

Научная статья | Original paper

УДК 004.89

Разработка прототипа системы на основе марковских представлений для поддержки учебного процесса в начальной школе

Д.А. Катышев

Московский государственный психолого-педагогический университет

Москва, Российская Федерация

✉ katyshevda@mgppu.ru

Резюме

Контекст и актуальность. Индивидуализация учебного процесса является важнейшей задачей современной педагогики, особенно в начальном образовании, где формируются базовые математические навыки. Существующая классно-урочная система часто не позволяет оперативно выявлять и корректировать индивидуальные ошибки учеников. Предложенная автором разработка адаптивной цифровой системы на основе марковских моделей направлена на решение этой проблемы. **Цель.** Разработка прототипа цифровой образовательной системы для поддержки индивидуализированного процесса обучения математике в начальной школе. **Гипотеза.** Адаптивная система, основанная на марковских процессах с дискретными состояниями и непрерывным временем, способна повысить эффективность индивидуализации обучения и улучшить математические навыки учащихся. **Методы и материалы.** В рамках исследования разработано веб-приложение, использующее марковские процессы для оценки математических знаний и умений у учеников начальных классов. Система предлагает задачи с предопределёнными вариантами ответов, фиксирует ошибки, формирует соответствующие ошибкам подсказки и адаптирует сложность задач в зависимости от успехов ученика. **Результаты.** Представлен прототип цифровой системы, которая позволяет эффективно выявлять и корректировать типичные ошибки учащихся начальной школы при решении математических задач, обеспечивая индивидуализированный подход к обучению и снижая нагрузку на учителя. **Выводы.** Разработанная система предоставляет возможности для повышения индивидуализации обучения и качества математического образования в начальной школе. Рекомендуется дальнейшее расширение функционала системы, включая интеграцию дополнительных аналитических модулей и адаптацию к другим образовательным предметам и возрастным группам.



Ключевые слова: адаптивное обучение, индивидуализация обучения, марковский процесс, искусственный интеллект, информационная система

Для цитирования: Катышев, Д.А. (2025). Разработка прототипа системы на основе марковских представлений для поддержки учебного процесса в начальной школе. *Моделирование и анализ данных*, 15(2), 177—191. <https://doi.org/10.17759/mda.2025150211>

Development of a prototype system based on Markov representations to support the learning process in elementary school

D.A. Katyshev

Moscow State University of Psychology and Education, Moscow, Russian Federation

✉ katyshevda@mgppu.ru

Abstract

Context and relevance. Individualization of the learning process is the most important task of modern pedagogy, especially in primary education, where basic mathematical skills are formed. The existing class-lesson system often does not allow to promptly identify and correct individual errors of students. The author's proposed development of an adaptive digital system based on Markov models is aimed at solving this problem. **Objective.** Development of a prototype of a digital educational system to support individualized learning process of mathematics in elementary school. **Hypothesis.** An adaptive system based on Markov processes with discrete states and continuous time can increase the efficiency of individualized learning and improve students' mathematical skills. **Methods and materials.** The study developed a web application that uses Markov processes to assess elementary school students' mathematical knowledge and skills. The system offers tasks with predefined answer choices, captures errors, generates error-appropriate prompts, and adapts task difficulty based on student progress. **Results.** A prototype of a digital system is presented, which allows effectively detecting and correcting typical errors of elementary school students in solving mathematical problems, providing an individualized approach to teaching and reducing the teacher's workload. **Conclusions.** The developed system provides opportunities for increasing individualization of learning and quality of mathematics education in elementary school. Further expansion of the system functionality is recommended, including integration of additional analytical modules and adaptation to other educational subjects and age groups.

Keywords: adaptive learning, individualization of learning, Markov process, artificial intelligence, information system

For citation: Katyshev, D.A. (2025). Development of a prototype system based on Markov representations to support the learning process in elementary school. *Modelling and Data Analysis*, 15(2), 177—191. (In Russ.). <https://doi.org/10.17759/mda.2025150211>



Введение

Проблема повышения качества математического образования в начальной школе остается одной из наиболее актуальных в современной педагогической науке и практике. Начальный этап обучения закладывает основы математической грамотности и математического мышления, от которых во многом зависит дальнейшая академическая успешность учащихся. Однако практика показывает, что значительная часть младших школьников испытывает трудности при освоении курсов математики (Mangarin, Caballes, 2024). Многие ученики допускают систематические математические ошибки, теряя интерес к предмету, что негативно сказывается на качестве дальнейшего естественнонаучного образования (Václavíková, 2023). Одной из причин подобных затруднений является ограниченная возможность учителя в условиях классно-урочной системы выявлять индивидуальные ошибки каждого ученика и своевременно работать над их устранением. Как отмечает В.Л. Соколов, учителям начальных классов зачастую не хватает времени и навыков для детального анализа и обсуждения ошибок учеников во время уроков (Соколов, 2023). В результате многие ошибки остаются непроработанными, закрепляются в мышлении учащихся и приводят к возникновению стойких неправильных представлений о математических понятиях (Kusmaryono и др. 2019).

