

УДК 517.977

О субоптимальном решении задачи быстродействия для линейной дискретной системы в случае несимметричных ограничений на управления

*Подгорная В.М.**

Московский авиационный институт
(национальный исследовательский университет)
г. Москва, Российская Федерация
ORCID: <https://orcid.org/0009-0004-9956-3002>
e-mail: vita1401@outlook.com

В статье рассматривается линейная дискретная система с ограниченным управлением. Для системы решается задача быстродействия, то есть требуется построить процесс управления, переводящий систему из начального состояния в начало координат за минимальное число шагов. Если множество допустимых значений управления имеет структуру суперэллипса, то задача вычисления оптимального управления может быть сведена к решению системы алгебраических уравнений. Для множеств произвольной структуры разработан метод суперэллипсоидальной аппроксимации, рассмотрен случай несимметричных множеств. Приведены примеры.

Ключевые слова: линейная система управления, задача быстродействия, множества 0-управляемости, принцип максимума, суперэллипс.

Для цитаты:

Подгорная В.М. О субоптимальном решении задачи быстродействия для линейной дискретной системы в случае несимметричных ограничений на управления // Моделирование и анализ данных. 2024. Том 14. № 3. С. 63–86. DOI: <https://doi.org/10.17759/mda.2024140304>

**Подгорная Виолетта Михайловна*, аспирант, ассистент кафедры теории вероятностей и компьютерного моделирования, Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет) (ФГБОУ ВО МАИ (ниу)), г. Москва, Российская Федерация, ORCID: <https://orcid.org/0009-0004-9956-3002>, e-mail: vita1401@outlook.com



1. ВВЕДЕНИЕ

Дискретный принцип максимума часто используется для решения задач оптимального управления дискретными системами в качестве необходимых, а иногда и достаточных условий оптимальности процесса. В частности, для линейных систем он является необходимым и достаточным условием [2, 11]. Принцип максимума испытывает сложности при рассмотрении вырожденных задач, то есть тех, для которых оптимальное значение достигается во внутренней точке множества достижимости [11], это приводит к вырождению траектории сопряженной системы и, как следствие, к невозможности вычислить оптимальное управление из его соотношений. Одной из таких задач является задача быстродействия, которая характеризуется дискретным критерием качества, то есть числом шагов, необходимым для перевода системы в начало координат, которое не может быть вычислено из дискретного принципа максимума.

Среди актуальных исследований на тему решения задачи быстродействия для линейных дискретных систем можно выделить следующие работы.

В [14] рассматривается смешанный функционал, включающий в том числе и время, но за счет второго слагаемого в функционале не происходит вырождения. В [16] предложен подход к решению задачи быстродействия, основанный на разреженной оптимизации множества состояний, то есть минимизации количества ненулевых элементов из множества состояний. В [18] решается задача управления путем дискретизации по Годунову дифференциального уравнения в частных производных Лайтхилла–Уильямса–Ричардса. С использованием метода дискретных сопряжений результирующая нелинейная задача оптимального управления сводится к системе градиентных вычислений.

Если время вычислено и зафиксировано, то задача обладает вырожденностью с точки зрения построения сопряженной траектории. Поэтому оказывается актуальным исследование различных подходов к регуляризации принципа максимума. В частности, в работе [9, 6] одним из таких методов регуляризации является сужение множества допустимых значений управлений для того, чтобы терминальное состояние оптимальной траектории находилось в граничной точке множества достижимости. Это приводит к возможности составить конструктивные соотношения принципа максимума, из которых может быть построен процесс. Сложностью такого подхода является численное разрешение полученных условий.

В работах [7, 8] рассматривается задача сведения соотношений регуляризованного принципа максимума к системе алгебраических уравнений для суперэллипсоидальной структуры множества допустимых значений управлений при помощи аппроксимационных методов. Суперэллипсы в качестве аппроксимирующих множеств обладают большим числом степеней свободы, чем эллипсы. Хотя существует ряд приложений данного класса множеств в прикладных и теоретических задачах [13, 15, 17], их аппарат на данный момент является плохо исследованным. Данная работа продолжает



результаты [7, 8], расширяя возможности суперэллипсоидальных аппроксимаций за счет выбора центра множества в приложении к решению задачи быстродействия.

2. ОБОЗНАЧЕНИЯ

Будем полагать, что фазовое пространство является евклидовым пространством \mathbb{R}^n со скалярным произведением, определяемым соотношением

$$(x, y) = \sum_{i=1}^n x_i y_i.$$

Для произвольного $r \in [1; +\infty)$ введем на \mathbb{R}^n норму

$$x_r = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^r \right)^{\frac{1}{r}}.$$

При $r = 2$ норма $\|\cdot\|_2$ оказывается согласованной со скалярным произведением. Значение $r = 1$ с точки зрения теории является допустимым, но в рамках данной статьи рассматриваться не будет, что позволяет определить число $q > 1$ как двойственное по Гельдеру числу r :

$$\frac{1}{r} + \frac{1}{q} = 1.$$

Для произвольных множеств $\mathcal{X}, \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ и матрицы $D \in \mathbb{R}^{n \times n}$ через $\mathcal{X} + \mathcal{U}$ будем обозначать сумму по Минковскому [12, § 3 гл. I]

$$\mathcal{X} + \mathcal{U} = \{x + u : x \in \mathcal{X}, u \in \mathcal{U}\},$$

а через $D\mathcal{U}$ – образ множества \mathcal{U} при воздействии на него отображения D

$$D\mathcal{U} = \{Du : u \in \mathcal{U}\}.$$

Через $\partial\mathcal{U}$ и $\text{int}\mathcal{U}$ обозначим множества граничных и внутренних точек \mathcal{U} соответственно. Под $\text{cone}\{\mathcal{U}\}$ будем понимать коническую оболочку множества \mathcal{U} [12, § 2 гл. I].

Если множество $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ является выпуклым компактом, то для произвольной точки $u \in \mathcal{U}$ через $\mathcal{N}(u, \mathcal{U})$ обозначим нормальный конус множества \mathcal{U} в точке u [12, § 2 гл. I]:

$$\mathcal{N}(u, \mathcal{U}) = \left\{ p \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} : (p, u) = \max_{\tilde{u} \in \mathcal{U}} (p, \tilde{u}) \right\}.$$

Элементы нормального конуса $\mathcal{N}(u, \mathcal{U})$ называются векторами, опорными к \mathcal{U} в точке u . Заметим, что по построению $\mathcal{N}(u, \mathcal{U}) = \emptyset$ тогда и только тогда, когда



$u \in \text{int } \mathcal{U}$. Если также верно включение $0 \in \text{int } \mathcal{U}$, то \mathcal{U} будем называть выпуклым телом [10, раздел 3 § 1 гл IV] и для произвольного $x \in \mathbb{R}^n$ введем функционал Минковского [10, раздел 3 § 2 гл. III] или калибровочную функцию [12, § 4 гл. I]:

$$M(x, \mathcal{U}) = \inf \{t > 0 : x \in t\mathcal{U}\} = \inf \left\{ t > 0 : \frac{x}{t} \in \mathcal{U} \right\}.$$

Под строго выпуклым множеством $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ будем понимать такое множество, что для любых $u^1, u^2 \in \mathcal{U}, \lambda \in (0; 1)$ верно включение $\lambda u^1 + (1 - \lambda)u^2 \in \text{int } \mathcal{U}$.

