

МЕТОД ОПТИМИЗАЦИИ | OPTIMIZATION METHOD

Научная статья | Original paper

УДК 519.7

Синтез H^∞ – наблюдателей состояния нелинейных непрерывных динамических систем, линейных по управлению и возмущению

А.В. Пантелеев✉, А.А. Яковлева

Московский авиационный институт (НИУ МАИ), г. Москва, Российская Федерация

✉ avpanteleev@inbox.ru

Резюме

Контекст и актуальность. В условиях все более обширного распространения и повсеместного использования летательных аппаратов и сложных аэрокосмических систем важное значение имеет развитие систем совместного оценивания и управления, в которых в алгоритме управления вместо вектора состояния используется его оценка по результатам накопленной информации об измерениях. В рамках современной теории управления одним из эффективных подходов к решению данной проблемы являются методы синтеза H^∞ – регуляторов и H^∞ – наблюдателей состояния. Использование H^∞ – методов позволяет построить робастные регуляторы или наблюдатели, способные функционировать в условиях внешних возмущений и помех. Одни из самых популярных способов решения таких задач связаны с использованием линейных матричных неравенств, а также частотного метода, связанного с преобразованием Фурье. Однако при рассмотрении сложных технических задач их применение бывает затруднительным. Поэтому в рамках работы предлагается приближенный метод, позволяющий решать задачу нахождения H^∞ – наблюдателя для нелинейных непрерывных динамических систем, линейных по управлению и возмущению. **Цель.** Сформулировать и доказать достаточные условия H^∞ – наблюдателя для нелинейных непрерывных динамических систем, линейных по управлению и возмущению, при наличии неопределенности задания начальных условий, ограниченных внешних воздействиях и погрешностях измерения на полубесконечном промежутке времени функционирования системы. Сформулировать приближенный метод синтеза H^∞ – наблюдателя. Проверить предложенный подход на модельном примере. **Гипотеза.** В рамках работы предлагается приближенный метод,



позволяющий решать задачу нахождения наблюдателя для динамических систем, нелинейных по состоянию, аналогичный методам, применяемым для линейных систем. Эта гипотеза возникла в результате анализа решения прикладных задач синтеза в нелинейных системах при отсутствии ограниченных внешних воздействий. Ее реализация связана с распространением методологии применения уравнений Риккати с коэффициентами, зависящими от вектора состояния, на задачи синтеза H^∞ – наблюдателя для класса нелинейных систем, линейных по управлению и возмущению. **Методы и материалы.** В данной статье сформулированы достаточные условия синтеза H^∞ – наблюдателя для нелинейных непрерывных динамических систем, линейных по управлению и возмущению, при наличии неопределенности задания начальных условий, ограниченных внешних воздействий и погрешностях измерения на полубесконечном промежутке времени функционирования системы. При решении задачи синтеза наблюдателя предлагается искать приближенное решение по аналогии с теорией линейных систем, т.е. исходная нелинейная динамическая система посредством факторизации преобразуется к структуре, похожей на линейную, с матрицами, зависящими от вектора состояния. Для реализации разработанного метода и решения модельного примера использовался математический пакет MATLAB. **Результаты.** В результате работы решен модельный пример для проверки эффективности предложенного метода синтеза наблюдателей. Графики изменения координат вектора состояния и их оценок иллюстрируют желаемое качество переходных процессов в условиях неполной информации о состоянии объекта. **Выводы.** В результате работы сформулированы и доказаны достаточные условия H^∞ – наблюдателя для нелинейных непрерывных динамических систем, линейных по управлению и возмущению. Предложен приближенный подход для решения задачи синтеза H^∞ – наблюдателя. Предложен пошаговый алгоритм решения. Решен модельный пример и приведены графики переходных процессов и их оценок, демонстрирующий результаты численного моделирования. Анализ поведения ошибок подтверждает работоспособность предложенного метода, который может быть применен к решению прикладных задач управления аэрокосмическими системами.

Ключевые слова: H^∞ наблюдатель, нелинейная динамическая система, полубесконечный интервал времени, управление с обратной связью

Для цитирования: Пантелеев, А.В., Яковлева, А.А. (2025). Синтез H^∞ – наблюдателей состояния нелинейных непрерывных динамических систем, линейных по управлению и возмущению. *Моделирование и анализ данных*, 15(2), 47—69. <https://doi.org/10.17759/mda.2025150203>



Synthesis of an H^∞ – observers of the state of a nonlinear continuous dynamical systems, linear in control and disturbance

A.V. Panteleev✉, A.A. Yakovleva

Moscow Aviation Institute (National Research University)

Moscow, Russian Federation

✉ avpanteleev@inbox.ru

Abstract

Context and relevance. In the context of the increasingly widespread use and distribution of aircraft and complex aerospace systems, the development of joint estimation and control systems is of great importance, in which the control algorithm uses an estimation of the state vector based on the results of accumulated measurement information instead of the state vector. In modern control theory, one of the effective approaches to solving this problem is the methods of synthesizing H^∞ – controllers and H^∞ – state observers. The use of these methods enables building a robust controllers or observers. Some of the most popular ways to solve such problems are associated with the use of linear matrix inequalities, as well as the frequency method associated with the Fourier transform. However, when considering complex engineering problems, their application often complicates the solution. Therefore, this paper proposes an approximate method for solving the problem of finding an observer for nonlinear continuous dynamical systems that are linear in control and disturbance. **Objective.** The first goal is to formulate and prove a sufficient condition for an H^∞ – observer for nonlinear continuous dynamical systems that are linear in control and disturbance, in the presence of uncertainty in the initial conditions, limited external influences and measurement errors over a semi-infinite time interval of system operation. The second goal is to formulate an approximate method for synthesis of an H^∞ – observer and test the proposed approach on a model example. **Hypothesis.** The paper proposes an approximate method for solving the problem of finding an observer for dynamic systems that are nonlinear in state, similar to the methods used for linear systems. The hypothesis arose as a result of analyzing the solution of applied synthesis problems in nonlinear systems in the absence of limited external influences. Its implementation is associated with the extension of the methodology for applying Riccati equations with coefficients depending on the state vector to the problems of synthesis of an observer for a class of nonlinear systems that are linear in control and disturbance. **Methods and materials.** The sufficient conditions for synthesis of an observer for nonlinear continuous dynamical systems that are linear in control and disturbance, in the presence of uncertainty in the initial conditions, limited external influences, and measurement errors over a semi-infinite time interval of system operation are proven. When solving the observer synthesis problem, it is proposed to look for an approximate solution by analogy with the theory of linear systems, that is, the original nonlinear dynamical system is transformed by factorization to a structure similar to a linear one, with matrices depending on the



state vector. To implement the developed method and solve model examples, the MATLAB mathematical package was used. **Results.** A model example was solved to test the proposed approach. The graphs of the state vector change and its estimate demonstrate the desired quality of transient processes under conditions of incomplete information about the object's state vector. **Conclusions.** As a result, the sufficient conditions of the observer for nonlinear continuous dynamical systems that are linear in control and disturbance were formulated and proven. An approximate approach to solving the observer synthesis problem and a step-by-step solution algorithm were proposed. A model example was solved and graphs of transient processes and their estimates are presented, demonstrating the results of numerical modeling. Analysis of the error behavior confirms the operability of the proposed method.

Keywords: H-infinity observer, closed loop control, semi-infinite period of time, nonlinear dynamical system

For citation: Panteleev, A.V., Yakovleva, A.A. (2025). Synthesis of an H^∞ – observers of the state of a nonlinear continuous dynamical systems, linear in control and disturbance. *Modelling and Data Analysis*, 15(2), 47—69. (In Russ.). <https://doi.org/10.17759/mda.2025150203>

Введение

Современная теория управления в значительной степени опирается на задачи и методы построения H^∞ – управления (Koobloch, Isidori, Flockerzi, 1993; Doyle, Francis, Tannenbaum, 1990; Skogestad, Postlethwaite, 2005; Поляк, Щербаков, 2002; Green, Limebeer, 2012; Simon, 2006). Они дополняют классические методы синтеза оптимальных законов управления, основывающихся на различных критериях. При решении обширного круга задач в данной области широко используется ряд известных методов синтеза управления, среди которых, например, стоит отметить метод пространства состояний, частотные методы, а также аппарат линейных матричных неравенств (Поляк, Хлебников, Щербаков, 2014; Хлебников, Поляк, Кунцевич, 2011; Поляк, Хлебников, Рапопорт, 2019). Задача получения робастной оценки координат вектора состояния по данным измерительной системы описана, например, в (Баландин, Коган, 2013; Shaked, Theodor, 1992; Пантелеев, Яковлева, 2023; Li, Fu, 1997). В (Пантелеев, Яковлева, 2023) с помощью применения принципа расширения доказаны достаточные условия существования H^∞ – наблюдателя для линейных систем, а также найдены соотношения, определяющие матрицу коэффициентов усиления наблюдателя, наилучшие законы изменения внешних возмущений и погрешностей измерений. Задача нахождения наблюдателя для оценки вектора состояния объекта управления также является важной, поскольку наличие хорошей оценки позволяет учесть неполноту информации о векторе состояния, неопределенность задания ограниченных внешних воздействий на объект управления, помехи в каналах измерения при синтезе замкнутой системы управления. Приложение теории построения робастных наблюдателей в задачах управления летательными аппаратами рассмотрено в (Shue, Agarwal, 1999; Lungu, Lungu, 2015).



