Моделирование и анализ данных
2025, *15*(4), 122—137.
https://doi.org/10.17759/mda.2025150408
ISSN: 2219-3758 (печатный)
ISSN: 2311-9454 (online)

Modelling and Data Analysis
2025, *15*(4), 122—137.
https://doi.org/10.17759/mda.2025150408
ISSN: 2219-3758 (print)
ISSN: 2311-9454 (online)

МЕТОДИКА ПРЕПОДАВАНИЯ | TEACHING METHODS

Научная статья | Original paper

УДК 372.851

Алгебраические кривые высших порядков в преподавании высшей математики. Методы построения алгебраических кривых

Е.Д. Куланин✉, М.Е. Степанов
Московский государственный психолого-педагогический университет
Москва, Российская Федерация
✉ lucas03@mail.ru

Резюме

Контекст и актуальность. В рабочих программах дисциплин «Геометрия и топология», «Математический анализ», «Математика» и других, входящих в образовательные программы специальностей по информационным технологиям, важное место занимает понятие алгебраической кривой. Освоение этого понятия требует от студентов способности к абстрактному мышлению и зачастую вызывают существенные затруднения. **Цель.** Повысить качество усвоения учебного материала по дисциплинам, связанным с понятием алгебраической кривой, используя при этом программные средства для визуализации различных алгебраических кривых и семейств алгебраических кривых. Ещё одной не менее важной целью является описание вопросов, которые могут стать темами курсовых и дипломных работ. **Гипотеза.** Использование программных средств для визуализации различных алгебраических кривых и семейств алгебраических кривых позволяет преподавателю максимально понятно подать материал, а студентам лучше усвоить материал и получить навыки решения задач на построение алгебраических кривых. **Методы и материалы.** В большинстве заданий в этой статье предлагается написать компьютерную программу, визуализирующую алгебраические кривые и их семейства. **Результаты.** Разработана система заданий, позволяющих студентам строить алгебраические кривые с помощью компьютерных программ. **Выводы.** Применение разработанной системы учебных заданий подтвердило важность использования специальных программных средств для усвоения материала по теории алгебраических кривых.

Ключевые слова: высшее образование, методика преподавания математики, аналитическая геометрия, визуальные образы, алгебраические кривые, методы построения алгебраических кривых, геометрические образы алгебраических кривых, подэра кривой, подэра параболы, геометрические преобразования, циссоидальные преобразования

Для цитирования: Куланин, Е.Д., Степанов, М.Е. (2025). Алгебраические кривые высших порядков в преподавании высшей математики. Методы построения алгебраических кривых. *Моделирование и анализ данных, 15*(4), 122—137. https://doi.org/10.17759/mda.2025150408

Algebraic curves of higher orders in teaching higher mathematics. Methods of constructing algebraic curves

Y.D. Kulanin✉**, M.E. Stepanov**
Moscow State University of Psychology and Education, Moscow, Russian Federation
✉ lucas03@mail.ru

Abstract

Context and relevance. In the working programs of the disciplines “Geometry and Topology”, “Mathematical Analysis”, “Mathematics” and others, included in the educational programs of specialties in information technologies, an important place is occupied by the concept of an algebraic curve. The development of this concept requires students to have the ability to think abstractly and often cause significant difficulties. **Purpose.** To improve the quality of learning the educational material on disciplines related to the concept of an algebraic curve, while using software tools for visualization various algebraic curves and families of algebraic curves. Another equally important goal is to describe issues that can become the topics of term papers and theses. **Hypothesis.** The use of software tools for visualizing various algebraic curves and families of algebraic curves allows the teacher to present the material in the most understandable way, and students to better understand the material and acquire the skills of solving problems on the construction of algebraic curves. **Methods and materials.** Most of the exercises in this article involve writing a computer program that visualizes algebraic curves and their families. **Results.** A system of tasks has been developed that allows students to construct algebraic curves using computer programs. **Conclusions.** The use of the developed system of educational tasks has confirmed the importance of using special software tools for mastering the theory of algebraic curves.