Будем называть суперэллипсом или суперэллипсоидальным множеством для некоторых $a_1 > 0, \dots, a_n > 0, r > 1$ множество вида

$$\mathcal{E}_r(a_1, \dots, a_n) = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^n \left| \frac{x_i}{a_i} \right|^r \leq 1 \right\}. \quad (1)$$

Для краткости будем полагать $a = (a_1, \dots, a_n)^T$ и обозначать соответствующий суперэллипс через $\mathcal{E}_r(a)$. Под $\text{diag}(a) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ будем полагать диагональную матрицу, построенную из вектора $a \in \mathbb{R}^n$:

$$\text{diag}(a) = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_n \end{pmatrix}.$$

3. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматривается линейная дискретная система с ограниченным управлением (A, \mathcal{U}) :

$$\begin{aligned} x(k+1) &= Ax(k) + u(k), \\ x(0) &= x_0, \quad u(k) \in \mathcal{U}, \quad k \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \end{aligned} \quad (2)$$

где $x(k) \in \mathbb{R}^n$ – вектор состояния системы, $u(k) \in \mathbb{R}^n$ – управляющее воздействие, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ – матрица системы, $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ – множество допустимых значений управлений. Предполагается, что $\det A \neq 0$, \mathcal{U} – выпуклый компакт, $0 \in \text{int } \mathcal{U}$.

Для системы (2) решается задача быстродействия, т.е. требуется перевести систему (A, \mathcal{U}) из заданного начального состояния $x_0 \in \mathbb{R}^n$ в начало координат за минимальное число шагов N_{\min} :

$$N_{\min} = \min \{N \in \mathbb{N} \cup \{0\} : \exists u(0), \dots, u(N-1) \in \mathcal{U} : x(N) = 0\}.$$

Процесс управления $\{x^*(k), u^*(k-1), x_0\}_{k=1}^{N_{\min}}$, удовлетворяющий условию $x^*(N_{\min}) = 0$, будем называть оптимальным. Предполагается, что задача быстродействия для системы (A, \mathcal{U}) разрешима, т.е. $N_{\min} < \infty$. Подробно вопросы разрешимости задачи быстродействия для системы (2) рассмотрены в [1].

Построение оптимальных по быстродействию процессов сильно связано с аппаратом множеств 0-управляемости [5, 9].

Для произвольного $N \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ обозначим через $\mathcal{X}(N) \subset \mathbb{R}^n$ множество 0-управляемости системы (2) за N шагов, т.е. множество тех начальных состояний, из которых систему (2) возможно перевести в 0 за N шагов посредством выбора допустимых управляющих воздействий:

$$\mathcal{X}(N) = \begin{cases} \{x_0 \in \mathbb{R}^n : \exists u(0), \dots, u(N-1) \in \mathcal{U} : x(N) = 0\}, & N \in \mathbb{N}, \\ \{0\}, & N = 0. \end{cases} \quad (3)$$

Тогда согласно определению N_{\min} также справедливо представление:

$$N_{\min} = \min \{N \in \mathbb{N} \cup \{0\} : x_0 \in \mathcal{X}(N)\}. \quad (4)$$

При этом управление, как продемонстрировано в [4, 6], оптимально тогда и только тогда, когда для всех $k = 0, N_{\min} - 1$ верно включение

$$x^*(k+1) = Ax^*(k) + u^*(k) \in \mathcal{X}(N_{\min} - k - 1).$$

В [9] получен ряд результатов для задачи быстродействия, которые можно представить в форме принципа максимума для строго выпуклого \mathcal{U} .

Теорема 1. ([9, теоремы 1–2]). Пусть \dots – строго выпуклое и компактное множество, $0 \in \text{int } \mathcal{U}$, $\det A \neq 0$, класс множеств $\{\mathcal{X}(N)\}_{N=0}^{\infty}$ определяется согласно (3), процесс управления $\{x^*(k), u^*(k-1), x_0\}_{k=1}^{N_{\min}}$ и траектория сопряженной системы $\{\psi(k)\}_{k=1}^{N_{\min}-1}$ удовлетворяют соотношениям

$$\begin{aligned} x^*(k+1) &= Ax^*(k) + u^*(k), \\ u^*(k) &= \alpha \arg \max_{u \in \mathcal{U}} \left((A^{-1})^T \psi(k), u \right), \\ \psi(k+1) &= (A^{-1})^T \psi(k), \\ x^*(0) &= x_0, \\ -\psi(0) &\in \mathcal{N}(x_0, \alpha \mathcal{X}(N_{\min})), \\ \alpha &= M(x_0, \mathcal{X}(N_{\min})). \end{aligned}$$

Тогда

$\{x^*(k), u^*(k-1), x_0\}_{k=1}^{N_{\min}}$ – оптимальный по быстродействию процесс системы (A, \mathcal{U}) ;



если $\alpha = 1$, то оптимальный процесс единственный;

$$-\psi(k) \in \mathcal{N}(x^*(k), \alpha \mathcal{X}(N_{\min} - k)), k = \overline{0, N_{\min} - 1}.$$

С вычислительной точки зрения вопрос применения теоремы 1 сводится к определению α и $\psi(0)$ из условий

$$\begin{aligned} -\psi(0) &\in \mathcal{N}(x_0, \alpha \mathcal{X}(N_{\min})), \\ \alpha &= M(x_0, \mathcal{X}(N_{\min})), \end{aligned} \quad (5)$$

что в случае произвольного выпуклого тела \mathcal{U} может быть нетривиальной задачей.

В [8] представлен метод формирования субоптимального управления, основанный на использовании аппроксимации \mathcal{U} множеством вида $\hat{\mathcal{U}} = B\mathcal{E}_r(a)$, $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$. При этом в случае, когда верно равенство $\mathcal{U} = B\mathcal{E}_r(a)$, условия (5) удается свести к системе алгебраических уравнений относительно $\psi(0) \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ и $\alpha > 0$. Однако эффективность данного подхода снижается в случае несимметричных относительно начала координат множеств \mathcal{U} , поскольку точность аппроксимации, в роли которой выступает мера Лебега разности двух множеств $\mu(\mathcal{U} \setminus \hat{\mathcal{U}})$, может оказаться невысокой.

В этой статье предлагается усилить результаты, полученные в [8], рассмотрев более общий подход к аппроксимации:

$$\hat{\mathcal{U}} = B(\mathcal{E}_r(a) + u_0), u_0 \in \text{int } \mathcal{E}_r(a). \quad (6)$$

В частности, необходимо построить эквивалентную условиям (5) систему алгебраических уравнений для частного случая (6), сформулировать основные условия ее разрешимости численно, усилить существующий метод суперэллипсоидальной аппроксимации за счет выбора точки u_0 и исследовать его на оптимальность.

4. СВЕДЕНИЕ УСЛОВИЙ ПРИНЦИПА МАКСИМУМА К СИСТЕМЕ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Покажем, что условия (5) можно свести к эквивалентной системе алгебраических уравнений. Для этого приведем аналитическое описание множеств 0-управляемости и некоторые свойства строго выпуклых и суперэллипсоидальных множеств.

Лемма 1. [9, лемма 1]. Пусть $\det A \neq 0$, класс множеств $\{\mathcal{X}(N)\}_{N=0}^{\infty}$ определяется соотношениями (3). Тогда для любого $N \in \mathbb{N}$ верно представление

$$\mathcal{X}(N) = -\sum_{k=1}^N A^{-k} \mathcal{U}.$$

Лемма 2. [6, лемма 3]. Пусть $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ – строго выпуклый компакт, $0 \in \text{int } \mathcal{U}$. Тогда для любых различных $u^1, u^2 \in \mathcal{U}$ верно

$$\mathcal{N}(u^1, \mathcal{U}) \cap \mathcal{N}(u^2, \mathcal{U}) = \emptyset.$$

Также из [6, леммы 5, 6] вытекает следующее утверждение.

Лемма 3. Пусть $\mathcal{U}, \mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n$ – выпуклые компакты, $u \in \mathcal{U}$, $x \in \mathcal{X}$, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\det A \neq 0$.

