



****Битюков Павел Юрьевич**, студент-бакалавр, Московский энергетический институт (национальный исследовательский университет) (МЭИ), г. Москва, Российская Федерация, ORCID: <https://orcid.org/0009-0000-8697-7047>, e-mail: p.bityukoff@yandex.ru

1. ВВЕДЕНИЕ

Вейвлеты и схемы подразделений тесно связаны. Как материнский вейвлет так и масштабирующая функция, возникающие в рамках ортогонального или неортогонального кратномасштабных анализов могут быть получены через стационарные схемы подразделений, где в качестве маски такой схемы используется масштабная последовательность [1]. Вейвлеты давно применяются в задачах обработки изображений, а схемы подразделений возникли в задачах геометрического моделирования.

В данной статье рассматривается вопрос получения параметрических семейств биортогональных вейвлетов по схеме подъема вейвлетов Хаара, исследуется класс гладкости и порядок этих вейвлетов. В качестве применения в статье рассматривается проблема подрисовки изображения, которая возникает [2], когда часть пиксельных данных на изображении отсутствует или перезаписана другими средствами. С этим приходится иметь дело, например, при восстановлении древних рисунков, когда часть изображения отсутствует или повреждена из-за старения или царапин. Задача подрисовки состоит в том, чтобы восстановить отсутствующую область из наблюдаемых неполных данных. В последние годы было предложено много полезных методов для решения этой проблемы, в том числе были предложены методы, основанные на вейвлетах [3,4]. В данной статье решение этой задачи будет также основано на использовании вейвлетов, но выбор нужного вейвлета будет происходить не из общих соображений, а из параметрического семейства в процессе решения оптимизационной задачи.

В статье даются основные теоретические сведения из теории стационарных схем подразделений, приводятся достаточные условия сходимости таких схем, а также требования, какие необходимо наложить на маску схемы, чтобы получить функцию нужного класса гладкости. Кроме этого, рассматриваются некоторые результаты, касающиеся биортогональных вейвлет-систем и схемы подъема, посредством которой можно улучшать свойства вейвлета. Эти теоретические сведения затем применяются к подъему вейвлетов Хаара и получению из них непрерывных и гладких вейвлетов с большим чем у вейвлетов Хаара числом нулевых моментов. Как известно, число нулевых моментов определяет скорость убывания вейвлет-коэффициентов, что важно, например, в задачах сжатия данных. Последний раздел статьи посвящен вычислительным экспериментам.

2. СХЕМЫ ПОДРАЗДЕЛЕНИЙ. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

В данном разделе приводятся основные результаты, касающиеся стационарных схем подразделений, которые будут использованы в дальнейшем. Схема подраз-

деления [5] определяется заданной последовательностью $a = \{a_\alpha\}_{\alpha \in \mathbf{Z}^s}$, $s \in \mathbf{N}$. Мы будем предполагать, что $\text{supp } a = \{\alpha : a_\alpha \neq 0\}$ – конечное множество. Обозначим $l_\infty(\mathbf{Z}^s)$ линейное нормированное пространство ограниченных последовательностей $v = \{v_\alpha\}_{\alpha \in \mathbf{Z}^s}$, в котором норма определяется равенством $\|v\|_\infty = \sup_{\alpha \in \mathbf{Z}^s} |v_\alpha|$.

Введем в рассмотрение оператор $S_a : l_\infty(\mathbf{Z}^s) \rightarrow l_\infty(\mathbf{Z}^s)$, который определим формулой $(S_a v)_\alpha = \sum_{\beta \in \mathbf{Z}^s} a_{\alpha-2\beta} v_\beta$, $v \in l_\infty(\mathbf{Z}^s)$. Последовательность $\{a_\alpha\}_{\alpha \in \mathbf{Z}^s}$ будем называть маской подразделения, а S_a – оператором подразделений.

Определение 1. [5] Будем говорить, что схема подразделений

$$v^m = S_a v^{m-1} = (S_a)^m v, m = 1, 2, \dots, v^0 = v$$

сходится в $l_\infty(\mathbf{Z}^s)$, если существует непрерывная функция $(S_a^\infty v) : \mathbf{R}^s \rightarrow \mathbf{R}$ такая, что

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \left\| \left((S_a^\infty v) \left(\frac{\cdot}{2^m} \right) - v^m \right) \right\|_\infty = 0. \quad (1)$$

Если функция $(S_a^\infty v)$ удовлетворяет дополнительному свойству $(S_a^\infty v)(k) = v_k$, $k \in \mathbf{Z}^s$, то она называется интерполяционной.

Теорема 1. (Необходимое условие сходимости схемы подразделений [5]) Пусть $s = 1$. Предположим, что схема подразделений сходится для некоторого $v \in l_\infty(\mathbf{Z})$ и $(S_a^\infty v) \not\equiv 0$. Тогда маска удовлетворяет условию $\sum_{\beta \in \mathbf{Z}} a_{2\beta} = 1$; $\sum_{\beta \in \mathbf{Z}} a_{2\beta+1} = 1$.

Введем в рассмотрение многочлен Лорана $A(z) = \sum_{n \in \mathbf{Z}} a_n z^n$. Тогда из необходимого условия сходимости схемы подразделений получаем: $A(-1) = 0$; $A(1) = 2$. Из первого равенства следует, что, если маска имеет конечный носитель, т.е. $A(z) = z^{-k} R(z)$, где $R(z)$ – многочлен, то этот многочлен делится нацело на $(z+1)$. Поэтому $A(z) = (1+z)Q(z)$, $Q(1) = 1$. Пусть $Q(z) = \sum_{n \in \mathbf{Z}} q_n z^n$ и $q = \{q_n\}_{n \in \mathbf{Z}}$.

Теорема 2. [6] Пусть $s = 1$. Схема S_a сходится при любом выборе начальной последовательности v^0 , если существует $L \in \mathbf{N}$ такое, что $\|(S_q)^L\|_\infty < 1$.

Если обозначить $Q_L(z) = Q(z)Q(z^2)\dots Q(z^{2^{L-1}}) = \sum_j q_j^{[L]} z^j$, то имеет место равенство [6]:

$$\|(S_q)^L\|_\infty = \max_{0 \leq i < 2^L} \sum_j |q_{i-j \cdot 2^L}^{[L]}|.$$

Теорема 3. [6] Пусть $s = 1$ и $A(z) = \left(\frac{1+z}{2}\right)^n Q(z)$. Если S_q сходится при любом выборе начальной последовательности, то $(S_a^\infty v) \in C^n(\mathbf{R})$ для любой начальной последовательности v и $\frac{d^n}{dt^n} (S_a^\infty v)(t) = (S_b^\infty (\Delta^n v))(t)$, где $\Delta^n v = \Delta(\Delta^{n-1} v)$ и $(\Delta^1 v)_k = v_k - v_{k-1}$, $k \in \mathbf{Z}$.

