

## Задача о назначении производственных ресурсов с системой ограничений

**Рассказова В.А.\***

Московский авиационный институт (Национальный Исследовательский Университет) (МАИ), г. Москва, Российская Федерация  
ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-4943-3133>  
e-mail: [varvara.rasskazova@mail.ru](mailto:varvara.rasskazova@mail.ru)

**Скуридин А.А.\*\***

Московский авиационный институт (Национальный Исследовательский Университет) (МАИ), г. Москва, Российская Федерация  
ORCID: <https://orcid.org/0009-0002-6466-2110>  
e-mail: [aasallex@gmail.com](mailto:aasallex@gmail.com)

Задачи оптимизации производства и распределения ресурсов были актуальны во все времена. В статье рассматривается задача о назначении производственных ресурсов с системой ограничений. В качестве примера рассматривается задача оптимизации процесса выливки алюминия-сырца в вакуум-ковши в электролизном отделении литейного цеха. Для решения поставленной задачи предлагается модель целочисленного линейного программирования. Преимуществом такого подхода является возможность гибкой настройки системы ограничений и минимизируемого функционала в соответствии с производственными приоритетами. В статье рассматривается программная реализация разработанной модели, приводятся результаты численного эксперимента на исторических данных. На основе полученного решения делается вывод об эффективности модели целочисленного линейного программирования в данной задаче оптимизации.

**Ключевые слова:** целочисленное линейное программирование, задача оптимизации, оптимизация производства, металлургия.

**Для цитаты:**

*Рассказова В.А., Скуридин А.А.* Задача о назначении производственных ресурсов с системой ограничений // Моделирование и анализ данных. 2023. Том 13. № 2. С. 142–150.  
DOI: <https://doi.org/10.17759/mda.2023130208>

\***Рассказова Варвара Андреевна**, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры теории вероятности и компьютерного моделирования института «Компьютерные науки и прикладная математика», Московский авиационный институт (Национальный Исследовательский Университет) (МАИ), г. Москва, Российская Федерация, ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-4943-3133>, e-mail: [varvara.rasskazova@mail.ru](mailto:varvara.rasskazova@mail.ru)



**\*\*Скурин Алексей Анатольевич**, студент магистратуры института «Компьютерные науки и прикладная математика», Московский авиационный институт (Национальный Исследовательский Университет) (МАИ), г. Москва, Российская Федерация, ORCID: <https://orcid.org/0009-0002-6466-2110>, e-mail: [aasallex@gmail.com](mailto:aasallex@gmail.com)

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Литейный цех – это завод, производящий металлические отливки. Жидкие металлы отливаются в формы, после чего происходит затвердевание металла и удаление материала формы. Один из наиболее распространенных металлов для обработки – алюминий.

На производстве алюминия используется процесс электролиза криолитоглиноземного расплава в специальных электролизных ваннах (электролизерах) для получения алюминия-сырца. Такой алюминий еще не пригоден для использования в промышленности из-за несоответствия стандартам по содержанию примесей. Для определения марки алюминия в электролизере производится проверка на содержание примесей.

Для выливки алюминия из электролизера и дальнейшей его транспортировки в пределах литейного цеха используются вакуум-ковши. Объем вакуум-ковша больше объема электролизера, поэтому для заполнения одного вакуум-ковша требуется несколько электролизеров. На предприятии, производящем алюминий, составляется план по выливке алюминия-сырца в вакуум-ковши, причем алюминий в вакуум-ковше, полученный в результате смешивания алюминия из нескольких электролизеров, должен удовлетворять требованиям по содержанию примесей (быть определенной марки) и по массе. В результате перед сотрудниками электролизного отделения литейного цеха встает вопрос об оптимизации процесса выливки электролизеров с алюминием-сырцом в вакуум-ковши. Для решения данной задачи можно использовать метод целочисленного линейного программирования (ЦЛП). Подобный подход использовался в [9] для решения задачи оптимизации в миксерном отделении сталелитейного завода. Метод целочисленного линейного программирования широко используется для решения транспортных оптимизационных задач. В работе [1] была предложена методология для решения комплексных задач принятия решений в управлении металлургическим производством. В публикации [2] модель ЦЛП применяется для решения задачи о назначении “технологического окна” на участках железнодорожной сети. В работе [3] была разработана модель ЦЛП для решения задачи формирования железнодорожных составов и расписания их движения. В работе [8] модели ЦЛП были предложены для решения некоторых задач промышленного планирования. Работы [4; 5] посвящены классическим постановкам и методам решения задач ЦЛП, включая булевскую задачу ЦЛП, а в работах [6; 7] рассматриваются модели ЦЛП для решения различных задач в области управления, планирования и принятия решений.

