

МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ | OPTIMIZATION METHOD

Научная статья | Original paper

УДК 51-74

Метод проектирования профиля крыла трансзвукового транспортного самолета на основе последовательного математического моделирования и параметрической оптимизации

А.В. Пантелеев, В.К. Гунчин✉, И.С. Надоров, И.А. Ахмедов

Московский авиационный институт (НИУ МАИ)

г. Москва, Российская Федерация

✉ gunchinvk@mai.ru

Резюме

Контекст и актуальность. Задачи проектирования профилей крыла перспективных самолетов требуют создания методик, учитывающих современные требования к аэродинамическим характеристикам. При этом предлагаемые процедуры должны опираться на накопленный опыт конструкторов и проектировщиков с целью учета всех ограничений и особенностей. **Методы и материалы.** В статье для параметризации геометрии профиля используется описание верхней и нижней образующих с помощью разложения по системе многочленов Бернштейна. Параметрами, задающими профиль, являются коэффициенты разложения. Для нахождения их значений проектировщиком задается набор базовых точек профиля, а также отрезки возможных значений их координат. При этом также должны учитываться ограничения на толщину профиля и кривизну верхней образующей. Проблема нахождения параметров профиля сформулирована как задача условной оптимизации с интервальными ограничениями на проектируемые параметры. Целевая функция характеризует степень удовлетворения требований к интегральным аэродинамическим характеристикам. Подсчет ее значений производится по информации, полученной при использовании решателя. Для передачи информации о текущей геометрии профиля в решатель формируется геометрическая модель. Задача оптимизации решается с помощью группы метаэвристических алгоритмов, применяемых последовательно.



К ним относятся методы, имитирующие поведение стаи мотыльков, метод последовательной редукции области исследования и метод перекоммутации. Сформирована пошаговая методика решения задачи проектирования профиля крыла. **Результаты.** В качестве исходного профиля принят профиль RAЕ 5213. Полученный в результате решения оптимизационной задачи профиль удовлетворяет заданным проектировщиком требованиям с точки зрения как геометрических, так и аэродинамических характеристик. **Выводы.** Предложен метод проектирования аэродинамического профиля, заключающийся в нахождении координат его базовых точек, используемых для их аппроксимации CST методом, с целью получения требуемых аэродинамических и геометрических характеристик профиля. Научная новизна предложенного метода заключается в том, что проблема поиска базовых точек профиля сведена к задаче последовательной конечномерной оптимизации, которая решается с помощью набора метаэвристических алгоритмов поиска условного глобального экстремума, где значение целевой функции находится с помощью специализированного решателя, реализующего процедуру математического моделирования процесса обтекания профиля. Полученные результаты составляют основу для последующего этапа проектирования теоретического контура крыла при решении задачи обтекания полной компоновки самолета.

Ключевые слова: проектирование профиля крыла, параметризация профиля, метаэвристические алгоритмы оптимизации, математическое моделирование, методы оптимизации

Для цитирования: Пантелеев, А.В., Гунчин, В.К., Надоров, И.С., Ахмедов, И.А. (2025). Метод проектирования профиля крыла трансзвукового транспортного самолета на основе последовательного математического моделирования и параметрической оптимизации. *Моделирование и анализ данных*, 15(3), 56—75. <https://doi.org/10.17759/mda.2025150304>

Method of designing the wing airfoil of a transonic transport aircraft based on consequential mathematical modeling and parametric optimization

A.V. Panteleev, V.K. Gunchin✉, I.S. Nadorov, I.A. Akhmedov
Moscow Aviation Institute (National Research University), Moscow, Russian Federation
✉ gunchinvk@mai.ru

Abstract

Context and relevance. The tasks of designing wing airfoils for prospective aircraft require the creation of methods that take into account modern requirements for



aerodynamic characteristics. At the same time, the proposed procedures should be based on the accumulated experience of designers and engineers in order to take into account all limitations and features. **Objective.** The first objective is to formulate the airfoil design problem as a parametric optimization task. The second objective is to form an optimization process based on mathematical modeling of the airfoil flow to calculate the values of the objective function and a group of metaheuristic algorithms for searching for a conditional extremum. **Hypothesis.** The paper assumes that the airfoil geometry can be approximated using expansions in Bernstein polynomials. **Methods and materials.** In the article, the description of the upper and lower surface using the expansion in terms of the Bernstein polynomial system is used to parameterize the airfoil geometry. The parameters defining the airfoil are the expansion coefficients. To find their values, the designer specifies a set of airfoil base points, as well as segments of possible values of their coordinates. In this case, the constraints on the airfoil thickness and the curvature of the upper surface should also be taken into account. The problem of finding the profile parameters is formulated as a problem of conditional optimization with interval constraints on the designed parameters. The objective function characterizes the degree of satisfaction of the requirements for the integral aerodynamic characteristics. Its values are calculated based on the information obtained using the solver. To transfer information about the current profile geometry to the solver, a geometric model is formed. The optimization problem is solved using a group of metaheuristic algorithms applied sequentially. These include methods simulating the behavior of a swarm of moths, the method of sequential reduction of the search area, and the path-relinking method. A step-by-step technique for solving the wing airfoil design problem is formed. **Results.** The RAE 5213 airfoil was adopted as the initial airfoil. The airfoil obtained as a result of solving the optimization problem satisfies the requirements specified by the designer in terms of both geometric and aerodynamic characteristics. **Conclusions.** A method for designing an aerodynamic airfoil is proposed, which consists in finding the coordinates of its base points used for their approximation by the CST method, in order to obtain the required aerodynamic and geometric characteristics of the airfoil. The scientific novelty of the proposed method lies in the fact that the problem of finding the base points of the airfoil is reduced to the problem of sequential finite-dimensional optimization, which is solved using a set of metaheuristic algorithms for finding a conditional global extremum, where the value of the objective function is found using a specialized solver that implements the procedure for mathematical modeling of the process of flow around the airfoil. The obtained results form the basis for the subsequent stage of designing the theoretical wing contour when solving the problem of flow around the full configuration of the aircraft.

Keywords: wing airfoil design, airfoil parameterization, wing polar, metaheuristic optimization algorithms, mathematical modeling, optimization methods

For citation: Panteleev, A.V., Gunchin, V.K., Nadorov, I.S., Akhmedov, I.A. (2025). Method of designing the wing airfoil of a transonic transport aircraft based on consequential mathematical modeling and parametric optimization. *Modelling and Data Analysis*, 15(3), 56—75. (In Russ.). <https://doi.org/10.17759/mda.2025150304>



Введение

Для проектирования профиля крыла применяются различные подходы. При этом желательно использовать относительно небольшое число переменных при сохранении возможности обеспечения требуемых аэродинамических и геометрических характеристик профиля. Одновременно способ представления профиля должен иметь удобную интуитивную и геометрическую интерпретацию, позволяя проектировщику управлять процессом поиска на основе имеющегося опыта. Проектирование профиля крыла для трансзвукового самолета традиционно актуальная задача ввиду сложности одновременного удовлетворения противоречивым требованиям — тенденции к увеличению относительной толщины профиля при сохранении высокого аэродинамического качества на заданном числе Маха.