Теорема 4. [5] Предположим, что схема подразделений сходится для всех $v \in l_\infty(\mathbf{Z}^s)$ и для некоторого $v \in l_\infty(\mathbf{Z}^s)$ функция $(S_a^\infty v) \not\equiv 0$. Тогда маска $\{a_\alpha\}_{\alpha \in \mathbf{Z}^s}$



определяет единственную непрерывную функцию с компактным носителем φ , удовлетворяющую условиям:

$$\varphi(t) = \sum_{\alpha \in \mathbf{Z}} a_{\alpha} \varphi(2t - \alpha), t \in \mathbf{R}^s, \quad \sum_{\alpha \in \mathbf{Z}} \varphi(t - \alpha) = 1, \forall t \in \mathbf{R}^s.$$

Более того, $(S_a^{\infty} v)(t) = \sum_{\alpha \in \mathbf{Z}^s} v_{\alpha} \varphi(t - \alpha), t \in \mathbf{R}^s.$

3. БИОРТОГОНАЛЬНЫЕ ВЕЙВЛЕТЫ И СХЕМА ПОДЪЕМА

Пусть $\varphi, \tilde{\varphi}$ – две масштабирующие функции [7,1] с масштабными последовательностями u, \tilde{u} , которые имеют конечные носители:

$$\varphi(t) = \sqrt{2} \sum_{k \in \mathbf{Z}} u_k \varphi(2t - k), \quad \tilde{\varphi}(t) = \sqrt{2} \sum_{k \in \mathbf{Z}} \tilde{u}_k \tilde{\varphi}(2t - k).$$

Будем рассматривать последовательности с действительными членами $u_k, \tilde{u}_k \in \mathbf{R}$. Обозначим $\varphi_{j,k}(x) = 2^j \varphi(2^j x - k)$. Тогда, если $\psi, \tilde{\psi}$ – соответствующие вейвлеты, то

$$\psi = \sum_{k \in \mathbf{Z}} v_k \varphi_{1,k}, \quad \tilde{\psi} = \sum_{k \in \mathbf{Z}} \tilde{v}_k \tilde{\varphi}_{1,k}.$$

Многочлены Лорана, соответствующие данным последовательностям, будем обозначать $U(z), \tilde{U}(z), V(z), \tilde{V}(z)$. Для биортогональных систем имеет место равенство [8]:

$$U(z) \overline{\tilde{U}(z)} + U(-z) \overline{\tilde{U}(-z)} = 2 \tag{2}$$

для любых $z = e^{-i\xi}$ на единичной окружности и

$$\tilde{V}(z) = zU(-z^{-1}), V(z) = z\tilde{U}(-z^{-1}) \tag{3}$$

Определение 2. [9, 10] Множество $\{u, \tilde{u}, v, \tilde{v}\}$ называется множеством конечных биортогональных фильтров, если соответствующая система функций $\{\varphi, \tilde{\varphi}, \psi, \tilde{\psi}\}$ биортогональна, т.е. $(\varphi_{j,k}, \tilde{\varphi}_{j,k'}) = \delta_{k,k'}, (\psi_{j,m}, \tilde{\psi}_{j,m'}) = \delta_{m,m'}, (\tilde{\psi}_{j,m}, \varphi_{j,k}) = 0; (\tilde{\varphi}_{j,k}, \psi_{j,m}) = 0$ для всех $j, m, k, k', m' \in \mathbf{Z}$.

Теорема 5. (Схема подъема [9,10]) Выберем начальное множество конечных биортогональных фильтров $\{u, \tilde{u}_0, v_0, \tilde{v}\}$. Тогда новое множество конечных биортогональных фильтров $\{u, \tilde{u}, v, \tilde{v}\}$ может быть найдено следующим образом

$$\tilde{U}(z) = \tilde{U}_0(z) + \tilde{V}(z) \cdot P(z^{-2}), V(z) = V_0(z) - U(z) \cdot P(z^2),$$

где $P(z)$ – произвольный многочлен Лорана.

Помимо схемы подъема известен также и двойственный подъем $\{u_0, \tilde{u}, v, \tilde{v}_0\} \rightarrow \{u, \tilde{u}, v, \tilde{v}\}$, который осуществляется по следующим формулам [9, 10]:

$$U(z) = U_0(z) - V(z) \cdot \tilde{P}(z^{-2}), \tilde{V}(z) = \tilde{V}_0(z) + \tilde{U}(z) \cdot \tilde{P}(z^2),$$

После применения подъема и двойственного подъема сохраняются [9] равенства (2) и (3). С помощью поема или двойственного подъема путем надлежащим образом выбора многочленов $P(z)$, $\tilde{P}(z)$, могут быть улучшены свойства масштабирующих функций и вейвлетов.

Как известно, в случае биортогональных вейвлет-систем для $f \in L_2(\mathbf{R})$ имеет место равенство [8]:

$$f = \sum_{n \in \mathbf{Z}} (f, \tilde{\varphi}_{j,n}) \varphi_{j,n} + \sum_{s \geq j} \sum_{n \in \mathbf{Z}} (f, \tilde{\psi}_{s,n}) \psi_{s,n} = \sum_{n \in \mathbf{Z}} c_{j,n} \varphi_{j,n} + \sum_{s \geq j} \sum_{n \in \mathbf{Z}} d_{s,n} \psi_{s,n}, \quad (4)$$

где $c_{j,k} = (f, \tilde{\varphi}_{j,k})$, $d_{j,m} = (f, \tilde{\psi}_{j,m})$. Кроме того, имеет место теорема

Теорема 6. [7] Если $f \in C^N(\mathbf{R})$ и $\int_{-\infty}^{\infty} x^l \tilde{\psi}(x) dx = 0$, $l = 0, 1, \dots, N-1$, то

$$(f, \tilde{\psi}_{j,k}) = O\left(\frac{1}{2^{j(N+0.5)}}\right), \quad j \rightarrow +\infty.$$

Про вейвлет $\tilde{\psi}$, удовлетворяющий условию теоремы, говорят [7], что он порядка N или имеет N нулевых моментов. В данной статье будем получать функции $\varphi \in C^k(\mathbf{R})$, $k = 0, 1, \dots$, а вейвлеты $\tilde{\psi}$, по возможности, будем делать большего порядка, тем самым управляя скоростью убывания коэффициентов.