Keywords: higher education, methods of teaching mathematics, analytical geometry, visual images, algebraic curves, methods of constructing algebraic curves, geometric images of algebraic curves, pedal curve of a curve, pedal curve of a parabola, geometric transformations, cissoidal transformations

For citation: Kulanin, Y.D., Stepanov, M.E. (2025). Algebraic curves of higher orders in teaching higher mathematics. Methods of constructing algebraic curves. *Modelling and Data Analysis, 15*(4)*,* 122—137. (In Russ.). https://doi.org/10.17759/mda.2025150408

Введение

Статья продолжает цикл методических разработок авторов (Куланин Е.Д., Степанов М.Е., Нуркаева И.М., 2020; Куланин Е.Д., Степанов М.Е., Нуркаева И.М., 2021; Куланин Е.Д., Степанов М.Е., 2024; Лунгу К.Н., Норин В.П., Письменный Д.Т., Шевченко Ю.А., Куланин Е.Д., 2013). Непосредственно она продолжает статью «Алгебраические кривые низших порядков в преподавании высшей математики» (Куланин, Степанов, 2025). В ней обсуждаются некоторые проблемы, связанные с путями повышения культуры математического мышления студентов-математиков. Главным объектом обсуждения являются алгебраические кривые степени выше двух. Авторы опираются на опыт работы на факультете информационных технологий МГППУ.

В статье (Куланин, Степанов, 2025) рассматривались алгебраические линии не выше второго порядка, а также их семейства. Там же описан метод построения алгебраических кривых на экране компьютера с помощью сканирования декартовой плоскости. Этот метод позволяет строить любые линии, описанные неявными уравнениями, в том числе трансцендентные. По этой причине многие задания, рассмотренные в данной статье, могут быть перенесены на более широкий круг математических тем.

В большинстве заданий в этой статье предлагается написать компьютерную программу, визуализирующую алгебраические кривые и их семейства. Авторы считают, что геометрические образы должны максимально интенсивно использоваться в обучении высшей математике (Куланин Е.Д., Нуркаева И.М., Степанов М.Е., 2020; Куланин Е.Д., Нгуен Ву Куанг, Степанов М.Е., 2019; Куланин Е.Д., Степанов М.Е., 2022 DOI: https://doi.rg/10.17759/mda.2022120407; Куланин Е.Д., Степанов М.Е., 2022 DOI: https://doi.org/10.17759/mda.2024140212).

Предоставление возможности студентам с помощью компьютера самостоятельно строить алгебраические кривые, является одной из важных целей данной статьи.

Ещё одной не менее важной целью является описание вопросов, которые могут стать темами курсовых и дипломных работ.

Построение образов алгебраических кривых на экране

Традиционные формы преподавания высшей математики используют чертежи, как обязательный методический приём. Экстремисты от математики с удивительной активностью пытались изгнать визуальные образы математических объектов из курсов не только высшей, но и школьной математики (Дьедонне Ж., 1972).

Однако по мнению авторов данной статьи использование различных образов является одним из важнейших способов развития математической интуиции студентов. В частности, построение на экране кривых и поверхностей даёт учащемуся возможность увидеть большое количество геометрических объектов, которые до появления компьютеров строились с большим трудом. Если же студент сам пишет подобную программу, он, кроме всего прочего, должен детально разобраться в математических аспектах описания соответствующего объекта.

Рассмотрим несколько примеров построения алгебраических кривых на экране компьютера. При этом хорошим путеводителем по замечательным кривым является книга (Савёлов А.А., 1960). Ориентируясь на изложенный в ней материал, рассмотрим одну из описанных там кривых.

Будем строить **трисектрису Маклорена**, используя её геометрическое описание. Трисектриса Маклорена является подэрой параболы относительно такой точки её оси, которая удалена от директрисы на расстояние, равное расстоянию директрисы от фокуса (фокальное расстояние). **Подэрой** данной кривой относительно какой-либо точки плоскости называется новая кривая, представляющая собой геометрическое место оснований перпендикуляров, опущенных из этой точки на касательные к заданной кривой (Савёлов А.А., 1960).

Задание 1. Построить на экране параболу и семейство касательных к ней.

Решение. Уравнение параболы имеет вид $y^2 = 2px$, где p — фокальное расстояние параболы. Если менять в цикле ординату y_k, то $x_k = \frac{y_k^2}{2p}$. Касательная, проходящая через точку $(x_k; y_k)$ по свойству касательных к параболе также проходит через точку (0; $\frac{y_k}{2}$). Из этого следует, что уравнение касательной имеет вид $y = k \cdot x + b$, где $k = \frac{y_k}{2 \cdot x_k} = \frac{y_k \cdot p}{2p \cdot x_k} = \frac{p}{y_k}$ и $b = \frac{y_k}{2}$.