Описанная в данной работе информационная система призвана помочь учителям решить проблемы, затрудняющие организацию индивидуализации обучения, за счёт адаптивного подхода к оценке сложности предъявляемых заданий и системе подсказок, ориентирующейся на типы ошибок, совершаемых учащимися в процессе решения предъявляемых задач курса математики начальной школы. Диагностика ошибок в данной системе подразумевает классификацию ответов ученика в терминах известного множества типовых ошибок. Здесь система опирается на реестр ошибок — базу знаний, в которой описаны распространенные ошибки при выполнении каждого вида заданий. Каждому неправильному ответу (или характеру решения) сопоставляется определённая причина ошибки. Разрабатываемая система предназначена для формирования и развития математических навыков у младших школьников через индивидуализированную работу над ошибками. В процессе работы с данной информационной системой учащийся проходит пары состояний. В каждой из пар состояний учащемуся предъявляется задание и четыре варианта ответов, из которых верным всегда является только один. В случае, если учащийся дает один из трех ошибочных ответов, он попадает в состояние «ловушки», где ему предъявляется та же самая задача, но с подсказкой. Подсказка представляет собой либо некоторый наводящий вопрос, ответив на который ученик может прийти к верному решению, либо некоторую теоретическую информацию, которая помогает учащемуся решить данную задачу. После успешного решения задачи учащемуся предъявляется следующее задание из следующей пары состояний. Каждая следующая пара состояний содержит более сложные задачи. Банк заданий сформирован таким образом: все задания поделены на четыре большие группы, каждая группа для одного из четырёх классов. В каждом классе рассматриваются три крупные темы, и, в каждой теме три категории заданий:



легкие, средней сложности и повышенной сложности. Таким образом, в каждом классе есть девять категорий заданий и, в обучающей системе эти девять категорий представлены девятью парами состояний марковской модели.

Материалы и методы

Индивидуализация обучения и своевременные решения учебных затруднений рассматриваются в педагогической науке как важнейшие условия повышения эффективности образования (Dias и др., 2023). В мировой практике накоплен положительный опыт использования адаптивных цифровых ресурсов в начальном образовании. Так, в исследовании Х. Дж. Банг показал, что использование игровой адаптивной системы «My Math Academy» для учеников 1—2 классов привело к значимому росту результатов по математике по сравнению с контрольной группой и особенно высокую эффективность адаптивное обучение продемонстрировало у учащихся с низким исходным уровнем подготовки, благодаря возможности подстраивать сложность заданий под индивидуальные потребности ребенка (Bang, 2023). В современных работах, направленных на исследования индивидуализации обучения, подчёркивается, что применение технологий, обеспечивающих индивидуальный темп и траекторию обучения, позволяет учителю эффективнее работать с классом, где у детей разный уровень знаний (Semenovska, Vazhenina, Fazan, 2023), (Saadawi, 2025). Цифровые платформы адаптивного обучения, встроенные в учебный процесс, могут снизить нагрузку на учителя, взяв на себя часть функций по мониторингу успехов учащихся и подбору заданий соответствующего уровня сложности.

В России ведутся исследования в области адаптивного обучения математике. В частности, под руководством Л.С. Куравского и соавторов разработана концепция адаптивного учебного тренажёра, основанного на использовании марковских моделей для постепенного усложнения заданий в зависимости от успехов учащихся (Куравский и др., 2021). Данный подход позволяет учитывать динамику процесса обучения и снижать число необходимых заданий для достижения запланированного результата.

Задача преодоления учебных ошибок младших школьников на уроках математики может решаться благодаря разработке методов работы над ошибками (Иванова, 2019). Например, классифицировать типы детских ошибок и выявлять стоящие за ними ошибочные представления для адресной коррекции (Ashlock, 2002). Так, В.Л. Соколов выделяет распространенные типы ошибок на примере темы «Вычитание» и описывает приёмы педагогической работы по их устранению, включая организацию специального обсуждения ошибок в классе и использование наглядных моделей (Kusmaryono и др. 2019). Однако внедрение таких методов в массовой школе затруднено из-за ограниченности учебного времени и больших классов. Поэтому автоматизация процесса выявления и разбора ошибок с помощью современных информационных систем является актуальной научно-практической задачей.

Архитектура системы построена на концепции структурных единиц, каждая из которых включает три ключевых компонента: банк заданий, реестр возможных ошибок и банк средств для их преодоления. Структурная единица системы рисунка 1 имеет номер 2.1.1.