Тогда

$$\mathcal{N}(u+x, \mathcal{U}+\mathcal{X}) = \mathcal{N}(u, \mathcal{U}) \cap \mathcal{N}(x, \mathcal{X});$$

$$\mathcal{N}(Ax, A\mathcal{X}) = (A^{-1})^T \mathcal{N}(x, \mathcal{X}).$$

Лемма 3 определяет преобразование нормального конуса выпуклых множеств при невырожденном линейном преобразовании и сложении по Минковскому. С учетом леммы 1 это позволяет описать произвольный нормальный конус любого множества 0-управляемости в терминах нормальных конусов множества \mathcal{U} или $\mathcal{E}_r(a_1, \dots, a_n)$ в случае (6). С другой стороны, лемма 2 устанавливает взаимоднозначное соответствие между опорной точкой и ее нормальным конусом для строго выпуклого множества. Если данную зависимость описать в явном виде, то можно получить алгебраические уравнения, эквивалентные условиям (5).

Введем для произвольного $r > 1$ биективный оператор $I_r : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, действующий по правилу

$$I_r(x) = (\text{sign}(x_1)|x_1|^{r-1}, \dots, \text{sign}(x_n)|x_n|^{r-1})^T.$$

Также введем обозначение опорной точки для выпуклого $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ и $p \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$:

$$x_{\mathcal{U}}^*(p) = \arg \max_{x \in \mathcal{U}} (p, x).$$

Теорема 2. Пусть $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ – строго выпуклое и компактное множество, $0 \in \text{int } \mathcal{U}$, $\det A \neq 0$, класс множеств $\{\mathcal{X}(N)\}_{N=0}^{\infty}$ определяется согласно (3). Тогда условия (5) эквивалентны равенству

$$\frac{x_0}{\alpha} = - \sum_{k=1}^{N_{\min}} A^{-k} x_{\mathcal{U}}^* \left((A^{-k})^T \psi(0) \right).$$

Доказательство. Поскольку $x_0 \neq 0$, согласно определению функционала Минковского $\alpha > 0$ и верно включение $\frac{x_0}{\alpha} \in \partial \mathcal{X}(N_{\min})$. С учетом леммы 1 справедливо

$$\frac{x_0}{\alpha} \in \partial \left(- \sum_{k=1}^{N_{\min}} A^{-k} \mathcal{U} \right).$$

Тогда в силу определения алгебраической суммы множеств найдутся такие $x^1 \in -A^{-1}\mathcal{U}, \dots, x^{N_{\min}} \in -A^{-N_{\min}}\mathcal{U}$, что



$$\frac{x_0}{\alpha} = \sum_{k=1}^{N_{\min}} x^k.$$

С учетом пункта 1 леммы 3

$$\begin{aligned} -\psi(0) &\in \mathcal{N}\left(\frac{x_0}{\alpha}, \mathcal{X}(N_{\min})\right) = \mathcal{N}\left(\sum_{k=1}^{N_{\min}} x^k, -\sum_{k=1}^{N_{\min}} A^{-k} \mathcal{U}\right) = \bigcap_{k=1}^{N_{\min}} \mathcal{N}(x^k, -A^{-k} \mathcal{U}). \\ x^k &= x_{-A^{-k}\mathcal{U}}^*(-\psi(0)) = \arg \max_{u \in -A^{-k}\mathcal{U}} (-\psi(0), u) = -A^{-k} \arg \max_{\tilde{u} \in \mathcal{U}} (-\psi(0), -A^{-k} \tilde{u}) = \\ &= -A^{-k} \arg \max_{\tilde{u} \in \mathcal{U}} \left((A^{-k})^T \psi(0), \tilde{u} \right) = -A^{-k} x_{\mathcal{U}}^* \left((A^{-k})^T \psi(0) \right). \end{aligned}$$

Таким образом

$$\frac{x_0}{\alpha} = \sum_{k=1}^{N_{\min}} x^k = -\sum_{k=1}^{N_{\min}} A^{-k} x_{\mathcal{U}}^* \left((A^{-k})^T \psi(0) \right).$$

Теорема 2 полностью доказана.

5. ЧАСТНЫЙ СЛУЧАЙ СУПЕРЭЛЛИПСОИДАЛЬНЫХ МНОЖЕСТВ

Рассмотрим частный случай (6), который характерен тем, что опорную точку для множества \mathcal{U} можно построить в явном виде.

Лемма 4. Пусть $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ – строго выпуклое и компактное множество, $u_0 \in \mathbb{R}^n$.

Тогда

1) для любого $u \in \mathcal{U} + u_0$

$$\mathcal{N}(u, \mathcal{U} + u_0) = \mathcal{N}(u - u_0, \mathcal{U});$$

2) для любого $p \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ существует единственная опорная точка

$$x_{\mathcal{U}+u_0}^*(p) = u_0 + x_{\mathcal{U}}^*(p).$$

Доказательство. Из определения нормального конуса следует пункт 1. Рассмотрим цепочку равенств

$$\begin{aligned} x_{\mathcal{U}+u_0}^*(p) &= \arg \max_{x \in \mathcal{U}+u_0} (p, x) = \arg \max_{\tilde{x} \in \mathcal{U}} (p, \tilde{x} + u_0) + u_0 = \\ &= u_0 + \arg \max_{\tilde{x} \in \mathcal{U}} (p, \tilde{x}) = u_0 + x_{\mathcal{U}}^*(p). \end{aligned}$$

Пункт 2 доказан.



Учтем известное представление нормального конуса и опорной точки для суперэллипсоидального множества и построим их описание для случая (6).

Лемма 5. [8, лемма 5]. Пусть множество $\mathcal{U} = D\mathcal{E}_r(a)$, где $\mathcal{E}_r(a)$ определяется соотношениями (1), $D \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\det A \neq 0$. Тогда

1) для любого $u \in \partial\mathcal{U}$

$$\mathcal{N}(u, \mathcal{U}) = \left\{ \gamma (D^{-1})^T \text{diag}(a)^{-1} I_r \left(\text{diag}(a)^{-1} D^{-1} u \right) \in \mathbb{R}^n : \gamma > 0 \right\};$$

2) для любого $p \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ существует единственная опорная точка

$$x_u^*(p) = \frac{D \text{diag}(a) I_q \left(\text{diag}(a) D^T p \right)}{\text{diag}(a) D^T p_q^{q-1}}.$$

Следствие 1. Пусть $\mathcal{U} = D(\mathcal{E}_r(a) + u_0)$, где $\mathcal{E}_r(a)$ определяется соотношениями (1), $D \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\det A \neq 0$. Тогда

1) для любого $u \in \partial\mathcal{U}$

$$\mathcal{N}(u, \mathcal{U}) = \left\{ \gamma (D^{-1})^T \text{diag}(a)^{-1} I_r \left(\text{diag}(a)^{-1} D^{-1} (u - u_0) \right) \in \mathbb{R}^n : \gamma > 0 \right\};$$

2) для любого $p \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ существует единственная опорная точка

$$x_u^*(p) = \frac{D \text{diag}(a) I_q \left(\text{diag}(a) D^T p \right)}{\text{diag}(a) D^T p_q^{q-1}} + D u_0.$$

Доказательство. Согласно определению нормального конуса и лемме 4 пункту 1 выполняется включение

$$\begin{aligned} p \in \mathcal{N}(u, D(\mathcal{E}_r(a) + u_0)) &\Leftrightarrow D^T p \in \mathcal{N}(D^{-1}(u - u_0), \mathcal{E}_r(a)) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow p \in (D^T)^{-1} \mathcal{N}(D^{-1}(u - u_0), \mathcal{E}_r(a)). \end{aligned}$$

Пункт 2 следует из пункта 2 леммы 4 и пункта 2 леммы 5:

$$\begin{aligned} x_u^*(p) &= \arg \max_{x \in D(\mathcal{E}_r(a) + u_0)} (p, x) = \arg \max_{x \in D\mathcal{E}_r(a) + D u_0} (p, x) = \\ &= \arg \max_{x \in D\mathcal{E}_r(a)} (p, x) + D u_0 = \frac{D \text{diag}(a) I_q \left(\text{diag}(a) D^T p \right)}{\text{diag}(a) D^T p_q^{q-1}} + D u_0. \end{aligned}$$

Следствие 1 доказано

Следствие 1 в случае (6) позволяет вычислить оптимальное управление согласно теореме 1 при выборе $D = B$, а в сочетании с теоремой 2 делает возможным свести условия (5) к эквивалентным алгебраическим уравнениям.