Известна трехэтапная процедура аэродинамического проектирования крыла самолета (Болсуновский и др., 2002). На первом этапе выбирается начальная геометрия крыла по имеющимся данным от прототипов. На втором этапе она модифицируется путем решения обратной задачи с заданным благоприятным распределением коэффициента давления на поверхности для выбранного режима полета. Заданное распределение давления выбирается проектировщиком так, чтобы минимизировать волновое, профильное и индуктивное сопротивления. Наконец, на третьем этапе включается процедура многорежимной оптимизации. Показано, что спроектированное таким образом крыло отвечает требованиям с точки зрения интегральных аэродинамических характеристик для заданного режима полета (прежде всего крейсерского числа Маха). Переменными оптимизации являлись геометрические вариации базовых сечений крыла: крутка сечения, изменение толщины или вогнутости профиля, положение максимальной относительной толщины по хорде, отклонение носика и хвостика, изменение радиуса кривизны носика профиля, локальные вариации верхней поверхности. Предложенная методология, реализованная в алгоритмическом и программном обеспечении, позволила решить задачи проектирования крыльев большинства известных отечественных магистральных самолетов (Болсуновский и др., 2018; Пейгин и др., 2018).

В ряде публикаций (Kulfan, 2006; Kulfan, Bussoletti, Hilmes, 2007; Kulfan, 2008; Kulfan 2007; Kulfan, 2020) предлагается метод описания теоретического контура агрегатов планера самолета, получивший название CST (Class function / Shape function Transformation). При этом используется представление с помощью многочленов Бернштейна с неопределенными коэффициентами, подлежащими нахождению. Метод получил дальнейшее развитие и применение в (Lane, Marshall, 2009; Zhu, 2014; Zhu, Qin, 2014; Khurana, Winarto, Sinha, 2008).

Другим достаточно распространенным способом параметризации описания профиля является PARSEC (**P**arameterised **S**ections) (Sobieczky, 1998). В нем требуется нахождение 11 интуитивных параметров для описания профиля. Методы CST и PARSEC развивались и применялись в (Zhu, 2014; Akram, Kim, 2021).

При проектировании профилей также применяется метод деформации из базовых профилей (**F**ree-**F**orm **D**eformation, FFD) (Sederberg, Parry, 1986; Koo, Zingg, 2016;



Lee, Koo, Zingg, 2017; Poole, Allen, Rendall, 2015). По узлам сетки находятся коэффициенты В-сплайнов для описания профиля. В качестве средства для оценки качества получаемых профилей используются решения уравнения Навье–Стокса (Reynolds-averaged Navier-Stokes equations, RANS). Для решения задач оптимизации используется пакет SNOPT.

Отметим также метод корректной ортогональной декомпозиции (**Proper Orthogonal Decomposition, POD**), использующий алгоритм SVD (Singular Value Decomposition) (Toal, Bresslo, Keane, 2010; Masters et al., 2015). Формируется базисное множество тренировочных профилей. Новые профили представляются в виде их линейной комбинации.

Кроме многочленов Бернштейна, применяемых в CST методе, для представления профилей могут быть использованы многочлены Hicks–Henne, Wagner, NACA (National Advisory Committee for Aeronautics) и Лежандра (Khurana, Winarto, Sinha, 2008), В-сплайны (B-splines), NURBS (non-uniform rational B-splines), радиально базисные функции (RBF) и многочлены Безье (Masters et al., 2015).

В качестве методов оптимизации для нахождения неизвестных параметров использовались градиентные методы первого порядка, квазиньютоновский метод с ограниченной памятью (Болсуновский и др., 2002; Болсуновский и др., 2018; Пейгин и др., 2018), метод частиц в стае совместно с процедурой линейного поиска (Khurana, Winarto, Sinha, 2008), генетический алгоритм (Akram, Kim, 2021; Gardner, Selig, 2003; Peigin, Epstein, 2004; Epstein, Peigin, 2005), метод Нелдера–Мида (Gardner, Selig, 2003).

Для получения аэродинамических характеристик профилей использовались как результаты физического моделирования обтекания в аэродинамической трубе, так и различные программы математического моделирования, включая комплексы программ решения уравнений Навье–Стокса (Akram, Kim, 2021; Poole, Allen, Rendall, 2015; Epstein, Peigin, 2005).

В статье предлагается новая методика проектирования профиля крыла, состоящая из нескольких этапов: задания начального профиля и ограничений на положения его характерных точек, интервалов желаемых значений аэродинамических и геометрических характеристик профиля; формирования геометрической модели для решателя, в качестве которого используется программный пакет, реализующий процедуру решения уравнения Навье–Стокса; определения интегральных аэродинамических характеристик изолированного профиля, используемых для вычисления значений целевой функции с целью ее минимизации, применение комплекса программ метаэвристических алгоритмов глобальной условной оптимизации. В результате реализации итерационного процесса последовательного математического моделирования и параметрической оптимизации находится профиль, удовлетворяющий требованиям проектировщика с точки зрения аэродинамических и геометрических характеристик.



Материалы и методы

Параметризация геометрии профиля

Будем использовать следующие обозначения: x, z – переменные геометрии профиля; c – величина хорды; $\zeta = \frac{z}{c}$ – безразмерное расстояние по оси ординат; $\psi = \frac{x}{c}$ – безразмерное расстояние по оси абсцисс; z_{UTE} – толщина задней кромки сверху (trailing edge); z_{LTE} – толщина задней кромки снизу.

Профиль крыла описывается двумя кривыми, описывающими геометрию верхней (*upper*) и нижней (*lower*) частей. Согласно CST методу (Kulfan, 2006; Kulfan, Bussolletti, Hilmes, 2007; Kulfan 2008; Kulfan 2007; Kulfan, 2020; Lane, Marshall, 2009; Zhu, 2014; Zhu, Qin, 2014; Khurana, Winarto, Sinha, 2008) геометрия верхней и нижней частей профиля может быть представлена в форме

$$\begin{aligned} \left(\frac{z}{c}\right)_{Upper} &= \left(\frac{x}{c}\right)^{N_1} \left(1 - \frac{x}{c}\right)^{N_2} \sum_{i=0}^{N_U} \left[W_U(i) \frac{N_U!}{i!(N_U-i)!} \left(\frac{x}{c}\right)^i \left(1 - \frac{x}{c}\right)^{N_U-i} \right] + \frac{x}{c} \frac{z_{UTE}}{c}, \\ \left(\frac{z}{c}\right)_{Lower} &= \left(\frac{x}{c}\right)^{N_1} \left(1 - \frac{x}{c}\right)^{N_2} \sum_{i=0}^{N_L} \left[W_L(i) \frac{N_L!}{i!(N_L-i)!} \left(\frac{x}{c}\right)^i \left(1 - \frac{x}{c}\right)^{N_L-i} \right] + \frac{x}{c} \frac{z_{LTE}}{c}, \end{aligned} \quad (1)$$

где функция $C_{N_2}^{N_1} \left(\frac{x}{c}\right) = \left(\frac{x}{c}\right)^{N_1} \left(1 - \frac{x}{c}\right)^{N_2}$ называется функцией класса профилей (Class function), которая задает конфигурацию профиля внутри фиксированного геометрического класса; N_1, N_2 – характерные параметры класса; а функции формы (Shape functions) верхней кромки и нижней кромки, определяемые разложением с применением полиномов Бернштейна порядков N_U, N_L соответственно, задающие конкретную форму профиля в рамках фиксированного класса, имеют вид

$$\begin{aligned} S_U \left(\frac{x}{c}\right) &= \sum_{i=0}^{N_U} \left[W_U(i) \frac{N_U!}{i!(N_U-i)!} \left(\frac{x}{c}\right)^i \left(1 - \frac{x}{c}\right)^{N_U-i} \right], \\ S_L \left(\frac{x}{c}\right) &= \sum_{i=0}^{N_L} \left[W_L(i) \frac{N_L!}{i!(N_L-i)!} \left(\frac{x}{c}\right)^i \left(1 - \frac{x}{c}\right)^{N_L-i} \right]. \end{aligned} \quad (2)$$

Параметрами, задающими профиль, являются неопределенные коэффициенты $W_U(i), i = 0, \dots, N_U; W_L(i), i = 0, \dots, N_L$. Последние слагаемые в формулах (1) контролируют толщину задней кромки крыла.

