Моделирование и анализ данных
2026, *16*(1), 87—104.
https://doi.org/10.17759/mda.2026160106
ISSN: 2219-3758 (печатный)
ISSN: 2311-9454 (online)

Modelling and Data Analysis
2026, *16*(1), 87—104.
https://doi.org/10.17759/mda.2026160106
ISSN: 2219-3758 (print)
ISSN: 2311-9454 (online)

Научнаястатья | Original paper

УДК 519.245

Применение метода Монте-Карло в задачах квантильной оптимизации

В.Н. Акмаева
Московский авиационный институт
(национальный исследовательский университет) (МАИ)
Москва, Российская Федерация
✉ akmaevavn@mai.ru

Резюме

Математические модели стохастического программирования используются в широком спектре постановок задач, учитывающих влияние случайных факторов различной природы. Квантильный критерий использует понятие функции квантили — наименьшего значения функции потерь, которое не будет превышено с вероятностью не ниже заданной. Таким образом, надежность ограничивается на допустимом уровне и оптимизируется эффективность от реализации стратегии. Исходную задачу можно свести к минимаксной, где максимум берется по доверительному множеству, которое предлагается оптимизировать. С помощью доверительного метода исходная задача аппроксимируется детерминированной минимаксной задачей, параметризованной радиусом шара, вписанного в доверительное многогранное множество. Алгоритм решения двухэтапной задачи с квантильным критерием и выбором уровня надежности обобщен на случай произвольного унимодального распределения случайных параметров. К особенностям алгоритма относится выбор доверительного множества, ограниченного поверхностью уровня плотности вероятности случайной величины. Для построения такого множества используется метод Монте-Карло для генерации и разметки случайной выборки в сочетании с методом опорных векторов.

Ключевые слова: доверительный метод, квантильный критерий, стохастическое программирование, метод Монте-Карло, метод опорных векторов

Для цитирования: Акмаева, В.Н. (2026) Применение метода Монте-Карло в задачах квантильной оптимизации. *Моделирование и анализ данных, 16*(1), 87—104. https://doi.org/10.17759/mda.2026160106

Application of the Monte Carlo method to quantile optimization problems

V.N. Akmaeva
Moscow Aviation Institute (National Research University) (MAI)
Moscow, Russian Federation
✉ akmaevavn@mai.ru

Abstract

Stochastic programming mathematical models are used in a wide range of problem settings that consider the influence of random factors of various natures. If a loss function dependent on strategy and random parameters is used to describe the system's operation, the value of the loss function becomes random. The quantile criterion utilizes the concept of a quantile function — the smallest value of the loss function that will not be exceeded with a probability no lower than a specified value. Thus, reliability is limited to an acceptable level, and the effectiveness of strategy implementation is optimized. The original problem can be reduced to a minimax problem, where the maximum is taken over the confidence set proposed to be optimized (the so-called confidence method). Using the confidence method, the original problem is approximated by a deterministic minimax problem parameterized by the radius of a sphere inscribed in the polyhedral confidence set. The author's previously proposed algorithm for solving a two-stage facility location problem with a quantile criterion and choice of reliability level has been generalized to the case of an arbitrary unimodal distribution of random parameters. The algorithm's features include the selection of a confidence set bounded by the probability density surface of the random variable. To construct this set, the Monte Carlo method is used to generate and label a random sample in combination with a support vector machine (SVM).

Keywords: confidence method, quantile criterion, stochastic programming, Monte Carlo method, support vector machine (SVM)

For citation: Akmaeva, V.N. (2026). Application of the Monte Carlo method to quantile optimization problems. *Modelling and Data Analysis, 16*(1), 87—104. (In Russ.). https://doi.org/10.17759/mda.2026160106

