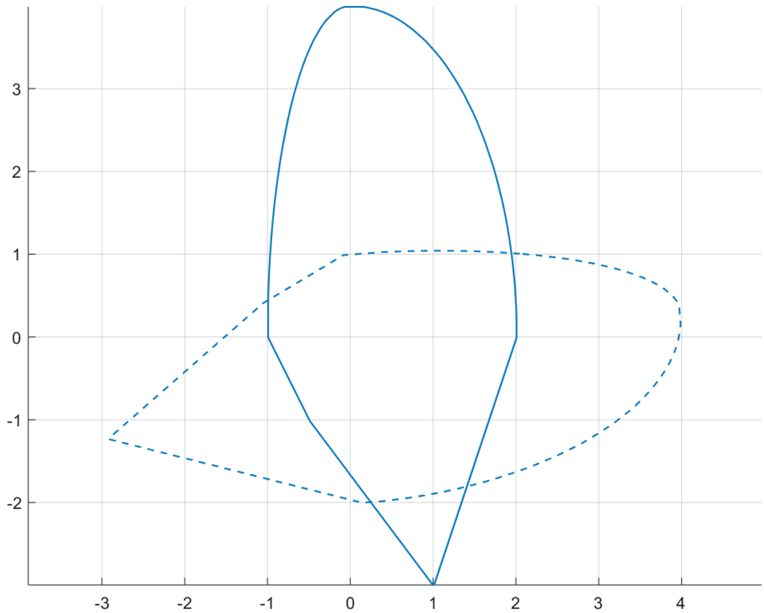

Рис. 2. Исходное множество $\mathcal{U}$ (непрерывной линией) и ориентированное $\boldsymbol{B}^{-1}\mathcal{U}$ (пунктирной линией)

8. ПОДБОР ПАРАМЕТРОВ СУПЕРЭЛЛИПСОИДАЛЬНОГО МНОЖЕСТВА

Далее будем полагать, что матрица B ориентации суперэллипса подобрана в форме матрицы поворота. Поскольку преобразование поворота сохраняет меру Лебега, то справедливы равенства

$$\mu\left(\mathcal{U} \setminus B\mathcal{E}_r\left(a\right)\right) = \mu\left(B^{-1}\left(\mathcal{U} \setminus B\mathcal{E}_r\left(a\right)\right)\right) = \mu\left(B^{-1}\mathcal{U} \setminus \mathcal{E}_r\left(a\right)\right),$$

которые позволяют свести исходную аппроксимационную задачу к задаче оптимальной внутренней аппроксимации произвольного выпуклого компактного тела $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2$ суперэллипсом $\mathcal{E}_r\left(a\right)$. Предполагается, что $0 \in \operatorname{int} \mathcal{U}$. То есть требуется решить следующую аппроксимационную задачу:

$$\begin{gathered} \mu\big(\mathcal{U} \backslash \mathcal{E}_r(a_1, a_2)\big) \to \min_{a_1, a_2, r, B} \\ a_1 > 0, a_2 > 0, \\ r > 1, \\ \mathcal{E}_r(a_1, a_2) \subset \mathcal{U}. \end{gathered} \tag{9}$$

Сформулируем ряд утверждений, которые позволят свести задачу (9) к эквивалентной задаче выпуклого программирования, которая может быть решена численно.

Лемма 6. *Пусть* $\mathcal{E}_r(a)$ *определяется соотношениями* (1). *Тогда*

$$\mu(\mathcal{E}_r(a)) = a_1 a_2 \mu(\mathcal{E}_r(1,1)).$$

Доказательство. Рассмотрим замену переменных

$$\begin{cases} x_1 = a_1 y_1, \\ x_2 = a_2 y_2, \end{cases}$$

якобиан которой имеет вид $J = a_1 a_2$. Тогда

$$\mu(\mathcal{E}_r(a)) = \int\limits_{\left|\frac{x_1}{a_1}\right|^r + \left|\frac{x_2}{a_2}\right|^r \le 1} 1dx = \int\limits_{|y_1|^r + |y_2|^r \le 1} Jdy = a_1 a_2 \mu(\mathcal{E}_r(1,1)).$$

Лемма 7. *Пусть* $\mathcal{E}_r(a)$ *определяется соотношениями* (1). *Тогда*

$$\mu(\mathcal{E}_r(a)) = a_1 a_2 \frac{\left(2\Gamma\left(\frac{1}{r}+1\right)\right)^2}{\Gamma\left(\frac{2}{r}+1\right)}.$$

Доказательство. В части пространства $x_1, x_2 > 0$ рассмотрим замену переменных

$$\begin{cases} x_1 = R(\cos\varphi)^{\frac{2}{r}}, \\ x_2 = R(\sin\varphi)^{\frac{2}{r}}. \end{cases} \tag{10}$$

$$R \ge 0, \quad \varphi \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right).$$

Построим якобиан замены (10).