Пусть функция f представлена в виде $f = \sum_{n \in \mathbf{Z}} (f, \tilde{\varphi}_{0,n}) \varphi_{0,n}$. По формуле (4)

$$f = \sum_{n \in \mathbf{Z}} (f, \tilde{\varphi}_{0,n}) \varphi_{0,n} = \sum_{n \in \mathbf{Z}} c_{-j,n} \varphi_{-j,n} + \sum_{-j \leq s \leq 0} \sum_{m \in \mathbf{Z}} d_{s,m} \psi_{s,m}.$$

Заметим, что $\tilde{\varphi}_{j,n} = \sum_{k \in \mathbf{Z}} \tilde{u}_{k-2n} \tilde{\varphi}_{j+1,k}$, $\tilde{\psi}_{j,n}(x) = \sum_{k \in \mathbf{Z}} \tilde{v}_{k-2n} \tilde{\varphi}_{j+1,k}(x)$. Умножая скалярно полученные равенства на f , получим $c_{j,n} = \sum_{k \in \mathbf{Z}} \tilde{u}_{k-2n} c_{j+1,k}$, $d_{j,n} = \sum_{k \in \mathbf{Z}} \tilde{v}_{k-2n} c_{j+1,k}$. Полученное преобразование можно представить в виде свертки, если обозначить $(\downarrow v)_k = v_{2k}$. Тогда

$$c_{j,\bullet} = \downarrow (c_{j+1,\bullet} * \tilde{u}_{-\bullet}), \quad d_{j,\bullet} = \downarrow (c_{j+1,\bullet} * \tilde{v}_{-\bullet}) \quad (5)$$

где $(\tilde{u}_{-\bullet})_k = \tilde{u}_{-k}$. Формулы (5) представляют собой алгоритм вейвлет-разложения. Имеет место и алгоритм вейвлет-восстановления [8]:

$$c_{j+1,\bullet} = (\uparrow c_{j,\bullet}) * u + (\uparrow d_{j,\bullet}) * v, \quad (6)$$

где введено обозначение $(\uparrow z)_n = z_k$, если $n = 2k$; и $(\uparrow z)_n = 0$, если $n = 2k + 1$.

В заключении данного раздела рассмотрим способ нахождения приближенных значений масштабирующей функций через схему подразделений. Отметим следующий результат [1]:

Теорема 7. [1] Пусть функция $f \in L_2(R)$ удовлетворяет условию Липшица порядка ε при некотором $\varepsilon \in (0; 1]$, т.е. существует константа C_1 такая,



что $|f(x) - f(y)| \leq C_1 |x - y|^\varepsilon$ для всех $x, y \in R$. Пусть действительная функция $\varphi \in L_1(R) \cap L_2(R)$ удовлетворяет условию $\int_{-\infty}^{+\infty} |x|^\varepsilon |\varphi(x)| dx = C_2 < +\infty$ и $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) dx = 1$.

Тогда $\left| (f, \varphi_{m,k}) - 2^{-m/2} f(2^{-m} k) \right| \leq C_1 C_2 2^{-m(\varepsilon+1/2)}$.

Теорема 8. Пусть функция $\varphi \in C(\mathbf{R})$, $\tilde{\varphi} \in L_1(\mathbf{R}) \cap L_2(\mathbf{R})$, $\text{supp } \varphi, \text{supp } \tilde{\varphi} \subset [-m; m]$, и $\int_{-m}^m \tilde{\varphi}(x) dx = 1$. Тогда $\lim_{j \rightarrow +\infty} \left\| 2^{j/2} (\varphi, \tilde{\varphi}_{j,\cdot}) - \varphi(2^{-j} \cdot) \right\|_\infty = 0$.

Доказательство. Заметим, что $\int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\varphi}_{j,k}(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} 2^{j/2} \tilde{\varphi}(2^j x - k) dx = 2^{-j/2} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\varphi}(t) dt = 2^{-j/2}$. Следовательно,

$$\begin{aligned} \left| 2^{j/2} (\varphi, \tilde{\varphi}_{j,k}) - \varphi(2^{-j} k) \right| &= \left| 2^j \int_{-\infty}^{+\infty} (\varphi(x) - \varphi(2^{-j} k)) \tilde{\varphi}(2^j x - k) dx \right| \leq 2^j \int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi(x) - \varphi(2^{-j} k)| |\tilde{\varphi}(2^j x - k)| dx = \\ &= \int_{-m}^m |\varphi(2^{-j} t + 2^{-j} k) - \varphi(2^{-j} k)| |\tilde{\varphi}(t)| dt \leq \int_{-m}^m |\tilde{\varphi}(x)| dx \cdot \omega(\varphi, 2^{-j} |m|), \end{aligned}$$

где $\omega(\varphi, \delta) = \sup_{|x_1 - x_2| < \delta} |\varphi(x_1) - \varphi(x_2)|$ – модуль непрерывности функции φ . Пусть $\delta < 1$.

Тогда, т.к. $\text{supp } \varphi \subset [-m; m]$, то $\omega(\varphi, \delta) = \sup_{\substack{|x_1 - x_2| < \delta \\ x_1, x_2 \in [-m-1; m+1]}} |\varphi(x_1) - \varphi(x_2)| = \omega_1(\varphi, \delta)$. По те-

ореме Кантора $\lim_{\delta \rightarrow 0+} \omega_1(\varphi, \delta) = 0$. Отсюда следует утверждение теоремы.

Пусть теперь $c_{j,k} = (\varphi, \varphi_{j,k})$ и $u_k = 0, \forall k, |k| > m$. Тогда [7] $\text{supp } \varphi \subset [-m; m]$ и формулы (6) перепишутся в виде [1]:

$$c_{j+1,m} = \sum_{k \in \mathbf{Z}} u_{m-2k} c_{j,k}, \quad c_{0,k} = \delta_{0,k}. \quad (7)$$

В дальнейших рассуждениях будет выполняться $U(-1) = 0, U(1) = \sqrt{2}$. Поэтому в схеме (7) не выполняются необходимые условия сходимости. Пусть $\hat{c}_{j,k} = 2^{\frac{j}{2}} c_{j,k}$. Тогда

$$\hat{c}_{j+1,m} = \sum_{k \in \mathbf{Z}} \sqrt{2} u_{m-2k} \hat{c}_{j,k}, \quad \hat{c}_{0,k} = \delta_{0,k}. \quad (8)$$