Введение

Моделирование разного рода систем закономерным образом поднимает вопрос надежности принимаемых решений. Оптимизационные задачи, в которых осуществляется поиск точки минимума квантили функции потерь, — это задачи стохастического программирования с квантильным критерием, являющиеся частным случаем задач стохастического программирования с вероятностными ограничениями. Функция квантили описывает уровень потерь, который не может быть превышен с заданной фиксированной (близкой к единице) вероятностью, и зависит от стратегии оптимизации и случайных параметров. В (Kibzun, Kan, 1996; Кибузн, Кан, 2009) приводится доверительный метод, эффективно решающий задачи подобного типа, сводя исходную задачу к минимаксной. Сначала определяется максимум целевой функции на доверительном множестве значений случайных параметров как функция стратегии оптимизации. Затем ищется минимум полученной функции по стратегии оптимизации на доверительном множестве. При этом важную роль играет выбор оптимального доверительного множества. Предложенный в (Кибзун, Лебедев, Малышев, 1984; Кибзун, Малышев, 1984) обобщенный минимаксный подход в (Kan, 2002) сведен к обычной минимаксной задаче для линейной по случайным параметрам функции потерь, где в качестве множества неопределенности выступает α-ядро, которое не является доверительным множеством. При правильно подобранном фиксированном доверительном множестве можно получить достаточно точную верхнюю оценку функции квантили. Для стандартного гауссовского распределения случайных параметров при больших значениях уровня надежности достаточно высокую точность получаемой оценки обеспечивает выбор доверительного множества в форме шара (Кибузн, Кан, 2009). В (Кибзун, Наумов, 1995; Наумов, Иванов, 2011) функция потерь предполагалась линейной по стратегии оптимизации, что приводит нас к задаче с билинейной функцией потерь, поскольку именно такие функции потерь зачастую возникают в прикладных задачах. Для билинейной функции потерь решение задачи квантильной оптимизации сводится к минимизации функции потерь по стратегии оптимизации на α-ядре вероятностной меры. Аналитические и приближенные подходы к построению ядер вероятностной меры для различных законов распределения случайных величин рассмотрены в работах (Васильева, Кан, 2015; Васильева, 2018; Ардабьевский, Гончар, Кан, 2020). В случае более сложной структуры функции потерь ее минимизация на ядре вероятностной меры дает нижнюю оценку. Верхняя оценка может быть получена с помощью оптимизации на доверительном множестве.

В статье (Иванов, Кибзун, Акмаева, 2023) рассмотрена задача квантильной оптимизации с кусочно-линейной по случайным параметрам и выпуклой по стратегии оптимизации функцией потерь. Для этого класса функций потерь оптимальным доверительным множеством является многогранник. Применительно к варианту со стандартным нормальным распределением случайных параметров предложен алгоритм улучшения верхней оценки функции потерь, основанный на параметризации доверительных множеств в форме многогранников радиусом вписанного шара и итерационном улучшении данной аппроксимации.

В настоящей работе предлагается обобщение алгоритма (Иванов, Кибзун, Акмаева, 2023) на случай произвольного распределения случайных факторов. В основу предлагаемых алгоритмов положен метод Монте-Карло для генерации и разметки случайной выборки в сочетании с методом опорных векторов (Cristianini, Shawe-Taylor, 2000; Вьюгин, 2013, Мэрфи, 2022) для построения границ ядра вероятностной меры и доверительного множества.

Постановка задачи квантильной оптимизации

Опишем стандартную постановку задачи стохастического программирования (Иванов, Кибзун, Акмаева, 2023). Пусть X — случайный вектор-столбец с реализациями $x \in \mathbb{R}^m$ на вероятностном пространстве (Ω, F, P). Предполагается, что распределение X является стандартным нормальным. Будем считать, что функция потерь является кусочно-линейной по случайным параметрам:

$$\Phi(u,x) \triangleq \max_{i=1,\dots,k_1} \left\{ B_{1i}(u)x + b_{1i}(u) \right\}.$$

Ограничения описываются следующим образом:

$$Q(u,x) \triangleq \max_{i=1,\dots,k_2} \left\{ B_{2j}(u)x + b_{2j}(u) \right\},$$

где $u \in U \subset \mathbb{R}^n$ — стратегия. $B_{1i}(u), B_{2j}(u)$ — строки матриц $B_1(u)$ и $B_2(u)$ соответственно. $b_{1j}(u), i=1,\dots,k_1, b_{2j}(u), i=1,\dots,k_2$ — элементы векторов-столбцов $b_1(u)$ и $b_2(u)$ соответственно. При этом функции $u \mapsto B_1(u), u \mapsto B_2(u)$ линейные, а функции $u \mapsto b_1(u), u \mapsto b_2(u)$ выпуклые непрерывные на выпуклом замкнутом множестве U.