1-Я СТРУКТУРНАЯ ЕДИНИЦА (Группа заданий 2.1.1.) ▲

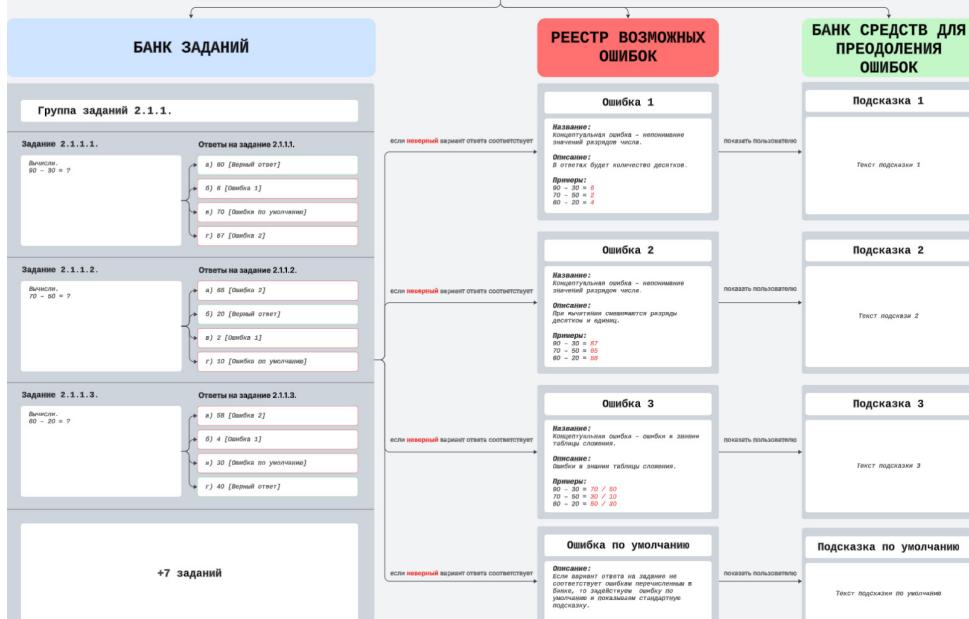


Рис. 1. Схема структурной единицы системы

Fig. 1. Scheme of the structural unit of the system

Это означает первую группу заданий первой темы для второго класса. Данный функциональный блок, обеспечивает реализацию адаптивного обучения в рамках конкретной тематической области. Банк заданий содержит математические задачи трёх уровней сложности с предусмотренными вариантами ответов. К каждому заданию прилагается четыре варианта ответа: один правильный и три неправильных, отражающих типичные ошибки учащихся.

Реестр возможных ошибок содержит структурированную классификацию ошибок, характерных для данной группы заданий. Для каждой типичной ошибки указывается её название, содержательное описание и примеры проявления. Например, в теме вычитания двузначных чисел выделяются такие типы ошибок как «концептуальная ошибка — непонимание значений разрядов числа» и «ошибки в знании таблицы сложения». Это позволяет системе не только фиксировать неверные ответы, но и диагностировать их причины.

Банк средств для преодоления ошибок представляет собой набор подсказок, каждая из которых направлена на преодоление конкретного типа ошибки. Подсказки разрабатывались с учетом педагогических принципов включают текстовые пояснения, помогающие школьнику понять и исправить допущенную ошибку. Например, при ошибке в понимании разрядов числа учащемуся демонстрируется наглядное представление числа с выделением десятков и единиц.



Такая архитектура позволяет системе гибко реагировать на действия ученика, предоставляя ему индивидуализированную поддержку в процессе обучения. При неверном ответе система не просто сообщает о его неправильности, но определяет тип ошибки и предоставляет соответствующую подсказку, направленную на осознание и исправление конкретного заблуждения.

Математической основой системы является марковский процесс с дискретными состояниями и непрерывным временем (Артеменков и др. 2017). Эта модель позволяет описывать динамику взаимодействия ученика с системой, представляя процесс выполнения заданий как последовательность переходов между различными состояниями (рис. 2).

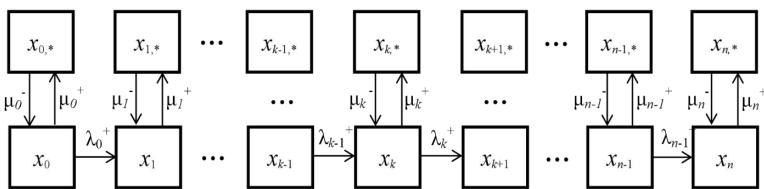


Рис. 2. Марковский процесс с дискретными состояниями и непрерывным временем

Fig. 2. Markov process with discrete states and continuous time

Где $\{x_i\}_{i=0,\dots,n}$ и $\{x_i^*\}_{i=0,\dots,n}$ — состояния процесса,
 $\lambda = (\lambda_0^+, \dots, \lambda_{n-1}^+, \mu_0^+, \dots, \mu_n^+, \mu_0^-, \dots, \mu_n^-)$ — интенсивности переходов между состояниями.