Предположим, что эта схема сходится и $\hat{\varphi}$ – предельная функция. Тогда, по теореме 7

$$\begin{aligned} \left| \hat{\varphi}(2^{-j} k) - \varphi(2^{-j} k) \right| &= \left| \hat{\varphi}(2^{-j} k) - \hat{c}_{j,k} + 2^{\frac{j}{2}} c_{j,k} - \varphi(2^{-j} k) \right| \leq \left| \hat{\varphi}(2^{-j} k) - \hat{c}_{j,k} \right| + 2^{\frac{j}{2}} \left| c_{j,k} - 2^{-\frac{j}{2}} \varphi(2^{-j} k) \right| \leq \\ &\leq \left\| \hat{\varphi}(2^{-j} \cdot) - \hat{c}_{j,\cdot} \right\|_\infty + C_1 C_2 2^{-j\varepsilon}, \quad \forall k \in \mathbf{Z}. \end{aligned}$$



Отсюда, согласно равенству (1), получаем $\lim_{j \rightarrow +\infty} \|\hat{\varphi}(2^{-j} \cdot) - \varphi(2^{-j} \cdot)\|_{\infty} = 0$. В случае непрерывности функции φ аналогичный результат получается из теоремы 8. Таким образом, приближенные значения $\varphi(2^{-j} k)$ могут быть найдены по формуле: $\varphi(2^{-j} k) \approx \hat{c}_{j,k}$.

4. ПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ СЕМЕЙСТВА БИОРТОГОНАЛЬНЫХ СИСТЕМ НА ОСНОВЕ ПОДЪЕМА ВЕЙВЛЕТОВ ХААРА

Рассмотрим следующие многочлены Лорана

$$\tilde{U}(z) = U_0(z) = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{z}{\sqrt{2}}, \quad \tilde{V}_0(z) = V(z) = -\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{z}{\sqrt{2}}.$$

Двойственный подъем приводит к следующим многочленам:

$$U(z) = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{z}{\sqrt{2}} - \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{z}{\sqrt{2}} \right) \tilde{P}(z^{-2}); \quad \tilde{V}(z) = -\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{z}{\sqrt{2}} + \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{z}{\sqrt{2}} \right) \tilde{P}(z^2).$$

Обязательно должно быть $\tilde{V}(1) = 0$, следовательно, $\tilde{P}(1) = 0$. Отсюда следует, что $U(-1) = 0$. Пусть $\tilde{P}(z) = \sum_{\lambda=-m}^m p_{\lambda} z^{\lambda}$. Вейвлет $\tilde{\psi}$ будет иметь порядок N , если [7] $\tilde{V}^{(k)}(1) = 0, \forall k = 0, 1, \dots, N-1$.

Нужно заметить, что чем больше условий накладывается на вейвлет и масштабирующую функцию, тем шире носитель этих функций. В статье рассмотрим два вида многочлена Лорана $\tilde{P}(z)$ для случаев $m = 1, 2$ и выясним какие свойства можно получить у функций $\varphi(x)$ и $\tilde{\psi}(x)$. Целью является создание параметрического семейства масштабирующих функций и вейвлетов, при этом у первых повышаем гладкость, а у вторых порядок вейвлета. После подъема функцию φ можно получить по схеме подразделений с маской $\sqrt{2}u$ и начальной последовательностью $v_k = \delta_{0,k}, k \in \mathbf{Z}$,

$$\tilde{\varphi}(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0; 1); \\ 0, & x \notin [0; 1), \end{cases} \quad \tilde{\psi} = \sum_{k=-2}^3 \tilde{v}_k \tilde{\varphi}_{1,k}, \quad \psi(x) = -\frac{1}{\sqrt{2}} \varphi(2x) + \frac{1}{\sqrt{2}} \varphi(2x-1).$$

Пусть $\tilde{P}(z) = p_{-1}z^{-1} + p_0 + p_1z$, тогда, во-первых, должно быть $p_0 + p_{-1} + p_1 = 0$. Поскольку $\sqrt{2}\tilde{V}(z) = -1 + z + (1+z)\tilde{P}(z^2) = p_{-1}z^{-2} + p_{-1}z^{-1} - 1 - p_1 - p_{-1} + z(-p_{-1} - p_1 + 1) + p_1z^2 + p_1z^3$, условие $\tilde{V}'(1) = 0$ приводит к равенству $-4p_{-1} + 4p_1 + 1 = 0$. Для удобства обозначим $p_{-1} = \alpha, p_1 = \alpha - \frac{1}{4}$. Многочлен Лорана $\sqrt{2}U(z)$ в рассматриваемом случае имеет вид

$$\sqrt{2}U(z) = -\alpha z^3 + \alpha z^2 - 2\alpha + z \left(2\alpha + \frac{3}{4} \right) + \frac{5}{4} + \frac{1-\alpha}{z} + \frac{\alpha-1}{z^2}.$$



Нужно заметить, что при таком виде многочлена Лорана $\text{supp } \varphi \subset [-2; 3]$ (см. [7]).

Теорема 9. Пусть $\tilde{P}(z) = \alpha z^{-1} + \left(\frac{1}{4} - 2\alpha\right) + \left(-\frac{1}{4} + \alpha\right)z$, последовательность $u^\alpha = \{u_k^\alpha\}_{k \in \mathbb{Z}}$ выбрана следующим образом: $u_3^\alpha = -\frac{\alpha}{\sqrt{2}}$, $u_2^\alpha = \frac{\alpha}{\sqrt{2}}$, $u_1^\alpha = \frac{2\alpha + 3/4}{\sqrt{2}}$, $u_0^\alpha = \frac{5/4 - 2\alpha}{\sqrt{2}}$, $u_{-1}^\alpha = \frac{1/4 - \alpha}{\sqrt{2}}$, $u_{-2}^\alpha = \frac{\alpha - 1/4}{\sqrt{2}}$ и $u_k^\alpha = 0$ для остальных k . Тогда, если $\alpha \in \left(\frac{7 - \sqrt{57}}{16}; \frac{\sqrt{57} - 3}{16}\right)$, то функция φ , определяемая схемой подразделений $S_{\sqrt{2}u^\alpha}$ по формуле (8), непрерывна на \mathbf{R} , а вейвлет $\tilde{\psi}$, определяемый последовательностью $\tilde{v}^\alpha = \{\tilde{v}_k^\alpha\}_{k \in \mathbb{Z}}$, где $\tilde{v}_0^\alpha = -\frac{3 + 8\alpha}{4\sqrt{2}}$, $\tilde{v}_1^\alpha = \frac{5 - 8\alpha}{4\sqrt{2}}$, $\tilde{v}_2^\alpha = \tilde{v}_3 = \frac{4\alpha - 1}{4\sqrt{2}}$, $\tilde{v}_{-2}^\alpha = \tilde{v}_{-1}^\alpha = \frac{\alpha}{\sqrt{2}}$ и $\tilde{v}_k^\alpha = 0$ при остальных k , имеет порядок 2.