$$\frac{\partial x_1}{\partial R} = \frac{x_1}{R}, \quad \frac{\partial x_2}{\partial R} = \frac{x_2}{R},$$

$$\frac{\partial x_i}{\partial \varphi} = \begin{cases} \dfrac{2}{r}\dfrac{\cos\varphi}{\sin\varphi} x_i, & i = 2, \\ -\dfrac{2}{r}\dfrac{\sin\varphi}{\cos\varphi} x_i, & i = 1, \end{cases}$$

$$J = \begin{vmatrix} \dfrac{x_1}{R} & -\dfrac{2}{r} x_1 \operatorname{tg}\varphi \\ \dfrac{x_2}{R} & \dfrac{2}{r} x_2 \operatorname{ctg}\varphi \end{vmatrix} = \frac{2}{rR} x_1 x_2 \operatorname{tg}\varphi \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & \operatorname{ctg}^2\varphi \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{2}{rR} x_1 x_2 \operatorname{tg}\varphi \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1+\operatorname{ctg}^2\varphi \end{vmatrix} = \frac{2}{rR} x_1 x_2 \operatorname{tg}\varphi \left(1+\operatorname{ctg}^2\varphi\right) =$$

$$= \frac{2}{rR} x_1 x_2 \frac{1}{\sin\varphi\cos\varphi} = \frac{2R}{r} (\cos\varphi)^{\frac{2}{r}-1} (\sin\varphi)^{\frac{2}{r}-1}.$$

Тогда можно вычислить меру Лебега суперэллипса $\mathcal{E}_r(1,1)$ через интеграл Лебега:

$$\mu\left(\mathcal{E}_r(1,1)\right) = \int\limits_{\left|\frac{x_1}{a_1}\right|^r + \left|\frac{x_2}{a_2}\right|^r \le 1} 1dx = \frac{8}{r}\int\limits_0^1 RdR \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos\varphi)^{\frac{2}{r}-1} (\sin\varphi)^{\frac{2}{r}-1} d\varphi.$$

Вычислим вспомогательный интеграл:

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos\varphi)^{\frac{2}{r}-1} (\sin\varphi)^{\frac{2}{r}-1} d\varphi = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos\varphi)^{\frac{2}{r}-2} (\sin\varphi)^{\frac{2}{r}-1} d\sin\varphi.$$

Введем замену $\sin\varphi = t$:

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos\varphi)^{\frac{2}{r}-2} (\sin\varphi)^{\frac{2}{r}-1} d\sin\varphi = \int\limits_0^1 \left(1-t^2\right)^{\frac{1}{r}-1} t^{\frac{2}{r}-1} dt =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_0^1 \left(1-t^2\right)^{\frac{1}{r}-1} t^{\frac{2}{r}-2} dt^2.$$

Введя следующую замену $t^2 = s$, получаем

$$\frac{1}{2}\int\limits_0^1 \left(1-t^2\right)^{\frac{1}{r}-1} t^{\frac{2}{r}-2} dt^2 = \frac{1}{2}\int\limits_0^1 (1-s)^{\frac{1}{r}-1} s^{\frac{1}{r}-1} ds = \frac{1}{2}\mathrm{B}\left(\frac{1}{r}, \frac{1}{r}\right),$$

где через $\mathrm{B}(x, y)$ обозначена бета-функция Эйлера. Тогда исходный интеграл имеет вид

$$\mu\big(\mathcal{E}_r(1,1)\big) = \frac{2}{r}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{r}\right)\Gamma\left(\frac{1}{r}\right)}{\Gamma\left(\frac{2}{r}\right)} = \frac{\left(\frac{2}{r}\Gamma\left(\frac{1}{r}\right)\right)^2}{\frac{2}{r}\Gamma\left(\frac{2}{r}\right)} = \frac{\left(2\Gamma\left(\frac{1}{r}+1\right)\right)^2}{\Gamma\left(\frac{2}{r}+1\right)}.$$

С учетом леммы 6 окончательно получаем равенство

$$\mu\big(\mathcal{E}_r(a)\big) = a_1 a_2 \frac{\left(2\Gamma\left(\frac{1}{r}+1\right)\right)^2}{\Gamma\left(\frac{2}{r}+1\right)}.$$

Лемма 8. *Пусть $\mathcal{E}_r(a)$ определяется соотношениями (1), $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2$ – выпуклое тело. Тогда включение $\mathcal{E}_r(a) \subset \mathcal{U}$ справедливо тогда и только тогда, когда для любых $x \in \mathbb{R}^2$ верно неравенство*

$$\left|\frac{x_1}{a_1}\right|^r + \left|\frac{x_2}{a_2}\right|^r \ge \left(M(x, \mathcal{U})\right)^r.$$

Лемма 9. *Пусть $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2 \subset \mathbb{R}^2$ – выпуклые и компактные тела, содержащие 0 в качестве внутренней точки. Тогда включение $\mathcal{U}_1 \subset \mathcal{U}_2$ верно тогда и только тогда, когда для произвольного $x \in \mathbb{R}^2$ справедливо неравенство*

$$M(x, \mathcal{U}_1) \geq M(x, \mathcal{U}_2).$$

Доказательство. Пусть $\mathcal{U}_1 \subset \mathcal{U}_2$. Выберем $x_0 \in \mathbb{R}^2$.

$$M(x_0, \mathcal{U}_1) = \alpha_1,$$

$$M(x_0, \mathcal{U}_2) = \alpha_2.$$

Тогда по определению функционала Минковского α_1, α_2 существуют и конечны

$$x_0 \in \alpha_1 \mathcal{U}_1 \subset \alpha_1 \mathcal{U}_2,$$

$$\alpha_1 \in \{t > 0 : x_0 \in t\mathcal{U}_2\},$$

$$\alpha_1 \geq \inf\{t > 0 : x_0 \in t\mathcal{U}_2\} = M(x_0, \mathcal{U}_2) = \alpha_2.$$