Каждое состояние характеризуется определенным уровнем сложности заданий и типом необходимой поддержки (определенными подсказками в случае неверного ответа). Согласно работам Л.С. Куравского (Куравский и др., 2022), (Куравский и др., 2017) вероятности пребывания в состояниях процесса, как функции времени, определяются следующей системой обыкновенных дифференциальных уравнений Колмогорова в матричной форме:

$$\frac{d\mathbf{p}(t)}{dt} = \mathbf{M}(\lambda)\mathbf{p}$$

где $0 \leq t \leq T$ (T – конечный момент времени),

$\mathbf{p}(t) = (p_0(t), \dots, p_n(t), p_{0*}(t), \dots, p_{n*}(t))^T$ — вероятности пребывания в состояниях процесса,

\mathbf{M} — матрица интенсивностей переходов между состояниями порядка $2n + 2$. Переходы между состояниями определяются результатами выполнения заданий.

В контексте начального курса математики под состояниями понимаются уровни овладения определенными тематическими умениями и понятиями. Например, отдельные состояния могут соответствовать базовому пониманию сложения, уверенным навыкам вычитания без перехода через разряд, продвинутому владению операциями



с двузначными числами и т.д. Решение каждой учебной задачи трактуется как событие, приводящее либо к переходу ученика в новое состояние (при успешном решении), либо к повторному предъявлению задания текущего состояния (попадание в «ловушку»). Таким образом, траектория обучения ученика описывается последовательностью состояний где случайность переходов обусловлена как верными, так и неверными действиями ученика. Формально, для каждого состояния существует набор допустимых задач определённого содержания и уровня сложности, а также набор подсказок или разъяснений, которые могут быть предоставлены ученику. Если ученик справляется с задачей, система переводит его в состояние более высокого уровня сложности или продвигает дальше в рамках текущей темы. Если же ученик ошибается, система может перевести его в состояние «ловушки», в котором будет представлена та же самая задача с подсказкой для устранения конкретной ошибки. Подсказки представляют собой заранее заготовленные объяснения или наводящие вопросы, связанные с типом ошибки, например, напоминание о правилах вычитания с переходом через разряд.

Определение значений свободных параметров марковской цепи $\lambda = (\lambda_0^+, \dots, \lambda_{n-1}^+, \mu_0^+, \dots, \mu_n^+, \mu_0^-, \dots, \mu_n^-)^T$ осуществляется путем сравнения наблюдаемых и прогнозируемых распределений частот пребывания в состояниях модели. Для этого определяется набор интенсивностей, обеспечивающий наименьшее значение статистики Пирсона:

$$\chi^2(\lambda) = \sum_{d=0}^{D-1} \sum_{i=0}^n \left[\frac{(p_i(t_d)N_d - F_{i,d})^2}{p_i(t_d)N_d} + \frac{(p_{i*}(t_d)N_d - F_{i*,d})^2}{p_{i*}(t_d)N_d} \right]$$

где $N_d = \sum_{i=0}^n (F_{i,d} + F_{i*,d})$, $F_{i,d}$, $F_{i*,d}$ — наблюдаемые частоты пребывания в состояниях процесса в моменты времени $\{t_d\}_{d=0, \dots, D-1}$.

Данная статистика представляет собой меру согласования применяемой математической модели с наблюдениями.

Важным преимуществом выбранного теоретического подхода является его интерпретируемость. Система не использует непрозрачные «чёрные ящики» вроде сложных нейронных сетей — все её решения (оценки, переходы, подбор подсказок) основаны на понятных педагогам правилах и статистических закономерностях, которые поддаются содержательному объяснению. Благодаря этому система легко интегрируется в реальный учебный процесс.

Результаты

Программная реализация адаптивной цифровой системы состоит из серверной и интерфейсной части веб-приложения.

Серверная часть использует веб-фреймворк CakePHP с дополнительными модулями для обеспечения функционала аутентификации и авторизации пользователей. Фреймворк обладает всем необходимым функционалом для быстрого построения



веб-приложений реализуя паттерн «Модель-Вид-Контроллер». Для написания цифровой системы используется язык программирования PHP версии 8.2.1.

Интерфейсная часть задействует фреймворк Bootstrap для построения адаптивного интерфейса веб-приложения и формирования его мобильной версии. Для визуализации значков интерфейса используется масштабируемые векторные иконки от Font Awesome. Заполнение и загрузка файлов в текстовые поля ввода происходит с помощью кроссплатформенного JavaScript HTML WYSIWYG редактора TinyMCE.

Для развертывания тренажера был задействован сервер с операционной системой Debian и веб-сервер Nginx. В качестве базы данных был задействован PostgreSQL.