Доказательство. Заметим, что многочлен Лорана $\sqrt{2}U(z) = 1 + z + (1 - z)\tilde{P}(z^{-2}) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \sqrt{2}u_k z^k$ можно представить в виде:

$$\sqrt{2}U(z) = (z + 1) \left(-\alpha z^2 + 2\alpha z + \frac{3}{4} - 2 \left(\alpha - \frac{1}{4} \right) z^{-1} - \left(\frac{1}{4} - \alpha \right) z^{-2} \right).$$

Обозначим $C(z) = -\alpha z^2 + 2\alpha z + \frac{3}{4} - 2 \left(\alpha - \frac{1}{4} \right) z^{-1} - \left(\frac{1}{4} - \alpha \right) z^{-2} = \sum_{k=-2}^2 c_k z^k$. Тогда

$$\begin{aligned} \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k^{[2]} z^k &= C(z)C(z^2) = \sum_{k=-2}^2 \sum_{\lambda=-2}^2 c_\lambda c_k z^{k+2\lambda} = \\ &= \sum_{\mu=-6}^{-2} \left(\sum_{-2 \leq \lambda \leq \frac{\mu+2}{2}} c_{\mu-2\lambda} c_\lambda \right) z^\mu + \sum_{\mu=-1}^1 \left(\sum_{\frac{\mu-2}{2} \leq \lambda \leq \frac{\mu+2}{2}} c_{\mu-2\lambda} c_\lambda \right) z^\mu + \sum_{\mu=2}^6 \left(\sum_{\frac{\mu-2}{2} \leq \lambda \leq 2} c_{\mu-2\lambda} c_\lambda \right) z^\mu. \end{aligned}$$

Найдем, при каких значениях α будет выполнено неравенство $\|(S_c)^2\|_\infty = \max_{i=0,1,2,3} \sum_j |c_{i-4j}^{[2]}| < 1$. Из (9) следует, что данное неравенство равносильно системе неравенств:

$$\begin{aligned} \left| \alpha \left(\frac{3}{4} + 2\alpha \right) \right| + \left| 4\alpha \left(\alpha - \frac{1}{4} \right) + \frac{9}{16} \right| + \left| \left(\frac{5}{4} - 2\alpha \right) \left(\alpha - \frac{1}{4} \right) \right| &< 1; \\ 2\alpha^2 + \left| \frac{5\alpha}{2} - 4\alpha^2 \right| + \left| 2\alpha \left(\alpha - \frac{1}{4} \right) + \left(2\alpha - \frac{1}{2} \right)^2 \right| &< 1; \\ \left| \alpha - \alpha^2 \right| + \alpha^2 + \left| \left(\alpha - \frac{1}{4} \right) \left(\alpha + \frac{3}{4} \right) \right| &< 1; \end{aligned}$$

$$\left| \alpha \left(6\alpha - \frac{1}{2} \right) \right| + \left| \left(2\alpha + \frac{3}{4} \right) \left(2\alpha - \frac{1}{2} \right) \right| + 2 \left(\alpha - \frac{1}{4} \right)^2 < 1,$$

решение которой представляет собой интервал $\left(\frac{7 - \sqrt{57}}{16}; \frac{\sqrt{57} - 3}{16} \right)$. По теореме 2, при этих значениях α , функция $\varphi \in C(\mathbf{R})$.

На рис. 1 представлен пример графиков масштабирующей функции $\varphi(x)$ и вейвлетов $\psi(x)$ и $\tilde{\psi}(x)$ при $\alpha = -0,00048$.

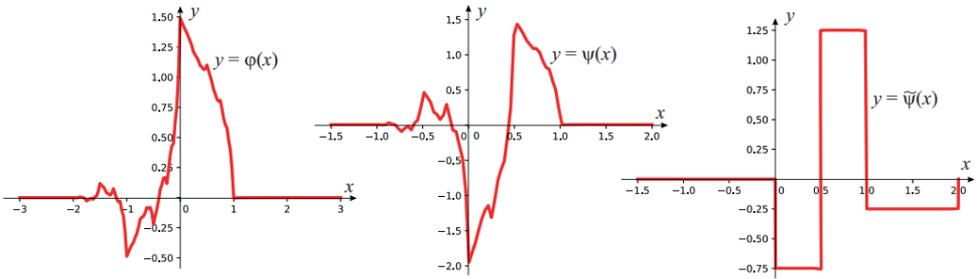


Рис. 1. Графики функций φ , ψ , $\tilde{\psi}$ при $\alpha = -0,00048$

Теорема 10. Пусть $\tilde{P}(z) = p_{-2}z^{-2} + p_{-1}z^{-1} + p_0 + p_1z + p_2z^2$, где $p_1 = \alpha$, $p_2 = -\frac{\alpha}{4} - \frac{5}{256}$, $p_{-2} = -\frac{\alpha}{4} - \frac{17}{256}$, $p_{-1} = \alpha + \frac{88}{256}$ а последовательность $u^\alpha = \{u_k^\alpha\}_{k \in \mathbf{Z}}$ выбрана следующим образом: $u_{-4}^\alpha = \frac{-\frac{\alpha}{4} - 0.01953125}{\sqrt{2}}$, $u_{-3}^\alpha = -u_{-4}^\alpha$, $u_{-2}^\alpha = \frac{\alpha}{\sqrt{2}}$, $u_{-1}^\alpha = -\frac{\alpha}{\sqrt{2}}$, $u_0^\alpha = \frac{-3\alpha + 0.7421875}{\sqrt{2}}$, $u_1^\alpha = \frac{3\alpha + 1.2578125}{\sqrt{2}}$, $u_2^\alpha = \frac{\alpha + 0.34375}{\sqrt{2}}$, $u_3^\alpha = -u_2^\alpha$, $u_4^\alpha = -u_5^\alpha = \frac{-\frac{\alpha}{4} - 0.06640625}{\sqrt{2}}$ и $u_k^\alpha = 0$ для остальных k . Тогда, если $\alpha \in (-0.231363152054986; -0.112386847945014)$, то функция φ , определяемая схемой подразделений $S_{\sqrt{2}u^\alpha}$ принадлежит $C^1(\mathbf{R})$, а если $\alpha \in (-0.430370347700429; 0.0866203477004288)$, то $\varphi \in C(\mathbf{R})$. Вейвлет $\tilde{\psi}$, определяемый последовательностью $\tilde{v}^\alpha = \{\tilde{v}_k^\alpha\}_{k \in \mathbf{Z}}$, где $\tilde{v}_{-4}^\alpha = \tilde{v}_{-3}^\alpha = \frac{-\frac{\alpha}{4} - 0.06640625}{\sqrt{2}}$, $\tilde{v}_{-2}^\alpha = \tilde{v}_{-1}^\alpha = \frac{\alpha + 0.34375}{\sqrt{2}}$, $\tilde{v}_0^\alpha = \frac{-3\alpha - 1.2578125}{\sqrt{2}}$,