Построенное программой изображение показано на рисунке 1.

```
GraphicsWindow.Width = 600
GraphicsWindow.Height = 600
‘Фокальное расстояние параболы
p = 1
‘Начало экранных координат
x0 = 300
y0 = 300
GraphicsWindow.FillEllipse(x0–5, y0–5,10,10)
GraphicsWindow.DrawLine(0, y0,600, y0)
GraphicsWindow.DrawLine(x0,0, x0,600)
‘Количество пикселов в единичном отрезке
ed = 100
‘Сетка единичных квадратов
```

```
For x= –3 To 3 Step .01
For y= –3 To 3 Step 1
xe=x0 + ed*x
ye=y0 – ed*y
GraphicsWindow.SetPixel(xe, ye,”green”)
EndFor
EndFor
For x= –3 To 3 Step 1
For y= –3 To 3 Step .01
xe=x0 + ed*x
ye=y0 – ed*y
GraphicsWindow.SetPixel(xe, ye,”green”)
EndFor
EndFor
‘Построение параболы
For y = 0 To 9 Step .01
x = y*y/(2*p)
xe=x0 + ed*x
ye=y0 – ed*y
GraphicsWindow.SetPixel(xe, ye,””)
ye=y0 + ed*y
GraphicsWindow.SetPixel(xe, ye,””)
EndFor
‘Касательные к параболе
For yk = .5 To 9 Step .1
xk = yk*yk/(2*p)
xe=x0 + ed*xk
ye=y0 – ed*yk
k = yk/(2*xk)
b = yk/2
For t = – 3 To 3 Step .01
u = k*t + b
xe=x0 + ed*t
ye=y0 – ed*u
GraphicsWindow.SetPixel(xe, ye,””)
ye=y0 + ed*u
GraphicsWindow.SetPixel(xe, ye,””)
EndFor
EndFor
```

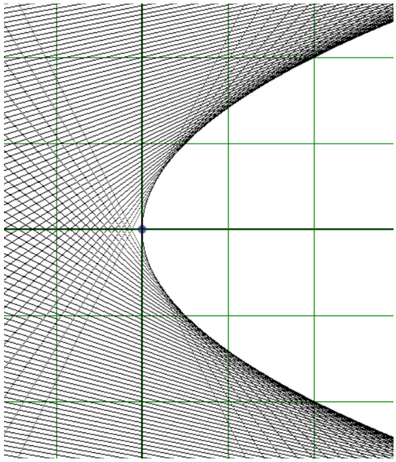

Рис. 1. Парабола и семейство касательных к ней

Fig. 1. A parabola and a family of tangents to it

Задание 2. Построить трисектрису Маклорена как подэру параболы. Найти уравнение асимптоты к ней.

Решение. Поскольку уравнение касательной к параболе, выведенное в предыдущем задании, имеет вид $y = k \cdot x + b$, то можно получить уравнение ортогональной прямой, проходящей через точку $(-p;0)$. Пусть это уравнение имеет вид $y = k_1 \cdot x + b_1$. Тогда $k_1 = -\frac{1}{k}$ и $b_1 = -\frac{p}{k}$. Точка пересечения этих прямых имеет координаты $x_t = -\frac{b - b_1}{k - k_1}$ и $y = k_1 \cdot x_t + b_1$.

Все коэффициенты двух прямых зависят от параметра y_k. Достаточно простые преобразования позволяют выразить зависимость от y_k: $x_t = \frac{3}{2} p \cdot \frac{y_k^2}{p^2 - y_k^2}$. При y_k стремящемся к бесконечности x_t стремится к $-\frac{3}{2} p$. Таким образом, уравнение асимптоты имеет вид $x = -\frac{3}{2} p$.

В программе часть, посвящённую проведению касательных, следует заменить на новые строки. Результат работы программы показан на рисунке 2.

```
‘Точка на плоскости
xe = x0 – p*ed
GraphicsWindow.FillEllipse(xe - 5, y0–5, 10, 10)
‘Построение подэры
‘Параметры касательной
For yk = .1 To 9 Step .01
xk = yk*yk/(2*p)
```

```
xe=x0 + ed*xk
ye=y0 – ed*yk
k = yk/(2*xk)
b = yk/2
'Основания перпендикуляров
k1 = –1/k
b1 = –p/k
xt = –(b - b1)/(k - k1)
yt = k*xt + b
xe=x0 + ed*xt
ye=y0 – ed*yt
GraphicsWindow.SetPixel(xe, ye,"")
ye=y0 + ed*yt
GraphicsWindow.SetPixel(xe, ye,"")
EndFor
'Асимптота
xe = x0 – p*ed*1.5
GraphicsWindow.DrawLine(xe, 0, xe, 600)
```

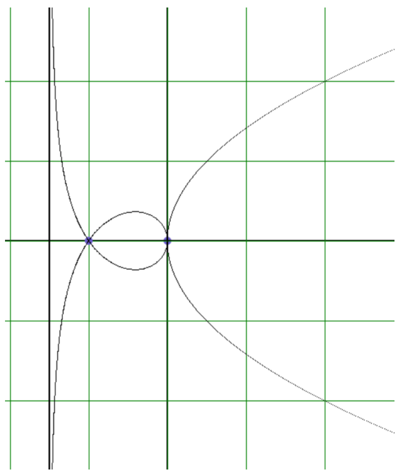

Рис. 2. Трисектриса Маклорена

Fig. 2. Maclaurin's Trisector

В статье (Куланин Е.Д., Степанов М.Е., 2025, с. 210—251) показан метод построения кривых сканированием.