В данной статье сформулированы достаточные условия синтеза H^∞ – наблюдателя для нелинейных непрерывных динамических систем, линейных по управлению и возмущению, при наличии неопределенности задания начальных условий, ограниченных внешних воздействиях и погрешностях измерения на полубесконечном промежутке времени функционирования системы. При решении задачи синтеза наблюдателя предлагается искать приближенное решение по аналогии с теорией линейных систем, т.е. исходная нелинейная динамическая система посредством факторизации преобразуется к структуре, похожей на линейную, с матрицами, зависящими от вектора состояния. Решение дифференциального уравнения Риккати должно выбираться с учетом поточечного выполнения условий асимптотической устойчивости замкнутой системы, образованной объектом, регулятором и наблюдателем с наихудшими ограниченными возмущениями. Сформулирован пошаговый алгоритм синтеза H^∞ – наблюдателя. С применением предложенного подхода решена задача оценивания вектора состояния для модельного примера.

Материалы и методы

Постановка задачи

Задана математическая модель объекта управления

$$\dot{x}(t) = f(x(t)) + B_1(x(t))w(t) + B_2(x(t))u(t), \quad x(0) = o, \quad (1)$$

где $x \in R^n$ – вектор состояния, $u \in R^q$ – вектор управления, $w \in R^p$ – вектор возмущения, $t \in T = [0, \infty)$ – время, $x(0)$ – вектор начального состояния, o – нулевая матрица-столбец размеров $(n \times 1)$. Заданы непрерывно-дифференцируемые вектор-функция $f(x)$ и матричные функции $B_1(x)$, $B_2(x)$ размеров $(n \times 1)$, $(n \times p)$, $(n \times q)$ соответственно. Уравнение модели объекта нелинейно по состоянию, но линейно по управлению и возмущению.

Модель измерительной системы задается выражением

$$y(t) = h(x(t)) + D(x(t))v(t), \quad (2)$$

где $y \in R^m$ – вектор выхода (вектор измерений), $h(x)$ – матричная непрерывно-дифференцируемая функция размеров $(m \times n)$, $v \in R^m$ – вектор ошибок и погрешностей измерений, $D(x)$ – заданная непрерывная матричная функция размеров $(m \times m)$.

Предполагается, что:

- а) $w(\cdot) \in L_2[0, \infty)$, $u(\cdot) \in L_2[0, \infty)$, $v(\cdot) \in L_2[0, \infty)$;
- б) начало координат $x \equiv o$ есть точка равновесия, т.е. $f(o) = o$;
- в) $B_1(x) \neq O$, $B_2(x) \neq O$, $h(o) = o$, где O – нулевая матрица соответствующих размеров;
- г) $\forall x \in R^n$ $D(x)$ – невырожденная квадратная матрица размеров $(m \times m)$.



Выполним операцию факторизации, т.е. реализуем процесс преобразования нелинейной системы к структуре, похожей на линейную (linear-like), с матрицами, зависящими от вектора состояния.

Известно (Banks, Lewis, Tran, 2007; Cloutier, D'Souza, Mracek, 1996), что если $f(o) = o$, $f(x) \in C^1(R^n)$ и $h(o) = o$, $h(x) \in C^1(R^n)$, то существуют матричные функции $A(x)$ и $C(x)$, такие что

$$f(x) = A(x)x, \quad h(x) = C(x)x. \quad (3)$$

Заметим, что операция факторизации для $n > 1$ является неоднозначной (Banks, Lewis, Tran, 2007; Cloutier, D'Souza, Mracek, 1996).

Тогда уравнения (1) и (2) принимают вид

$$\dot{x}(t) = A(x(t))x(t) + B_1(x(t))w(t) + B_2(x(t))u(t), \quad x(0) = x_0, \quad (4)$$

$$y(t) = C(x(t))x(t) + D(x(t))v(t). \quad (5)$$

Воспользуемся аналогией с постановкой задачи синтеза H^∞ – наблюдателей для линейных систем, рассмотренной в (Пантелеев, Яковлева, 2023). В ней определены:

- математическая модель объекта управления

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B_1(t)w(t) + B_2(t)u(t), \quad x(0) = x_0, \quad (6)$$

- модель измерительной системы

$$y(t) = C(t)x(t) + D(t)v(t), \quad (7)$$

где $x \in R^n$ – вектор состояния, $w \in R^p$ – вектор возмущения, $u \in R^q$ – вектор управления, $y \in R^m$ – вектор выхода (вектор измерений), $v \in R^m$ – вектор погрешностей измерений, $t \in T = [0, \infty)$ – время. Заданы непрерывные матрицы $A(t), B_1(t), B_2(t), C(t), D(t)$ размеров $(n \times n)$, $(n \times p)$, $(n \times q)$, $(m \times n)$, $(m \times m)$ соответственно.

Предполагается, что:

- $w(\cdot) \in L_2[0, \infty)$, $v(\cdot) \in L_2[0, \infty)$,
- $m \leq n$, $\text{rg } C(t) = m \quad \forall t \in T$;
- $D(t)$ – невырожденная квадратная матрица.

Ставится задача о нахождении оценки $\hat{x}(t)$ вектора состояния $x(t)$ по результатам обработки накопленной информации, полученной от измерительной системы, т.е. $y'_0 = \{y(\tau), 0 \leq \tau \leq t\}$. При этом требуется минимизировать величину ошибки оценивания $\varepsilon(t) = x(t) - \hat{x}(t)$ в условиях неопределенности информации о векторе начальных состояний x_0 , законах изменения векторов возмущений и ошибок измерений.

Предполагается, что структура наблюдателя состояния описывается уравнением

$$\frac{d\hat{x}}{dt} = A(t)\hat{x}(t) + B_2(t)u(t) + K(t)[y(t) - C(t)\hat{x}(t)], \quad \hat{x}(0) = \hat{x}_0, \quad (8)$$



где $\hat{x} \in R^n$ – вектор оценок координат вектора состояния, $K(t)$ – неизвестная непрерывная матрица размеров $(n \times m)$, $\hat{x}_0$ – вектор начальных значений оценок координат вектора состояния, задаваемый исходя из имеющейся априорной информации о возможных начальных состояниях модели объекта управления (6). Матрица $K(t)$ выполняет функцию управления процессом наблюдения.

Получим уравнение, описывающее изменение ошибки оценивания, вычитая из уравнения (6) уравнение (8) с учетом (7) и обозначения $\varepsilon(t) = x(t) - \hat{x}(t)$:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= A(t)x(t) + B_1(t)w(t) + B_2(t)u(t), \quad x(0) = x_0, \\ \frac{d\hat{x}}{dt} &= A(t)\hat{x}(t) + B_2(t)u(t) + K(t)[C(t)x(t) + D(t)v(t) - C(t)\hat{x}(t)], \quad \hat{x}(0) = \hat{x}_0, \\ \frac{d\varepsilon}{dt} &= [A(t) - K(t)C(t)]\varepsilon(t) + B_1(t)w(t) - K(t)D(t)v(t), \quad \varepsilon(0) = x_0 - \hat{x}_0. \end{aligned} \quad (9)$$

Будем далее использовать обозначение взвешенной нормы $\|z(t)\|_{Q(t)}^2 = z^T(t)Q(t)z(t)$, где $Q(t)$ – заданная положительно полуопределенная симметрическая матрица.

Требуется обеспечить (если это возможно) выполнение неравенства

$$\begin{aligned} & \frac{\int_0^{t_1} \|\varepsilon(t)\|_{Q(t)}^2 dt}{\|\varepsilon(0)\|_{P_0^{-1}}^2 + \int_0^{t_1} [\|w(t)\|_{W^{-1}(t)}^2 + \|v(t)\|_{V^{-1}(t)}^2] dt} = \\ & = \frac{\int_0^{t_1} [\varepsilon^T(t)Q(t)\varepsilon(t)] dt}{\varepsilon^T(0)P_0^{-1}\varepsilon(0) + \int_0^{t_1} [w^T(t)W^{-1}(t)w(t) + v^T(t)V^{-1}(t)v(t)] dt} \leq \gamma^2, \end{aligned} \quad (10)$$

где $Q(t), P_0, W(t), V(t)$ – симметрические положительно определенные матрицы соответствующих размеров, $\gamma > 0$ – заданное положительное число. При этом желательно найти минимальное значение γ^* , при котором указанные свойства еще справедливы, минимизируя значение числителя дроби при одновременной максимизации знаменателя.