Теорема 3. Пусть \mathcal{U} определяется согласно (6), $x_0 \neq 0$, $\psi(0) \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, $\alpha > 0$. В таком случае $\psi(0)$ и α удовлетворяет условиям (5) тогда и только тогда, когда справедливо равенство

$$\frac{x_0}{\alpha} = - \sum_{k=1}^{N_{\min}} \left(A^{-k} B u_0 + \frac{A^{-k} B \text{diag}(a) I_q \left(\text{diag}(a) B^T \left((A^{-k})^T \psi(0) \right) \right)}{\text{diag}(a) B^T \left((A^{-k})^T \psi(0) \right)_q^{q-1}} \right).$$

Доказательство. Доказательство теоремы 3 следует непосредственно при подстановке в соотношение, полученное в теореме 2, выражения для опорной точки из пункт 2 следствия 1.

Система уравнений, представленная в теореме 3, имеет не единственное решение, поскольку правая часть инвариантна к домножению вектора $\psi(0)$ на любое положительное число. Для использования численных методов можно предположить модификацию данной системы, которая имеет единственное решение.

Следствие 2. Пусть \mathcal{U} определяется согласно (6), $\psi(0) \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, $\alpha > 0$. Тогда для любого $x_0 \neq 0$ существует единственное решение системы уравнений

$$\begin{cases} -x_0 = \alpha \sum_{k=1}^{N_{\min}} \frac{A^{-k} B \text{diag}(a) I_q \left(\text{diag}(a) (A^{-k} B)^T \psi(0) \right)}{\text{diag}(a) (A^{-k} B)^T \psi(0)_q^{q-1}} + A^{-k} B u_0, \\ (\psi(0), \psi(0)) = 1, \end{cases}$$

которое также удовлетворяет условиям (5).

Теорема 3 и следствие 2 в совокупности с теоремой 1 позволяют полностью решить задачу быстродействия для линейной дискретной системы в случае суперэллипсоидальной структуры множества допустимых значений управлений (6). Разрешение условий (5) согласно следствию 2 эквивалентно численному решению системы алгебраических уравнений. Одновременно оптимальный процесс и траектория сопряженной системы могут быть вычислены по рекуррентным соотношениям, представленным в теореме 1. Оптимальное управление явным образом определяется пунктом 2 следствия 1.

6. ВНУТРЕННЯЯ СУПЕРЭЛЛИПСОИДАЛЬНАЯ АППРОКСИМАЦИЯ ВЫПУКЛОГО ТЕЛА

Результаты [7, 8] расширены на случай, когда множество допустимых значений управлений несимметрично. Имеет смысл рассмотреть сдвиг множества для лучшей аппроксимации, то есть подобрать центр аппроксимирующего множества.



Рассмотрим два различных способа нахождения u_0 – центр масс u_{01} и Чебышевский центр u_{02} . Так же в работе рассмотрен случай центра суперэллипса в начале координат u_{00} .

Центром масс называется геометрическая точка, положение которой определяется распределением массы в теле [4, § 10 гл. IV]. Он может быть вычислен путем численного интегрирования:

$$u_{01} = \left(\frac{I_{x_1}}{S}, \frac{I_{x_2}}{S}, \dots, \frac{I_{x_n}}{S} \right)^T,$$

где

$$I_{x_i} = \int_{\mathcal{U}} x_i dx_1 \dots dx_n, \quad i = \overline{1, n}, \quad S = \int_{\mathcal{U}} dx_1 \dots dx_n.$$

Чебышевский центр ограниченного выпуклого множества является центром описанного шара минимального радиуса [3]. Для случая, когда множество допустимых значений управлений является многогранником, Чебышевский центр является решением следующей задачи оптимизации

$$x_0 = \arg \min_{x \in \mathbb{R}^n} \left\{ R > 0 : \max_{u \in \mathcal{U}} x - u \leq R \right\}.$$

После определения центра суперэллипсоидального множества и его сдвига, задача сводится к уже рассмотренному в [7, 8].

Рассмотрим примеры субоптимального решения задачи быстрогодействия с помощью суперэллипсоидальной аппроксимации для нескольких различных систем, где множество \mathcal{U} является выпуклым несимметричным многогранником. В каждом примере рассматриваются 3 случая – множество с центром в начале координат, со сдвигом на центр масс и со сдвигом на Чебышевский центр.

Пример 1. Для системы с исходными параметрами

$$A = \begin{pmatrix} -0,10 & -1,36 \\ 0,55 & -0,65 \end{pmatrix}, \mathcal{U} = \text{conv} \left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 8 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\},$$

$$x_0 = (10, 30)^T$$

вычислены центры суперэллипса: центр масс $u_{01} = (3,59 \quad 1,40)^T$ и Чебышевский центр $u_{02} = (3,67 \quad 1,33)^T$.

Для 3 случаев центра суперэллипса определены тензоры инерции и вычислены матрицы ориентации суперэллипса:

$$J_{01} = \begin{pmatrix} 815,08 & -460,15 \\ -460,15 & 1871,61 \end{pmatrix}, B_{01} = \begin{pmatrix} 0,94 & -0,35 \\ 0,35 & 0,94 \end{pmatrix};$$



$$J_{01} = \begin{pmatrix} 637,74 & -3,81 \\ -3,81 & 696,41 \end{pmatrix}, B_{01} = \begin{pmatrix} 0,99 & -0,06 \\ 0,06 & 0,99 \end{pmatrix};$$

$$J_{02} = \begin{pmatrix} 638,10 & -3,40 \\ -3,40 & 696,96 \end{pmatrix}, B_{02} = \begin{pmatrix} 0,99 & -0,05 \\ 0,05 & 0,99 \end{pmatrix}.$$

Ориентация множества \mathcal{U} при разных центрах множества отражена на рис. 1.

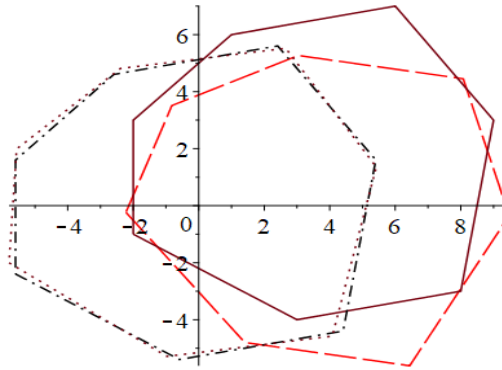


Рис. 1. Исходное множество \mathcal{U} (непрерывной линией), ориентированное $B^{-1}(\mathcal{U} - u_{00})$ (штриховой линией), ориентированное $B^{-1}(\mathcal{U} - u_{01})$ (штрихпунктирной линией), ориентированное $B^{-1}(\mathcal{U} - u_{02})$ (пунктирной линией)

В качестве аппроксимируемого множества рассматриваются ориентированные многогранники $B^{-1}(\mathcal{U} - u_0)$:

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_{rot0} &= B^{-1}(\mathcal{U} - u_{00}) = \\ &= \begin{pmatrix} -2,22 & 1,41 & 6,44 & 9,48 & 8,07 & 3,04 & -0,82 \\ -0,24 & -4,79 & -5,61 & -0,34 & 4,45 & 5,26 & 3,51 \end{pmatrix}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_{rot1} &= B^{-1}(\mathcal{U} - u_{01}) = \\ &= \begin{pmatrix} -5,74 & -0,94 & 4,11 & 5,49 & 2,76 & -2,02 & -5,34 \\ -2,02 & -5,34 & 4,67 & 1,25 & 5,43 & 4,76 & 1,96 \end{pmatrix}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_{rot2} &= B^{-1}(\mathcal{U} - u_{02}) = \\ &= \begin{pmatrix} -5,79 & -0,97 & 4,08 & 5,42 & 2,66 & -2,39 & -5,56 \\ -2,00 & -5,29 & -4,58 & 1,36 & 5,52 & 4,81 & 1,99 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Рассматриваются следующие значения параметра r :

$$r \in \left\{ \frac{6}{5}, \frac{4}{3}, 2, 4, 6 \right\},$$

для которых при решении оптимизационных задач были получены оптимальные значения параметров суперэллипсоидальной аппроксимации согласно [7, 8]:

Множество без сдвига:

$$r = \frac{6}{5}; a_1^* = 2,13; a_2^* = 2,72.$$

Множество со сдвигом на центр масс:

$$r = 2; a_1^* = 5,08; a_2^* = 4,86.$$

Множество со сдвигом на Чебышевский центр:

$$r = 2; a_1^* = 4,99; a_2^* = 4,88.$$

Результаты аппроксимации можно увидеть на рис. 2.

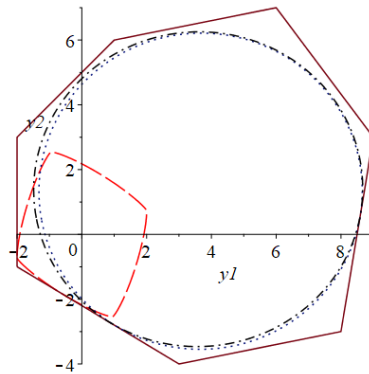


Рис. 2. Исходное множество \mathcal{U} (непрерывной линией), ориентированное $\mathbf{B}^{-1} \left(\mathcal{E}_6(\mathbf{a}) - \mathbf{u}_{00} \right)$ (штриховой линией), ориентированное $\mathbf{B}^{-1}(\mathcal{E}_2(\mathbf{a}) - \mathbf{u}_{01})$ (штрихпунктирной линией), ориентированное $\mathbf{B}^{-1}(\mathcal{E}_2(\mathbf{a}) - \mathbf{u}_{02})$ (пунктирной линией)

По рисунку видно, что суперэллипсы со сдвигом в центр масс и Чебышевский центр имеют большую площадь по сравнению с суперэллипсом без сдвига.

В ходе решения системы алгебраических уравнений для вычисления $\psi(0), \alpha$, определенной согласно следствию 2, были получены следующие численные значения параметров:

Множество без сдвига:



$$\alpha = 0,97; \psi_{01} = 0,05; \psi_{02} = -0,99; N_{\min} = 9.$$

Множество со сдвигом на центр масс:

$$\alpha = 0,95; \psi_{01} = 0,16; \psi_{02} = -0,99; N_{\min} = 5.$$

Множество со сдвигом на Чебышевский центр:

$$\alpha = 0,96; \psi_{01} = 0,17; \psi_{02} = -0,99; N_{\min} = 5.$$

Оптимальные траектории, построенные в соответствии с теоремой 2, представлены в табл. 1–4.

Таблица 1

Оптимальная траектория и оптимальное управление для линейной дискретной системы при $N_{\min} = 9$ (множество без сдвига) ($k=0\dots6$)

k	0	1	2	3	4	5	6
$x^*(k)$	10	-40,007	21,210	13,454	-21,438	5,132	9,985
	30	-13,241	-10,795	16,102	-2,839	-7,398	5,288
$\theta(k)$	0,053	0,630	-0,648	-0,178	0,965	-0,672	-0,569
	-0,998	0,214	1,034	-1,221	-0,146	1,644	-1,338
$u^*(k)$	1,928	-0,921	0,887	1,893	-0,921	0,416	1,067
	0,722	2,459	-2,457	0,243	2,459	-2,301	-2,254

Таблица 2

Оптимальная траектория и оптимальное управление для линейной дискретной системы при $N_{\min} = 9$ (множество без сдвига) ($k=7\dots9$)

k	7	8	9
$x^*(k)$	-7,162	0,121	0
	-0,230	-1,298	0
$\theta(k)$	1,357	-0,551	-1,165
	-0,791	2,384	-1,228
$u^*(k)$	-0,921	-1,758	
	2,460	-0,906	



Таблица 3

Оптимальная траектория и оптимальное управление для линейной дискретной системы при $N_{\min} = 5$ (множество со сдвигом на центр масс)

k	0	1	2	3	4	5
$x^*(k)$	10	-34,590	17,336	11,963	-8,158	0
	30	-9,923	-7,621	11,097	1,378	0
$\theta(k)$	0,164	0,533	-0,695	-0,014	0,872	-0,788
	-0,986	0,400	0,847	-1,278	0,136	1,452
$u^*(k)$	7,345	0,282	3,331	8,195	1,049	
	4,040	4,826	-3,294	2,035	5,343	

Таблица 4

Оптимальная траектория и оптимальное управление для линейной дискретной системы при $N_{\min} = 5$ (множество со сдвигом на Чебышевский центр)

k	0	1	2	3	4	5
$x^*(k)$	10	-34,589	17,431	12,091	-8,070	0
	30	-9,884	-7,629	11,051	1,471	0
$\theta(k)$	0,166	0,530	-0,696	-0,010	0,870	-0,791
	-0,985	0,404	0,842	-1,279	0,142	1,447
$u^*(k)$	7,346	0,430	3,458	8,232	1,186	
	4,079	4,843	-3,397	2,028	5,355	

Поскольку множество управлений в случаях с центром масс и с Чебышевским центром шире по сравнению со множеством без сдвига, начала координат удается достигнуть быстрее.

Пример 2. Система имеет следующие исходные данные

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \mathcal{U} = \text{conv} \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 0,25 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0,25 \\ 3 \end{pmatrix} \right\},$$

$$x_0 = (-3,5)^T.$$

Вычислен центр суперэллипса – центр масс $u_{01} = (-0,245 \quad -0,245)^T$, Чебышевский центр в данном случае совпадает с началом координат $u_{00} = u_{02} = (0 \quad 0)^T$.

Тензоры инерции, для которых вычисляются матрицы ориентации суперэллипса, выглядят следующим образом:



$$J_{01} = \begin{pmatrix} 88,06 & 17,55 \\ 17,55 & 88,06 \end{pmatrix}, B_{01} = \begin{pmatrix} 0,71 & 0,71 \\ -0,71 & 0,71 \end{pmatrix};$$

$$J_{02} = \begin{pmatrix} 90,11 & 15,64 \\ 15,64 & 90,11 \end{pmatrix}, B_{02} = \begin{pmatrix} 0,71 & 0,71 \\ -0,71 & 0,71 \end{pmatrix}.$$

Процедура ориентации множества \mathcal{U} показана на рис. 3.