Задание 3. Методом сканирования построить кривую, называемую **офиуридой** по её уравнению $x\left(x^2+y^2\right)=y\left(cy-bx\right)$ (Савёлов А.А., 1960).

Решение. Результат работы программы показан на рисунке 3.

```
GraphicsWindow.Width = 200
GraphicsWindow.Height = 600
x0 = 50
y0 = 300
ed = 10
b = 10
c = 5
GraphicsWindow.DrawLine(c*ed+x0,0, c*ed+x0,600)
For x = –5 To 15 Step .01
For y = –30 To 30 Step .01
z = x*(x*x + y*y) – y*(c*y – b*x)
If Math.Abs(z)<.3 Then
xe = x0 + x*ed
ye = y0 – y*ed
GraphicsWindow.SetPixel(xe, ye, "blake")
EndIf
EndFor
EndFor
GraphicsWindow.DrawLine(x0 + c*ed, 0, x0 + c*ed, 600)
```

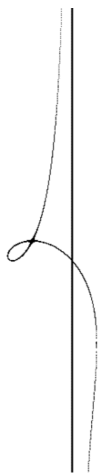

Рис. 3. Офиурида

Fig. 3. Ophiuride

Задание 4. Офиурида является подэрой параболы относительно какой-либо точки, лежащей на касательной к вершине этой параболы. Построить офиуриду, отправляясь от этого факта.

Меняя формулу, описывающую кривую, можно с помощью последней программы ознакомиться с формой многочисленных линий. Однако для более удобного изучения кривых следует написать интерактивную программу, позволяющую пользователю выбирать очередную кривую из определённого набора. Для более чёткой фиксации важности этого типа программ сформулируем требование их разработки в виде задания.

Задание 5. Написать программу, позволяющую в интерактивном режиме просматривать некоторый набор алгебраических кривых.

О возможных решениях. Предлагаемое задание можно выполнить различными способами в зависимости от конкретных требований к программе. Это может относится к списку кривых, которые можно просматривать; к подробности описания каждой из кривых, например, по типу заданий 1 и 2. Тем более, самыми различными могут быть интерфейсы программ. Учитывая это, можно предлагать разработку подобных программ как тему курсовой и даже дипломной работы.

Приведём пример конкретной темы, которая может стать примером дипломной работы. С этой целью мы рассмотрим циссоиду Диоклеса (рис. 4) и циссоидальные преобразования (Савёлов А.А., 1960).

Циссоиду Диоклеса можно определить двумя способами: с помощью уравнения $y^2 \cdot (2a - x) - x^3$ и геометрически. Геометрическое определение таково. Построим на декартовой плоскости с началом координат в точка O окружность радиуса a с центром в точке $(a;0)$ и касательную к ней в точке $(2a;0)$. Выберем на касательной произвольную точку B и проведём отрезок OB. Пусть точка C является точкой пересечения окружности и отрезка OB. Построим на том же отрезке OB точку D, такую что OB = OD. Эта точка лежит на циссоиде Диоклеса. Таким образом, эту кривую образует множество всех подобных точек.

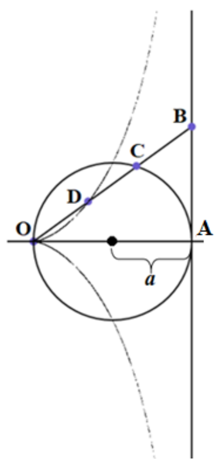

Рис. 4. Циссоида Диоклеса

Fig. 4. Cyssoid of Diocles

Задание 6. Написать программу, которая строит циссоиду по уравнению с помощью сканирования. Кроме того, на экране следует отобразить окружность, прямую AB, произвольно заданный отрезок OB (например, с помощью выбора угла наклона) и точки C и D. В итоге будет построен рисунок 4. Факт прохождения циссоиды через точку D должен подтвердить согласованность двух определений циссоиды Диоклеса.