Иными словами, функционал качества управления наблюдателем состояния должен удовлетворять условию

$$I(K, x_0, w, v) = -\frac{1}{2}\gamma^2 \|\varepsilon(0)\|_{P_0^{-1}}^2 + \frac{1}{2} \int_0^{t_1} [\|\varepsilon(t)\|_{Q(t)}^2 - \gamma^2 \|w(t)\|_{W^{-1}(t)}^2 - \gamma^2 \|v(t)\|_{V^{-1}(t)}^2] dt \leq 0, \quad (11)$$

которое будет выполняться при минимизации затрат на управление процессом оценивания при наихудшем влиянии возмущений, начального состояния и ошибок измерений. Множитель $\frac{1}{2}$ добавлен для уменьшения громоздкости записи после дифференцирования.



Требуется найти наилучшую матрицу $K(t)$ наблюдателя (8), наилучшие законы управления внешним воздействием $w(t)$ и погрешностью измерений $v(t)$, наилучший вектор начальных состояний x_0 , обеспечивающие выполнение условия (11).

Решение поставленной задачи имеет вид (Пантелеев, Яковлева, 2023):

$$\dot{P} = AP + PA^T - PC^T \tilde{V}^{-1} CP + B_1 W B_1^T + \frac{1}{\gamma^2} P Q P, \quad P(0) = P_0, \quad (12)$$

$$K^* = PC^T \underbrace{(D^{-1})^T V^{-1} D^{-1}}_{\tilde{V}^{-1}}, \quad w^* = W B_1^T P^{-1} \varepsilon, \quad (13)$$

$$\begin{aligned} v^* &= -VD^T K^T P^{-1} \varepsilon = -VD^T (PC^T \underbrace{(D^{-1})^T V^{-1} D^{-1}}_{\tilde{V}^{-1}})^T P^{-1} \varepsilon = -VD^T ((D^{-1})^T V^{-1} D^{-1})^T C \underbrace{PP^{-1}}_E \varepsilon = \\ &= -V \underbrace{D^T (D^{-1})^T}_{(D^{-1}D)^T} V^{-1} D^{-1} C \varepsilon = -D^{-1} C \varepsilon. \end{aligned} \quad (14)$$

Для решения задачи синтеза наблюдателя состояния системы (1), (2) предлагается применить субоптимальный подход, связанный с переходом к структуре, похожей на линейную, вида (4), (5) методом факторизации (Banks, Lewis, Tran, 2007; Cloutier, D'Souza, Mrazek, 1996). Далее использовать аналогию с задачей синтеза H^∞ – наблюдателей для линейных систем, рассмотренной в (Пантелеев, Яковлева, 2023). Ее решение представлено соотношениями (12)–(14). Поскольку модель (4), (5) описывается матрицами, зависящими от вектора состояния, предлагается применить технологию SDRE (State Dependent Riccati Equations), т.е. уравнений Риккати с коэффициентами, также зависящими от вектора состояния. При этом ставится задача получения основных соотношений, задающих структуру наблюдателя, и нахождения условий, при выполнении которых ошибка оценивания стремится к нулю, т.е. наблюдатель является асимптотическим.

Синтез субоптимального асимптотического наблюдателя состояния

Используя математическую модель (4),(5) и известный подход, связанный с применением SDRE, представим решение задачи о субоптимальном H^∞ – асимптотическом наблюдателе в форме

$$\frac{d\hat{x}}{dt} = A(\hat{x}(t))\hat{x}(t) + B_2(\hat{x}(t))u(t) + K(\hat{x}(t))[y(t) - C(\hat{x}(t))\hat{x}(t)], \quad \hat{x}(0) = x_0^*, \quad (15)$$

где $K(\hat{x})$ – матрица коэффициентов усиления наблюдателя размеров $(n \times m)$, x_0^* – столбец, содержащий априорную информацию о начальном состоянии.

Матрица $K(\hat{x}(t))$ может быть найдена по формуле, аналогичной (13):

$$K(\hat{x}(t)) = P(\hat{x}(t)) C^T(\hat{x}(t)) \underbrace{[D^{-1}(\hat{x}(t))^T V^{-1}(t) D^{-1}(\hat{x}(t))]}_{\tilde{V}^{-1}(\hat{x}(t))}, \quad (16)$$



где $P(\hat{x}(t))$ – положительно-определенная симметрическая матрица, являющаяся решением дифференциального уравнения Риккати, коэффициенты которого зависят от вектора оценок координат вектора состояния:

$$\begin{aligned} \dot{P}(\hat{x}(t)) = & A(\hat{x}(t))P(\hat{x}(t)) + P(\hat{x}(t))A^T(\hat{x}(t)) - P(\hat{x}(t))C^T(\hat{x}(t))\tilde{V}^{-1}(\hat{x}(t))C(\hat{x}(t))P(\hat{x}(t)) + \\ & + B_1(\hat{x}(t))W(t)B_1^T(\hat{x}(t)) + \frac{1}{\gamma^2}P(\hat{x}(t))Q(t)P(\hat{x}(t)), \end{aligned} \quad (17)$$

$$P(\hat{x}(0)) = P_0. \quad (18)$$

Наихудшие внешнее воздействие и погрешность измерений могут быть найдены по формулам, следующим из (13), (14):

$$w^*(t) = W(t)B_1^T(x(t))P^{-1}(\hat{x}(t))\varepsilon(t), \quad v^*(t) = -D^{-1}(x(t))C(x(t))\varepsilon(t), \quad (19)$$

где $\varepsilon(t) = x(t) - \hat{x}(t)$.

Далее принимаются следующие допущения (Belkzadeh, Taghirad, 2012).

1. $\exists k_A, k_B, k_C > 0$, что $\forall x^1, x^2 \in R^n$ справедливо:

$$\|A(x^1) - A(x^2)\| \leq k_A \|x^1 - x^2\|, \text{ если } \|x^1 - x^2\| \leq \varepsilon_A,$$

$$\|B_2(x^1) - B_2(x^2)\| \leq k_B \|x^1 - x^2\|, \text{ если } \|x^1 - x^2\| \leq \varepsilon_B,$$

$$\|C(x^1) - C(x^2)\| \leq k_C \|x^1 - x^2\|, \text{ если } \|x^1 - x^2\| \leq \varepsilon_C.$$

2. $\exists \rho, \sigma, \bar{c}, \bar{q}, \bar{w}, \bar{b}_1 > 0$, что $\|Q(t)\| \leq \bar{q}$, $\|W(t)\| \leq \bar{w}$, $\|C(x(t))\| \leq \bar{c}$, $\|x(t)\| \leq \sigma$, $\|u(t)\| \leq \rho$, $\|B_1(x(t))\| \leq \bar{b}_1 \quad \forall t \in T$.

3. $\forall t \in T$ справедливы оценки $V(t) \geq \underline{v}E$, $D(x(t)) \geq \underline{d}E$.

4. Решение уравнения (17) ограничено:

$$\underline{p}E \leq P(\hat{x}(t)) \leq \bar{p}E,$$

где $\underline{p}, \bar{p} > 0$.

Теорема 1 (достаточные условия существования асимптотического наблюдателя).

Если выполняются допущения 1–4 для системы управления (4), (5), то наблюдатель, удовлетворяющий уравнению (15) с учетом (16)–(19), является асимптотическим, т.е. $\varepsilon(t) = x(t) - \hat{x}(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow +\infty$.

Доказательство.

Вычитая из уравнения (4) уравнение (15) с учетом (5), получаем

$$\dot{\varepsilon}(t) = A(x(t))x(t) + B_1(x(t))w(t) + B_2(x(t))u(t) - A(\hat{x}(t))\hat{x}(t) - B_2(\hat{x}(t))u(t) -$$



$$-K(\hat{x}(t))[C(x(t))x(t) + D(x(t))v(t) - C(\hat{x}(t))\hat{x}(t)].$$

Добавим к правой части и вычтем $A(\hat{x}(t))x(t)$, а к выражению в квадратных скобках $C(\hat{x}(t))x(t)$:

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}(t) = & \underbrace{A(\hat{x}(t))x(t) - A(\hat{x}(t))\hat{x}(t)}_{A(\hat{x}(t))\varepsilon(t)} + A(x(t))x(t) - A(\hat{x}(t))x(t) + B_1(x(t))w(t) + \\ & + [B_2(x(t)) - B_2(\hat{x}(t))]u(t) - K(\hat{x}(t))\underbrace{[C(\hat{x}(t))x(t) - C(\hat{x}(t))\hat{x}(t)]}_{C(\hat{x}(t))\varepsilon(t)} - \\ & - K(\hat{x}(t))[C(x(t))x(t) - C(\hat{x}(t))x(t)] - K(\hat{x}(t))D(x(t))v(t) + B_1(x(t))w(t). \\ \dot{\varepsilon}(t) = & [A(\hat{x}(t)) - K(\hat{x}(t))C(\hat{x}(t))]\varepsilon(t) + \varphi(x(t), \hat{x}(t), u(t)) - K(\hat{x}(t))\Phi(x(t), \hat{x}(t)) + \\ & + \Psi(x(t), \hat{x}(t), v(t), w(t)), \end{aligned} \quad (20)$$