Пусть для любых $x \in \mathbb{R}^2$ выполнено неравенство

$$M(x, \mathcal{U}_1) \geq M(x, \mathcal{U}_2).$$

Выберем произвольный $x_0 \in \mathcal{U}_1$. Пусть

$$M(x_0, \mathcal{U}_1) = \alpha_1,$$

$$M(x_0, \mathcal{U}_2) = \alpha_2.$$

Так как $x_0 \in \mathcal{U}_1$, то

$$\alpha_1 \in \{t > 0 : x_0 \in t\mathcal{U}_1\},$$

$$\alpha_1 \geq \inf\{t > 0 : x_0 \in t\mathcal{U}_1\} = M(x_0, \mathcal{U}_1) = \alpha_1 \geq \alpha_2 =$$
$$= \inf\{t > 0 : x_0 \in t\mathcal{U}_2\} = M(x_0, \mathcal{U}_2).$$

Следовательно, по определению функционала Минковского

$$x_0 \in \alpha_1 \mathcal{U}_1 \subset \mathcal{U}_2,$$

$$\mathcal{U}_1 \subset \mathcal{U}_2.$$

Доказательство леммы 8. В силу теоремы Минковского

$$\left\{ x \in \mathbb{R}^n : \left|\frac{x_1}{a_1}\right|^r + \left|\frac{x_2}{a_2}\right|^r \leq 1 \right\} = \mathcal{E}_r(a),$$

$$M(x, \mathcal{E}_r(a)) = \left(\left|\frac{x_1}{a_1}\right|^r + \left|\frac{x_2}{a_2}\right|^r \right)^{\frac{1}{r}}.$$

Таким образом, согласно лемме 9 включение $\mathcal{E}_r(a) \subset \mathcal{U}$ эквивалентно неравенству

$$\left(\left|\frac{x_1}{a_1}\right|^r+\left|\frac{x_2}{a_2}\right|^r\right)^{\frac{1}{r}}\ge M\left(x,\mathcal{U}\right).$$

На основе лемм 7 и 8 представим задачу (9) в эквивалентном виде.

Теорема 3. *Пусть* $\mathcal{E}_r\left(a\right)$ *определяется соотношениями* (1), $\mathcal{U}\subset\mathbb{R}^2$ *– выпуклое тело. Тогда оптимизационная задача* (9) *эквивалентна следующей задаче:*

$$\begin{gathered}a_1a_2\frac{\left(2\Gamma\left(\frac{1}{r}+1\right)\right)^2}{\Gamma\left(\frac{2}{r}+1\right)}\to\max_{a_1,a_2,r}\\ \left(\left|\frac{x_1}{a_1}\right|^r+\left|\frac{x_2}{a_2}\right|^r\right)^{\frac{1}{r}}\ge M(x,\mathcal{U}),\text{для всех } x\in\mathbb{R}^2,\\ a_1>0,\ \ a_2>0,\\ r>1.\end{gathered}\tag{11}$$

Доказательство. Поскольку $\mathcal{E}_r\left(a\right)\subset\mathcal{U}$, то с учетом леммы 7

$$\mu\left(\mathcal{U}\setminus\mathcal{E}_r\left(a\right)\right)=\mu\left(\mathcal{U}\right)-\mu\left(\mathcal{E}_r\left(a\right)\right)=\mu\left(\mathcal{U}\right)-a_1a_2\frac{\left(2\Gamma\left(\frac{1}{r}+1\right)\right)^2}{\Gamma\left(\frac{2}{r}+1\right)}.$$

Так как $\mu\left(\mathcal{U}\right)=const$, то

$$\arg\min_{a_1,a_2,r}\left(\mu(\mathcal{U})-a_1a_2\frac{\left(2\Gamma\left(\frac{1}{r}+1\right)\right)^2}{\Gamma\left(\frac{2}{r}+1\right)}\right)=$$

$$=\arg\max_{a_1,a_2,r}\left(a_1a_2\frac{\left(2\Gamma\left(\frac{1}{r}+1\right)\right)^2}{\Gamma\left(\frac{2}{r}+1\right)}\right).$$

С учетом леммы 8 ограничения задач (11) и (9) эквивалентны.

Теорема 3 доказана.

Вообще говоря, (11) не является задачей выпуклого программирования, а значит, в общем случае она не может быть решена стандартными оптимизационными методами [2]. Проведем ряд преобразований, который позволяет решить (11) численно. Также отдельно рассмотрим случай, когда $\mathcal{U}$ представляет собой многогранник, что позволит в явном виде построить функционал Минковского $M\left(x,\mathcal{U}\right)$.

Лемма 10. *Пусть* $\mathcal{E}_r\left(a\right)$ *определяется соотношениями* (1), $\mathcal{U}$ *– ограниченный полиэдр, т.е. существуют такие* $K\in\mathbb{N}$, $p^1,\ldots,p^K\in\mathbb{R}^2\setminus\{0\}$, $\alpha_1,\alpha_2>0$, *что справедливо представление*

$$\mathcal{U} = \bigcap_{k=1}^{K} \left\{ x \in \mathbb{R}^2 : \left(p^k, x \right) \le \alpha_k \right\}.$$

Тогда включение $\mathcal{E}_r(a) \subset \mathcal{U}$ *эквивалентно условию*

$$\left(p^k, x^*\left(p^k \right) \right) \le \alpha_k, k = \overline{1, K},$$

где $x^*(p) = \arg\max\limits_{x \in \mathcal{E}_r(a)} (p, x)$ *определяется согласно лемме 4.*

Лемма 11. *Пусть существуют* $p^1, \ldots, p^K \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ *и* $\alpha_1, \alpha_2 > 0$ *такие, что*

$$\mathcal{U} = \bigcap_{k=1}^{K} \left\{ x \in \mathbb{R}^2 : \left(p^k, x \right) \le \alpha_k \right\}, 0 \in \operatorname{int} \mathcal{U}.$$