Наполнение адаптивной цифровой системы материалами происходит с помощью административной панели веб-приложения. Доступом к ней обладают пользователи с правами администратора, редактора или учителя. Осуществляется разделение прав разных ролей системы посредством файлов политики. Доступ к особо важным компонентам веб-приложения разрешается только редакторам и администраторам. Формирования пар марковского процесса и их последовательности доступно после заполнения следующих сведений: основное описание тренажера, список субтестов (аналог групп заданий, связанных одной логикой), банка заданий, реестра возможных ошибок с подсказками для них. После ввода этих сведений создается отдельная последовательность пар состояний и осуществляется их связывание с определенным субтестом. Для каждой пары состояний возможно подключение только одной группы заданий.

Панель управления > Тесты > Субтесты > Задания > Задание 2.1.3.2.

Редактирование задания [ID: 305]

ЗАДАНИЕ:

Субтест

Группа заданий 2.1.3. [65]

Название

Задание 2.1.3.2.

Подсказка по умолчанию

Текст задания

Файл Редактировать Вид Вставить Формат Инструменты Таблица

На рисунке изображен фрагмент идущих подряд сказочных цифр.

Винчиши
ц0 - ѿ = ?

Один или несколько верных ответов?

Только один верный ответ

The screenshot displays a portion of a task editing interface. At the top, there's a navigation bar with links like 'Панель управления', 'Тесты', 'Субтесты', 'Задания', and 'Задание 2.1.3.2.'. Below it is a heading 'Редактирование задания [ID: 305]'. A bold section labeled 'ЗАДАНИЕ:' follows. Underneath, there's a dropdown menu set to 'Субтест'. Below that is a text input field with the value 'Группа заданий 2.1.3. [65]'. Further down are fields for 'Название' (containing 'Задание 2.1.3.2.') and 'Подсказка по умолчанию'. The main area is titled 'Текст задания' and contains a rich text editor toolbar with icons for file, edit, view, insert, format, tools, and tables. Below the toolbar is a text input field with the placeholder 'На рисунке изображен фрагмент идущих подряд сказочных цифр.' and a screenshot of a document showing the text 'ц0 - ѿ = ?' with arrows pointing to specific characters. Another text input field below is labeled 'Винчиши' and contains 'ц0 - ѿ = ?'. At the bottom, there are two questions: 'Один или несколько верных ответов?' and 'Только один верный ответ'.

Рис. 3. Часть элемента формы заполнения заданий в административной части веб-приложения

Fig. 3. Part of the task filling form element in the administrative part of the web application



На рисунке 3 изображен фрагмент формы заполнения, используя которую, пользователь может добавить новое задание в систему если обладает необходимым доступом к странице. С помощью редактора доступна возможность загрузки файлов изображения для наглядного представления заданий пользователю. Также это позволяет более информативно предоставить подсказки, которые предъявляются в состояниях «ловушках» для избегания использования большого количества текста. Использование готовых вариантов ответа на задание позволяет упростить логику системы и сделать её более доступной для учителей. Составление неверных вариантов ответов осуществляется на основе самых распространённых ошибок, которые школьник может допустить при решении выбранной группы задач. Готовые варианты ответа в данной системе предоставляют оптимальный компромисс между сложностью системы и потребностью учителей. Также некоторые задания требуют ответа символами, которые не представлены на клавиатуре, а использование его виртуального варианта сильно усложняет взаимодействие с системой школьника начальных классов. Использование пользовательского ввода при решении задач негативно сказывается на взаимодействие учителей с веб-приложением из-за необходимости составления правил для связывания большого количества вариантов ответа пользователя с определенными ошибками. Готовые варианты ответа лишены данного недостатка так как используют логику, один вариант ответа связывается с одной ошибкой.

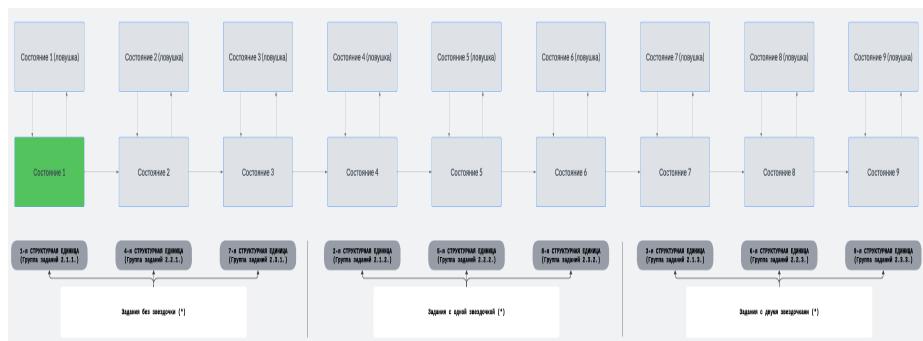


Рис. 4. Схема марковского процесса

Fig. 4. Markov process diagram

На рисунке 4 представлена схема марковского процесса тренажера для поддержки учебного процесса при изучении тем учебного предмета «Математика» второго класса начальной школы. Школьник начинает в «Состояние 1», которая отмечена зеленым цветом. К данному состоянию подключена первая структурная единица, являющаяся абстракцией для хранения банка заданий, реестра ошибок и подсказок. Первая пара состояний предлагает решить простое задание без звездочки из первой темы для второго класса. Нумерация элементов абстракции следующая: первое число — номер



класса, второе число — номер темы, третье число — номер группы заданий, четвертое число — номер задания. Пример 3.1.2.4 — это четвертое задание из второй группы заданий первой темы для третьего класса.