В результате получаем

где

$$\begin{aligned} \varphi(x(t), \hat{x}(t), u(t)) &= [A(x(t)) - A(\hat{x}(t))]x(t) + [B_2(x(t)) - B_2(\hat{x}(t))]u(t), \\ \Phi(x(t), \hat{x}(t)) &= [C(x(t)) - C(\hat{x}(t))]x(t), \\ \Psi(x(t), \hat{x}(t), v(t), w(t)) &= -K(\hat{x}(t))\underbrace{D(x(t))v(t)}_{\Psi_1(x(t), \hat{x}(t), v(t))} + \underbrace{B_1(x(t))w(t)}_{\Psi_2(x(t), \hat{x}(t), w(t))}. \end{aligned}$$

Тогда, учитывая п. 1 допущений, получаем

$$\begin{aligned} \|\varphi(x(t), \hat{x}(t), u(t))\| &\leq \| [A(x(t)) - A(\hat{x}(t))]x(t) \| + \| [B_2(x(t)) - B_2(\hat{x}(t))]u(t) \| \leq \\ &\leq \| [A(x(t)) - A(\hat{x}(t))] \| \|x(t)\| + \| [B_2(x(t)) - B_2(\hat{x}(t))] \| \|u(t)\| \leq (k_A\sigma + k_B\rho) \|x(t) - \hat{x}(t)\| \\ &\quad \forall x(t), \hat{x}(t) : \|x(t) - \hat{x}(t)\| \leq \min\{\varepsilon_A, \varepsilon_B\}; \\ \|\Phi(x(t), \hat{x}(t))\| &= \| [C(x(t)) - C(\hat{x}(t))]x(t) \| \leq \| [C(x(t)) - C(\hat{x}(t))] \| \|x(t)\| \leq k_C\sigma \|x(t) - \hat{x}(t)\| \\ &\quad \forall x(t), \hat{x}(t) : \|x(t) - \hat{x}(t)\| \leq \varepsilon_C. \end{aligned}$$

Получим оценку с использованием наихудшего закона управления внешним возмущением (19), учитывая п. 2 допущений:

$$\begin{aligned} -\Psi_1(x(t), \hat{x}(t), v(t)) &= -D(x(t))v^*(t) = D(x(t))D^{-1}(x(t))C(x(t))[x(t) - \hat{x}(t)] = C(x(t))[x(t) - \hat{x}(t)]; \\ \|-\Psi_1(x(t), \hat{x}(t), v(t))\| &= \|C(x(t))[x(t) - \hat{x}(t)]\| \leq \|C(x(t))\| \|x(t) - \hat{x}(t)\| \leq \bar{c} \|x(t) - \hat{x}(t)\|. \end{aligned}$$

Получим оценку с использованием наихудшего закона управления помехой (19), учитывая п. 2 допущений и следствие п. 4, т.е. $\|P^{-1}(\hat{x}(t))\| \leq \frac{1}{\underline{p}}$:



$$\begin{aligned} \|\Psi_2(x(t), \hat{x}(t), w(t))\| &= \|B_1(x(t))w^*(t)\| = \|B_1(x(t))W(t)B_1^T(x(t))P^{-1}(\hat{x}(t))\varepsilon(t)\| \leq \\ &\leq \bar{b}_1^2 \bar{w} \frac{1}{\underline{p}} \|x(t) - \hat{x}(t)\|. \end{aligned}$$

Введем в рассмотрение матрицу $\Pi(\hat{x}(t)) = P^{-1}(\hat{x}(t))$, тогда

$$\begin{aligned} \Pi(\hat{x}(t))K(\hat{x}(t)) &= \underbrace{\Pi(\hat{x}(t))P(\hat{x}(t))C^T(\hat{x}(t))}_{\bar{E}} \underbrace{[D^{-1}(\hat{x}(t))^T V^{-1}(t)D^{-1}(\hat{x}(t))]}_{\tilde{V}^{-1}(\hat{x}(t))} = \\ &= C^T(\hat{x}(t))D^{-1}(\hat{x}(t))^T V^{-1}(t)D^{-1}(\hat{x}(t)). \end{aligned}$$

Найдем оценку выражения

$$\begin{aligned} \Delta &= \|(x(t) - \hat{x}(t))^T \Pi(\hat{x}(t))\varphi(x(t), \hat{x}(t), u(t)) - (x(t) - \hat{x}(t))^T \Pi(\hat{x}(t))K(\hat{x}(t)) \Phi(x(t), \hat{x}(t)) - \\ &- (x(t) - \hat{x}(t))^T \Pi(\hat{x}(t))K(\hat{x}(t))\Psi_1(x(t), \hat{x}(t), v(t)) + (x(t) - \hat{x}(t))^T \Pi(\hat{x}(t))\Psi_2(x(t), \hat{x}(t), w(t))\| \leq \\ &\leq \|(x(t) - \hat{x}(t))^T \Pi(\hat{x}(t))\varphi(x(t), \hat{x}(t), u(t))\| + \|(x(t) - \hat{x}(t))^T \Pi(\hat{x}(t))K(\hat{x}(t)) \Phi(x(t), \hat{x}(t))\| + \\ &+ \|(x(t) - \hat{x}(t))^T \Pi(\hat{x}(t))K(\hat{x}(t))\Psi_1(x(t), \hat{x}(t), v(t))\| + \|(x(t) - \hat{x}(t))^T \Pi(\hat{x}(t))\Psi_2(x(t), \hat{x}(t), w(t))\| \leq \\ &\leq \|x(t) - \hat{x}(t)\| \|\Pi(\hat{x}(t))\| \|\varphi(x(t), \hat{x}(t), u(t))\| + \\ &+ \|x(t) - \hat{x}(t)\| \|C^T(\hat{x}(t))D^{-1}(\hat{x}(t))^T V^{-1}(t)D^{-1}(\hat{x}(t))\| \|\Phi(x(t), \hat{x}(t))\| + \\ &+ \|x(t) - \hat{x}(t)\| \|C^T(\hat{x}(t))D^{-1}(\hat{x}(t))^T V^{-1}(t)D^{-1}(\hat{x}(t))\| \|\Psi_1(x(t), \hat{x}(t), v(t))\| + \\ &+ \|x(t) - \hat{x}(t)\| \|\Pi(\hat{x}(t))\| \|\Psi_2(x(t), \hat{x}(t), w(t))\|. \end{aligned}$$

Поскольку $\|\Pi(\hat{x}(t))\| \leq \frac{1}{\underline{p}}$, согласно п. 3 допущений $\|D^{-1}(\hat{x}(t))\| \leq \frac{1}{\underline{d}}$ и $\|V^{-1}(t)\| \leq \frac{1}{\underline{v}}$, то

$$\begin{aligned} \Delta &= \|x(t) - \hat{x}(t)\| \frac{1}{\underline{p}} (k_A \sigma + k_B \rho) \|x(t) - \hat{x}(t)\| + \|x(t) - \hat{x}(t)\| \frac{\bar{c}}{\underline{d}^2 \underline{v}} k_C \sigma \|x(t) - \hat{x}(t)\| + \\ &+ \|x(t) - \hat{x}(t)\| \frac{\bar{c}}{\underline{d}^2 \underline{v}} \bar{c} \|x(t) - \hat{x}(t)\| + \|x(t) - \hat{x}(t)\| \frac{1}{\underline{p}} \bar{b}_1^2 \bar{w} \frac{1}{\underline{p}} \|x(t) - \hat{x}(t)\| = \\ &= \underbrace{\left[\frac{1}{\underline{p}} (k_A \sigma + k_B \rho) + \frac{\bar{c}}{\underline{d}^2 \underline{v}} k_C \sigma + \frac{\bar{c}^2}{\underline{d}^2 \underline{v}} + \bar{b}_1^2 \bar{w} \frac{1}{\underline{p}^2} \right]}_{\eta} \|x(t) - \hat{x}(t)\|^2 = \eta \|x(t) - \hat{x}(t)\|^2. \end{aligned}$$

Для доказательства устойчивости введем функцию Ляпунова

$$V(t, \varepsilon(t)) = \varepsilon^T(t) \Pi(t) \varepsilon(t), \quad (21)$$



причем справедливы оценки

$$\frac{1}{\underline{p}} \|\varepsilon(t)\|^2 \leq V(t, \varepsilon(t)) \leq \frac{1}{\underline{p}} \|\varepsilon(t)\|^2. \quad (22)$$

С учетом уравнения для ошибки оценивания

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}(t) = & [A(\hat{x}(t)) - K(\hat{x}(t))C(\hat{x}(t))] \varepsilon(t) + \varphi(x(t), \hat{x}(t), u(t)) - K(\hat{x}(t)) \Phi(x(t), \hat{x}(t)) - \\ & - K(\hat{x}(t)) \Psi_1(x(t), \hat{x}(t), v(t)) + \Psi_2(x(t), \hat{x}(t), w(t)) \end{aligned}$$