Тогда

$$M(x, \mathcal{U}) = \max_{k=\overline{1,K}} \frac{\left(p^k, x \right)}{\alpha_k}.$$

Доказательство. Поскольку для любого $t > 0$

$$t\mathcal{U} = \left\{ u \in \mathbb{R}^2 : u = tx, \ x \in \mathcal{U} \right\} =$$

$$= \left\{ u \in \mathbb{R}^2 : u = tx, \ \left(p^k, x \right) \le \alpha_k, \quad k = \overline{1, K} \right\} =$$

$$= \left\{ u \in \mathbb{R}^2 : \left(p^k, \frac{u}{t} \right) \le \alpha_k, \quad k = \overline{1, K} \right\} = \left\{ u \in \mathbb{R}^2 : \left(p^k, u \right) \le t\alpha_k, \quad k = \overline{1, K} \right\} =$$

$$= \bigcap_{k=1}^{K} \left\{ u \in \mathbb{R}^2 : \left(p^k, u \right) \le t\alpha_k \right\},$$

то согласно определению функционала Минковского

$$M(x, \mathcal{U}) = \inf \left\{ t > 0 : \ x \in t\mathcal{U} \right\} = \inf \left\{ t > 0 : \ \left(p^k, x \right) \le t\alpha_k, \quad k = \overline{1, K} \right\} =$$

$$= \inf \left\{ t > 0 : \ t \ge \frac{\left(p^k, x \right)}{\alpha_k}, \quad k = \overline{1, K} \right\} = \max_{k=\overline{1,K}} \frac{\left(p^k, x \right)}{\alpha_k}.$$

Лемма 11 полностью доказана.

Доказательство леммы 10. Согласно лемме 8 включение $\mathcal{E}_r(a) \subset \mathcal{U}$ верно тогда и только тогда, когда для всех $x \in \mathbb{R}^2$ верно неравенство

$$\left(\left| \frac{x_1}{a_1} \right|^r + \left| \frac{x_2}{a_2} \right|^r \right)^{\frac{1}{r}} \ge M(x, \mathcal{U}),$$

что с учетом леммы 11 эквивалентно неравенству

$$\left(\left| \frac{x_1}{a_1} \right|^r + \left| \frac{x_2}{a_2} \right|^r \right)^{\frac{1}{r}} \ge \max_{k=\overline{1,K}} \frac{\left(p^k, x \right)}{\alpha_k},$$

$$\alpha_k \geq \frac{\left(p^k, x\right)}{\left(\left|\frac{x_1}{a_1}\right|^r + \left|\frac{x_2}{a_2}\right|^r\right)^{\frac{1}{r}}}.$$

Поскольку данные неравенства должны выполняться при любом $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ можно перейти к равносильному соотношению

$$\alpha_k \geq \max_{k=1,K} \frac{\left(p^k, x\right)}{\left(\left|\frac{x_1}{a_1}\right|^r + \left|\frac{x_2}{a_2}\right|^r\right)^{\frac{1}{r}}} = \max_{k=1,K}\left(p^k, \frac{x}{\left(\left|\frac{x_1}{a_1}\right|^r + \left|\frac{x_2}{a_2}\right|^r\right)^{\frac{1}{r}}}\right) =$$

$$= \max_{y \in \partial\mathcal{E}_r(a)}\left(p^k, y\right) = \left(p^k, x^*\left(p^k\right)\right),$$

где $x^*\left(p^k\right)$ определяется пунктом 2 леммы 4.

Лемма 10 полностью доказана.

Сложность решения задачи (11) заключается в том, что множество допустимых значений вектора переменных оптимизации $\left(r, a_1, a_2\right)^T$ не является выпуклым в $\mathbb{R}^3$. Тем не менее при фиксированном значении $r > 1$, соответствующее множество допустимых значений вектора $\left(a_1, a_2\right)^T$ уже является выпуклым. Сформулируем данный факт в виде леммы.

Лемма 12. *Пусть* $\mathcal{E}_r(a)$ *определяется соотношениями* (1), $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2$ *– выпуклое и компактное тело, для произвольного* $r > 1$ *через* $\mathcal{P}_r(\mathcal{U}) = \{a \in \mathbb{R}^2 : \mathcal{E}_r(a) \subset \mathcal{U},\ a_1 > 0,$ $a_2 > 0\}$ *обозначено множество всех допустимых значений* a_1, a_2 *в задачах* (9) *и* (11).

Тогда $\mathcal{P}_r(\mathcal{U})$ *– выпуклое и компактное множество.*

Доказательство. Обозначим для произвольного выпуклого множества $\mathcal{U}$ и $p \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ через $s(p, \mathcal{U})$ опорную функцию $\mathcal{U}$:

$$s(p, \mathcal{U}) = \sup_{x \in \mathcal{U}}(p, x).$$

Как продемонстрировано в [3], произвольное выпуклое множество $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2$ представляет собой пересечение всех опорных полупространств:

$$\mathcal{U} = \bigcap_{p \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}} \left\{x \in \mathbb{R}^2 : (p, x) \leq s(p, \mathcal{U})\right\}.$$