Замечания

1. Для классического профиля полагают $N_1 = 0,5; N_2 = 1$, что соответствует круглому носу и острой задней кромке.
2. Порядок многочленов Бернштейна обычно задается в пределах от 2 до 15. Наилучшие результаты получаются, как правило, при значениях около 9 (Lane, Marshall, 2009).



3. Относительная толщина профиля находится в результате решения задачи одномерной оптимизации: $\left(\frac{z}{c}\right)_{Upper} - \left(\frac{z}{c}\right)_{Lower} \rightarrow \max_{0 \leq \frac{x}{c} \leq 1}$. Одновременно можно определить положение точки на хорде, соответствующей относительной толщине крыла.

Решение задачи о нахождении параметров профиля

Пусть известны пары опорных (базисных) точек:

$$\left(\frac{x_{jU}}{c}, \frac{z_{jU}}{c}\right), j = 0, 1, \dots, N^U, \quad \left(\frac{x_{jL}}{c}, \frac{z_{jL}}{c}\right), j = 0, 1, \dots, N^L.$$

Они, как правило, задаются проектировщиком на основе опыта, при этом их расположение не обязательно равномерное. Проектировщик определяет промежутки возможного расположения опорных точек в виде левой и правой границ изменения значений их координат.

Введем обозначения:

$$W_U = \begin{pmatrix} W_U(0) \\ W_U(1) \\ \vdots \\ W_U(N_U) \end{pmatrix}, \quad D_i \left(\frac{x_{jU}}{c}\right) = \frac{N_U!}{i!(N_U-i)!} \left(\frac{x_{jU}}{c}\right)^{i+N_1} \left(1 - \frac{x_{jU}}{c}\right)^{N_U+N_2-i},$$

$$i = 0, \dots, N_U; j = 0, \dots, N^U;$$

$$W_L = \begin{pmatrix} W_L(0) \\ W_L(1) \\ \vdots \\ W_L(N_L) \end{pmatrix}, \quad D_i \left(\frac{x_{jL}}{c}\right) = \frac{N_L!}{i!(N_L-i)!} \left(\frac{x_{jL}}{c}\right)^{i+N_1} \left(1 - \frac{x_{jL}}{c}\right)^{N_L+N_2-i},$$

$$i = 0, \dots, N_L; j = 0, \dots, N^L;$$

$$Z_U = \begin{pmatrix} \frac{z_{0U}}{c} \\ \frac{z_{1U}}{c} \\ \vdots \\ \frac{z_{N^U U}}{c} \end{pmatrix}, \quad Z_L = \begin{pmatrix} \frac{z_{0L}}{c} \\ \frac{z_{1L}}{c} \\ \vdots \\ \frac{z_{N^L L}}{c} \end{pmatrix}, \quad X_U = \frac{z_{UTE}}{c} \begin{pmatrix} \frac{x_{0U}}{c} \\ \frac{x_{1U}}{c} \\ \vdots \\ \frac{x_{N^U U}}{c} \end{pmatrix}, \quad X_L = \frac{z_{LTE}}{c} \begin{pmatrix} \frac{x_{0,L}}{c} \\ \frac{x_{1,L}}{c} \\ \vdots \\ \frac{x_{N^L L}}{c} \end{pmatrix};$$



$$D_U = \begin{pmatrix} D_0\left(\frac{x_{0U}}{c}\right) & D_1\left(\frac{x_{0U}}{c}\right) & \dots & D_{N_U}\left(\frac{x_{0U}}{c}\right) \\ D_0\left(\frac{x_{1U}}{c}\right) & D_1\left(\frac{x_{1U}}{c}\right) & \dots & D_{N_U}\left(\frac{x_{1U}}{c}\right) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ D_0\left(\frac{x_{N^U_U}}{c}\right) & D_1\left(\frac{x_{N^U_U}}{c}\right) & \dots & D_{N_U}\left(\frac{x_{N^U_U}}{c}\right) \end{pmatrix},$$

$$D_L = \begin{pmatrix} D_0\left(\frac{x_{0L}}{c}\right) & D_1\left(\frac{x_{0L}}{c}\right) & \dots & D_{N_L}\left(\frac{x_{0L}}{c}\right) \\ D_0\left(\frac{x_{1L}}{c}\right) & D_1\left(\frac{x_{1L}}{c}\right) & \dots & D_{N_L}\left(\frac{x_{1L}}{c}\right) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ D_0\left(\frac{x_{N^L_L}}{c}\right) & D_1\left(\frac{x_{N^L_L}}{c}\right) & \dots & D_{N_L}\left(\frac{x_{N^L_L}}{c}\right) \end{pmatrix},$$

Тогда уравнения (1) переписутся в матричной форме

$$D_U W_U = Z_U - X_U, \quad D_L W_L = Z_L - X_L. \quad (3)$$

Если $N^U = N_U$, $N^L = N_L$, их решение находится в виде

$$W_U = D_U^{-1}(Z_U - X_U), \quad W_L = D_L^{-1}(Z_L - X_L). \quad (4)$$

Если $N^U > N_U$, $N^L > N_L$, решение находится в форме

$$W_U = D_U^{-1}(Z_U - X_U), \quad W_L = D_L^{-1}(Z_L - X_L), \quad (5)$$

где D_U^{-1} , D_L^{-1} – псевдообратные матрицы (Гантмахер, 2010).

Общая схема процесса проектирования

Процесс проектирования профиля начинается с задания начального профиля из множества допустимых. С этой целью проектировщик задает величину хорды, количество опорных точек и относительные координаты опорных точек для верхней и нижней образующих, а также промежутки их возможных значений. Фиксируются значения порядков полиномов Бернштейна N_U, N_L в (2). Параметры среды и число Маха в решателе задаются пользователем, исходя из информации о целевом режиме полета проектируемого самолета и геометрических характеристиках его крыла.



Задается диапазон изменения угла атаки $\alpha \in [\alpha_{\min}, \alpha_{\max}]$ для передачи в решатель с целью дальнейшего построения поляры профиля и зависимости коэффициента момента тангажа от угла атаки на основе вычисляемых значений $C_y(\alpha)$, $C_x(\alpha)$, $m_{z_0}(\alpha)$.