Решение. Приведём соответствующую программу.

```
Pi = Math.Pi
GraphicsWindow.Width = 300
GraphicsWindow.Height = 600
x0 = 50
y0 = 300
GraphicsWindow.FillEllipse(x0–5, y0–5,10,10)
ed = 10
a = 10
u0 = pi/5
h = 2*a*Math.Tan(u0)
x1 = x0 + 2*a*ed
y1 = y0 – h*ed
GraphicsWindow.FillEllipse(x0–5, y0–5,10,10)
GraphicsWindow.DrawLine(x1,0, x1,600)
GraphicsWindow.DrawLine(0, y0,300, y0)
GraphicsWindow.DrawEllipse(x0, y0 – a*ed, 2*a*ed, 2*a*ed)
GraphicsWindow.DrawLine(x0, y0, x1, y1)
GraphicsWindow.FillEllipse(x1–5, y1–5,10,10)
d1 = Math.SquareRoot(4*a*a + h*h)
d2 = 2*a* Math.Cos(u0)
lm = d2/d1
x2 = x0 + lm*(x1 – x0)
y2 = y0 + lm*(y1 – y0)
GraphicsWindow.FillEllipse(x2–5, y2–5,10,10)
lm = 1 – lm
x3 = x0 + lm*(x1 – x0)
y3 = y0 + lm*(y1 – y0)
GraphicsWindow.FillEllipse(x3–5, y3–5,10,10)
For x = 0 To 2*a*ed Step .005
For y = –30 To 30 Step .005
z = x*x*x – y*y*(2*a – x)
xe = x0 + x*ed
ye = y0 – y*ed
If Math.Abs(z)<.08 Then
GraphicsWindow.SetPixel(xe, ye, “blake”)
```

```
EndIf
EndFor
EndFor
GraphicsWindow.FillEllipse(x0–5, y0–5,10,10)
```

Задание 7. Написать программу, которая строит циссоиду Диоклеса, исходя из её геометрического определения.

Задание 8. Циссоида является множеством точек, симметричных вершине параболы относительно её касательных. Написать программу, которая строит циссоиду на основе этого факта.

Важным свойством циссоиды является то обстоятельство, что её можно использовать для решения **делосской задачи**. Дело в том, что на острове Делос разразилась эпидемия чумы. Дельфийский оракул оракул сообщил, что эпидемия закончится если в два раза увеличить объём кубического жертвенника. Для этого нужно построить куб со стороной $\sqrt[3]{2}$. С помощью циркуля и линейки сделать это невозможно. Именно по этой причине нужно задействовать циссоиду (Савёлов А.А., 1960; Прасолов В.В., 1997).

Задание 9. На основе изложенных фактов написать демонстрационную или обучающую программу, посвящённую циссоиде.

Перейдём к рассмотрению **циссоидальных преобразований**. Циссоида Диоклеса строится с помощью использования окружности и прямой. Если заменить их другими линиями, то получится новая кривая. На этом соображении даётся определение циссоидальных преобразований.

Если в полярных координатах заданы две кривые $\rho_1 = f_1(\varphi)$ и $\rho_2 = f_2(\varphi)$, то циссоидой этих кривых называется кривая, задаваемая уравнением $F(\varphi) = f_1(\varphi) - f_2(\varphi)$.

Задание 10. Доказать, что циссоида Диоклеса подпадает под это определение.

Естественно, что при таком определении циссоидальных преобразований можно построить сколь угодно много новых кривых. Ограничимся только одним примером.

Задание 11. Показать, что уравнение $y^2 = 2px + qx^2$ при различных значениях параметров p и q описывает эллипсы, гиперболы и параболы.

Решение. При $q = 0$ уравнение описывает параболу. При q отличном от нуля следует выделить полный квадрат в правой части уравнения. В зависимости от знака q будет получено уравнение эллипса или параболы. Продемонстрировать этот факт можно также с помощью следующей программы

```
GraphicsWindow.Width = 600
GraphicsWindow.Height = 600
‘Параметры исходной кривой
p = 3
q = –4
```

```
‘Начало экранных координат
x0 = 300
y0 = 300
GraphicsWindow.FillEllipse(x0–5, y0–5,10,10)
GraphicsWindow.DrawLine(0, y0,600, y0)
GraphicsWindow.DrawLine(x0,0, x0,600)
‘Количество пикселов в единичном отрезке
ed = 100
‘Сканирование декартовой плоскости
For x = –3 To 3 Step .01
For y = –3 To 3 Step .01
‘Вычисление значений функции z = F(x, y)
z = y*y – 2*p*x – q*x*x
‘Переход к экранной системе координат
xe = x0 + x*ed
ye = y0 – y*ed
If Math.Abs(z)<.01 Then
GraphicsWindow.SetPixel(xe, ye, “blake”)
EndIf
EndFor
EndFor
```

Задание 12. Возьмём в качестве образующих для циссоидальных преобразований линии $y^2 = 2px + qx^2$ и $x = k$. Перейти к полярным координатам. Написать программу построения соответствующей циссоиды.