Тогда вложение $\mathcal{E}_r(a) \subset \mathcal{U}$ эквивалентно тому, что для каждого $p \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ будет выполнено неравенство

$$s\left(p, \mathcal{E}_r(a)\right) \leq s(p, \mathcal{U}). \tag{12}$$

Пусть $a, b \in \mathcal{P}_r(\mathcal{U})$, $\lambda \in (0;1)$, $p \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Тогда в силу пункта 2 леммы 4 и неравенства Минковского [1]

$$s\left(p, \mathcal{E}_r\left(\lambda a + (1-\lambda) b\right)\right) = \max_{x \in \mathcal{E}_r\left(\lambda a + (1-\lambda) b\right)}(p, x) =$$

$$=\left(\left|\left(\lambda a_1+(1-\lambda)b_1\right)p_1\right|^q+\left|\left(\lambda a_2+(1-\lambda)b_2\right)p_2\right|^q\right)^{\frac{1}{q}}\le$$

$$\le\lambda\left(\left|a_1p_1\right|^q+\left|a_2p_2\right|^q\right)^{\frac{1}{q}}+(1-\lambda)\left(\left|b_1p_2\right|^q+\left|b_2p_2\right|^q\right)^{\frac{1}{q}}=$$

$$=\lambda s\left(p,\mathcal{E}_r(a)\right)+(1-\lambda)s\left(p,\mathcal{E}_r(b)\right)\le s\left(p,\mathcal{U}\right).$$

Тогда $\mathcal{E}_r\left(\lambda a+(1-\lambda)b\right)\subset\mathcal{U}$, что по определению эквивалентно включению $\lambda a+(1-\lambda)b\in\mathcal{P}_r\left(\mathcal{U}\right)$. Откуда следует выпуклость $\mathcal{P}_r\left(\mathcal{U}\right)$.

Выберем в качестве $p\in\mathbb{R}^2\setminus\{0\}$ i-й координатный вектор:

$$p=\Big(\underbrace{0,\dots,0}_{i-1},1,0,\dots,0\Big)^T.$$

Тогда по построению

$$s\left(\pm p,\mathcal{E}_r(a)\right)=a_i.$$

С учетом условия (12) получим, что для любого $a\in\mathcal{P}_r\left(\mathcal{U}\right)$ верно неравенство $0\le a_i\le\min\left\{s\left(p,\mathcal{U}\right),s\left(-p,\mathcal{U}\right)\right\}$.

Поскольку $\mathcal{U}$ ограничено, то для любого $p\in\mathbb{R}^2\setminus\{0\}$ значение опорной функции $s\left(p,\mathcal{U}\right)$ конечно. Тогда $\mathcal{P}_r\left(\mathcal{U}\right)$ ограничено.

Замкнутость $\mathcal{P}_r\left(\mathcal{U}\right)$ следует из замкнутости $\mathcal{U}$.

Лемма 12 позволяет аппроксимировать исходные эквивалентные задачи (9) и (11) аналогичной оптимизационной задачей, в которой область определения параметра r сужена до конечного множества:

$$a_1a_2\to\max_{a_1,a_2}$$
$$(a_1,a_2)^T\in\mathcal{P}_r(\mathcal{U}).$$

Пример 4. Построим оптимизационную задачу (13) для заданных численно параметров. В качестве аппроксимируемого множества рассмотрим ориентированный многогранник $B^{-1}\mathcal{U}$ из примера 2:

$$\mathcal{U}_{rot}=B^{-1}\mathcal{U}=\begin{pmatrix}5.63 & 4.36 & 0.27 & -5.63 & -4.36 & 0.27\\ -0.53 & 1.01 & 2.82 & 0.53 & -1.01 & -2.82\end{pmatrix}.$$

Также $\mathcal{U}_{rot}$ допускает представление

$$\mathcal{U}_{rot}=\bigcap_{k=1}^{6}\left\{x\in\mathbb{R}^2:\left(p^k,x\right)\le\alpha_k\right\},$$

$$\left(p^1,\dots,p^6\right)=\begin{pmatrix}1.54 & 1.81 & -2.29 & -1.54 & -1.81 & 2.29\\ 1.28 & 4.09 & 5.90 & -1.28 & -4.09 & -5.90\end{pmatrix},$$

$$\left(\alpha_1,\dots,\alpha_6\right)=\begin{pmatrix}8.00 & 12.00 & 16.00 & 8.00 & 12.00 & 16.00\end{pmatrix}.$$

Построим ограничения задачи (13) на основе леммы 10 для различных значений $r \in \left\{ \frac{4}{3}, 2, 4 \right\}$. Для $r = \frac{4}{3}$ получим ограничения

$$\begin{cases} \left(5.63a_1^4 + 2.65a_2^4\right)^{\frac{1}{4}} \leq 8.00, \\ \left(10.64a_1^4 + 280.22a_2^4\right)^{\frac{1}{4}} \leq 12.00, \\ \left(27.27a_1^4 + 1209.78a_2^4\right)^{\frac{1}{4}} \leq 16.00. \end{cases}$$

Решение задачи (13) имеет вид

$$a_1^{'} \bullet a_2^{'} = 12.83, a_1^{'} = 5.16, a_2^{'} = 2.49.$$

Для $r = 2$ получим ограничения

$$\begin{cases} \sqrt{2.37a_1^2 + 1.63a_2^2} \leq 8.00, \\ \sqrt{3.26a_1^2 + 16.74a_2^2} \leq 12.00, \\ \sqrt{5.22a_1^2 + 34.78a_2^2} \leq 16.00. \end{cases}$$