Задаются промежутки допустимых значений интегральных аэродинамических характеристик, максимальной относительной толщины T , максимального значения аэродинамического качества $K_{\max}(\alpha^*) = \max_{\alpha \in [\alpha_{\min}, \alpha_{\max}]} \frac{C_y(\alpha)}{C_x(\alpha)}$ и соответствующего ему значения угла атаки $\alpha^* = \arg \max_{\alpha \in [\alpha_{\min}, \alpha_{\max}]} \frac{C_y(\alpha)}{C_x(\alpha)}$; наивыгоднейшего значения $C_{yH} = C_y(\alpha^*)$; максимального значения $C_y(\alpha)$: $C_{y\max} = \max_{\alpha \in [\alpha_{\min}, \alpha_{\max}]} C_y(\alpha)$; значения $C_{x0} = C_x(\alpha^0)$, где α^0 – значение угла атаки, при котором $C_y(\alpha^0) = 0$; значения m_{z_0} (корня уравнения $m_{z_0}(\alpha) = 0$):

$$\begin{aligned} T \in [T_{\min}, T_{\max}], \quad C_{yH} \in [\underline{C_{yH}}, \overline{C_{yH}}], \quad K_{\max} \in [\underline{K_{\max}}, \overline{K_{\max}}], \\ C_{y\max} \in [\underline{C_{y\max}}, \overline{C_{y\max}}], \quad C_{x0} \in [\underline{C_{x0}}, \overline{C_{x0}}], \quad m_{z_0} \in [\underline{m_{z_0}}, \overline{m_{z_0}}]. \end{aligned} \quad (6)$$

Определяются параметры целевой функции, характеризующей качество профиля:

$$I = \lambda_1 D(T) + \lambda_2 D(C_{yH}) + \lambda_3 D(K_{\max}) + \lambda_4 D(C_{y\max}) + \lambda_5 D(C_{x0}) + \lambda_6 D(m_{z_0}), \quad (7)$$

где $\lambda_1, \dots, \lambda_6$ – весовые коэффициенты (их значения, как правило, убывают по величине с возрастанием номера, учитывая важность вклада каждого из слагаемых),

$$\begin{aligned} D(T) &= \begin{cases} (T - T_{\min})^2, & T < T_{\min}, \\ 0, & T \in [T_{\min}, T_{\max}], \\ (T - T_{\max})^2, & T > T_{\max}, \end{cases} \quad D(C_{yH}) = \begin{cases} (C_{yH} - \underline{C_{yH}})^2, & C_{yH} < \underline{C_{yH}}, \\ 0, & C_{yH} \in [\underline{C_{yH}}, \overline{C_{yH}}], \\ (C_{yH} - \overline{C_{yH}})^2, & C_{yH} > \overline{C_{yH}}, \end{cases} \\ D(K_{\max}) &= \begin{cases} (K_{\max} - \underline{K_{\max}})^2, & K_{\max} < \underline{K_{\max}}, \\ 0, & K_{\max} \in [\underline{K_{\max}}, \overline{K_{\max}}], \\ (K_{\max} - \overline{K_{\max}})^2, & K_{\max} > \overline{K_{\max}}, \end{cases} \quad D(C_{y\max}) = \begin{cases} (C_{y\max} - \underline{C_{y\max}})^2, & C_{y\max} < \underline{C_{y\max}}, \\ 0, & C_{y\max} \in [\underline{C_{y\max}}, \overline{C_{y\max}}], \\ (C_{y\max} - \overline{C_{y\max}})^2, & C_{y\max} > \overline{C_{y\max}}, \end{cases} \\ D(C_{x0}) &= \begin{cases} (C_{x0} - \underline{C_{x0}})^2, & C_{x0} < \underline{C_{x0}}, \\ 0, & C_{x0} \in [\underline{C_{x0}}, \overline{C_{x0}}], \\ (C_{x0} - \overline{C_{x0}})^2, & C_{x0} > \overline{C_{x0}}, \end{cases} \quad D(m_{z_0}) = \begin{cases} (m_{z_0} - \underline{m_{z_0}})^2, & m_{z_0} < \underline{m_{z_0}}, \\ 0, & m_{z_0} \in [\underline{m_{z_0}}, \overline{m_{z_0}}], \\ (m_{z_0} - \overline{m_{z_0}})^2, & m_{z_0} > \overline{m_{z_0}}. \end{cases} \end{aligned}$$

Таким образом, задача проектирования профиля сводится к задаче параметрической условной минимизации значения целевой функции (7) при наличии



ограничений (7), т.е. требуется найти такие опорные точки $\left(\frac{x_{jU}}{c}, \frac{z_{jU}}{c}\right), j = 0, 1, \dots, N^U$, $\left(\frac{x_{jL}}{c}, \frac{z_{jL}}{c}\right), j = 0, 1, \dots, N^L$, чтобы достигалось минимальное значение функции (7).

Для решения задачи параметрической оптимизации используется набор из метаэвристических алгоритмов (Пантелеев, Скавинская, 2023): модифицированный и классический методы имитации поведения стаи мотыльков (Mirjalili, 2015; Пантелеев, Надоров, 2025), метод Luus–Jaakola (Luus, 2000), метод имитации отжига с учетом интервальных ограничений, алгоритм перекоммутации (Path–Relinking). Результаты, полученные одним из указанных методов, могут быть улучшены другими. В качестве условий окончания процедуры оптимизации могут использоваться: максимальное число итераций, условие непревышения модуля разности значений целевой функции на соседних итерациях заданного порога. В качестве входной информации методу оптимизации передается матрица-столбец, содержащая значения координат опорных точек профиля.

Для передачи информации о текущей геометрии профиля в решатель формируются геометрическая модель. Решатель возвращает значения интегральных аэродинамических характеристик, которые сравниваются с целевыми значениями.

Общая схема, отражающая предложенную методологию проектирования, изображена на рис. 1. По окончании процесса последовательной оптимизации проектировщику выдается полученная наилучшая геометрия профиля вместе с его характеристиками для анализа. В случае, если проектировщика не удовлетворяет полученный результат, он может изменить:

- положение и число опорных точек профиля;
- порядки полиномов в формулах (1);
- левые и правые границы в ограничениях (6);
- весовые коэффициенты в целевой функции (7);
- метод оптимизации и его параметры.

Порядок расчета величины целевой функции

1. Задать: величину хорды c ; толщину задней кромки сверху и снизу: $\frac{z_{UTE}}{c}, \frac{z_{LTE}}{c}$; порядки многочленов Бернштейна N_U, N_L .
2. Задать числа узлов сверху N^U и снизу N^L (равными или превышающими N_U, N_L).
3. Задать узловые пары точек $\left(\frac{x_{jU}}{c}, \frac{z_{jU}}{c}\right), j = 0, 1, \dots, N^U$, $\left(\frac{x_{jL}}{c}, \frac{z_{jL}}{c}\right), j = 0, 1, \dots, N^L$.

4. Найти коэффициенты $W_U = \begin{pmatrix} W_U(0) \\ W_U(1) \\ \vdots \\ W_U(N_U) \end{pmatrix}$, $W_L = \begin{pmatrix} W_L(0) \\ W_L(1) \\ \vdots \\ W_L(N_L) \end{pmatrix}$ по формулам (4) или (5)

в зависимости от соотношения порядков полиномов и числа узлов.

5. Передать параметры профиля в решатель. Задать шаг по углу атаки и получить точки поляры $C_y(\alpha_i)$, $C_x(\alpha_i)$, $i = 0, 1, \dots, N$ с заданным шагом при $\alpha \in [\alpha_{\min}, \alpha_{\max}]$. Получить значения $m_{z_0}(\alpha_i), i = 0, 1, \dots, N$.