Решение. Переход к полярным координатам производится по формулам $x = \rho \cdot \cos\varphi$ и $y = \rho \cdot \sin\varphi$. Без труда для первой образующей получаем формулу $\rho_1 = \dfrac{2p \cdot \cos\varphi}{sin^2\varphi - q \cdot cos^2\varphi}$, а для второй — формулу $\rho_2 = \dfrac{k}{\cos\varphi}$. Программа будет строить и образующие, и циссоиду, в которую они преобразуются. Результат работы программы показан на рисунках 5—7 при разных параметрах p, q и k. При $p = 4$, $q = -3$ и $k = 3$ на рисунке 5 изображена циссоида эллипса; при $p = 1$, $q = 1$ и $k = 1$ на рисунке 6 изображена циссоида гиперболы; $p = 1$, $q = 0$ и $k = 1$ на рисунке 7 изображена циссоида параболы.

```
pi = Math.Pi
GraphicsWindow.Width = 600
GraphicsWindow.Height = 600
x0 = 300
y0 = 300
ed = 30
p = 4
```

```
q = –3
k = 3
For u = 0 To 2*pi Step pi/10000
zn1 = Math.Sin(u)*Math.Sin(u) – q*Math.Cos(u)*Math.Cos(u)
zn2 = Math.Cos(u)
If Math.Abs(zn1) > .001 And Math.Abs(zn2) > .001 Then
r1 = 2*p*Math.Cos(u)/zn1
r2 = k/zn2
r = r1 – r2
x1 = r1* Math.Cos(u)
y1 = r1 *Math.Sin(u)
xe = x0 + x1*ed
ye = y0 – y1*ed
GraphicsWindow.SetPixel(xe, ye,"")
x2 = r2* Math.Cos(u)
y2 = r2 *Math.Sin(u)
xe = x0 + x2*ed
ye = y0 – y2*ed
GraphicsWindow.SetPixel(xe, ye,"")
x = r* Math.Cos(u)
y = r* Math.Sin(u)
xe = x0 + x*ed
ye = y0 – y*ed
GraphicsWindow.FillEllipse(xe-1, ye-1,2,2)
EndIf
EndFor
```

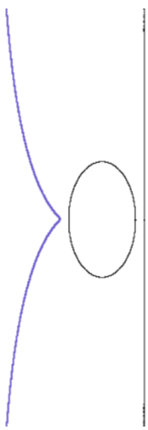

Рис. 5. Циссоида эллипса
Fig. 5. The cissoid of the ellipse

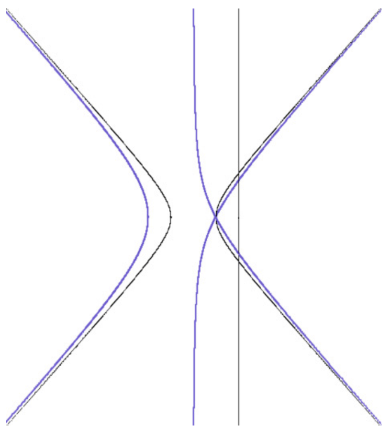

Рис. 6. Циссоида гиперболы
Fig. 6. The cissoid of hyperbola

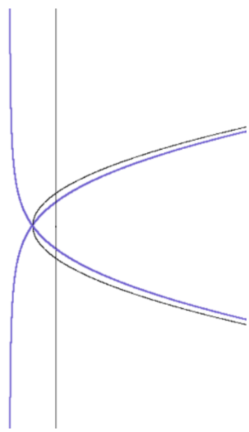

Рис. 7. Циссоида параболы
Fig. 7. The cissoid of the parabola

Заключение

В данной статье рассматриваются вопросы, связанные с углублённым изучением линий выше второго порядка. Особое внимание уделяется методам построения алгебраических кривых.

Обсуждение соответствующих вопросов может помочь молодым преподавателям при изучении различных разделов высшей математики. Кроме того, некоторые рассмотренные темы могут быть предложены в качестве тем курсовых и дипломных работ.