Представленный в настоящей работе метод решения задачи о назначении производственных ресурсов с системой ограничений является масштабируемым и



может быть применен не только для решения задачи оптимизации процесса выливки электролизеров с алюминием-сырцом в вакуум-ковши, но и для решения смежных задач оптимизации технологических процессов на металлургическом производстве. Например, задач переназначения технологических маршрутов или управления крановым хозяйством.

## 2. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ЗАДАЧИ О НАЗНАЧЕНИИ ПРОИЗВОДСТВЕННЫХ РЕСУРСОВ С ОГРАНИЧЕНИЯМИ

Рассмотрим задачу о назначении производственных ресурсов с ограничениями в электролизном отделении литейного цеха. На каждый рабочий день для каждой смены составляется план выливки алюминия. Рассмотрим математическую формулировку задачи о назначении производственных ресурсов с ограничениями для конкретной смены.

В распоряжении каждой смены находится некоторое количество электролизеров, обозначим его как  $J$ . Количество требуемых к заполнению для рассматриваемой смены вакуум-ковшей обозначим как  $I$ .

Введем множество требуемых к заполнению для рассматриваемой смены вакуум-ковшей  $K$ , каждый элемент которого представляет из себя вектор  $(\chi_i^{si}, \chi_i^{fe}, \chi_i^{cu}, M_i)^T$ , где  $\chi_i^{si}$  – максимально допустимое содержание примесей кремния,  $\chi_i^{fe}$  – максимально допустимое содержание примесей железа,  $\chi_i^{cu}$  – максимально допустимое содержание примесей меди,  $M_i$  – требуемая масса алюминия-сырца для выливки в  $i$ -й вакуум-ковш.

Также определим множество  $E$  доступных к использованию электролизеров для рассматриваемой смены. Каждый элемент множества  $E$  представляет из себя вектор  $(m_j, \xi_j^{si}, \xi_j^{fe}, \xi_j^{cu})^T$ , где  $m_j$  – масса алюминия в  $j$ -м электролизере,  $\xi_j^{si}$  – содержание примесей кремния в  $j$ -м электролизере,  $\xi_j^{fe}$  – содержание примесей железа в  $j$ -м электролизере,  $\xi_j^{cu}$  – содержание примесей меди в  $j$ -м электролизере.

Введем переменные  $\delta_{i,j}$ , характеризующие использование  $j$ -го электролизера при заполнении  $i$ -го вакуум-ковша. Если  $j$ -й электролизер используется при заполнении  $i$ -го вакуум-ковша, то переменная  $\delta_{i,j}$  будет равна единице, и нулю в обратном случае.

Используя указанные переменные, составим множество допустимых стратегий. По определению переменных  $\delta_{i,j}$  имеем

$$\delta_{i,j} \in \{0, 1\}, i = \overline{1, I}, j = \overline{1, J} \quad (1)$$

Для того, чтобы каждый электролизер был использован в решении не более одного раза, введем ограничения

$$\sum_{i=1}^N \delta_{i,j} \leq 1, j = 1, \dots, J \quad (2)$$

Будем считать, что доля содержания примесей сторонних металлов в заполненном вакуум-ковше равна среднему арифметическому долей содержания примесей сторонних металлов в электролизерах, которые использовались для его заполнения.

Для того, чтобы не превысить максимально допустимое содержание примесей сторонних металлов в вакуум-ковшах, то есть удовлетворить требованиям по марке алюминия-сырца, требуется ввести ограничения на максимально допустимое содержание примесей кремния, железа и меди. Но сначала рассмотрим гипотетическую задачу, в процессе поиска решения которой решатель не смог найти решение, которое удовлетворяет всем ограничениям “на химию”. Это значит, что решатель не смог составить план выливки алюминия-сырца для одного или нескольких вакуум-ковшей. Такая ситуация часто встречается на реальном производстве и полностью исключить возможность ее появления невозможно.