6. Найти относительную толщину профиля $T = \max_{\frac{x}{c} \in [0,1]} \left[\left[\frac{z}{c} \left(\frac{x}{c} \right) \right]_{Upper} - \left[\frac{z}{c} \left(\frac{x}{c} \right) \right]_{Lower} \right]$
- и положение соответствующей точки $\left(\frac{x}{c} \right)^* = \arg \max_{\frac{x}{c} \in [0,1]} \left[\left[\frac{z}{c} \left(\frac{x}{c} \right) \right]_{Upper} - \left[\frac{z}{c} \left(\frac{x}{c} \right) \right]_{Lower} \right]$.
- В случае невыполнения условий $T \in [T_{\min}, T_{\max}]$, $\left(\frac{x}{c} \right)^* \in \left[\left(\frac{x}{c} \right)_{\min}^*, \left(\frac{x}{c} \right)_{\max}^* \right]$, где границы отрезков задаются проектировщиком, вернуться к шагу 3, задавая новые узловые пары точек.
7. Найти характерные параметры поляры.
- а) решить задачи интерполяции: $C_y(\alpha)$, $C_x(\alpha)$, $m_{z_0}(\alpha)$ при $\alpha \in [\alpha_{\min}, \alpha_{\max}]$;
- б) вычислить максимальное значение аэродинамического качества $K_{\max}(\alpha^*) = \max_{\alpha \in [\alpha_{\min}, \alpha_{\max}]} \frac{C_y(\alpha)}{C_x(\alpha)}$ и соответствующее значение угла атаки $\alpha^* = \arg \max_{\alpha \in [\alpha_{\min}, \alpha_{\max}]} \frac{C_y(\alpha)}{C_x(\alpha)}$;
- в) вычислить наивыгоднейшее значение $C_{y_n} = C_y(\alpha^*)$;
- г) максимальное значение $C_y(\alpha)$: $C_{y_{\max}} = \max_{\alpha \in [\alpha_{\min}, \alpha_{\max}]} C_y(\alpha)$;
- д) значение $C_{x_0} = C_x(\alpha^0)$, где α^0 – значение угла атаки, при котором $C_y(\alpha^0) = 0$ (корень уравнения $C_y(\alpha) = 0$);
- е) значение m_{z_0} как корень уравнения $m_{z_0}(\alpha) = 0$.
8. Вычислить величину критерия качества профиля по формуле (7).

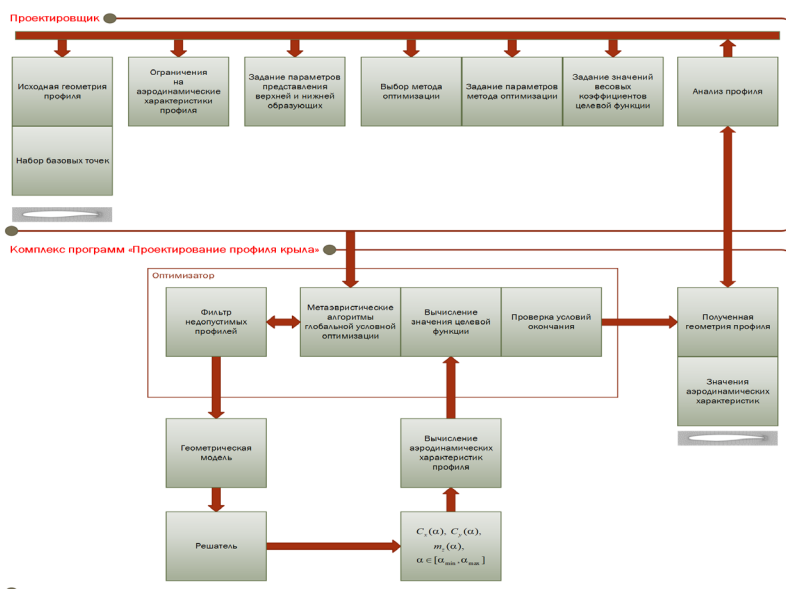


Рис. 1. Общая схема проектирования

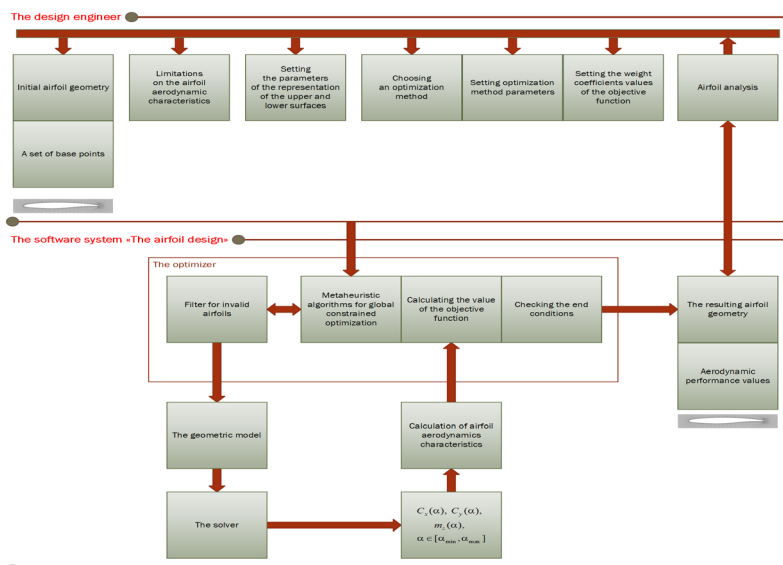


Fig. 1. General design scheme

Результаты

В качестве исходного профиля принят профиль RAE 5213. Целевыми значениями являются аэродинамические и геометрические (длина хорды в метрах и относительная толщина) характеристики известного профиля магистрального самолета. В табл. 1 представлены настройки решателя и параметры среды, принятые для моделирования. Необходимые параметры неструктурированной расчетной сетки были получены подбором оптимальных значений дискретизации расчетной области (сечение сходимости). Аэродинамические и геометрические характеристики профилей, полученные с помощью численного моделирования, представлены в табл. 2.

Таблица 1 / Table 1

Настройки решателя и параметры среды Solver settings and environment parameters

Параметр / Parameter	Значение / Value
Тип решателя / Solver type	RANS
Модель турбулентности / Turbulence model	SST (Menter) K-Omega
Параметр Y+ / Parameter Y+	0,12
Модель газа / Gas model	Идеальный газ
Число Маха / Mach number	0,7
Давление (Pa) / Pressure (Pa)	22630



Таблица 2 / Table 2

Аэродинамические и геометрические характеристики профилей
Aerodynamic and geometric characteristics of airfoils

Параметр / Parameter	RAE 5213	Известный профиль / One airfoil
C_{x0}	0,0127	0,0140
C_{yn}	0,5984	0,7393
K_{max}	37,00	41,64
$C_{y_{max}}$	1,0321	1,2103
m_{z0}	-0,1289	-0,3045
Абсолютная длина хорды (м) / Total chord length (m)	1,867	1,867
Относительная толщина (%) / Thickness ratio (%)	10	10,6

Порядок многочленов Бернштейна для верхней и нижней образующих одинаков и равен 4, количество базовых точек 16. Значения весовых коэффициентов целевой функции (7): $\lambda_1 = 0,25$; $\lambda_2 = 0,5$; $\lambda_3 = 0,25$; $\lambda_4 = 10^{-4}$; $\lambda_5 = 5 \cdot 10^{-5}$; $\lambda_6 = 10^{-5}$. Диапазоны допустимых значений целевых аэродинамических и геометрических характеристик $T \in [10,6; 10,9]$, $C_{yn} \in [0,73; 0,76]$, $K_{max} \in [40, 44]$, $C_{y_{max}} \in [1,1; 1,35]$, $C_{x0} \in [0,01; 0,02]$, $m_{z0} \in [-0,1; -0,25]$. При решении задачи оптимизации использован метод, имитирующий поведение стаи мотыльков с параметрами $Np = 10$; $s = 0,2$; $T = 50$. Для достижения целевых параметров оптимизатору понадобилось 98 итераций. Результатом решения оптимизационной задачи является геометрия профиля, представленная на рис. 2.