Список источников / References

1. Дьедонне, Ж. Линейная алгебра и элементарная геометрия. М., Наука, 1972.
   Dieudonné, J. Linear Algebra and Elementary Geometry. Moscow, Nauka, 1972.
2. Куланин, Е.Д., Нгуен, Ву Куанг., Степанов, М.Е. Осязаемая предметность с компьютерной поддержкой. // Моделирование и анализ данных. 2019. Том 09. № 4. С. 145—156. DOI: https://doi: 10.17759/mda.2019090412
   Kulanin, E.D., Nguyen, Vu Quang, and Stepanov, M.E. Tangible Subjectivity with Computer Support. // Modeling and Data Analysis. 2019. Vol. 09. No. 4. Pp. 145—156. DOI: https://doi: 10.17759/mda.2019090412
3. Куланин, Е.Д., Степанов, М.Е. Использование образов в преподавании высшей математики. // Моделирование и анализ данных. 2024. Том 14. № 2. С. 192—225. DOI: https://doi.org/10.17759/mda.2024140212
   Kulanin, E.D., Stepanov, M.E. Using Images in Teaching Higher Mathematics. // Modeling and Data Analysis. 2024. Vol. 14. No. 2. Pp. 192—225. DOI: https://doi.org/10.17759/mda.2024140212
4. Куланин, Е.Д., Степанов, М.Е. О визуализации решений некоторых экстремальных задач. // Моделирование и анализ данных. 2022. Том 12. № 4. С. 94—104. DOI: https://doi.org/10.17759/mda.2022120407
   Kulanin, E.D., Stepanov, M.E. On the visualization of solutions to some extremal problems. // Modeling and Data Analysis. 2022. Vol. 12. No. 4. Pp. 94—104. DOI: https://doi.org/10.17759/mda.2022120407
5. Куланин, Е.Д., Степанов, М.Е., Нуркаева, И.М. Роль образного мышления в научном мышлении. // Моделирование и анализ данных. 2020. Том 10. № 2. С. 110—128. DOI: https://doi:10.17759/mda.2020100209
   Kulanin, E.D., Stepanov, M.E., Nurkaeva, I.M. The Role of Imagination in Scientific Thinking. // Modeling and Data Analysis. 2020. Vol. 10. No. 2. Pp. 110—128. DOI: https://doi:10.17759/mda.2020100209
6. Куланин, Е.Д., Степанов, М.Е. Всестороннее рассмотрение математических понятий как методический прием. // Моделирование и анализ данных. 2022. Том 12. № 4. С. 67—84. DOI: https://doi.org/10.17759/mda.2022120405
   Kulanin, E.D., Stepanov, M.E. Comprehensive Review of Mathematical Concepts as a Methodological Approach. // Modeling and Data Analysis. 2022.Vol. 12. No. 4. Pp. 67—84. DOI: https://doi.org/10.17759/mda.2022120405
7. Куланин, Е.Д., Степанов, М.Е. Вычислительный эксперимент в преподавании высшей математики на примере теории чисел. // Моделирование и анализ данных. 2024. Том 14. № 1. С. 170—195. DOI: https://doi.org/10.17759/mda.202414011112.

Kulanin, E.D., Stepanov, M.E. Computational Experiment in Teaching Higher Mathematics on the Example of Number Theory. // Modeling and Data Analysis. 2024. Vol. 14. No. 1. Pp. 170—195. DOI: https://doi.org/10.17759/mda.2024140111 12.

8. Куланин, Е.Д., Степанов, М.Е. Вычислительный эксперимент в преподавании высшей математики. Комбинаторика и её приложения. // Моделирование и анализ данных. 2024. Том 14. № 3. С. 174—202. DOI: https://doi.org/10.17759/mda.2024140310
Kulanin, E.D., Stepanov, M.E. Computational Experiment in Teaching Higher Mathematics. Combinatorics and Its Applications. // Modeling and Data Analysis. 2024. Vol. 14. No. 3. Pp. 174—202. DOI: https://doi.org/10.17759/mda.2024140310

9. Куланин, Е.Д., Степанов, М.Е. Из опыта работы в режиме дистанционного обучения // Моделирование и анализ данных. 2022. Том 12. № 3. С. 58—70. DOI: https://doi. org/10.17759/mda.2022120305
Kulanin ,E.D., Stepanov, M.E. From the experience of working in remote mode education // Data modeling and analysis. 2022. Volume 12. No. 3. pp. 58—70. DOI: https:// doi. org/10.17759/mda.2022120305

10. Куланин, Е.Д., Степанов, М.Е. Использование образов в преподавании высшей математики. // Моделирование и анализ данных. 2024. Том 14. № 2. С. 192—225. DOI: https://doi.org/10.17759/mda.2024140212
Kulanin, E.D., Stepanov, M.E. Using Images in Teaching Higher Mathematics. // Modeling and Data Analysis. 2024. Vol. 14. No. 2. Pp. 192—225. DOI: https://doi.org/10.17759/mda.2024140212