The screenshot shows the 'Math Trainer' application interface. At the top, there is a logo and navigation links: 'Личный кабинет' and 'Выход'. Below that is the title 'Тренажер по математике для начальных классов'. A 'Подсказка' (Hint) section contains text: 'Чтобы вычесть круглые числа, можно вычесть десятки и приписать справа 0.' followed by the equation '6 дес. – 2 дес. = 4 дес., значит: 60 – 20 = 40'. The 'Текст задачи' (Task Text) section displays the problem: 'Вычисли: 80 – 20 = ?'. The 'Варианты ответов' (Answer Options) section shows four blue buttons with the numbers 60, 6, 70, and 78. The number 60 is highlighted with a yellow background.

Рис. 5. Интерфейс прохождения тренажера по математике в состоянии «ловушки» первой пары

Fig. 5. Interface for passing the math simulator in the “trap” state of the first pair

При входе в первую пару состояний пользователю случайно предлагается задача из первой группы заданий. Пользователю предоставляется текст задачи и готовые варианты ответа, которые он может выбрать. Выбор неверного ответа в задаче приводит пользователя в состояние «ловушки». В нем пользователь получает идентичное задание с подсказкой по её решению. Каждый неверный вариант ответа связан с определенной распространённой для этого задания ошибкой. При выборе ответа происходит запись результатов в базу данных.

Результаты содержат необходимую информацию о переходах пользователя по парам состояний марковского процесса. Также представлена информация о выпавшем пользователю задании и выбранным им готовым вариантом ответа. При неверном ответе записывается ошибка, которую он допустил в этой задачи. В рамках системы пользователь может совершить пять действий. Вход в ловушку обозначает переход в состояние «ловушки» из обычного состояния при выборе неверного ответа в нём. Нахождение в ловушке срабатывает при повторном выборе неверного ответа при нахождении в состоянии «ловушки». Если пользователь даёт правильный ответ на задачу в состоянии «ловушки», то он переходит в обычное состояние и получает новое задание. При выборе правильного ответа в обычном состоянии осуществляется переход в новую пару состояний марковского процесса. Если пользователь находится



в последней паре состояний и не находится в ловушке при выборе правильного ответа происходит завершение тренажера. Для успешного прохождение тренажера пользователю нужно пройти все состояния марковского процесса и успеть во временные рамки, установленные для него системой. Итоговые результаты школьников визуализируется в личном кабинете учителя.

Текущее сост.	Нахождение в сост.	Следующее сост.	Задание	ID ответа	Ошибка	Верно	Действие	Время перехода
Элементарное состояние 1 (simple_s1)	00:00:02.517049	Элементарное состояние 1 (simple_s1)	Задание 2.1.12. [290]	1062	[Ошибка 1] Концептуальная ошибка – непонимание значений разрядов числа 1	Нет	Вход в ловушку (to_trap)	17.05.2025, 18:45:11.540115
Элементарное состояние 1 (simple_s1)	00:00:05.750607	Элементарное состояние 1 (simple_s1)	Задание 2.1.12. [290]	1063		Нет	Нахождение в ловушки (stay_in_trap)	17.05.2025, 18:45:17.290722
Элементарное состояние 1 (simple_s1)	00:00:09.73204	Элементарное состояние 1 (simple_s1)	Задание 2.1.12. [290]	1060	[Ошибка 2] Концептуальная ошибка – непонимание значений разрядов числа 2	Нет	Нахождение в ловушки (stay_in_trap)	17.05.2025, 18:45:27.022762
Элементарное состояние 1 (simple_s1)	00:00:08.300012	Элементарное состояние 1 (simple_s1)	Задание 2.1.12. [290]	1061		Да	Выход из ловушки (from_trap)	17.05.2025, 18:45:35.322774
Элементарное состояние 1 (simple_s1)	00:00:01.932294	Элементарное состояние 2 (simple_s2)	Задание 2.1.10. [289]	1056		Да	Переход в новое состояние (up_state)	17.05.2025, 18:45:37.255068

Рис. 6. Представление части результатов прохождения тренажера в административной части веб-приложения

Fig. 6. Presentation of part of the results of passing the simulator in the administrative part of the web application

Обсуждение результатов

Таким образом, адаптивная цифровая система, использующая марковские модели, может помочь ученикам начальной школы в обучении математике. Эта система эффективно выявляет и исправляет частые ошибки учеников и облегчает работу учителям, так как они могут быстро заметить в решении каких задач возникают затруднения и оказать своевременную помощь в их устранении. Благодаря этому ученики лучше понимают новый материал и сохраняют интерес к урокам.