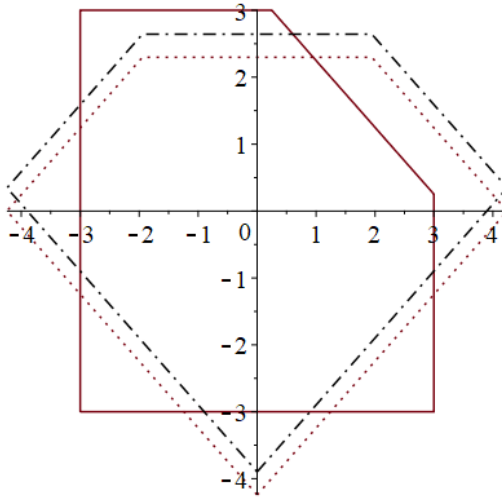


Рис. 3. Исходное множество \mathcal{U} (непрерывной линией), ориентированное $B^{-1}(\mathcal{U}-u_{01})$ (штрихпунктирной линией), ориентированное $B^{-1}(\mathcal{U}-u_{02})$ (пунктирной линией)

В качестве аппроксимируемого множества рассматриваются ориентированные многогранники $B^{-1}(\mathcal{U}-u_0)$:

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_{rot1} &= B^{-1}(\mathcal{U}-u_{01}) = \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 4,24 & 1,95 & -1,95 & -4,24 \\ -3,90 & 0,35 & 2,64 & 2,64 & 0,35 \end{pmatrix}; \\ \mathcal{U}_{rot2} &= B^{-1}(\mathcal{U}-u_{02}) = \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 4,24 & 1,95 & -1,95 & -4,24 \\ -4,24 & 0 & 2,30 & 2,20 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Рассматриваются следующие значения параметра r :

$$r \in \left\{ \frac{6}{5}, \frac{4}{3}, 2, 4, 6 \right\},$$

для которых при решении оптимизационных задач были получены оптимальные значения параметров суперэллипсоидальной аппроксимации согласно [7, 8]:

Множество со сдвигом на центр масс:

$$r = \frac{4}{3}; a_1^* = 3,67; a_2^* = 2,64.$$

Множество со сдвигом на Чебышевский центр:

$$r = 2; a_1^* = 3,57; a_2^* = 2,30.$$

Результаты аппроксимации можно увидеть на рис. 4.

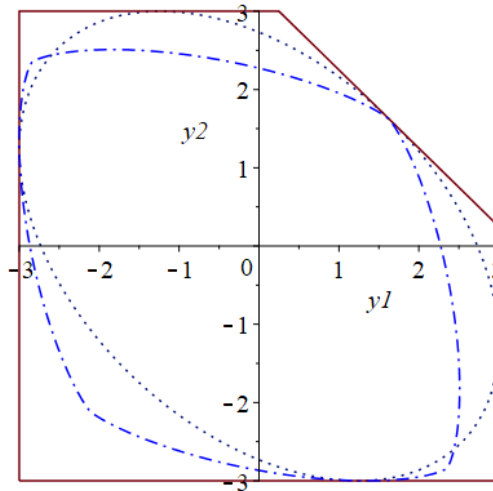


Рис. 4. Исходное множество u (непрерывной линией), ориентированное $\mathbf{B}^{-1} \left(\mathcal{E}_{\frac{4}{3}}(a) - u_{01} \right)$ (штрихпунктирной линией), ориентированное $\mathbf{B}^{-1} \left(\mathcal{E}_2(a) - u_{02} \right)$ (пунктирной линией)

В ходе решения системы алгебраических уравнений для вычисления $\psi(0), \alpha$, определенной согласно следствию 2, были получены следующие численные значения параметров:

Множество со сдвигом на центр масс:

$$\alpha = 0,98; \psi_{01} = -0,95; \psi_{02} = 0,31; N_{\min} = 6.$$

Множество со сдвигом на Чебышевский центр:

$$\alpha = 0,95; \psi_{01} = 0,99; \psi_{02} = 0,59; N_{\min} = 6.$$



Оптимальные траектории, построенные в соответствии с теоремой 2, представлены в таблицах 5–6.

Таблица 5

**Оптимальная траектория и оптимальное управление
для линейной дискретной системы при $N_{\min} = 6$
(множество со сдвигом на центр масс)**

k	0	1	2	3	4	5	6
$x^*(k)$	-3	0,696	-2,620	1,077	-1,209	0,173	0
	5	-6,483	4,764	-5,713	3,954	-2,675	0
$\theta(k)$	0,989	0,377	0,203	0,058	0,048	0,003	0,015
	0,144	0,233	-0,029	0,087	-0,039	0,042	-0,027
$u^*(k)$	1,696	2,469	1,554	2,348	-1,362	2,328	
	1,516	-2,415	1,672	-2,835	2,488	-2,848	

Таблица 6

**Оптимальная траектория и оптимальное
управление для линейной дискретной системы при $N_{\min} = 6$
(множество со сдвигом на Чебышевский центр)**

k	0	1	2	3	4	5	6
$x^*(k)$	-3	0,862	-2,349	0,988	-1,248	-0,239	0
	5	-6,809	5,824	-5,527	4,040	-2,446	0
$\theta(k)$	0,998	0,352	0,215	0,045	0,056	-0,003	0,020
	0,058	0,293	-0,078	0,123	-0,067	0,063	-0,043
$u^*(k)$	1,862	2,735	-0,137	2,302	-1,304	1,968	
	1,190	-1,846	2,646	-2,475	2,842	-2,685	

Особых отличий в траекториях нет, однако мера суперэллипса со сдвигом на центр масс больше меры суперэллипса со сдвигом на Чебышевский центр (в данном случае совпадает со множеством без сдвига).

Пример 3. В данном примере рассмотрим наибольший по мере суперэллипс и попробуем решить задачу быстродействия.

Система имеет следующие входные данные

$$A = \begin{pmatrix} -0,10 & -1,36 \\ 0,55 & -0,65 \end{pmatrix}, \mathcal{U} = \text{conv} \left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 8 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\},$$

$$x_0 = (10, 30)^T.$$

Вычислены центры суперэллипса: центр масс $u_{01} = (-4, 08 \quad -4, 37)^T$ и Чебышевский центр $u_{02} = (-3, 56 \quad -3, 56)^T$.

Для 3 случаев центра суперэллипса определены тензоры инерции и вычислены матрицы ориентации суперэллипса:

$$J_{01} = \begin{pmatrix} 1355,27 & -1173,08 \\ -1173,08 & 1267,05 \end{pmatrix}, B_{01} = \begin{pmatrix} 0,69 & -0,72 \\ 0,72 & 0,69 \end{pmatrix};$$

$$J_{01} = \begin{pmatrix} 288,10 & -178,37 \\ -178,37 & 339,88 \end{pmatrix}, B_{01} = \begin{pmatrix} 0,76 & -0,65 \\ 0,65 & 0,76 \end{pmatrix};$$

$$J_{02} = \begin{pmatrix} 325,50 & -202,23 \\ -202,23 & 355,08 \end{pmatrix}, B_{02} = \begin{pmatrix} 0,73 & -0,68 \\ 0,68 & 0,73 \end{pmatrix}.$$

Ориентация множества \mathcal{U} при разных центрах множества отражена на рис. 5.