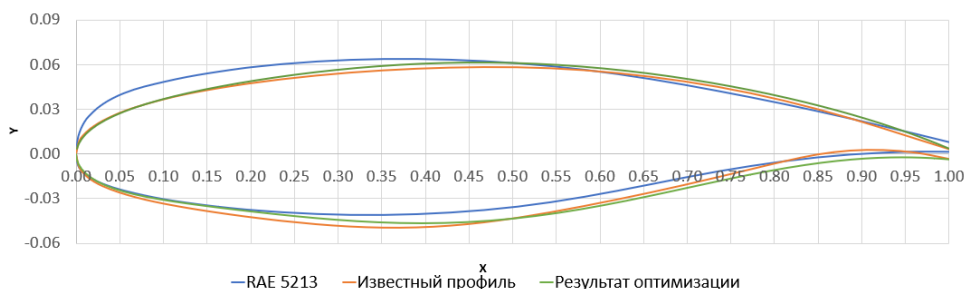


Рис. 2. Геометрии профиля RAE 5213, известного профиля и полученного в результате решения оптимизационной задачи

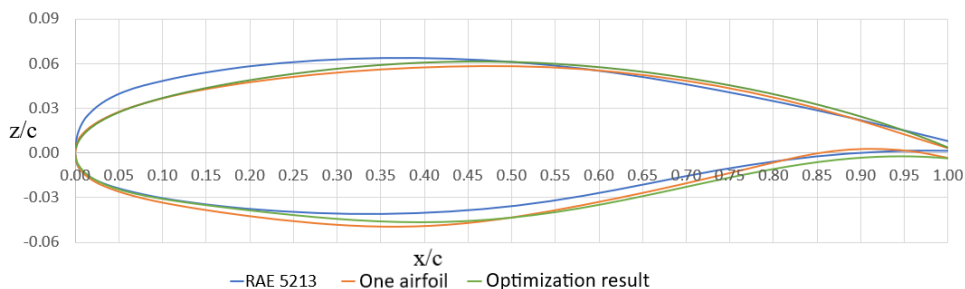


Fig. 2. Geometry of the RAE 5213 airfoil, the known airfoil and the one obtained as a result of solving the optimization problem

На рис. 3 представлены поляры первого рода для профиля RAE 5213, известного профиля и профиля, полученного в результате решения оптимизационной задачи.

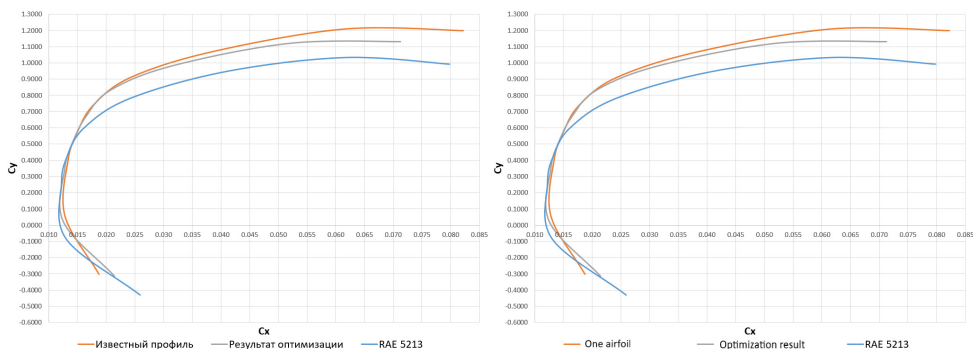


Рис. 3. Поляры первого рода

Fig. 3. Drag polars

На рис. 4 представлено распределение коэффициента давления по хорде при C_{yn} известного профиля и профиля, полученного в результате оптимизации. На рис. 5 и рис. 6 представлены поля Маха для двух вышеуказанных профилей при C_{yn} .

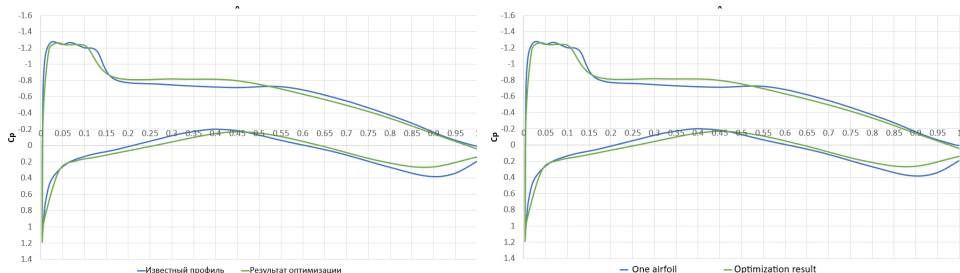


Рис. 4. Распределение коэффициента давления по хорде

Fig. 4. Distribution of pressure coefficient along the chord

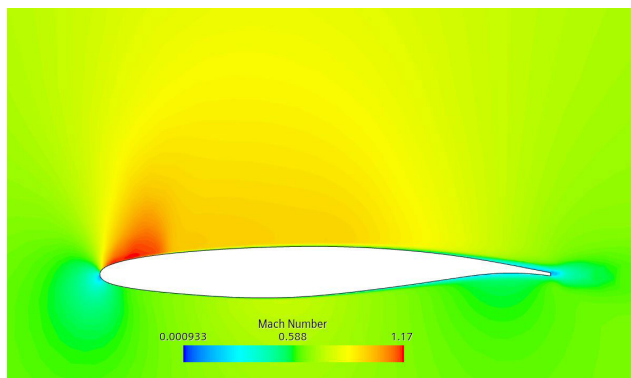


Рис. 5. Распределение полей Маха для известного профиля
Fig. 5. Distribution of Mach fields for a known airfoil

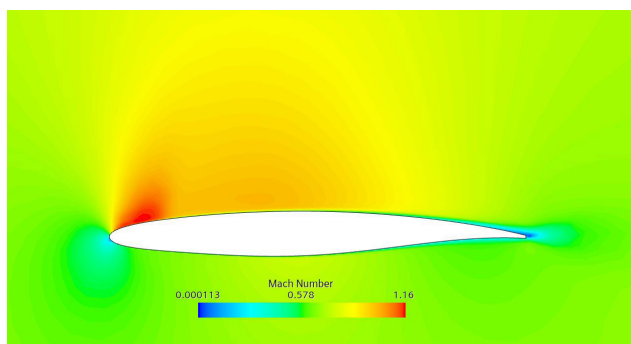


Рис. 6. Распределение полей Маха для полученного в результате оптимизации профиля
Fig. 6. Distribution of Mach fields for the airfoil obtained as a result of optimization

В табл. 3 представлены аэродинамические и геометрические характеристики известного профиля и профиля, полученного в результате оптимизации.

Таблица 3 / Table 3

Сравнение аэродинамических и геометрических характеристик профилей
Comparison of aerodynamic and geometric characteristics of airfoils

Параметр / Parameter	Результат оптимизации / Optimization results	Известный профиль / One airfoil
C_{yH}	0,7493	0,7393
K_{max}	41,04	41,64
$C_{y_{max}}$	1,1326	1,2103



Параметр / Parameter	Результат оптимизации / Optimization results	Известный профиль / One airfoil
m_{z_0}	–0,1903	–0,3045
Абсолютная длина хорды (м) / Total chord length (m)	1,867	1,867
Относительная толщина (%) / Thickness ratio (%)	10,6	10,6

Обсуждение результатов

Полученный в результате решения оптимизационной задачи профиль удовлетворяет заданным проектировщиком требованиям с точки зрения как геометрических, так и аэродинамических характеристик. Распределение коэффициента давления по хорде, а также поля Маха на C_{yn} , близки к таковым у известного профиля.