Решение задачи (13) имеет вид

$$a_1^{''} \bullet a_2^{''} = 9.50, a_1^{''} = 4.94, a_2^{''} = 1.92.$$

Для $r = 4$ получим ограничения

$$\begin{cases} \left(\sqrt[3]{5.63a_1^4} + \sqrt[3]{2.65a_1^4}\right)^{\frac{3}{4}} \leq 8.00, \\ \left(\sqrt[3]{10.64a_1^4} + \sqrt[3]{280.22a_1^4}\right)^{\frac{3}{4}} \leq 12.00, \\ \left(\sqrt[3]{27.27a_1^4} + \sqrt[3]{1209.78a_1^4}\right)^{\frac{3}{4}} \leq 16.00. \end{cases}$$

Решение задачи (13) имеет вид

$$a_1^{'''} \bullet a_2^{'''} = 6.72, a_1^{'''} = 4.17, a_2^{'''} = 1.62.$$

Сравним полученные результаты с точки зрения меры Лебега аппроксимирующих суперэллипсоидальных множеств:

$$\mu\left(\mathcal{E}_{\frac{4}{3}}\left(a_1^{'}, a_2^{'}\right)\right) = 32.61,$$

$$\mu\left(\mathcal{E}_2\left(a_1^{''}, a_2^{''}\right)\right) = 29.84,$$

$$\mu\left(\mathcal{E}_4\left(a_1^{'''}, a_2^{'''}\right)\right) = 24.91.$$

Суперэллипс, соответствующий $r=\frac{4}{3}$, обладает наибольше мерой, а значит, является более качественной аппроксимацией, которую следует использовать для дальнейших расчетов.

9. ФОРМИРОВАНИЕ ОПТИМАЛЬНОГО ПРОЦЕССА

Решим задачу быстродействия для системы $(A,\mathcal{U})$, где $\mathcal{U}$ определяется аналогично примеру 2 и 4,

$$A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}.$$

Множество $B^{-1}\mathcal{U}$ построено в примере 2. Расширим множество значений параметра r в сравнении с примером 4 до $r\in\left\{\frac{6}{5},\frac{4}{3},2,4,6\right\}$.

Решая оптимизационные задачи (13) для различных значений r, получены следующие оптимальные значения параметров суперэллипсоидальной аппроксимации

$$r=\frac{4}{3}, a_1=5.16, a_2=2.49.$$

На рис. 3 изображены результаты аппроксимации.

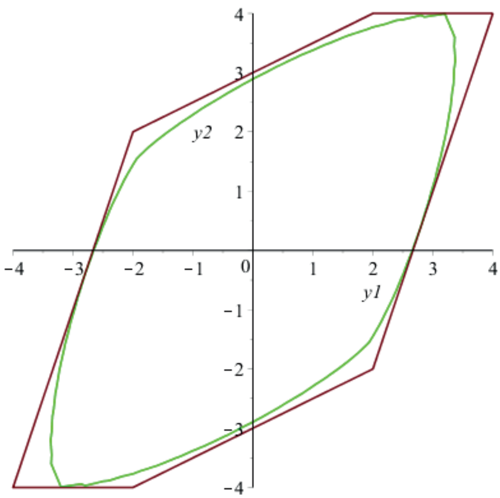

Рис. 3. Исходное множество $\mathcal{U}$ и ориентированный суперэллипс $\boldsymbol{B}^{-1}\mathcal{E}_{\frac{4}{3}}(\boldsymbol{a})$

В ходе решения системы алгебраических уравнений для вычисления $\psi(0),\alpha$, определенной согласно следствию 1, были получены следующие численные значения параметров:

$$\alpha = 0.99, \psi_{01} = -0.94, \psi_{02} = -0.33, N_{\min} = 10.$$

Оптимальная траектория, построенная в соответствии с теоремой 1, представлена в таблице:

Таблица 1

Оптимальная траектория (k=0..5)

k	0	1	2	3	4	5
$x^*(k)$	2.65 2.45	4.4175 –3.6160	1.9235 4.0975	4.5772 –5.6793	0.1947 6.2950	4.1884 –5.6947
$\psi(k)$	–0.9425 –0.3342	–0.4256 0.0914	–0.1723 –0.0809	0.0844 –0.0035	–0.0293 0.0258	–0.0184 0.0075
$u^*(k)$	–3.3325 –3.8160	–3.2955 –3.9360	–3.3673 –3.5053	–3.2805 –3.9615	–2.4959 0.4056	–3.2637 –3.9692

Таблица 2

Оптимальная траектория (k=6..10)

k	6	7	8	9	10
$x^*(k)$	–0.5815 5.9139	3.1613 –4.6335	–1.3000 3.8121	2.1467 –1.7625	0 0
$\psi(k)$	0.0075 –0.0111	–0.0111 0.0062	0.0004 –0.0058	–0.0058 0.0040	0.0007 –0.0032
$u^*(k)$	–1.5897 1.8619	–2.9892 –3.9827	0.9346 3.3497	–2.5309 –3.9091	

10. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В разделе 2 описана постановка задачи быстродействия и задачи аппроксимации. В разделе 3 рассматривается приведение сложноразрешаемых условий из принципа максимума к суперэллипсоидальной структуре ограничений, которую можно разрешить аналитически. В разделе 4 представлена внутренняя суперэллипсоидальная аппроксимация выпуклого тела, в частности рассмотрены подбор матрицы поворота суперэллипса, параметров суперэллипса, которые определяют форму и размеры суперэллипса. В разделе 5 приведен пример решения задачи быстродействия на основе доказанных утверждений.

Разработанные в статье методы могут быть использованы для проведения численных симуляций и моделирования динамики различных технических и естественных систем. Низкая сложность формирования программного управления и построения оптимальных процессов на основе принципа максимума позволяет как решить задачу быстродействия для заданного начального состояния, так и за приемлемое машинное время накопить большой объем модельных данных и различных траекторий для дальнейшего анализа системы. С другой стороны, аппарат суперэллипсоидальных аппроксимаций гарантирует большую точность в сравнении с классическими эллипсоидальными аппроксимационными методами.