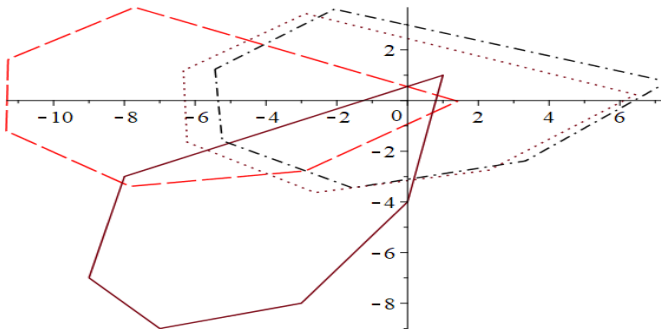


Рис. 5. Исходное множество \mathcal{U} (непрерывной линией), ориентированное $B^{-1}(\mathcal{U} - u_{00})$ (штриховой линией), ориентированное $B^{-1}(\mathcal{U} - u_{01})$ (штрихпунктирной линией), ориентированное $B^{-1}(\mathcal{U} - u_{02})$ (пунктирной линией)

В качестве аппроксимируемого множества рассматриваются ориентированные многогранники $B^{-1}(\mathcal{U} - u_0)$:

$$\mathcal{U}_{rot0} = B^{-1}(\mathcal{U} - u_{00}) =$$



$$= \begin{pmatrix} -11,28 & -11,38 & -7,84 & -2,88 & 1,41 & -7,71 \\ 1,62 & -1,20 & -3,38 & -2,77 & -0,02 & 3,68 \end{pmatrix};$$

$$\mathcal{U}_{rot1} = B^{-1}(\mathcal{U} - u_{01}) =$$

$$= \begin{pmatrix} -5,44 & -5,23 & -1,55 & 3,32 & 7,35 & -2,06 \\ 1,23 & -1,58 & -3,44 & 2,38 & 0,74 & 3,60 \end{pmatrix};$$

$$\mathcal{U}_{rot2} = B^{-1}(\mathcal{U} - u_{02}) =$$

$$= \begin{pmatrix} -6,33 & -6,22 & -2,61 & 2,30 & 6,43 & -2,87 \\ 1,18 & -1,64 & -3,63 & -2,74 & 0,23 & 3,43 \end{pmatrix}.$$

Рассматриваются следующие значения параметра r :

$$r \in \left\{ \frac{6}{5}, \frac{4}{3}, 2, 4, 6 \right\},$$

для которых при решении оптимизационных задач были получены оптимальные значения параметров суперэллипсоидальной аппроксимации согласно [7, 8]:

Множество без сдвига:

$$r = \frac{6}{5}; a_1^* = 1,20; a_2^* = 0,48.$$

Множество со сдвигом на центр масс:

$$r = 2; a_1^* = 5,34; a_2^* = 2,49.$$

Множество со сдвигом на Чебышевский центр:

$$r = \frac{6}{5}; a_1^* = 6,09; a_2^* = 2,25.$$

Результаты аппроксимации можно увидеть на рис. 6.

По рисунку видно, что суперэллипсы со сдвигом в центр масс и Чебышевский центр имеют большую площадь по сравнению с суперэллипсом без сдвига. Однако можно заметить, что суперэллипс со сдвигом на центр масс, имеющий наибольшую меру, не включает начало координат, соответственно нарушается условие $0 \in \text{int } \mathcal{U}$, решение задачи быстродействия не может быть вычислено.

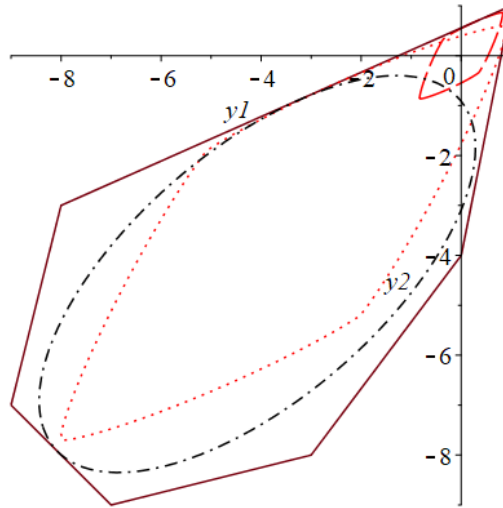


Рис. 6. Исходное множество u (непрерывной линией), ориентированное $B^{-1}(\mathcal{E}_5(a) - u_{00})$ (штриховой линией), ориентированное $B^{-1}(\mathcal{E}_2(a) - u_{01})$ (штрихпунктирной линией), ориентированное $B^{-1}(\mathcal{E}_2(a) - u_{02})$ (пунктирной линией)

7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В разделе 2 введены обозначения для дальнейшей работы. В разделе 3 описана постановка задачи быстрогодействия и задачи аппроксимации. В разделе 4 рассматривается приведение сложноразрешаемых условий из принципа максимума к суперэллипсоидальной структуре ограничений, которую можно разрешить аналитически. В разделе 5 представлена внутренняя суперэллипсоидальная аппроксимация выпуклого тела, в частности рассмотрен случай несимметричным множеств, для которых требуется определить центр аппроксимирующего множества. В разделе 6 приведены примеры решения задачи быстрогодействия на основе доказанных утверждений для разных систем со сравнением результатов для различных центров суперэллипса.

Представленные в статье методы могут применяться для численного моделирования и симуляции динамики разнообразных естественных и технических систем. За счет простоты построения оптимальных процессов на основе принципа максимума и формирования программного управления, удастся не только решить задачу быстрогодействия для заданного начального состояния, но и собрать большой объем модельных данных и различных траекторий для дальнейшего анализа системы. В то же время, аппарат суперэллипсоидальных аппроксимаций гарантирует более высокую точность по сравнению с классическими эллипсоидальными методами аппроксимации.



Литература

1. Берендакова А.В., Ибрагимов Д.Н. О методе построения внешних оценок предельного множества управляемости для линейной дискретной системы с ограниченным управлением // *АиТ*. 2023. № 2. С. 3–34. DOI: 10.31857/S0005231023020010
2. Болтянский В.Г. Оптимальное управление дискретными системами // М.: Наука. 1973.
3. Гаркави А.Л. О чебышевском центре и выпуклой оболочке множества // *Успехи матем. наук*. 1964. Т. 19. № 6. С. 139–145.
4. Журавлев В.Ф. Основы теоретической механики // М.: Издательство Физико-математической литературы. 2001.
5. Ибрагимов Д.Н., Новожилкин Н.М., Порцева Е.Ю. О достаточных условиях оптимальности гарантирующего управления в задаче быстродействия для линейной нестационарной дискретной системы с ограниченным управлением // *АиТ*. 2021. № 12. С. 48–72. DOI: 10.31857/S0005231021120047
6. Ибрагимов Д.Н. О задаче быстродействия для класса линейных автономных бесконечномерных систем с дискретным временем, ограниченным управлением и вырожденным оператором // *АиТ*. 2019. № 3. С. 3–25. DOI: 10.1134/S0005231019030012
7. Ибрагимов Д.Н., Подгорная В.М. Суперэллипсоидальные аппроксимации в задаче быстродействия для двумерной линейной дискретной системы с ограниченным управлением // *Моделирование и анализ данных*. 2023. Т. 13. № 2. С. 151–179. DOI: 10.17759/mda.2023130209
8. Ибрагимов Д.Н., Подгорная В.М. Формирование оптимального по быстродействию ограниченного управления для линейных дискретных систем на основе метода суперэллипсоидальной аппроксимации // *АиТ*. 2023. № 9. С. 51–81. DOI: 10.31857/S0005231023090039
9. Ибрагимов Д.Н., Сиротин А.Н. О задаче быстродействия для класса линейных автономных бесконечномерных систем с дискретным временем и ограниченным управлением // *АиТ*. 2017. № 10. С. 3–32. DOI: 10.1134/S0005117917100010
10. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа // М.: Физматлит. 2012.
11. Проний А.И. Элементы теории оптимальных дискретных процессов // М.: Наука. 1973.
12. Рокафеллар Р. Выпуклый анализ // М.: Мир. 1973.
13. Страшинов С.В. Использование суперэллипсов в компьютерном моделировании строительных и машиностроительных объектов // *Вестник ЮУрГУ. Серия «Строительство и архитектура»*. 2023. Т. 23. № 4. С. 67–76. DOI:10.14529/build230408
14. Abdelhak A., Rachik M. The Linear Quadratic Minimum-Time Problem for a Class of Discrete Systems // *Optimization*. 2010. Vol. 59(4). P. 575–87. DOI:10.1080/02331930801954672
15. A Superellipse with Deformation and Its Application in Describing the Cross-Sectional Shapes of a Square Bamboo // *Weíwei Huang et al. Symmetry*. 2020. № 12, 2073. DOI:10.3390/sym12122073
16. Bako L., Chen D., Lecoëuche S. A numerical solution to the minimum-time control problem for linear discrete-time systems // *CoRR*. 2011. DOI:10.48550/arXiv.1109.3772
17. Capturing spiral radial growth of conifers using the superellipse to model tree-ring geometric shape // *Shi Pei-Jian et al. Frontiers in Plant Science*. 2015. Vol. 6 DOI:10.3389/fpls.2015.00856
18. Discrete-Time System Optimal Dynamic Traffic Assignment (SO-DTA) with Partial Control for Physical Queuing Networks // *Samitha Samaranyake et al. Transportation Science*. 2018. Vol. 52. № 4. DOI:10.1287/trsc.2017.0800