$\tilde{v}_1^\alpha = \frac{0.7421875 - \frac{3\alpha}{2}}{\sqrt{2}}$, $\tilde{v}_2^\alpha = \tilde{v}_3^\alpha = \frac{\alpha}{\sqrt{2}}$, $\tilde{v}_4^\alpha = \tilde{v}_5^\alpha = \frac{-\frac{\alpha}{4} - 0.01953125}{\sqrt{2}}$ и $\tilde{v}_k^\alpha = 0$ при остальных k , имеет порядок 4.

Доказательство. Если $\tilde{P}(z) = p_{-2}z^{-2} + p_{-1}z^{-1} + p_0 + p_1z + p_2z^2$, то с учетом $p_{-2} + p_{-1} + p_0 + p_1 + p_2 = 0$ получаем

$$\begin{aligned}\sqrt{2}\tilde{V}(z) &= -1 + z + (1+z)\tilde{P}(z^2) = p_{-2}z^{-4} + p_{-2}z^{-3} + p_{-1}z^{-2} + p_{-1}z^{-1} - \\ &- (1 + p_1 + p_2 + p_{-1} + p_{-2}) + z(1 - p_1 - p_2 - p_{-1} - p_{-2}) + p_1z^2 + p_1z^3 + p_2z^4 + p_2z^5.\end{aligned}$$

Условия $\tilde{V}^{(k)}(1) = 0$, $k = 1, 2, 3$ приводят к равенствам: $4p_1 + 8p_2 - 4p_{-1} - 8p_{-2} + 1 = 0$; $p_1 + 4p_2 + p_{-1} + 4p_{-2} = 0$; $p_1 + 14p_2 - 5p_{-1} - 30p_{-2} = 0$, соответственно. Отсюда находим

$$p_2 = -\frac{p_1}{4} - \frac{5}{256}; \quad p_3 = p_1 + \frac{11}{32}; \quad p_4 = -\frac{p_1}{4} - \frac{17}{256}.$$

Обозначая $p_1 = \alpha$, многочлен Лорана $\sqrt{2}U(z) = 1 + z - (-1 + z)\tilde{P}(z^{-2})$ перепишем в виде:

$$\begin{aligned}\sqrt{2}U(z) &= -\frac{3\alpha}{2} - \frac{\alpha}{z} + \frac{\alpha}{z^2} + z^5 \left(\frac{\alpha}{4} + 0.06640625 \right) + \\ &+ z^4 \left(-\frac{\alpha}{4} - 0.06640625 \right) + z^3 (-\alpha - 0.34375) + z^2 (\alpha + 0.34375) + z \left(\frac{3\alpha}{2} + 1.2578125 \right) + \\ &+ 0.7421875 + \frac{\frac{\alpha}{4} + 0.01953125}{z^3} + \frac{-\frac{\alpha}{4} - 0.01953125}{z^4}.\end{aligned}$$

Представим его в виде $\frac{(z+1)^2}{2}D(z)$, где

$$\begin{aligned}D(z) &= z^3 \cdot (0.5\alpha + 0.1328125) + z^2 (-1.5\alpha - 0.3984375) + \\ &+ z (0.5\alpha - 0.0234375) + 2.5\alpha + 1.1328125 + \frac{0.2734375 - 2.5\alpha}{z} + \frac{-0.5\alpha - 0.1953125}{z^2} + \\ &+ \frac{1.5\alpha + 0.1171875}{z^3} + \frac{-0.5\alpha - 0.0390625}{z^4}.\end{aligned}$$

Итак, в данном случае \tilde{V} четвертого порядка и, если $\|(S_d)^2\|_\infty < 1$, то $(S_{\sqrt{2}u}^\infty v) \in C^1(\mathbf{R})$. Последнее условие будет выполнено, если $\alpha \in (-0.231363152054986; -0.112386847945014)$. Нужно заметить, что многочлен $\sqrt{2}\tilde{V}$ можно представить в виде

$$\begin{aligned} \sqrt{2}\tilde{V}(z) = & p_1 z^3 + p_1 z^2 - \frac{3p_1}{2} + z^5 \left(-\frac{p_1}{4} - 0.01953125 \right) + z^4 \left(-\frac{p_1}{4} - 0.01953125 \right) + \\ & + z \left(0.7421875 - \frac{3p_1}{2} \right) - 1.2578125 + \frac{p_1 + 0.34375}{z} + \frac{p_1 + 0.34375}{z^2} + \\ & + \frac{-\frac{p_1}{4} - 0.06640625}{z^3} + \frac{-\frac{p_1}{4} - 0.06640625}{z^4}. \end{aligned}$$

Отсюда и получается утверждение теоремы.

На рис. 2 представлен пример графиков масштабирующей функции $\varphi(x)$ и вейвлетов $\psi(x)$ и $\tilde{\psi}(x)$ при $\alpha = -0,1598$.

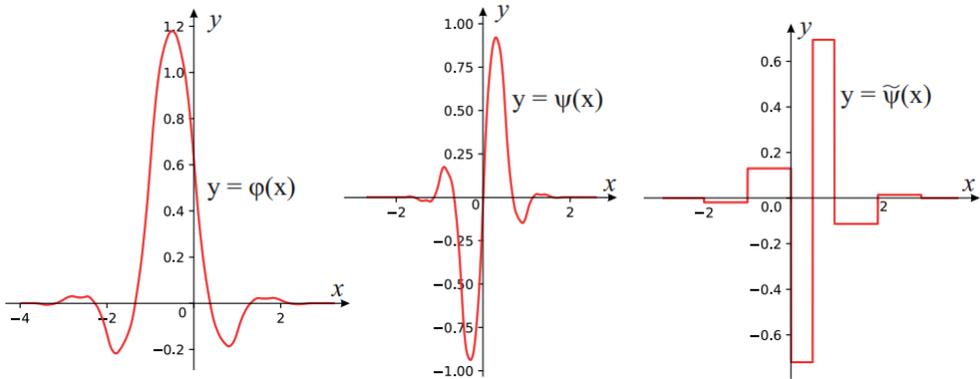


Рис. 2. Графики функций φ , ψ , $\tilde{\psi}$ при $\alpha = -0,1598$.