Литература

1. *Колмогоров А.Н., Фомин С.В.* Элементы теории функций и функционального анализа // М.: Физматлит. 2012.
2. *Ашманов С.А., Тимохов С.В.* Теория оптимизации в задачах и упражнениях // М.: Наука. 1991.
3. *Рокафеллар Р.* Выпуклый анализ // М.: Мир. 1973.
4. *Ибрагимов Д.Н., Сиротин А.Н.* О задаче быстродействия для класса линейных автономных бесконечномерных систем с дискретным временем и ограниченным управлением // АиТ. 2017. № 10. С. 3–32.
5. *Ибрагимов Д.Н.* О задаче быстродействия для класса линейных автономных бесконечномерных систем с дискретным временем, ограниченным управлением и вырожденным оператором // АиТ. 2019. № 3. С. 3–25.
6. *Ибрагимов Д.Н., Новожилкин Н.М., Порцева Е.Ю.* О достаточных условиях оптимальности гарантирующего управления в задаче быстродействия для линейной нестационарной дискретной системы с ограниченным управлением // АиТ. 2021. № 12. С. 48–72.
7. *Ибрагимов Д.Н.* Оптимальная по быстродействию коррекция орбиты спутника [Электронный ресурс] // Тр. МАИ. 2017. № 94. Доступ в журн. http://trudymai.ru/published.php
8. *Беллман Р.* Динамическое программирование // М.: ИИЛ. 1960.
9. *Каменев Г.К.* Численное исследование эффективности методов полиэдральной аппроксимации выпуклых тел // М.: Вычислительный центр РАН. 2010.
10. *Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Б.Ф.* Математическая теория оптимальных процессов // М.: Наука. 1969.
11. *Болтянский В.Г.* Оптимальное управление дискретными системами // М.: Наука. 1973.
12. *Пропой А.И.* Элементы теории оптимальных дискретных процессов // М.: Наука. 1973.
13. *Kurzhanskiy A., Varaiya P.* Ellipsoidal Techniques for Reachability Analysis of Discrete-Time Linear Systems // IEEE Transactions on Automatic Control. 2007. Vol. 52, № .1. P. 26–38. DOI: 10.1109/TAC.2006.887900
14. *Tobler W.R.* Superquadrics and Angle-Preserving Transformations // IEEECGA. 1981. Vol. 1. № . 1. P. 11–23.
15. *Tobler W.R.* The Hyperelliptical and Other New Pseudo Cylindrical Equal Area Map Projections // Journal of Geophysical Research. 1973. Vol. 78. № . 11. P. 1753–1759.
16. *Desoer C.A., Wing J.* The Minimal Time Regulator Problem for Linear Sampled-Data Systems: General Theory // J. Franklin Inst. 1961. Vol. 272. № . 3. P. 208–228.
17. *Lin W.-S.* Time-Optimal Control Strategy for Saturating Linear Discrete Systems // Int. J. Control. 1986. Vol. 43. № . 5. P. 1343–1351.
18. *Мороз А.И.* Синтез оптимального по быстродействию управления для линейного дискретного объекта третьего порядка // АиТ. 1965. № 2. С. 193–207.
19. *Черноусько Ф.Л.* Оценивание фазового состояния динамических систем. Метод эллипсоидов // М.: Наука. 1988.

20. *Хорн Р., Джонсон И.* Матричный анализ // М.: Мир. 1989.
21. *Ибрагимов Д.Н., Берендакова А.В.* Метод построения и оценивания асимптотических множеств управляемости двумерных линейных дискретных систем с ограниченным управлением // Труды МАИ. 2022. № 126. DOI: 10.34759/trd-2022-126-17

Superellipsoidal Approximations in the Speed-in-action Problem for a Two-dimensional Linear Discrete System with Bounded Control

Danis N. Ibragimov*
Moscow Aviation Institute (National Research University) (MAI), Moscow, Russia
ORCID: https://orcid.org/0000-0001-7472-5520
e-mail: rikk.dan@gmail.com

Violetta M. Podgornaya**
Moscow Aviation Institute (National Research University) (MAI), Moscow, Russia
ORCID: https://orcid.org/0009-0004-9956-3002
e-mail: vita1401@outlook.com

The paper considers a two-dimensional linear discrete system with bounded control. For the system, the problem of speed is solved, that is, the construction of a control process that transfers the system from the initial state to the origin in the minimum number of steps. If the set of acceptable control values has a superellipse structure, then the problem of calculating optimal control can be reduced to solving a system of algebraic equations. A superellipsoidal approximation method has been developed for sets of arbitrary structure. Examples are considered in the paper.

Keywords: linear control system, speed problem, 0-controllability sets, maximum principle, superellipse.

For citation:
Ibragimov D.N., Podgornaya V.M Superellipsoidal Approximations in the Speed-in-action Problem for a Two-dimensional Linear Discrete System with Bounded Control. *Modelirovanie i analiz dannykh = Modelling and Data Analysis*, 2023. Vol. 13, no. 2, pp. 151–179. DOI: 10.17759/mda.2023130209 (In Russ., abstr. in Engl.).

References

1. Kolmogorov A.N., Fomin S.V. Elementy teorii funkcij i funkcional'nogo analiza [Elements of the theory of functions and functional analysis]. *Moskva: Fizmatlit=Moscow: Physical education*. 2012. (In Russ.).
2. Ashmanov S.A., Timohov S.V. Teoriya optimizacii v zadachah i uprazhneniyah [Optimization theory in problems and exercises].*Moskva: Nauka=Moscow: The science*. 1991. (In Russ.).