Заключение

Предложен метод проектирования аэродинамического профиля, заключающийся в нахождении координат его базовых точек, используемых для их аппроксимации CST методом, с целью получения требуемых аэродинамических и геометрических характеристик профиля. Научная новизна предложенного метода заключается в том, что проблема поиска базовых точек профиля сведена к задаче последовательной конечномерной оптимизации, которая решается с помощью набора метаэвристических алгоритмов поиска условного глобального экстремума, где значение целевой функции находится с помощью специализированного решателя, реализующего процедуру математического моделирования процесса обтекания профиля. Полученные результаты составляют основу для последующего этапа проектирования теоретического контура крыла при решении задачи обтекания полной компоновки самолета [32]. Предложенный метод является практически ценным, так как в полной мере может быть применен при проектировании модификаций существующих трансзвуковых магистральных самолетов, например SJ-100, MC-21.

Ограничения. Предлагаемый подход применим в основном для решения задач проектирования профилей трансзвуковых транспортных самолетов.

Limitations. The proposed approach is applicable basically to solving problems of designing airfoils of transonic transport aircraft.

Список источников / References

1. Болсуновский, А.Л., Бузовера, Н.П., Карась, О.В., Ковалёв, В.Е. (2002). Развитие методов аэродинамического проектирования крейсерской компоновки дозвуковых самолетов. В: XIII Школа-семинар «Аэродинамика летательных аппаратов» (с. 20), (п. Володарского, 28 февраля — 01 марта 2002 г.). Жуковский: Центральный аэрогидродинамический институт им. профессора Н.Е. Жуковского. <https://www.elibrary.ru/item.asp?edn=wcjzgf&ysclid=mcyoughuz755233486> (дата обращения: 11.07.2025)



- Bolsunovsky, A.L., Buzoverya, N.P., Karas, O.V., Kovalev, V.E. (2002). Development of methods of aerodynamic design of cruise configuration of subsonic aircraft. In: *XIII School-seminar "Aerodynamics of aircraft"* (pp. 20), (p. Voldarsky, February 28 — March 1, 2002). Zhukovsky: Central Aerohydrodynamic Institute named after Professor N.E. Zhukovsky. (In Russ.). <https://www.elibrary.ru/item.asp?edn=wcjzgf&ysclid=mcyuoughuz755233486> (viewed: 11.07.2025)
2. Болсуновский, А.Л., Бузоверея, Н.П., Скоморохов, С.И., Чернышёв, И.Л. (2018). Расчетно--экспериментальные исследования скоростных крыльев перспективных магистральных самолетов. *Труды МАИ*, (101). <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=36300463&ysclid=mcyuvc9et7377343184> (дата обращения: 11.07.2025)
- Bolsunovskii, A.L., Buzoverya, N.P., Skomorokhov, S.I., Chernyshev, I.L. (2018). Computational and experimental studies of high-speed wings for advanced long-haul aircraft. *Trudy MAI*, (101). (In Russ.). <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=36300463&ysclid=mcyuvc9et7377343184> (viewed: 11.07.2025)
3. Гантмахер, Ф.Р. (2010). *Теория матриц*. М.: Физматгиз.
Gantmakher, F.R. (2010). *Matrix Theory*. M.: Fizmatgiz. (In Russ.)
4. Пантелеев, А.В., Надоров, И.С. (2025). Применение модификации метода, имитирующего поведение стаи мотыльков, для решения задачи оптимального программного управления мобильным роботом. *Моделирование и анализ данных*, 15(1), с. 81—109. DOI: 10.17759/mda.2025150105
Panteleev, A.V., Nadorov, I.S. (2025). Application of the modified method simulating the behavior of a flock of moths to solve the optimal open loop control problem of a mobile robot movement. *Modelling and Data Analysis*, 15(1), pp. 81—109. DOI: <https://doi.org/10.17759/mda.2025150105> (In Russ., abstr. in Engl.)
5. Пантелеев, А.В., Скавинская, Д.В. (2023). *Метаэвристические стратегии и алгоритмы глобальной оптимизации*. М.: Факториал.
Panteleev, A.V., Skavinskaya, D.V. (2023). *Metaheuristic strategies and algorithms for global optimization*. Moscow: Factorial. (In Russ.)
6. Пейгин, С.В., Пушин, Н.А., Болсуновский, А.Л., Тимченко, С.В. (2018). Оптимальное аэродинамическое проектирование крыла широкофюзеляжного дальнемагистрального самолета. *Вестн. Томск. гос. ун-та. Матем. и мех.*, (51), с. 117—129. DOI: 10.17223/19988621/51/10
Peygin, S.V., Pushchin, N.A., Bolsunovskiy, A.L., Timchenko, S.V. (2018). An optimal aerodynamic design for the wing of a wide-body long-range aircraft. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika*, (51), pp. 117—129. (In Russ.). DOI 10.17223/19988621/51/10
7. Akram, M.T., Kim, M.-H. (2021). Aerodynamic shape optimization of NREL S809 airfoil for wind turbine blades using Reynolds-Averaged Navier Stokes Model — Part II. *Appl. Sci*, 11(5), pp. 2211. <https://doi.org/10.3390/app11052211>
8. Epstein, B., Peigin, S. (2005). Constrained aerodynamic optimization of three-dimensional wings driven by Navier-Stokes computations. *AIAA Journal*, 43(9), pp. 1946—1957. DOI: 10.2514/1.10308
9. Gardner, B.A., Selig, M.S. (2003). Airfoil design using a genetic algorithm and an inverse method. In: *41st Aerospace Sciences Meeting and Exhibit* (6—9 January 2003, AIAA-2003-0043). Reno, Nevada.