найдем полную производную в силу системы:

$$\begin{aligned} \dot{V}(t, \varepsilon(t)) = & \dot{\varepsilon}^T(t) \Pi(t) \varepsilon(t) + \varepsilon^T(t) \dot{\Pi}(t) \varepsilon(t) + \varepsilon^T(t) \Pi(t) \dot{\varepsilon}(t) = \\ = & \varepsilon^T(t) \{ [\dot{\Pi}(t) + \Pi(t) [A(\hat{x}(t)) - K(\hat{x}(t))C(\hat{x}(t))]] \} \varepsilon(t) + \\ & + \varepsilon^T(t) [A(\hat{x}(t)) - K(\hat{x}(t))C(\hat{x}(t))]^T \Pi(t) \varepsilon(t) + \\ & + 2\varepsilon^T(t) \Pi(t) [\varphi(x(t), \hat{x}(t), u(t)) - K(\hat{x}(t)) \Phi(x(t), \hat{x}(t)) - K(\hat{x}(t)) \Psi_1(x(t), \hat{x}(t), v(t)) + \\ & + \Psi_2(x(t), \hat{x}(t), w(t))]. \end{aligned}$$

Заметим, что

$$\begin{aligned} \Pi(\hat{x}(t))K(\hat{x}(t))C(\hat{x}(t)) = & \underbrace{P^{-1}(\hat{x}(t))P(\hat{x}(t))}_{\underline{E}} C^T(\hat{x}(t)) \tilde{V}^{-1}(\hat{x}(t)) C(\hat{x}(t)) = \\ = & C^T(\hat{x}(t)) \tilde{V}^{-1}(\hat{x}(t)) C(\hat{x}(t)), \\ [K(\hat{x}(t))C(\hat{x}(t))]^T \Pi(\hat{x}(t)) = & C^T(\hat{x}(t)) K^T(\hat{x}(t)) \Pi(\hat{x}(t)) = \\ = & C^T(\hat{x}(t)) \tilde{V}^{-1}(\hat{x}(t)) C(\hat{x}(t)) \underbrace{P(\hat{x}(t)) \Pi(\hat{x}(t))}_{\underline{E}}. \end{aligned}$$

Поэтому справедливо неравенство

$$\dot{V}(t, \varepsilon(t)) \leq \varepsilon^T(t) [\dot{\Pi}(\hat{x}(t)) + \Pi(\hat{x}(t))A(\hat{x}(t)) + A^T(\hat{x}(t))\Pi(\hat{x}(t)) - 2C^T(\hat{x}(t))\tilde{V}^{-1}(\hat{x}(t))C(\hat{x}(t))] \varepsilon(t) + 2\eta \|\varepsilon(t)\|^2.$$

Поскольку $PP=P\Pi=E$ то $\dot{P}P+P\dot{P}=0$ и $\dot{P}=-P\dot{P}\Pi$ (аргументы для простоты опущены). Так как

$$\dot{P} = AP + PA^T - PC^T \tilde{V}^{-1} CP + B_1 W B_1^T + \frac{1}{\gamma^2} P Q P,$$



то справедливо

$$\begin{aligned}\dot{\Pi} &= -\Pi\dot{P}\Pi = -\Pi A \underbrace{P\Pi}_E - \underbrace{\Pi P}_E A^T \Pi + \underbrace{\Pi P}_E C^T \tilde{V}^{-1} C \underbrace{P\Pi}_E - \Pi B_1 W B_1^T \Pi - \frac{1}{\gamma^2} \underbrace{\Pi P}_E Q \underbrace{P\Pi}_E = \\ &= -\Pi A - A^T \Pi + C^T \tilde{V}^{-1} C - \Pi B_1 W B_1^T \Pi - \frac{1}{\gamma^2} Q.\end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned}\dot{V}(t, \varepsilon(t)) &\leq \varepsilon^T(t) [C^T \tilde{V}^{-1} C - \Pi B_1 W B_1^T \Pi - \frac{1}{\gamma^2} Q - 2C^T \tilde{V}^{-1} C] \varepsilon(t) + \\ &+ 2\eta \|\varepsilon(t)\|^2 \leq - \left[\frac{\bar{c}^2}{\underline{d}^2 \underline{v}} + \frac{\bar{b}_1^2 \bar{w}}{\underline{p}^2} + \frac{1}{\gamma^2} \bar{q} - 2\eta \right] \|\varepsilon(t)\|^2.\end{aligned}$$

Если справедливо неравенство $\left[\frac{\bar{c}^2}{\underline{d}^2 \underline{v}} + \frac{\bar{b}_1^2 \bar{w}}{\underline{p}^2} + \frac{1}{\gamma^2} \bar{q} - 2\eta \right] > 0$, то производная $\dot{V}(t, \varepsilon(t))$ является локально отрицательно определенной. Согласно методу Ляпунова тривиальное решение $\varepsilon(t) \equiv 0$ является асимптотически устойчивым.

Доказательство завершено.

Замечание

Аналогично (Belkzadeh, Taghirad, 2012) можно сформулировать задачу о синтезе экспоненциального наблюдателя, для которого решение $\varepsilon(t) \equiv 0$ является асимптотически устойчивым, и существуют константы $\varepsilon, \eta, \theta > 0$, при которых ошибка оценивания удовлетворяет условию

$$\|\varepsilon(t)\| \leq \eta \|\varepsilon(0)\| e^{-\frac{t}{\theta}} \quad \forall t \geq 0 \quad (23)$$

для всех решений уравнения (20) с начальными условиями $\|\varepsilon(0)\| \leq \varepsilon$. Параметр θ определяет скорость убывания ошибки оценивания.

Для дополнительного влияния на процесс оценивания, как и в (Belkzadeh, Taghirad, 2012), введем дополнительные члены в правую часть уравнения (17) с параметром $\alpha > 0$:

$$\begin{aligned}\dot{P}(\hat{x}(t)) &= [A(\hat{x}(t)) + \alpha E]P(\hat{x}(t)) + P(\hat{x}(t))[A^T(\hat{x}(t)) + \alpha E] - \\ &- P(\hat{x}(t))C^T(\hat{x}(t))\tilde{V}^{-1}(\hat{x}(t))C(\hat{x}(t))P(\hat{x}(t)) + B_1(\hat{x}(t))W(t)B_1^T(\hat{x}(t)) + \\ &+ \frac{1}{\gamma^2}P(\hat{x}(t))Q(t)P(\hat{x}(t)),\end{aligned} \quad (24)$$

$$P(\hat{x}(0)) = P_0. \quad (25)$$



Предположим, что справедлив п. 4 допущений теоремы 1, т.е. $\underline{p}E \leq P(\hat{x}(t)) \leq \bar{p}E$, где $\underline{p}, \bar{p} > 0$. С учетом отличий уравнений (24) и (17) получаем

$$\begin{aligned} \dot{\Pi} &= -\Pi\dot{P}\Pi = -\Pi 2\alpha \frac{P\Pi}{\underline{E}} - \Pi A \frac{P\Pi}{\underline{E}} - \frac{\Pi P}{\underline{E}} A^T \Pi + \frac{\Pi P C^T \tilde{V}^{-1} C}{\underline{E}} \frac{P\Pi}{\underline{E}} - \Pi B_1 W B_1^T \Pi - \\ &- \frac{1}{\gamma^2} \frac{\Pi P Q}{\underline{E}} \frac{P\Pi}{\underline{E}} = -2\alpha \Pi - \Pi A - A^T \Pi + C^T \tilde{V}^{-1} C - \Pi B_1 W B_1^T \Pi - \frac{1}{\gamma^2} Q. \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} \dot{V}(t, \varepsilon(t)) &\leq -2\alpha \varepsilon^T(t) \Pi \varepsilon(t) + \varepsilon^T(t) [C^T \tilde{V}^{-1} C - \Pi B_1 W B_1^T \Pi - \frac{1}{\gamma^2} Q - 2C^T \tilde{V}^{-1} C] \varepsilon(t) + \\ &+ 2\eta \|\varepsilon(t)\|^2 \leq -2\alpha V(t, \varepsilon(t)) - \left[\frac{\bar{c}^2}{\underline{d}^2 \underline{v}} + \frac{\bar{b}_1^2 \bar{w}}{\underline{p}^2} + \frac{1}{\gamma^2} \bar{q} - 2\eta \right] \|\varepsilon(t)\|^2. \end{aligned}$$

С учетом $V(t, \varepsilon(t)) = \varepsilon^T(t) \Pi(t) \varepsilon(t)$ и $\frac{1}{\underline{p}} \|\varepsilon(t)\|^2 \leq V(t, \varepsilon(t)) \leq \frac{1}{\underline{p}} \|\varepsilon(t)\|^2$ получаем $-\|\varepsilon(t)\|^2 \leq -\underline{p}V(t, \varepsilon(t)) \leq -\frac{\underline{p}}{\bar{p}} \|\varepsilon(t)\|^2$. Отсюда

$$\dot{V}(t, \varepsilon(t)) \leq - \left[2\alpha + \frac{\bar{c}^2 \underline{p}}{\underline{d}^2 \underline{v}} + \frac{\bar{b}_1^2 \bar{w}}{\underline{p}} + \frac{\underline{p}}{\gamma^2} \bar{q} - 2\eta \underline{p} \right] V(t, \varepsilon(t)). \quad (26)$$

Если справедливо неравенство $\left[2\alpha + \frac{\bar{c}^2 \underline{p}}{\underline{d}^2 \underline{v}} + \frac{\bar{b}_1^2 \bar{w}}{\underline{p}} + \frac{\underline{p}}{\gamma^2} \bar{q} - 2\eta \underline{p} \right] > 0$, то производная $\dot{V}(t, \varepsilon(t))$ является локально отрицательно определенной. Согласно методу Ляпунова тривиальное решение $\varepsilon(t) \equiv 0$ является асимптотически устойчивым.