****Danis N. Ibragimov,*** PhD (Physics and Mathematics), Associate Professor at the Department of Probability Theory and Computer Modeling, Moscow Aviation Institute (National Research University) (MAI), Moscow, Russia, ORCID: https://orcid.org/0000-0001-7472-5520, e-mail: rikk.dan@gmail.com

*****Violetta M. Podgornaya,*** Master's Student, Engineer at the Department of Probability Theory and Computer Modeling, Moscow Aviation Institute (National Research University) (MAI), Moscow, Russia, ORCID: https://orcid.org/0009-0004-9956-3002, e-mail: vita1401@outlook.com

3. Rokafellar R. Vypuklyj analiz [Convex analysis]. *Moskva: Mir=Moscow: Mir*. 1973. (In Russ.).
4. Ibragimov D.N., Sirotin A.N. On the Problem of Operation Speed for the Class of Linear Infinite-Dimensional Discrete-Time Systems with Bounded Control. *Autom. Remote Control*. 2017. Vol. 78. no. 10. pp. 1731–1756.
5. Ibragimov D.N. On the Optimal Speed Problem for the Class of Linear Autonomous Infinite-Dimensional Discrete-Time Systems with Bounded Control and Degenerate Operator. *Autom. Remote Control*. 2019. Vol. 80. no. 3. pp. 393–412.
6. Ibragimov D.N., Novozhilin N.M., Portseva E.Yu. On Sufficient Optimality Conditions for a Guaranteed Control in the Speed Problem for a Linear Time-Varying Discrete-Time System with Bounded Control/ *Autom. Remote Control*. 2021. Vol. 82. no. 12. pp. 2076–2096.
7. Ibragimov D.N. Optimal’naya po bystrodejstviyu korrekciya orbity sputnika [Optimal speed correction of the satellite orbit]. *Elektronnyj zhurnal Trudy MAI= Electronic journal Works of MAI*. 2017. no. 94. Available at: http://trudymai.ru/published.php
8. Bellman R. Dinamicheskoe programmirovanie [Dynamic programming]. *Moskva: Izdatel’stvo inostrannoj literatury=Moscow: Publishing House of Foreign Literature.* 1960. (In Russ.).
9. Kamenev G.K. CHislennoe issledovanie effektivnosti metodov poliedral’noj approksimacii vypuklyh tel [Numerical investigation of the effectiveness of polyhedral approximation methods for convex bodies]. *Moskva: Vychislitel’nyj centr RAN=Moscow: Computing Center of the Russian Academy of Sciences*. 2010. (In Russ.).
10. Pontryagin L.S., Boltyanskij V.G., Gamkrelidze R.V., Mishchenko B.F. Matematicheskaya teoriya optimal’nyh processov [Mathematical theory of optimal processes]. *Moskva: Nauka=Moscow: The science*. 1969. (In Russ.).
11. Boltyanskij V.G. Optimal’noe upravlenie diskretnymi sistemami [Optimal control of discrete systems]. *Moskva: Nauka=Moscow: The science*. 1973. (In Russ.).
12. Propoj A.I. Elementy teorii optimal’nyh diskretnyh processov [Elements of the theory of optimal discrete processes]. *Moskva: Nauka=Moscow: The science*. 1973. (In Russ.).
13. Kurzhanskiy A., Varaiya P. Ellipsoidal Techniques for Reachability Analysis of Discrete-Time Linear Systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*. 2007. Vol. 52, no.1. pp. 26–38. DOI: 10.1109/TAC.2006.887900
14. Tobler W.R. Superquadrics and Angle-Preserving Transformations. *IEEECGA*. 1981. Vol. 1. no. 1. pp. 11–23.
15. Tobler W.R. The Hyperelliptical and Other New Pseudo Cylindrical Equal Area Map Projections. *Journal of Geophysical Research*. 1973. Vol. 78. no. 11. pp. 1753–1759.
16. Desoer C.A., Wing J. The Minimal Time Regulator Problem for Linear Sampled-Data Systems: General Theory. *J. Franklin Inst.* 1961. Vol. 272. no. 3. pp. 208–228.
17. Lin W.-S. Time-Optimal Control Strategy for Saturating Linear Discrete Systems*. Int. J. Control.* 1986. Vol. 43. no. 5. pp. 1343–1351.
18. Moroz A.I. Synthesis of Time-Optimal Control for Linear Discrete Objects of the Third Order. *Autom. Remote Control*. 1965. V. 25. no. 9. pp. 193–206.
19. CHernous’ko F.L. Ocenivanie fazovogo sostoyaniya dinamicheskih sistem. Metod ellipsoidov [Estimation of the phase state of dynamical systems. Ellipsoid method]. *Moskva: Nauka=Moscow: The science*. 1988. (In Russ.).
20. Horn R., Dzhonson I. Matrichnyj analiz [Matrix analysis]. *Moskva: Mir=Moscow: Mir*. 1989. (In Russ.).
21. Ibragimov D.N., Berendakova A.V. Method of Constructing and Estimating Asymptotic Controllability Sets of Two-Dimensional Linear Discrete Systems with Limited Control. *Trudy MAI*. 2022, no. 126. DOI: 10.34759/trd-2022-126-17

Получена 25.04.2023 Received 25.04.2023
Принята в печать 19.05.2023 Accepted 19.05.2023