Определим функцию вероятности

$$P_\varphi(u) \triangleq \mathrm{P}\left\{ \Phi(u,X) \le \varphi, Q(u,X) \le 0 \right\},$$

где $\varphi \in \mathbb{R}$ — заданное значение функции потерь. Функция квантили

$$\Phi_\alpha(u) \triangleq \min\left\{ \varphi \mid P_\varphi(u) \ge \alpha \right\}, \alpha \in (0, P^*),$$

где $P^* \triangleq \sup_{u \in U} \mathrm{P}\left\{ Q(u,X) \le 0 \right\}$.

Тогда задача квантильной оптимизации имеет вид

$$U_\alpha \triangleq Arg \min_{u \in U} \Phi_\alpha(u). \qquad (1)$$

Определим оптимальное значение критериальной функции

$$\varphi_\alpha \triangleq \Phi_\alpha(u_\alpha), u_\alpha \in U_\alpha.$$

Согласно доверительному методу, задача (1) эквивалентна задаче

$$\varphi_\alpha = \min_{S \in \mathrm{E}_\alpha, u \in U} \left\{ \sup_{x \in S} \Phi(u,x) \mid \sup_{x \in S} Q(u,x) \le 0 \right\},$$

где E_α — семейство всех доверительных множеств $S \subset \mathbb{R}^m$ уровня α, т.е. $\mathrm{P}\left\{ X \in S \right\} \ge \alpha$.

Построение ядра вероятностной меры

Для поиска оптимального доверительного множества используются различные приемы, упрощающие решение задачи, например, с использованием понятия ядра вероятностной меры. Будучи выпуклым компактным множеством в $\mathbb{R}^n$, α-ядро вероятностной меры может быть определено как пересечение всех замкнутых α-доверительных подпространств:

$$K_\alpha = \bigcap_{\|c\|=1} \left\{ x : c^T x \le b_\alpha(c) \right\}, b_\alpha(c) = \left[c^T X \right]_\alpha .$$

В монографии (Кибузн, Кан, 2009) рассмотрен класс портфельных задач с билинейной функцией потерь. Данная задача сводится к задаче минимизации функции потерь по стратегии управления на ядре вероятностной меры.

При решении минимаксной задачи во внутреннем цикле оптимизационного процесса ищется максимум функции потерь на ядре вероятностной меры при заданной стратегии управления. Во внешнем цикле варьируется стратегия управления с целью поиска минимума функции потерь при заданных ограничениях.

Алгоритм состоит из следующих шагов:

1. Генерация случайной выборки по заданному закону распределения случайных параметров.
2. Разметка случайной выборки.

На этом шаге с помощью сетки из угловых координат на сфере задается набор направлений и определяются точки выборки, проекция которых на данное направление, больше или равна уровню надежности. С этой целью проекции ранжируются, после чего осуществляется разметка. Первоначально все точки помечены меткой 0. В дальнейшем точки, проекция которых выше квантили помечаются меткой 1.

На рис. 1 показана размеченная выборка из двумерного нормального закона распределения. Генерация случайных величин осуществлялась с помощью библиотеки Pythonscipy.stats. Заданный уровень квантили — 0.9. Число точек в выборке — 40000. Светлая внутренняя область соответствует точкам, попадающим в ядро вероятностного распределения.

3. По размеченной выборке строится разделяющая поверхность, которая аппроксимирует границу ядра вероятностной меры. С этой целью используется метод SVM (машина опорных векторов (Cristianini, Shawe-Taylor, 2000; Statnikov, Aliferis, Hardin, 2011; Мэрфи, 2022)), хорошо зарекомендовавший себя в задачах распознавания образов. Суть этого метода классификации данных в поиске разделяющей поверхности, разбивающей выборку на классы. Разделяющая поверхность представляется в виде $V(x)=0$, где $V(x)=\sum_j c_j \exp\left(-\gamma \| x_j - x \|^2\right)$, а x_j — опорные векторы, то есть точки, лежащие ближе всего к поверхности разделения.

Метод SVM вычисляет расстояние между опорными векторами и разделяющей поверхностью. Это расстояние называется зазором. Основная цель алгоритма — построить разделяющую поверхность с максимальным зазором.