Разделяя переменные и интегрируя в (26), имеем

$$V(t, \varepsilon(t)) \leq V(0, \varepsilon(0)) \exp \left[- \left(2\alpha + \frac{\bar{c}^2 \underline{p}}{\underline{d}^2 \underline{v}} + \frac{\bar{b}_1^2 \bar{w}}{\underline{p}} + \frac{\underline{p}}{\gamma^2} \bar{q} - 2\eta \underline{p} \right) t \right]. \quad (27)$$

Из условия $\frac{1}{\underline{p}} \|\varepsilon(t)\|^2 \leq V(t, \varepsilon(t)) \leq \frac{1}{\underline{p}} \|\varepsilon(t)\|^2$ находим $\|\varepsilon(t)\|^2 \leq \bar{p}V(t, \varepsilon(t)) \leq \frac{\bar{p}}{\underline{p}} \|\varepsilon(0)\|^2$ и

$$\|\varepsilon(t)\|^2 \leq \frac{\bar{p}}{\underline{p}} \|\varepsilon(0)\|^2 \exp \left[- \left(2\alpha + \frac{\bar{c}^2 \underline{p}}{\underline{d}^2 \underline{v}} + \frac{\bar{b}_1^2 \bar{w}}{\underline{p}} + \frac{\underline{p}}{\gamma^2} \bar{q} - 2\eta \underline{p} \right) t \right],$$

или

$$\|\varepsilon(t)\| \leq \sqrt{\frac{\bar{p}}{\underline{p}}} \|\varepsilon(0)\| \exp \left[- \left(\alpha + \frac{\bar{c}^2 \underline{p}}{2\underline{d}^2 \underline{v}} + \frac{\bar{b}_1^2 \bar{w}}{2\underline{p}} + \frac{\underline{p}}{2\gamma^2} \bar{q} - \eta \underline{p} \right) t \right].$$



Сравнивая с (23), находим $\eta = \sqrt{\frac{\bar{p}}{p}}$, $\theta^{-1} = \left(\alpha + \frac{\bar{c}^2 p}{2 \underline{d}^2 \underline{v}} + \frac{\bar{b}_1^2 \bar{w}}{2 p} + \frac{p}{2 \gamma^2 \bar{q}} - \eta \underline{p} \right)$.

Желаемые асимптотические свойства наблюдателя выполняются, если параметры α и γ выбирается из условия

$$\left[2\alpha + \frac{\bar{c}^2 p}{\underline{d}^2 \underline{v}} + \frac{\bar{b}_1^2 \bar{w}}{p} + \frac{p}{\gamma^2 \bar{q}} - 2\eta \underline{p} \right] > 0,$$

т.е. величина $\alpha > 0$ должна быть достаточно большой.

Алгоритм приближенного синтеза H^∞ – наблюдателей состояния нелинейных динамических систем, линейных по управлению и возмущению

Шаг 1. Для системы (1),(2) выполнить операцию факторизации (3).

Шаг 2. Для полученной системы (4),(5) задать матрицы $P_0 > 0$, $Q(t) > 0, W(t) > 0, V(t) > 0$, число $\gamma > 0$, априорную информацию о начальном состоянии, представленную вектором x_0^* .

Шаг 3. Решить совместно систему

$$\dot{x}(t) = A(x(t))x(t) + B_1(x(t))w(t) + B_2(x(t))u(t), \quad x(0) = x_0,$$

$$y(t) = C(x(t))x(t) + D(x(t))v(t),$$

$$\frac{d\hat{x}}{dt} = A(\hat{x}(t))\hat{x}(t) + B_2(\hat{x}(t))u(t) + K(\hat{x}(t))[y(t) - C(\hat{x}(t))\hat{x}(t)], \quad \hat{x}(0) = x_0^*,$$

$$\begin{aligned} \dot{P}(\hat{x}(t)) = & A(\hat{x}(t))P(\hat{x}(t)) + P(\hat{x}(t))A^T(\hat{x}(t)) - P(\hat{x}(t))C^T(\hat{x}(t))\tilde{V}^{-1}(\hat{x}(t))C(\hat{x}(t))P(\hat{x}(t)) + \\ & + B_1(\hat{x}(t))W(t)B_1^T(\hat{x}(t)) + \frac{1}{\gamma^2} P(\hat{x}(t))Q(t)P(\hat{x}(t)), \quad P(\hat{x}(0)) = P_0, \end{aligned}$$

$$w^*(t) = W(t)B_1^T(x(t))P^{-1}(\hat{x}(t))\varepsilon(t), \quad v^*(t) = -D^{-1}(x(t))C(x(t))\varepsilon(t),$$

где $\varepsilon(t) = x(t) - \hat{x}(t)$.

Шаг 4. Если переходные процессы по переменной $\varepsilon(t) = x(t) - \hat{x}(t)$ удовлетворяют требованиям, процедуру синтеза завершить. Иначе продолжить подбор параметров P_0 , $Q(t)$, $W(t)$, $V(t)$, γ , переходя к шагу 2.

Результаты

Приведем решение модельного примера.

Модель объекта управления (1) задана в форме

$$\dot{x}_1(t) = 0,01x_1(t) - x_2(t) + w(t),$$

$$\dot{x}_2 = x_1(t) - 0.003x_2^2(t).$$



Модель измерительной системы (2) задается выражением

$$y(t) = x_1(t) + v(t).$$

Таким образом, матрицы, описывающие систему (4), (5), принимают вид

$$A(x) = \begin{pmatrix} 0,01 & -1 \\ 1 & -0,003x_1 \end{pmatrix}, B_1(x) = B_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, C(x) = C = (1 \ 0), D(x) = D = 1.$$

В качестве внешних воздействий $w(t)$ и погрешности измерений $v(t)$ можно выбрать как наихудшие воздействия, описываемые выражением (19), так и произвольные ограниченные (их структура приведена в табл. 1). Матрицы Q , W , V и P_0 в (10) подбираются таким образом, чтобы обеспечивать корректный синтез наблюдателя, а также желаемый вид переходных процессов в системе. Подобранные матрицы представлены в табл. 1.

Таблица 1 / Table 1

Параметры моделирования
Numerical simulation parameters

Q	$0,1 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
V	10
W	1
P_0	$10 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
γ	5
T	[0;10]
$w(t)$	$\frac{3}{100} [\sin 2t + \cos \frac{\pi}{4} t]$
$v(t)$	$\frac{1}{400} \left[\sin t + \cos \frac{\pi}{4} t \right]$

На рис. 1–6 отражены результаты моделирования системы управления совместно с наблюдателем состояния при различных начальных условиях и графики изменения величины ошибки оценивания координат вектора состояния для каждого тестового запуска.

Моделирование процесса на рис. 1–2 выполнено при начальных условиях: системы $x(0) = (0,2 \ -0,2)^T$ и наблюдателя $\hat{x}(0) = (-0,12 \ 0,12)^T$.