On the Suboptimal Solution of the Speed-In-Action Problem for a Linear Discrete System in the Case of Asymmetric Control Constraints

Violetta M. Podgornaya*

Moscow Aviation Institute (national research university), Moscow, Russia

ORCID: <https://orcid.org/0009-0004-9956-3002>

e-mail: vita1401@outlook.com

The paper considers a linear discrete system with bounded control. The speed-in-action problem is solved for the system, that is, it is required to construct a control process that transfers the system from the initial state to the origin in a minimum number of steps. If the set of acceptable control values has a superellipse structure, then the problem of calculating optimal control can be reduced to solving a system of algebraic equations. A superellipsoidal approximation method has been developed for sets of arbitrary structure, and the case of asymmetric sets has been considered. Examples are given.

Keywords: linear control system, speed problem, 0-controllability sets, maximum principle, superellipse.

For citation:

Podgornaya V.M. On the Suboptimal Solution of the Speed-In-Action Problem for a Linear Discrete System in the Case of Asymmetric Control Constraints. *Modelirovanie i analiz dannykh = Modelling and Data Analysis*, 2024. Vol. 14, no. 3, pp. 63–86. DOI: <https://doi.org/10.17759/mda.2024140304> (In Russ., abstr. in Engl.).

References

1. Berendakova A.V., Ibragimov D.N. About the Method for Constructing External Estimates of the Limit Controllability Set for the Linear Discrete-Time System with Bounded Control. *Autom. Remote Control*. 2023. Vol. 84. no. 2. pp. 83–104. DOI:10.1134/S0005117923020030
2. Boltyanskij V.G. Optimal'noe upravlenie diskretnymi sistemami [Optimal control of discrete systems]. *Moskva: Nauka=Moscow: The science*. 1973. (In Russ.).
3. Garkavi A.L. O chebyshevskom tsentre i vypukloi obolochke mnozhestva [About the Chebyshev center and the convex hull of the set]. *Uspekhi matematicheskikh nauk=Achievements of mathematical sciences*. 1964. Vol. 19. no. 6. pp. 139–145. (In Russ.).
4. Zhuravlev V.F. Osnovy teoreticheskoi mekhaniki [Fundamentals of theoretical mechanics]. *Moskva: Izdatel'stvo Fiziko-matematicheskoi literatury=Moscow: Publishing House of Physical and Mathematical Literature*. 2001. (In Russ.).
5. Ibragimov D.N., Novozhilin N.M., Portseva E.Yu. On Sufficient Optimality Conditions for a Guaranteed Control in the Speed Problem for a Linear Time-Varying Discrete-Time System with

***Violetta M. Podgornaya**, Postgraduate Student, Assistant Professor, Department of Probability Theory and Computer Modeling, Moscow Aviation Institute (national research university), Moscow, Russia, ORCID: <https://orcid.org/0009-0004-9956-3002>, e-mail: vita1401@outlook.com



- Bounded Control. *Autom. Remote Control*. 2021. Vol. 82. no. 12. pp. 2076–2096. DOI:10.1134/S000511792112002X
6. Ibragimov D.N. On the Optimal Speed Problem for the Class of Linear Autonomous Infinite-Dimensional Discrete-Time Systems with Bounded Control and Degenerate Operator. *Autom. Remote Control*. 2019. Vol. 80. no. 3. pp. 393–412. DOI:10.1134/S0005117919030019
 7. Ibragimov D.N., Podgornaya V.M. Superellipsoidal'nye approksimatsii v zadache bystrodeistviya dlya dvumernoi lineinoi diskretnoi sistemy s ogranichenym upravleniem [Superellipsoidal Approximations in the Speed-in-action Problem for a Two-dimensional Linear Discrete System with Bounded Control]. *Modelirovanie i analiz dannykh=Modelling and Data Analysis*. 2023. Vol. 13. no. 2. pp. 151–179. DOI: 10.17759/mda.2023130209 (In Russ.).
 8. Ibragimov D.N., Podgornaya V.M. Construction of the Time-Optimal Bounded Control for Linear Discrete-Time Systems Based on the Method of Superellipsoidal Approximation. *Autom. Remote Control*. 2023. Vol. 84. no. 9. pp. 924–946. DOI: 10.1134/S0005117923090035
 9. Ibragimov D.N., Sirotin A.N. On the Problem of Operation Speed for the Class of Linear Infinite-Dimensional Discrete-Time Systems with Bounded Control. *Autom. Remote Control*. 2017. Vol. 78. no. 10. pp. 1731–1756. DOI: 10.1134/S0005117917100010
 10. Kolmogorov A.N., Fomin S.V. *Elementy teorii funktsij i funkcional'nogo analiza* [Elements of the theory of functions and functional analysis]. *Moskva: Fizmatlit=Moscow: Physical education*. 2012. (In Russ.).
 11. Propoj A.I. *Elementy teorii optimal'nykh diskretnykh processov* [Elements of the theory of optimal discrete processes]. *Moskva: Nauka=Moscow: The science*. 1973. (In Russ.).
 12. Rokafellar R. *Vypuklyj analiz* [Convex analysis]. *Moskva: Mir=Moscow: Mir*. 1973. (In Russ.).
 13. Strashnov S.V. Ispol'zovanie superellipsov v komp'yuternom modelirovanii stroitel'nykh i mashinostroitel'nykh ob'ektov [Utilizing superellipses in computer modeling of architectural and engineering structures]. *Vestnik Yuzhno-Ural'skogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya Stroitel'stvo i arkhitektura=Bulletin of the South Ural State University. Series Construction Engineering and Architecture*. 2023. Vol. 23. no. 4. pp. 67–76. DOI:10.14529/build230408 (In Russ.).
 14. Abdelhak A., Rachik M. The Linear Quadratic Minimum-Time Problem for a Class of Discrete Systems. *Optimization*. 2010. Vol. 59(4). pp. 575–87. DOI:10.1080/02331930801954672
 15. A Superellipse with Deformation and Its Application in Describing the Cross-Sectional Shapes of a Square Bamboo. Weiwei Huang et al. *Symmetry*. 2020. № 12, 2073. DOI:10.3390/sym12122073
 16. Bako L., Chen D., Lecoeuche S. A numerical solution to the minimum-time control problem for linear discrete-time systems. *CoRR*. 2011. DOI:10.48550/arXiv.1109.3772
 17. Capturing spiral radial growth of conifers using the superellipse to model tree-ring geometric shape. Shi Pei-Jian et al. *Frontiers in Plant Science*. 2015. Vol. 6. DOI:10.3389/fpls.2015.00856
 18. Discrete-Time System Optimal Dynamic Traffic Assignment (SO-DTA) with Partial Control for Physical Queuing Networks. Samitha Samaranyake et al. *Transportation Science*. 2018. Vol. 52. no. 4. DOI:10.1287/trsc.2017.0800

Получена 16.06.2024

Received 16.06.2024

Принята в печать 17.07.2024

Accepted 17.07.2024