11. Куланин, Е.Д., Степанов, М.Е., Нуркаева, И.М. О различных подходах к решению экстремальных задач. // Моделирование и анализ данных. 2021. Том 11. № 1. С. 40—60. DOI: https://doi.org/10.17759/mda.2021110104
Kulanin, E.D., Stepanov, M.E., Nurkaeva, I.M. On Different Approaches to Solving Extreme Problems. // Modeling and Data Analysis. 2021. Vol. 11. No. 1. Pp. 40—60. DOI: https://doi.org/10.17759/mda.2021110104

12. Куланин, Е.Д., Степанов, М.Е. Алгебраические кривые низших порядков в преподавании высшей математики // Моделирование и анализ данных. 2025. Том 15. № 1. С. 210—251. DOI: https://doi.org/10.17759/mda.2025150111
Kulanin E.D., Stepanov, M.E. Algebraic Curves of Lower Orders in Teaching Higher Mathematics // Modeling and Data Analysis. 2025. Vol. 15. No. 1. Pp. 210—251. DOI: https://doi.org/10.17759/mda.2025150111

13. Лунгу, К.Н., Норин, В.П., Письменный, Д.Т., Шевченко, Ю.А., Куланин, Е.Д. Сборник задач по высшей математике с контрольными работами. Москва, 2013. Том 2 (8-е издание).
Lungu, K.N., Norin, V.P., Pismenny, D.T., Shevchenko, Yu.A., Kulanin, E.D. Collection of Problems in Higher Mathematics with Control Works. Moscow, 2013. Volume 2 (8th edition).

14. Прасолов, В.В. Геометрические задачи древнего мира. М., ФАЗИС, 1997.
Prasolov, V.V. Geometric Problems of the Ancient World. Moscow, FAZIS, 1997.

15. Савёлов, А.А. Плоские кривые. Систематика, свойства, применения. (Справочное руководство). М., Гос. изд. физ.-мат. литературы. 1960.
Savelov, A.A. Flat curves. Taxonomy, properties, applications. (Reference manual). M., State Publishing House of Physics and Mathematics. literatures. 1960.

16. Степанов, М.Е., Куланин, Е.Д. Множества точек, находящихся на рациональных расстояниях друг от друга. // Моделирование и анализ данных. 2025. Том 15. № 1. С. 210—251. DOI: https://doi.org/10.17759/mda.2025150111
Stepanov, M.E., Kulanin, E.D. Sets of points located at rational distances from each other. // Modeling and Data Analysis. 2025. Vol. 15. No. 1. C. 210—251. DOI: https://doi.org/10.17759/mda.2025150111

Информация об авторах

Куланин Евгений Дмитриевич, кандидат физико-математических наук, профессор кафедры прикладной математики, Московский государственный психолого-педагогический университет (ФГБОУ ВО МГППУ), Москва, Российская Федерация. ORCID: https://orcid.org/0000-0001-6093-7012, e-mail: lucas03@mail.ru

Степанов Михаил Евграфович, кандидат педагогических наук, доцент, Москва, Российская Федерация. ORCID: https://orcid.org/0000-0003-4803-8211, e-mail: mestepanov@yandex.ru

Information about the authors

Evgeny D. Kulanin, Candidate of Science (Physics and Mathematics), Professor of the Department of Applied Mathematics, Moscow State University of Psychology and Education (FGBOU VO MGPPU), Moscow, Russian Federation. ORCID: https://orcid.org/0000-0001-6093-7012 E-mail: lucas03@mail.ru

Mikhail E. Stepanov, Candidate of Pedagogical Sciences, Associate Professor, Moscow, Russian Federation. ORCID: https://orcid.org/0000-0003-4803-8211, e-mail: mestepanov@yandex.ru

Вклад авторов

Куланин Е.Д. — идеи исследования, написание и оформление рукописи, разработка методики, планирование исследования, визуализация результатов исследования.

Степанов М.Е. — идеи исследования, написание и оформление рукописи; разработка описанного ПО, планирование исследования, визуализация результатов исследования.

Все авторы приняли участие в обсуждении результатов и согласовали окончательный текст рукописи.

Contribution of the authors

Kulanin E.D. — research ideas, writing and formatting of the manuscript, development of the methodology, research planning, and visualization of research results.

Stepanov M.E. — research ideas, writing and formatting of the manuscript, development of the described software, research planning, and visualization of research results.

All authors participated in the discussion of the results and approved the final text of the manuscript.

Конфликт интересов

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Conflict of interest

The authors declare no conflict of interest.

Поступила в редакцию 17.10.2025
Поступила после рецензирования 27.10.2025
Принята к публикации 29.10.2025
Опубликована 28.12.2025

Received 2025.10.17
Revised 2025.10.27
Accepted 2025.10.29
Published 2025.12.28