Основываясь на описанном функционале системы, можно сделать вывод, что данная разработка обладает большим потенциалом для улучшения качества преподавания математики в начальной школе.

Тем не менее, чтобы такая система была широко распространена в школах, необходимо продолжать её совершенствование. Например, целесообразным является добавление возможности детального анализа того, как именно в данном случае реализуется процесс обучения, а также расширить содержание системы для работы с другими школьными предметами и учениками других возрастов.

Заключение

Представленная цифровая система является современным примером использования технологий искусственного интеллекта в образовании начальных классов.



Её применение способно обеспечить адресную помощь каждому ученику, повысить уровень усвоения математических знаний, мотивацию и интерес к предмету. В то же время, система предоставляет учителям эффективный инструмент для индивидуализации учебного процесса и своевременного выявления ошибок, что способствует более глубокому и качественному обучению в условиях массового образования.

Планируемые этапы аprobации системы включают проведение экспериментальных исследований в реальных школьных условиях с целью оценки её педагогической эффективности и удобства использования. Ожидается, что внедрение данной системы позволит повысить успешность освоения математического материала младшими школьниками, а также снизить нагрузку на учителя за счёт автоматизации диагностики и коррекции учебных затруднений.

Перспективы дальнейшего развития проекта связаны с расширением банка заданий и реестра типичных ошибок, интеграцией дополнительных форм поддержки обучающихся, а также адаптацией системы под другие предметные области и возрастные категории. Кроме того, возможна реализация аналитических модулей для глубокого анализа траекторий обучения и индивидуального прогноза успешности, что откроет новые возможности для персонализированного подхода в образовании.

В целом, разработанная система представляет собой важный шаг на пути цифровой трансформации образовательного процесса, способствуя повышению качества и доступности школьного образования.

Список источников / References

1. Mangarin, R.A., & Caballes, D. O. (2024). Difficulties in Learning Mathematics: A Systematic Review. *International Journal of Research and Scientific Innovation*, XI(IX). C. 401—405. DOI: 10.51244/ijrsi.2024.1109037
2. Václavíková, Z. (2023). The Most Common Mathematical Mistakes in the Teaching of Scientific Subjects at Secondary Schools. *Springer Nature*. 181—193. DOI:10.1007/978-3-031-36375-7_12
3. Соколов, В.Л. (2023). Психологопедагогические приемы работы над ошибками младших школьников при освоении математических понятий. *Вестник практической психологии образования*. 20(1), С. 46—60. DOI:10.17759/bppe.2023200105
Sokolov, V.L. (2023). Psychological and pedagogical methods of working on errors of junior schoolchildren in mastering mathematical concepts. *Vestnik prakticheskoi psichologii obrazovaniya = Bulletin of Practical Educational Psychology*. 20(1), S. 46—60. DOI:10.17759/bppe.2023200105
4. Kusmaryono, I., Ubaidah, N., Ulya, N., & Kadarwati, S. (2019). Have teachers never been wrong? Case studies of misconceptions in teaching mathematics in elementary schools. // *Daya Matematis: Jurnal Inovasi Pendidikan Matematika*. 7(2), 209—218. DOI:10.26858/JDS.V7I2.9817
5. Dias, R.I., Andrade, R.P., Neves, O. dos S., Santos, D. de S., Bastos, A.R. da S., Jesus, B.R. de, Rocha, M.E. de S.B., Borges, D.D., Vieira F. de soisa, Correia, C.A., Costa, M.G. da, & Lins, A.V. (2023). Ensino individualizado: adaptar o ensino de acordo com as necessidades individuais de cada aluno, oferecendo instruções claras, organização e estruturação das tarefas, e feedback específico e imediato. *Brazilian Journal of Implantology and Health Sciences*. DOI:10.36557/2674-8169.2023v5n5p2177-2184