5. ПОДРИСОВКА ИЗОБРАЖЕНИЙ

В данном разделе, для простоты обозначений, под изображением будем понимать вектор $f \in \mathbf{R}^s$. Целью будет нахождение неизвестного изображения $u \in \mathbf{R}^s$ по наблюдаемому изображению $f = Au + \eta$, где η – белый гауссовский шум с дисперсией σ^2 и A – линейный оператор. В статье решение такой задачи будет также основано на использовании вейвлетов, но выбор вейвлета будет происходить из параметрического семейства в процессе решения оптимизационной задачи. Для произвольного вектора $x \in \mathbf{R}^s$ обозначим $\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^s |x_i|^p \right)^{1/p}$, $1 \leq p < +\infty$. Кроме того, для произвольной матрицы A обозначим $\|A\|_2 = \sqrt{\max \lambda}$, где λ – максимальное собственное значение матрицы $A^T A$.

Пусть $\Omega = \{1, 2, \dots, s\}$ и $\Lambda \subset \Omega$. Наблюдаемое изображение имеет вид:



$$f_i = \begin{cases} u_i + \eta_i, & i \in \Lambda; \\ \text{произвольно,} & i \in \Omega \setminus \Lambda. \end{cases}$$

Задача восстановления неизвестного изображения u относится к задаче аппроксимации. Существует множество схем аппроксимации, например, сплайновая, но большинство из них хороши только для гладких функций. Изображения таковыми не являются. Основная проблема при восстановлении изображений заключается в сохранении особенностей, например краев, изображений, которые не могут быть хорошо сохранены многими доступными алгоритмами аппроксимации.

Обозначим P_Λ диагональную матрицу, у которой $(P_\Lambda)_{i,i} = 1, \forall i \in \Lambda$ и $(P_\Lambda)_{i,j} = 0, \forall i \in \Omega \setminus \Lambda$. Кроме того, введем еще следующие обозначения: $W_\alpha : f \rightarrow W_\alpha f$ – параметрическое дискретное вейвлет-преобразование, ставящее в соответствие данному изображению $f \in \mathbf{R}^s$ его вейвлет-коэффициенты $W_\alpha f \in \mathbf{R}^d$ и W_α^{-1} – обратное преобразование. Изображение u будем находить из следующей задачи минимизации:

$$u = W_\alpha^{-1} \beta^*; \tag{10}$$

$$\alpha^*, \beta^* = \arg \min_{\alpha} \min_{\beta \in \mathbf{R}^d} \frac{1}{2} \| P_\Lambda W_\alpha^{-1} \beta - P_\Lambda f \|^2_2 + \| \text{diag}(\lambda) \beta \|^2_1 \tag{11}$$

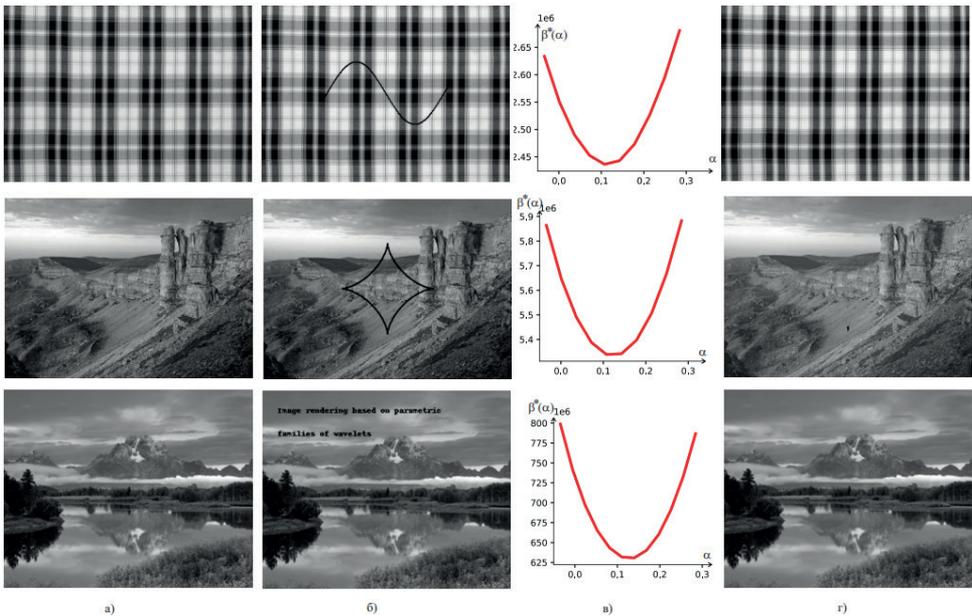


Рис 3. Подрисовка изображения. а) Исходное изображение, б) Поврежденное изображение, в) График функции $\beta^1(\alpha)$, г) Восстановленное изображение.



Пусть $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_m)$ и

$$\Gamma_\lambda(\beta_1, \dots, \beta_n) = (t_{\lambda_1}(\beta_1) \ \dots \ t_{\lambda_m}(\beta_m)),$$

где

$$t_{\lambda_i}(\beta_i) = \begin{cases} \text{sign}(\beta_i)(|\beta_i| - \lambda_i), & |\beta_i| > \lambda_i, \\ 0, & |\beta_i| \leq \lambda_i. \end{cases}$$

Как показано в статье [4] при каждом значении α решение задачи минимизации

$$\beta^*(\alpha) = \min_{\beta \in \mathbf{R}^d} \frac{1}{2} \|P_\Lambda W_\alpha^{-1} \beta - P_\Lambda f\|_2^2 + \|\text{diag}(\lambda)\beta\| \quad (12)$$

можно найти по следующему алгоритму:

1. Выберем произвольный вектор $\beta_0 \in \mathbf{R}^d$.
2. Находим $\beta_{k+1}(\alpha) = \Gamma_\lambda(W_\alpha P_\Lambda f + \beta_k(\alpha) - W_\alpha P_\Lambda W_\alpha^{-1} \beta_k(\alpha))$, $k = 0, 1, \dots$

В статье [4] доказано, что существует $\beta^*(\alpha) = \lim_{k \rightarrow +\infty} \beta_k(\alpha)$. Значение этого предела и является решением задачи (12). Таким образом, решение задачи (10), (11) можно найти, как $W_\alpha^{-1} \beta^*(\alpha^*)$, где $\alpha^* = \arg \min_\alpha \beta^*(\alpha)$. На рис. 3 представлены примеры восстановления поврежденных изображений. Нужно заметить, что рассмотренная задача является частным случаем общей задачи, представленной в начале раздела, в которой в качестве оператора A нужно выбрать P_Λ .