10. Khurana, M.S., Winarto, H., Sinha, A.K. (2008). Airfoil geometry parameterization through shape optimizer and computational fluid dynamics. In: *46th AIAA Aerospace Sciences Meeting and Exhibit* (January 2008). DOI: 10.2514/6.2008-295
11. Koo, D., Zingg, D.W. (2016). Progress in aerodynamic shape optimization based on the Reynolds-averaged Navier-Stokes equations. In: *54th AIAA Aerospace Sciences Meeting* (January 2016, AIAA-2016-1292). San Diego, California.
12. Kulfan, B.M. (2008). A Universal parametric geometry representation method — “CST”. *Journal of Aircraft*, 45(1). DOI: 10.2514/1.29958
13. Kulfan, B.M. (2006). Aerodynamic of sonic flight. *Research & Enabling Technology Boeing Commercial Airplanes*.
14. Kulfan, B.M., Bussoletti, J.E. (2006). “Fundamental” parametric geometry representations for aircraft component shapes. In: *11th AIAA/ISSMO Multidisciplinary Analysis and Optimization Conference: The Modeling and Simulation Frontier for Multidisciplinary Design Optimization* (6—8 September 2006, AIAA-2006-6948). Portsmouth, Virginia.
15. Kulfan, B.M., Bussoletti, J.E., Hilmes, C.L. (2007). Pressures and drag characteristics of bodies of revolution at near sonic speeds including the effects of viscosity and wind tunnel walls. In: *45th AIAA Aerospace Sciences Meeting and Exhibit* (8—11 Jan 2007, AIAA-2007-0684). Reno, Nevada. 2007. DOI: 10.2514/6.2007-684
16. Kulfan, B.M. (2020). Modification of CST airfoil representation methodology. <https://www.researchgate.net/publication/343615711>
17. Kulfan, B.M. (2007). Recent extensions and applications of the “CST” universal parametric geometry representation method. In: *7th AIAA Aviation Technology, Integration, and Operations (ATIO)* (18—20 September 2007, AIAA-2007-7709). Belfast, Northern Ireland.
18. Lane, K.L., Marshall, D.D. (2009). A Surface parameterization method for airfoil optimization and high lift 2D geometries utilizing the CST methodology. In: *47th AIAA Aerospace Sciences Meeting Including The New Horizons Forum and Aerospace Exposition* (5—8 January 2009, AIAA-2009-1461). Orlando, Florida.
19. Lee, C., Koo, D., Zingg, D.W. (2017). Comparison of B-spline surface and free-form deformation geometry control for aerodynamic optimization. *AIAA Journal*, 55, pp. 228—240.
20. Luus, R. (2000). *Iterative Dynamic Programming*. London, Chapman & Hall/CRC.
21. Masters, D.A., Taylor, N.J., Rendall, T.C.S., Allen, C.B., Poole, D.J. (2016). A Geometric comparison of aerofoil shape parameterisation methods. In: *54th AIAA Aerospace Sciences Meeting* (4—8 January 2016, AIAA-2016-0558). San Diego, California, USA.
22. Masters, D.A., Taylor, N.J., Rendall, T.C.S., Allen, C.B., Poole, D.J. (2015). Review of aerofoil parameterisation methods for aerodynamic shape optimisation. In: *53rd AIAA Aerospace Sciences Meeting* (Jan 2015).
23. Meheut, M., Dumont, A., Carrier, G., Peter, J.E. (2016). Gradient-based optimization of CRM wing-alone and wingbody-tail configurations by RANS adjoint technique. In: *54th AIAA Aerospace Sciences Meeting* (January 2016, AIAA-2016-1293). San Diego, California.
24. Mirjalili, S. (2015). Moth-flame optimization algorithm: A novel nature-inspired heuristic paradigm. *Knowledge-Based Systems*, 89, pp. 228—249.



25. Peigin, S., Epstein, B. (2004). Robust handling of non-linear constraints for GA optimization of aerodynamic shapes. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 45(12), pp. 1339—1362. DOI: 10.1002/fld.747
26. Poole, D.J., Allen, C.B., Rendall, T.C.S. (2015). Optimal domain element shapes for free-form aerodynamic shape control. In: *Session: Aerodynamic Design: Analysis, Methodologies & Optimization Techniques II* (3 Jan 2015, AIAA 2015—0762). <https://doi.org/10.2514/6.2015-0762>
27. Sederberg, T.W., Parry, S.R. (1986). Free-form deformation of solid geometric models. In: *13th Annual Conference on Computer Graphics and Interactive Techniques* (no. 4, pp. 151—160). Dallas, Texas.
28. Sobieczky, H. (1998). Parametric airfoils and wings. *Notes on Numerical Fluid Mechanics*, 68, pp. 71—87. Vieweg Verlag.
29. Toal, D.J.J., Bresslo, N.W., Keane, A.J. (2010). Geometric filtration using proper orthogonal decomposition for aerodynamic design optimization. *AIAA Journal*, 48(5), pp. 916—928.
30. Zhu, F. (2014). Geometric parameterisation and aerodynamic shape optimisation. PhD thesis, University of Sheffield.
31. Zhu, F., Qin, N. (2014). Intuitive class/shape function parameterization for airfoils. *AIAA Journal*, 52(1), pp. 17—25.
32. Пантелеев, А.В., Гунчин, В.К., Надоров, И.С., Ахмедов, И.А., Силаев Н.А. (2025). Методы параметрической оптимизации в задаче проектирования характерных профилей крыла трансзвукового транспортного самолета. *Труды МАИ*, (142). URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=185117>
Panteleev, A.V., Gunchin, V.K., Nadorov, I.S., Akhmedov, I.A., Silaev N.A. (2025) Parametric optimization methods in a transonic transport aircraft characteristic wings airfoils designing problem. *Trudy MAI*, (142). (In Russ.). URL: <https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=185117>

Информация об авторах

Пантелеев Андрей Владимирович, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой «Математическая кибернетика» института «Компьютерные науки и прикладная математика», Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет) (МАИ (НИУ)), Москва, Российская Федерация, ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-2493-3617>, e-mail: avpanteleev@inbox.ru

Гунчин Виталий Константинович, инженер-конструктор 2-ой категории, Центр композитных конструкций, Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), Москва, Российская Федерация, e-mail: gunchinvk@mai.ru

Надоров Иван Сергеевич, ассистент кафедры математической кибернетики института «Компьютерные науки и прикладная математика», Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), Москва, Российская Федерация, e-mail: nnadorovivan@gmail.com

Ахмедов Исак Азизович, инженер 2-ой категории, Центр композитных конструкций, Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), Москва, Российская Федерация, e-mail: ahmedovisak@gmail.com



Information about the authors

Andrei V. Panteleev, D. Sc. (Physical and Mathematical Sciences), Full Professor, Head of the Department of Mathematics and Cybernetics, Institute of Computer Science and Applied Mathematics, Moscow Aviation Institute, Moscow, Russian Federation, ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-2493-3617>, e-mail: avpanteleev@inbox.ru

Vitaliy K. Gunchin, Engineer, Center for Composite Structures, Moscow Aviation Institute (National Research University), Moscow, Russian Federation, e-mail: gunchinvk@mai.ru

Ivan S. Nadorov, Assistant professor of the Department of Mathematics and Cybernetics, Institute “Computer Science and Applied Mathematics”, Moscow Aviation Institute (National Research University), Moscow, Russian Federation, e-mail: nnadorovivan@gmail.com

Isak A. Akhmedov, Engineer, Center for Composite Structures, Moscow Aviation Institute (National Research University), Moscow, Russian Federation, e-mail: ahmedovisak@gmail.com

Вклад авторов

А.В. Пантелеев — разработка концепции, научное руководство, разработка методологии, написание рукописи — рецензирование и редактирование.

В.К. Гунчин — разработка концепции, разработка методологии, написание черновика рукописи, визуализация.

И.С. Надоров — разработка программного обеспечения, написание черновика рукописи, визуализация.

И.А. Ахмедов — разработка программного обеспечения, визуализация.

Все авторы приняли участие в обсуждении результатов и согласовали окончательный текст рукописи.

Contribution of the authors

Andrei V. Panteleev — Conceptualization, Supervision, Methodology, Writing — Original Draft Preparation.

Vitaliy K. Gunchin — Conceptualization, Methodology, Writing — Original Draft Preparation, Visualization.

Ivan S. Nadorov — Software, Writing — Original Draft Preparation, Visualization.

Isak A. Akhmedov — Software, Visualization.

All authors participated in the discussion of the results and approved the final text of the manuscript.

Конфликт интересов

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Conflict of interest

The authors declare no conflict of interest.

Поступила в редакцию 22.07.2025

Поступила после рецензирования 31.07.2025

Принята к публикации 05.08.2025

Опубликована 30.09.2025

Received 2025.07.22

Revised 2025.07.31

Accepted 2025.08.05

Published 2025.09.30