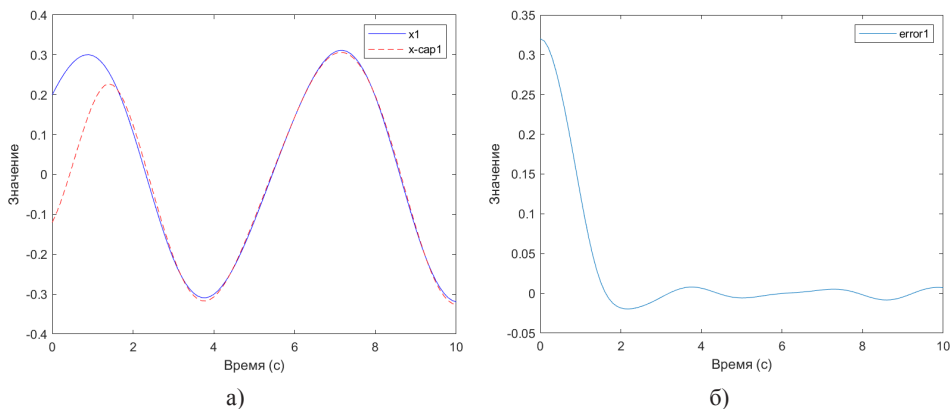


Рис. 1. а) Переходные процессы для координаты x_1 и ее оценки $\hat{x}_1$
б) Ошибка оценивания координаты x_1

Fig. 1. a) Transient processes for x_1 and its estimate $\hat{x}_1$
b) Coordinate estimation error of x_1

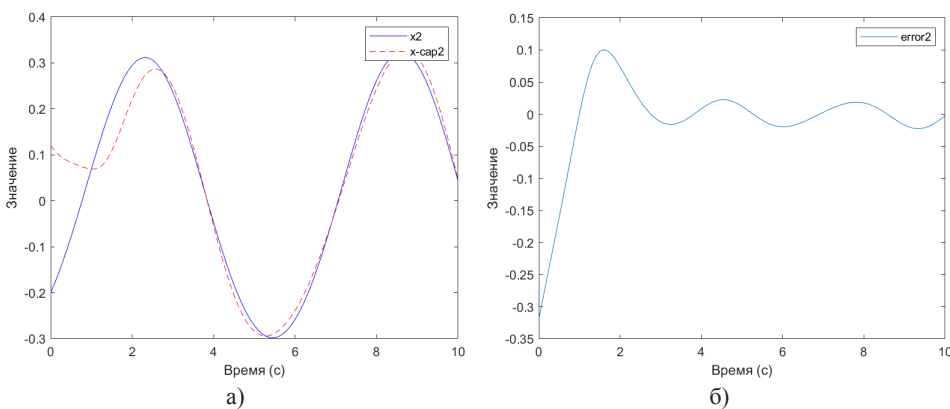


Рис. 2. а) Переходные процессы для координаты x_2 и ее оценки $\hat{x}_2$
б) Ошибка оценивания координаты x_2

Fig. 2. a) Transient processes for x_2 and its estimate $\hat{x}_2$
b) Coordinate estimation error of x_2

Моделирование процесса на рис. 3–4 выполнено при начальных условиях:

$$x(0) = (-0,5 \quad 0,5)^T, \quad \hat{x}(0) = (0,01 \quad 0,01)^T.$$

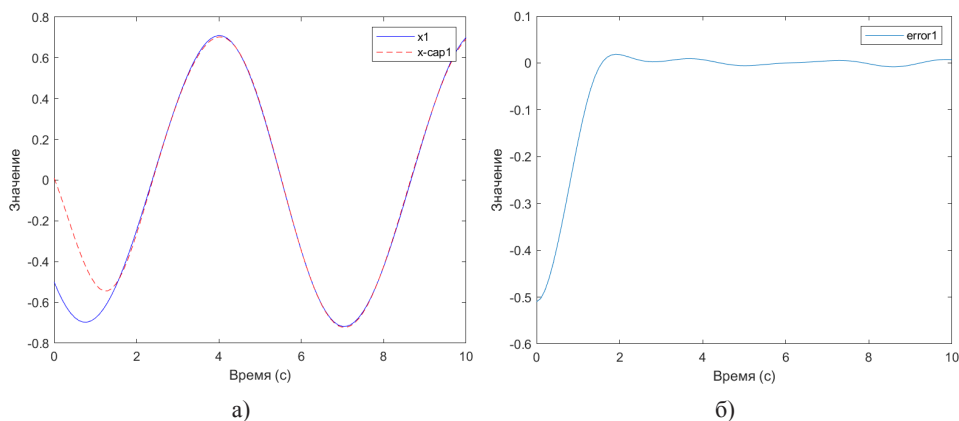


Рис. 3. а) Переходные процессы для координаты x_1 и ее оценки $\hat{x}_1$
б) Ошибка оценивания координаты x_1

Fig. 3. а) Transient processes for x_1 and its estimate $\hat{x}_1$
б) Coordinate estimation error of x_1

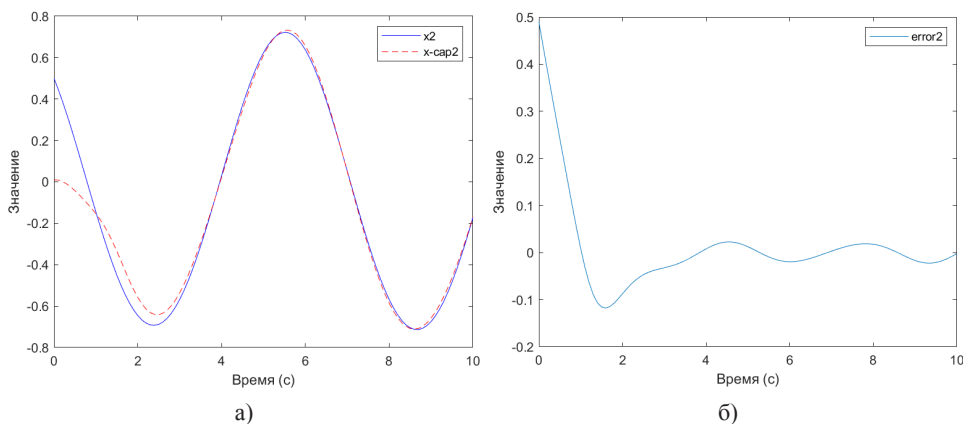


Рис. 4. а) Переходные процессы для координаты x_2 и ее оценки $\hat{x}_2$
б) Ошибка оценивания координаты x_2

Fig. 4. а) Transient processes for x_2 and its estimate $\hat{x}_2$
б) Coordinate estimation error of x_2

Моделирование процесса на рис. 5–6 выполнено при начальных условиях:

$$x(0) = (-5 \ 5)^T, \quad \hat{x}(0) = (0,05 \ 0,05)^T.$$



Для произведения вычислений и моделирования использовалась система компьютерной математики MATLAB.

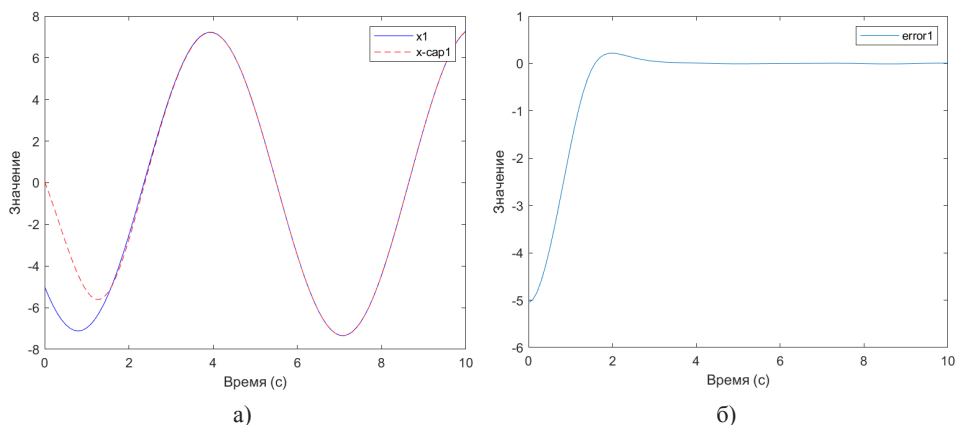


Рис. 5. а) Переходные процессы для координаты x_1 и ее оценки $\hat{x}_1$
б) Ошибка оценивания координаты x_1

Fig. 5. a) Transient processes for x_1 and its estimate $\hat{x}_1$
b) Coordinate estimation error of x_1

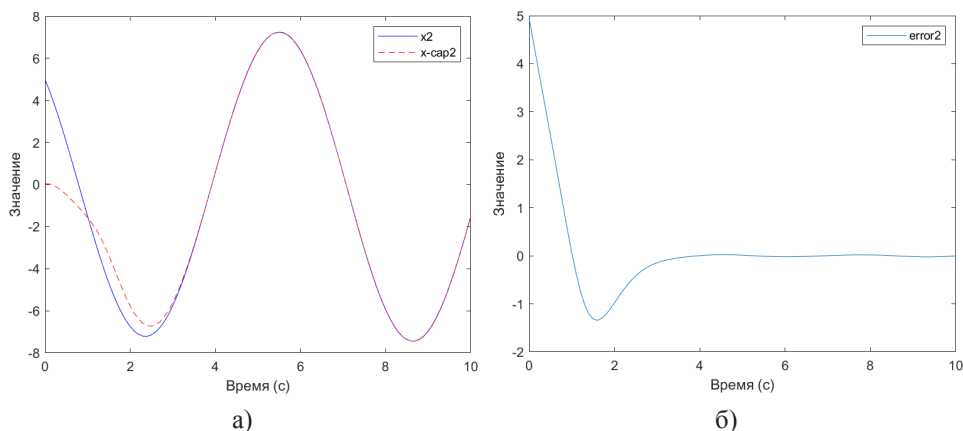


Рис. 6. а) Переходные процессы для координаты x_2 и ее оценки $\hat{x}_2$
б) Ошибка оценивания координаты x_2

Fig. 6. a) Transient processes for x_2 and its estimate $\hat{x}_2$
b) Coordinate estimation error of x_2



Обсуждение результатов

На основании результатов, отраженных на рис. 1–6, можно сделать вывод, что предложенный подход к синтезу наблюдателя для нелинейной системы позволяет получить достаточно точную оценку координат вектора состояния и желаемое качество переходных процессов в условиях неполной информации о состоянии объекта, ограниченных начальных условиях, внешних воздействиях и погрешностях измерений. Значение ошибок оценивания стремится к нулю за достаточно короткий промежуток времени. Даже при значительном различии начальных значений координат вектора состояния и их оценок предложенный подход позволяет получить удовлетворительные результаты.