Для того, чтобы решатель мог искать не только полное, но и частичное решение поставленной задачи, введем вспомогательные переменные “на химию”  $\delta_i^{si}$ ,  $\tilde{\delta}_i^{fe}$ .  $\delta_i^{si}$  равна единице, если для  $i$ -го ковша не удалось найти решение, которое удовлетворяет ограничениям на максимально допустимое содержание примесей кремния и нулю в обратном случае. Аналогично для  $\tilde{\delta}_i^{fe}$ .

Введем ограничения на максимально допустимые доли содержания кремния, железа и меди в вакуум-ковшах

$$\sum_{j=1}^J \xi_j^{si} \delta_{i,j} - K_{si,i} \tilde{\delta}_i^{si} \leq \chi_i^{si} \sum_{j=1}^J \delta_{i,j}, \quad i = 1, \dots, I \quad (3)$$

$$\sum_{j=1}^J \xi_j^{fe} \delta_{i,j} - K_{fe,i} \tilde{\delta}_i^{fe} \leq \chi_i^{fe} \sum_{j=1}^J \delta_{i,j}, \quad i = 1, \dots, I \quad (4)$$

$$\sum_{j=1}^J \xi_j^{cu} \delta_{i,j} \leq \chi_i^{cu} \sum_{j=1}^J \delta_{i,j}, \quad i = 1, \dots, I \quad (5)$$

где  $K_{si,i}$ ,  $K_{fe,i}$  – положительные коэффициенты (больше единицы). Их смысл заключается в том, чтобы в случае, когда вспомогательная переменная на “химию” равна единице, гарантировать выполнение ограничения.

Введем ограничения на массу алюминия-сырца в вакуум-ковше. Поскольку выполнить требования на массу можно лишь с некоторой точностью, введем параметр  $\Delta$ , который задает максимально допустимое отклонение фактической массы заполненного вакуум-ковша от его требуемой массы. Также, как и в случае с ограничениями на максимально допустимое содержание примесей, требуется ввести вспомогательные переменные  $\tilde{\delta}_i^m$ .  $\tilde{\delta}_i^m$  равна единице, если для  $i$ -го ковша не удалось найти решение, которое удовлетворяет ограничениям на массу алюминия-сырца в вакуум-ковше и нулю в обратном случае. Итак, ограничения на максимально допустимое отклонение фактической массы заполненного вакуум-ковша от его требуемой массы имеют следующий вид

$$M_i - \Delta \leq \sum_{j=1}^J m_j \delta_{i,j} + 0.5 K_{m,i} \tilde{\delta}_i^m \leq M_i + \Delta, \quad i = 1, \dots, I \quad (6)$$



где  $K_{m,i} = 2M_i$ . Его смысл заключается в том, чтобы в случае, когда вспомогательная переменная равна единице, гарантировать выполнение ограничения.

### 3. ФУНКЦИОНАЛ

С учетом введенных переменных и ограничений получаем следующую задачу минимизации:

$$\sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \delta_{i,j} + \sum_{i=1}^I K_{si,i} \tilde{\delta}_i^{si} + \sum_{i=1}^I K_{fe,i} \tilde{\delta}_i^{fe} + \sum_{i=1}^I K_{m,i} \tilde{\delta}_i^m \rightarrow \min_{\delta_{i,j}, \tilde{\delta}_i^{si}, \tilde{\delta}_i^{fe}, \tilde{\delta}_i^m, i=1, \dots, I, j=1, \dots, J} \quad (7)$$