7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В статье рассмотрено построение параметрического семейства вейвлет-систем на основе схемы подъема вейвлетов Хаара и улучшения его свойств. Исследованы гладкость полученных вейвлетов и их порядок. В статье рассмотрено одно из приложений такого параметрического семейства, предоставляющих разнообразные вейвлеты, в задаче подрисовки изображений. При решении такой задачи выбор вейвлета осуществлялся в процессе решения оптимизационной задачи.

Литература

1. *Frazier Michael W.* An introduction to wavelets through linear algebra. 1999. Springer. 503 p.
2. *Bertalmio M., Bertozzi A., and Sapiro G.*, Navier Stokes, fluid-dynamics and image and video inpainting, Proceedings of the 2001 IEEE Computer Society Conference on Computer Vision and Pattern Recognition, 1 (2001), pp. 355–362.
3. *Chan T.F., Shen J., and Zhou H.M.*, Total variation wavelet inpainting, J. Math. Imaging Vision, 25 (2006), pp. 107–125.
4. *Cai J.F., Chan R.H., and Shen Z.*, A framelet-based image inpainting algorithm, Applied and Computational Harmonic Analysis 24 (2008), no. 2, 131–149.
5. *Cavaretta A.S., Dahmen W., and Micchelli C.A.*, Stationary Subdivision Schemes, Mem. Amer. Math. Soc. 93, 1–186.



6. *Nira Dyn*, Analysis of Convergence and Smoothness by the Formalism of Laurent Polynomials. Tutorials on Multiresolution in Geometric Modelling, 2002, 51–68
7. *Блаттер К.* Вейвлет-анализ. Основы теории. Москва, 2004. – 280 с.
8. *Новиков И.Я., Протасов В.Ю., Скопина М.А.* Теория всплесков. М.: ФИЗМАТЛИТ. 2005. 612 с.
9. *Sweldens Wim*, The lifting scheme: A custom-design construction of biorthogonal wavelets. Applied and Computational Harmonic Analysis, volume3, issue 2, 1996, pp. 186–200.
10. *Sweldens Wim*, The lifting scheme: A new philosophy in biorthogonal wavelets construction. In Wavelets Application in Signal and Image Processing III, volume 2569 of Processing of the SPIE, pp. 68–79. SPIE, Bellingham, WA, 1995.



Construction of a Parametric Family of Wavelets and Its Use in Image Processing

Yuri I. Bityukov*

Moscow Aviation Institute (National Research University) (MAI)
Moscow, Russian Federation
ORCID: <https://orcid.org/0009-0008-6384-0564>
e-mail: yib72@mail.ru

Pavel Y. Bityukov**

Moscow Power Engineering Institute (National Research University) (MPEI)
Moscow, Russian Federation
ORCID: <https://orcid.org/0009-0000-8697-7047>
e-mail: p.bityukoff@yandex.ru

This article is devoted to the construction of a parametric family of biorthogonal wavelets according to the lifting scheme and subdivision schemes, and the use of such a family in the problem of image rendering when part of the pixel data in the image is missing or overwritten in some way. The parametric family of wavelets provides a parametric family of filters for restoring damaged images. With such a recovery, the desired wavelet is selected not from any general considerations, but from a parametric family in the process of solving an optimization problem.

Keywords: wavelet, lifting scheme, subdivision scheme, image processing.

For citation:

Bityukov Yu.I., Bityukov P.Yu. Construction of a Parametric Family of Wavelets and Its Use in Image Processing. *Modelirovanie i analiz dannykh = Modelling and Data Analysis*, 2023. Vol. 13, no. 4, pp. 7–22. DOI: <https://doi.org/10.17759/mda.2023130401> (In Russ., abstr. in Engl.).

References

1. Frazier Michael W. An introduction to wavelets through linear algebra. 1999. Springer. 503 p.
2. Bertalmio M., Bertozzi A., and Sapiro G., Navier Stokes, fluid-dynamics and image and video inpainting, Proceedings of the 2001 IEEE Computer Society Conference on Computer Vision and Pattern Recognition, 1 (2001), pp. 355–362.
3. Chan T.F., Shen J., and Zhou H.M., Total variation wavelet inpainting, *J. Math. Imaging Vision*, 25 (2006), pp. 107–125.
4. Cai J.F., Chan R.H., and Shen Z., A framelet-based image inpainting algorithm, *Applied and Computational Harmonic Analysis* 24 (2008), no. 2, 131–149.

***Yuri I. Bityukov**, Doctor of Technical Sciences, Professor of the Department of Probability Theory and Computer Modeling, Moscow Aviation Institute (National Research University) (MAI), Moscow, Russia, ORCID: <https://orcid.org/0009-0008-6384-0564>, e-mail: yib72@mail.ru

****Pavel Y. Bityukov**, Bachelor student, Moscow Power Engineering Institute (National Research University) (MPEI), Moscow, Russia, ORCID: <https://orcid.org/0009-0000-8697-7047>, e-mail: p.bityukoff@yandex.ru



5. Cavaretta A.S., Dahmen W., and Micchelli C.A., Stationary Subdivision Schemes, Mem. Amer. Math. Soc. 93, 1–186.
6. Nira Dyn, Analysis of Convergence and Smoothness by the Formalism of Laurent Polynomials. Tutorials on Multiresolution in Geometric Modelling, 2002, 51–68
7. Blatter K. Вейвлет-анализ. Основы теории. Москва, 2004. – 280 p. (In Russ)
8. Novikov I.YA., Protasov V.YU., Skopina M.A.. Teoriya vspleskov. M.: FIZMATLIT. 2005. 612 p. (In Russ)
9. Sweldens Wim, The lifting scheme: A custom-design construction of biorthogonal wavelets. Applied and Computational Harmonic Analysis, volume3, issue 2, 1996, pp. 186–200.
10. Sweldens Wim, The lifting scheme: A new philosophy in biorthogonal wavelets construction. In Wavelets Application in Signal and Image Processing III, volume 2569 of Processing of the SPIE, pp. 68–79. SPIE, Bellingham, WA, 1995.

Получена 28.09.2023

Received 28.09.2023

Принята в печать 20.10.2023

Accepted 20.10.2023