Заключение

В статье сформулированы и доказаны достаточные условия существования H^∞ – наблюдателя для нелинейных систем, линейных по управлению и возмущению. Получены соотношения для нахождения параметров наблюдателя и наихудших законов изменения внешних воздействий и погрешностей измерений. Решен модельный пример оценивания состояния по результатам неполных и неточных измерений. На основании полученных результатов можно сделать вывод, что предложенный подход к синтезу H^∞ – наблюдателя для нелинейной системы позволяет получить достаточно точную оценку вектора состояния даже при значительном различии начальных значений состояния и оценки вектора состояния. Полученный H^∞ – наблюдатель обеспечивает желаемое качество переходных процессов и асимптотическую устойчивость системы в условиях неполной информации. Предложенный метод оценивания вектора состояния может быть применен к различным задачам управления, например, при проектировании автопилотов или систем автоматической навигации летательных аппаратов. Для реализации вычислений сформирован комплекс программ в среде MATLAB.

Ограничения. Предлагаемый подход к синтезу наблюдателей применим только для рассмотренного класса нелинейных непрерывных систем управления.

Limitations. The proposed approach to the synthesis of observers is applicable only to the considered class of nonlinear control systems.

Список источников / References

1. Koopman, H.W., Isidori, A., Flockerzi, D. (1993). Topics in control theory. DMV-Seminar; Bd. 22, Basel; Springer.
2. Doyle, J., Francis, B., Tannenbaum, A. (1990). Feedback Control Theory. Macmillan Publishing Co.
3. Skogestad, S., Postlethwaite, I. (2005). Multivariable Feedback Control: Analysis and Design. John Wiley and sons.
4. Поляк, Б.Т., Щербаков, П.С. (2002). Робастная устойчивость и управление. М.: Наука.



- Polyak, B.T., Shcherbakov, P.S. (2002). Robastnaya ustoychivost' i upravleniye [Robust stability and control]. Nauka, Moscow. (In Russ.).
5. Green, M., Limebeer, D.J.N. (2012). Linear Robust Control. Dover Publications.
 6. Simon, D. Optimal State Estimation. (2006). Kalman, H_∞ and Nonlinear Approaches. John Wiley and sons.
 7. Поляк, Б.Т., Хлебников, М.В., Щербаков, П.С. (2014). Управление линейными системами при внешних возмущениях: Техника линейных матричных неравенств. М.: URSS/ЛЕНАНД.
Polyak, B.T., Khlebnikov, M.V., Shcherbakov, P.S. (2014). Upravleniye lineynymi sistemami pri vneshnikh vozmushcheniyakh: Tekhnika lineynykh matrichnykh neravenstv [Control of linear systems under external disturbances: Technique of linear matrix inequalities]. URSS/LENAND, Moscow. (In Russ.).
 8. Хлебников, М.В., Поляк, Б.Т., Кунцевич, В.М. (2011). Оптимизация линейных систем при ограниченных внешних возмущениях (техника инвариантных эллипсоидов). *Автоматика и телемеханика*, № 11, 9—59.
Khlebnikov, M.V., Polyak, B.T., Kuntsevich, V.M. (2011). Optimization of linear systems subject to bounded exogenous disturbances: The invariant ellipsoid technique. *Autom. Remote Control*, 72(11), 2227—2275.
 9. Поляк, Б.Т., Хлебников, М.В., Рапопорт, Л.Б. (2019). Математическая теория автоматического управления. М.: URSS/ЛЕНАНД.
Polyak, B.T., Khlebnikov, M.V., Rapoport, L.B. (2019). Matematicheskaya teoriya avtomaticheskogo upravleniya [Mathematical theory of automatic control]. URSS/LENAND, Moscow. (In Russ.).
 10. Баландин, Д.В., Коган, М.М. (2013). Минимаксная фильтрация: γ_0 -оптимальные наблюдатели и обобщенные H_∞ -оптимальные фильтры. *Автоматика и телемеханика*, № 4, 43—58.
Balandin, D.V., Kogan, M.M. (2013). Minimax filtering: γ_0 -optimal observers and generalized H_∞ -optimal filters. *Autom. Remote Control*, 74(4), 575—587.
 11. Shaked, U., Theodor, Y. (1992). H_1 -optimal estimation: a tutorial. *Proc. 31st IEEE Conf. Decision Contr.*, vol.2 (pp. 2278—2286), New York, NY, USA.
 12. Пантелеев, А.В., Яковлева, А.А. (2023). Достаточные условия существования H^∞ наблюдателя состояния линейных непрерывных динамических систем. *Моделирование и анализ данных*, 13(2), 36—63. <https://doi.org/10.17759/mda.2023130202>
Panteleev, A.V., Yakovleva, A.A. (2023). Sufficient Conditions for the Existence of a H-infinity State Observer for Linear Continuous Dynamical Systems. *Modelling and Data Analysis*, 13(2), 36—63. (In Russ., abstr. in Engl.). <https://doi.org/10.17759/mda.2023130202>
 13. Li, H., Fu, M. (1997) A linear matrix inequality approach to robust H_1 filtering. *IEEE Trans. Signal Processing*, 45(9), 2338—2350.
 14. Shue, S., Agarwal, R.K. (1999). Design of automatic H_∞ landing systems using mixed H_2 / H_∞ control. *J. of Guidance, Control and Dynamics*, 22, 103—114.
 15. Lungu, R., Lungu, M. (2015) Control of the aircraft lateral-directional motion during landing using the H_∞ control and the dynamic inversion. *Proc. of the Romanian Academy. Ser. A.* (pp. 547—555), V. 16, № 64.



16. Banks, H.T., Lewis, B.M., Tran, H.T. (2007). Nonlinear feedback controllers and compensators: A state-dependent Riccati equation approach. *Computational Optimization and Applications*, 37(2), 177—218.
17. Cloutier, J.R., D'Souza, C.N., Mracek, C.P. (1996). Nonlinear regulation and nonlinear H -infinity control via the state-dependent Riccati equation technique. Part 1, theory; Part 2, Examples. In *Proceedings of the 1st International Conference on Nonlinear Problems in Aviation and Aerospace* (pp. 117—141), Daytona Beach, USA.
18. Belkzadeh, H., Taghirad, H.D. (2012). Observer based on the differential state-dependent Riccati equation. *Int. J. Automation and Computing*, 9(4), 358—368. DOI: 10.1007/s11633-012-0656-y

Информация об авторах

Пантелеев Андрей Владимирович, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой «Математическая кибернетика» института «Компьютерные науки и прикладная математика», Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет) (МАИ (НИУ)), Москва, Российская Федерация, ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-2493-3617>, e-mail: avpanteleev@inbox.ru

Яковлева Александра Алексеевна, аспирант, Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет) (МАИ (НИУ)), Москва, Российская Федерация, ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-1544-9105>, e-mail: ayakovleva982@gmail.com

Information about the authors

Andrei V. Panteleev, D. Sc. (Physical and Mathematical Sciences), Full Professor, Head of the Department of Mathematics and Cybernetics, Institute of Computer Science and Applied Mathematics, Moscow Aviation Institute, Moscow, Russian Federation, ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-2493-3617>, e-mail: avpanteleev@inbox.ru

Aleksandra A. Yakovleva, Postgraduate Student, Moscow Aviation Institute, Moscow, Russian Federation, ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-1544-9105>, e-mail: ayakovleva982@gmail.com

Вклад авторов

Пантелеев А.В. — разработка концепции, научное руководство, разработка методологии, написание рукописи — рецензирование и редактирование.

Яковлева А.А. — разработка методологии, разработка программного обеспечения, написание черновика рукописи, визуализация.

Все авторы приняли участие в обсуждении результатов и согласовали окончательный текст рукописи.

Contribution of the authors

Andrei V. Panteleev — Conceptualization, Supervision, Methodology, Writing — Original Draft Preparation.

Aleksandra A. Yakovleva — Methodology, Software, Writing — Original Draft Preparation, Visualization.

All authors participated in the discussion of the results and approved the final text of the manuscript.



Конфликт интересов

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Conflict of interest

The authors declare no conflict of interest.

Поступила в редакцию 06.05.2025

Поступила после рецензирования 13.05.2025

Принята к публикации 25.05.2025

Опубликована 30.06.2025

Received 2025.05.06

Revised 2025.05.13

Accepted 2025.05.25

Published 2025.06.30