### 4. СМЫСЛ ВСПОМОГАТЕЛЬНЫХ ПЕРЕМЕННЫХ

Как можно видеть из определения функционала (7), переменные  $\delta_{i,j}^{si}$  входят в него с коэффициентом 1, а вспомогательные переменные  $\tilde{\delta}_i^{si}$ ,  $\tilde{\delta}_i^{fe}$ ,  $\tilde{\delta}_i^m$  с большими положительными коэффициентами  $K_{si,i}$ ,  $K_{fe,i}$ ,  $K_{m,i}$  соответственно. Такой подход необходим, чтобы при решении задачи минимизации программа-решатель отдавала предпочтение использованию переменных  $\delta_{i,j}^{si}$ , поскольку использование любой из вспомогательных переменных  $\tilde{\delta}_i^{si}$ ,  $\tilde{\delta}_i^{fe}$ ,  $\tilde{\delta}_i^m$  (то есть присваивание ей значения 1) приведет к значительному увеличению значения функционала. Если же в оптимальном решении, полученном в результате работы программы-решателя будет задействована хотя бы одна из вспомогательных переменных  $\tilde{\delta}_i^{si}$ ,  $\tilde{\delta}_i^{fe}$ ,  $\tilde{\delta}_i^m$ , это будет индикатором того, что данного множества электролизеров  $E$  недостаточно для выполнения плана по выливке алюминия-сырца в вакуум ковши из множества вакуум-ковшей  $K$ .

### 5. ГИПОТЕЗА И ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ

Была выдвинута гипотеза, согласно которой решение поставленной задачи целочисленного линейного программирования позволит сократить число отклонений от плана производства. Для проверки гипотезы была написана программа на языке Python и проведен вычислительный эксперимент. В качестве решателя задачи целочисленного линейного программирования была использована open-source библиотека PuLP. Для вычислительного эксперимента были использованы исторические данные электролизного отделения литейного цеха. В табл. указаны значения параметров  $K_{si,i}$ ,  $K_{fe,i}$ ,  $K_{m,i}$ , использованные в вычислительном эксперименте.

В результате вычислительного эксперимента было получено оптимальное решение. Иногда алгоритм “перевыполняет” план производства, заполняя вакуум-ковши алюминием-сырцом более высокого качества, чем требуется. Также в некоторых случаях алгоритм использует меньше электролизеров для выливки вакуум-ковша, чем использовали сотрудники завода согласно историческим данным.



## 6. ЗНАЧЕНИЯ ПАРАМЕТРОВ

$K_{si,i}$	$400M_i$
$K_{fe,i}$	$600M_i$
$K_{m,i}$	$2M_i$
$\Delta$	500

Впрочем, алгоритм не всегда справляется с составлением оптимального плана выливки алюминия-сырца в вакуум-ковши. Для некоторых бригад и отдельных вакуум-ковшей программа не смогла найти оптимальный способ выливки алюминия-сырца в вакуум-ковш. Исходя из анализа решения был сделан вывод о недостаточности множества электролизеров  $E$  для нахождения оптимального решения поставленной задачи для некоторых бригад. На реальном производстве, если у некоторой бригады не хватает доступных электролизеров для выполнения плана производства, используются электролизеры другой бригады. В текущей версии математической постановки задачи использование электролизеров другой бригады не предусмотрено.

## 7. АНАЛИЗ ПОЛУЧЕННЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

В результате работы алгоритма было получено распределение электролизеров между вакуум-ковшами, которое удовлетворяет требованиям плана производства в 83 % случаев. Для сравнения, аналогичный показатель, посчитанный на исторических данных равен 58 %. Из этих 83 % в 19 % случаев план производства был выполнен в точности и в 64 % случаев перевыполнен. Для сравнения, аналогичные показатели, посчитанные на исторических данных равны 53,6 % и 4,4 % соответственно. Из этого можно сделать вывод, что предлагаемый алгоритм чаще перевыполняет план, то есть заполняет вакуум-ковши алюминием-сырцом более высокого качества, чем требуется согласно плану производства. Основываясь на этих данных можно сделать вывод об эффективности предлагаемого алгоритма.

## 8. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

По результатам выполнения работы составлена математическая модель задачи о назначении производственных ресурсов с ограничениями в виде задачи целочисленного линейного программирования. Сформулирована гипотеза, согласно которой предложенное решение поставленной задачи позволит сократить число отклонений от плана производства. Для проверки гипотезы написана программа на языке Python с использованием open-source библиотеки PuLP. На основе исторических данных сначала была проведена симуляция процесса распределения электролизеров между вакуум-ковшами. Затем было проведено сравнение распределения электролизеров,



полученного в результате решения поставленной задачи и распределения электролизеров из исторических данных. По результатам сравнения сделан вывод об эффективности предлагаемого алгоритма.