6. Bang, H.J., et al. (2023). Efficacy of an Adaptive Game-Based Math Learning App to Support Personalized Learning and Improve Early Elementary School Students' Learning. *Early Childhood Education Journal*. [URL: <https://link.springer.com/article/10.1007/s10643-022-01332-3>]
7. Semenovska, L., Vazhenina, I., Fazan, V. (2023). Individualization of learning as a development actuality information technological society. *Педагогічні Науки*. 82, С. 30—34. DOI: 10.33989/2524-2474.2023.82.295073
8. Saadawi, H.A. S. (2025). Individualization of teaching and self-learning strategies. «*Arid» Mezhdunarodnyi zhurnal pedagogicheskikh i psikhologicheskikh nauk (آرید) مولعلل ڈیارا ڈلچ (آرید) سینفل او (آرید)». C. 14—50. DOI: 10.36772/arid.aijeps.2024.5121*
9. Куравский, Л.С., Поминов, Д.А., Юрьев, Г.А., Юрьева, Н.Е., Сафронова, М.А., Куланин, Е.Д., Антипова, С.Н. (2021). Концепция адаптивного тренажера и оценка его эффективности в математическом обучении. *Моделирование и анализ данных*. 11(4), 5—20. DOI: <https://doi.org/10.17759/mda.2021110401>
10. Иванова, С.В. (2019). Формирование навыков работы над ошибками у младших школьников на уроках математики. *Начальная школа плюс До и После*. (5), С. 23—27. [URL: <https://cyberleninka.ru/article/n/formirovanie-navykov-raboty-nad-oshibkami-u-mladshih-shkolnikov-na-urokah-matematiki>]
- Ivanova S.V. (2019)/ Formation of error work skills in junior schoolchildren at mathematics lessons. *Nachal'naya shkola plus Do i Posle. = Primary School Plus Before and After 2019*. (5), S. 23—27. [URL: <https://cyberleninka.ru/article/n/formirovanie-navykov-raboty-nad-oshibkami-u-mladshih-shkolnikov-na-urokah-matematiki>]
11. Ashlock R.B. (2002). Error patterns in computation: Using error patterns to improve instruction. *Pearson*. с. 302.
12. Артеменков, С.Л. и др. (2017). Марковские модели в задачах диагностики и прогнозирования: Учебное пособие. / Под ред. Л.С. Куравского. — 2-е изд. доп. М.: Изд-во МГППУ. 203 с.
- Artemenkov S.L. i dr. (2017). Markov Models in Diagnostics and Forecasting Problems: Textbook. / Pod red. L.S. Kuravskogo. — 2-e izd. dop. M.: Izd-vo MGPPU. 203 s.
13. Куравский, Л.С., Юрьев, Г.А., Юрьева, Н.Е., Исаков, С.С., Несимова, А.О., Николаев, И.А. (2022). Адаптивная технология психологической диагностики на основе марковских и квантовых представлений процесса выполнения заданий. *Моделирование и анализ данных*. 12(4), С. 36—55.
- Kuravskii, L.S., Yur'ev, G.A., Yur'eva, N.E., Isakov, S.S., Nesimova, A.O., Nikolaev, I.A. (2022). Adaptive technology of psychological diagnostics on the basis of Markovian and quantum representations of the task performance process. *Modelirovanie i analiz dannykh = Data modeling and analysis*. 12(4), С. 36—55.
14. Куравский, Л.С., Артеменков, С.Л., Юрьев, Г.А., Григоренко, Е.Л. (2017). Новый подход к компьютеризированному адаптивному тестированию // Экспериментальная психология. Т. 10. № . 3. С. 33—45. doi:10.17759/exppsy.2017100303



Катышев Д.А. (2025)

Разработка прототипа системы на основе марковских представлений для поддержки учебного процесса...

Моделирование и анализ данных, 2025. 15(2), 177 – 191.

Katyshev D.A. (2025)

Development of a prototype system based on Markov representations to support the learning process...

Modelling and Data Analysis, 2025. 15(2), 177 – 191.

Kuravskii, L.S., Artemenkov, S.L., Yur'ev, G.A., Grigorenko, E.L. (2017). A new approach to computerized adaptive testing // *Eksperimental'naya psichologiya = Experimental psychology*. T. 10. № . 3. S. 33—45. doi:10.17759/expsy.2017100303

Информация об авторах

Катышев Дмитрий Алексеевич, аспирант, Московский государственный психолого-педагогический университет (ФГБОУ ВО МГППУ), Москва, Российская Федерация, ORCID: <https://orcid.org/0009-0002-7900-6431>, e-mail: katyshevda@mgppu.ru

Information about the authors

Dmitry A. Katyshev, PhD student, Moscow State University of Psychology and Education, Moscow, Russian Federation, ORCID: <https://orcid.org/0009-0002-7900-6431>, e-mail: katyshevda@mgppu.ru

Вклад авторов

Катышев Д.А. — разработка прототипа системы; тестирование; аннотирование, написание и оформление рукописи.

Все авторы приняли участие в обсуждении результатов и согласовали окончательный текст рукописи.

Contribution of the authors

Dmitry A. Katyshev — system prototype development; testing; annotation, writing and design of the manuscript.

All authors participated in the discussion of the results and approved the final text of the manuscript.

Конфликт интересов

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Conflict of interest

The authors declare no conflict of interest.

Декларация об этике

Письменное информированное согласие на участие в этом исследовании было предоставлено респондентами (или законными опекунами / ближайшими родственниками участника).

Ethics statement

Written informed consent for participation in this study was obtained from the participants (or legal guardians / next of kin of the participants).

Поступила в редакцию 25.05.2025

Received 2025.05.25

Поступила после рецензирования 26.05.2025

Revised 2025.05.26

Принята к публикации 06.06.2025

Accepted 2025.06.06

Опубликована 30.06.2025

Published 2025.06.30