В дальнейшей работе планируется проведение эксперимента по замене односторонних ограничений на максимально допустимые доли содержания кремния, железа и меди в вакуум-ковшах на двусторонние. Это необходимо, чтобы алгоритм не пытался перевыполнить план, как это происходит при односторонних ограничениях в текущей математической постановке задачи. Также планируется добавить возможность использования при поиске решения электролизеров не только рассматриваемой бригады, но и других бригад. Согласно гипотезе, это должно повысить качество решения.

### *Литература*

1. Кабулова Е.Г. Интеллектуальное управление многостадийными системами металлургического производства // Моделирование, оптимизация и информационные технологии. – 2019. – Т. 7. – № 1(24). – С. 341–351. – DOI 10.26102/2310-6018/2019.24.1.022
2. О задаче назначения “технологического окна” на участках железнодорожной сети / Гайданов Д.Н., Игнатов А.Н., Наумов А.В., Рассказова В.А. // Автоматика и телемеханика. – 2020. – № 6. – С. 3–16. – DOI 10.31857/S0005231020060013
3. Лазарев А.А., Мусатова Е.Г. Целочисленные постановки задачи формирования железнодорожных составов и расписания их движения // Управление большими системами: сборник трудов. – 2012. – № 38. – С. 161–169
4. Шевченко В.Н., Золотых Н.Ю. Линейное и целочисленное линейное программирование. Нижний Новгород: Издательство Нижегородского государственного университета им. Н.И. Лобачевского, 2004
5. Схрейвер А. Теория линейного и целочисленного программирования. М.: Мир, 1991
6. Сигал И.Х., Иванова А.П. Введение в прикладное дискретное программирование. Модели и вычислительные алгоритмы. М.: Физматлит, 2007
7. Appa G.M., Pitsoulis L.S., Paul W.H. (Eds.) Handbook on modeling for discrete optimization. Springer Series, Int. Series in Operations Research & Management Science, vol. 88, XXII, 2006
8. Pochet Y., Wolsey L.A. Production planning by mixed integer programming. In: Springer Series in Operations Research & Financial Engineering (Eds. Mikosh, T. V., Resnick, S. I., Robinson, S. M.). 2006
9. Integer Linear Programming in Solving an Optimization Problem at the Mixing Department of the Metallurgical Production. / Gainanov D.N., Berenov D.A., Nikolaev E.A., Rasskazova V.A. Lecture Notes in Computer Science (2023) vol. 13621, pp. 145–161. doi: [https://doi.org/10.1007/978-3-031-24866-5\\_12](https://doi.org/10.1007/978-3-031-24866-5_12)



# The Problem of Allocation of Production Resources with a System of Constraints

**Varvara A. Rasskazova\***

Moscow Aviation Institute (National Research University) (MAI), Moscow, Russia  
ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-4943-3133>  
e-mail: [varvara.rasskazova@mail.ru](mailto:varvara.rasskazova@mail.ru)

**Alexey A. Skuridin\*\***

Moscow Aviation Institute (National Research University) (MAI), Moscow, Russia  
ORCID: <https://orcid.org/0009-0002-6466-2110>  
e-mail: [aasallex@gmail.com](mailto:aasallex@gmail.com)

The problem of optimizing production and resource allocation have been always relevant. The paper deals with the problem of allocation of production resources with a system of constraints. As an example, the problem of optimizing the process of pouring raw aluminum into vacuum buckets in the electrolysis department of the foundry is considered. To solve this problem, a model of integer linear programming is proposed. The advantage of this approach is the ability to flexibly configure the system of constraints and minimized of objective in accordance with production priorities. The paper discusses the software implementation of the developed model and presents the results of a numerical experiment based on test samples. Based on the obtained solution, a conclusion is made about the effectiveness of the integer linear programming model in this optimization problem.

**Keywords:** integer linear programming, optimization problem, production optimization, metallurgy.

## For citation:

Rasskazova V.A., Skuridin A.A. The Problem of Allocation of Production Resources with a System of Constraints. *Modelirovanie i analiz dannykh = Modelling and Data Analysis*, 2023. Vol. 13, no. 2, pp. 142–150. DOI: 10.17759/mda.2023130208 (In Russ., abstr. in Engl.).

## References

1. Kabulova E.G. Intellektual'noe upravlenie mnogostadiinymi sistemami metallurgicheskogo proizvodstva [Intelligent management of multi-stage systems of metallurgical production]. *Modelirovanie, optimizatsiya i informatsionnye tekhnologii*. [Modeling, optimization and information technology.] – 2019. – T. 7. – № 1(24). – S. 341–351. – DOI 10.26102/2310-6018/2019.24.1.022

\***Varvara A. Rasskazova**, PhD (Physics and Mathematics), Associate Professor, Department of Probability Theory and Computer Modeling, Institute of Computer Science and Applied Mathematics, Moscow Aviation Institute (National Research University) (MAI), Moscow, Russia, ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-4943-3133>, e-mail: [varvara.rasskazova@mail.ru](mailto:varvara.rasskazova@mail.ru)

\*\***Alexey A. Skuridin**, Graduate Student, Department of the Institute of Computer Science and Applied Mathematics, Moscow Aviation Institute (National Research University) (MAI), Moscow, Russia, ORCID: <https://orcid.org/0009-0002-6466-2110>, e-mail: [aas-allex@gmail.com](mailto:aas-allex@gmail.com)





2. O zadache naznacheniya “tekhnologicheskogo okna” na uchastkakh zheleznodorozhnoi seti [About the task of assigning a “technological window” on sections of the railway network]. Gainanov D.N., Ignatov A.N., Naumov A.V., Rasskazova V.A. *Avtomatika i telemekhanika*. [Automation and telemechanics.] – 2020. – № 6. – S. 3–16. – DOI 10.31857/S0005231020060013
3. Lazarev A.A., Musatova E.G. Tselochislennye postanovki zadachi formirovaniya zheleznodorozhnykh sostavov i raspisaniya ikh dvizheniya [Integer statements of the problem of forming railway trains and their schedules]. *Upravlenie bol’shimi sistemami: sbornik trudov*. [Managing large systems: a collection of works.] – 2012. – № 38. – S. 161–169
4. Shevchenko V.N., Zolotykh N. Yu. Lineinoe i tselochislennoe lineinoe programmirovaniye. [Linear and integer linear programming.] Nizhnii Novgorod: Izdatel’stvo Nizhegorodskogo gosuniversiteta im. N.I. Lobachevskogo [Nizhni Novgorod University Press (NNUP)], 2004
5. Skhreiber A. Teoriya lineinogo i tselochislennogo programmirovaniya. [Theory of linear and integer programming.] Moscow: Mir, 1991
6. Sigal I. Kh., Ivanova A.P. Vvedenie v prikladnoe diskretnoe programmirovaniye. Modeli i vychislitel’nye algoritmy. [Introduction to applied discrete programming. Models and computational algorithms.] Moscow: Fizmatlit, 2007
7. Appa G.M., Pitsoulis L.S., Paul, W. H. (Eds.) Handbook on modeling for discrete optimization. Springer Series, Int. Series in Operations Research & Management Science, vol. 88, XXII, 2006
8. Pochet Y., Wolsey L.A. Production planning by mixed integer programming. In: Springer Series in Operations Research & Financial Engineering (Eds. Mikosh, T. V., Resnick, S. I., Robinson, S. M.). 2006
9. Integer Linear Programming in Solving an Optimization Problem at the Mixing Department of the Metallurgical Production. Gainanov D.N., Berenov D.A., Nikolaev E.A., Rasskazova V.A. *Lecture Notes in Computer Science* (2023), vol. 13621, pp. 145–161. doi: [https://doi.org/10.1007/978-3-031-24866-5\\_12](https://doi.org/10.1007/978-3-031-24866-5_12)

Получена 17.04.2023

Принята в печать 17.05.2023

Received 17.04.2023

Accepted 17.05.2023