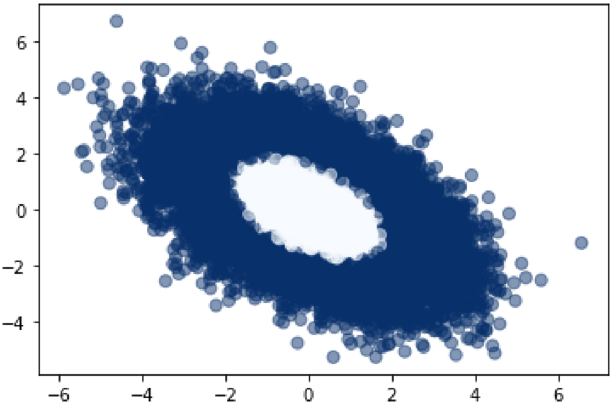

Рис. 1. Размеченная выборка из двумерного нормального распределения

Fig. 1. Labeled sample from a bivariate normal distribution

На рис. 2 показано полученное ядро вероятностного распределения. Для реализации SVM использовалась библиотека Pythonsklearn.svm. В качестве ядра задавалась радиально-базисная функция с параметром ширины γ, масштабируемым по дисперсии случайной величины. С целью понижения чувствительности результата к случайной реализации использовалась L2-регуляризация.

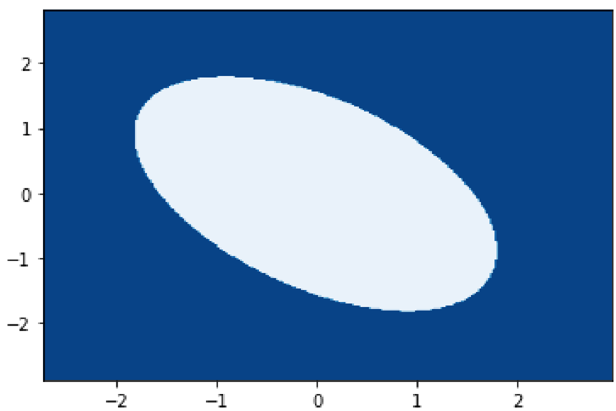

Рис. 2. Ядро вероятностного распределения

Fig. 2. The kernel of the probability distribution

Ключевую роль в предлагаемом алгоритме играют опорные векторы. Они представляют ближайшие к границе ядра точки, и поэтому сами по себе являются хорошей аппроксимацией границы. Это проиллюстрировано на рис. 3, где сплошной линией показана рассчитанная с помощью SVM граница ядра вероятностного распределения, а маркерами показаны опорные точки (векторы). Для наглядности здесь показан каждый пятый опорный вектор. Общее число опорных векторов в данном расчете около 500, оно зависит от случайной реализации.

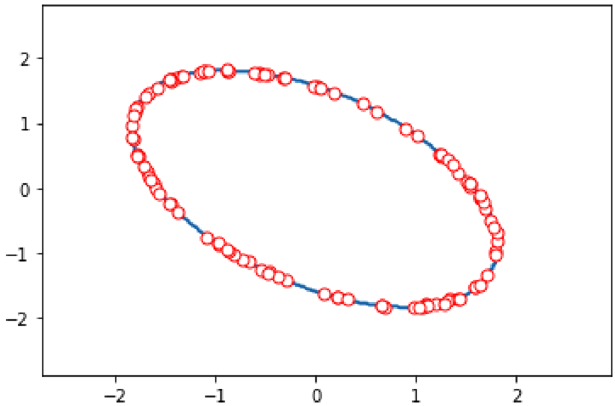

Рис. 3. Граница ядра (сплошная кривая) и опорные векторы (маркеры)

Fig. 3. The kernel boundary (solid curve) and support vectors (markers)

Следующие шаги алгоритма необходимы для построения нижней оценки и выполняются в итерационном цикле, направленном на поиск оптимальной стратегии оптимизации (вектор u). Решается минимаксная задача. В качестве стартового приближения задается начальная стратегия оптимизации. Далее в оптимизационном цикле выполняются следующие операции.

4. Осуществляется поиск максимального значения функции потерь на ядре вероятностной меры при заданной стратегии оптимизации.

На этом этапе можно использовать полученную на предыдущем шаге функциональную зависимость для границы ядра. Однако в случае выпуклого ядра, существенного уменьшения вычислительных затрат удается получить с использованием опорных векторов.

В наиболее грубом варианте задача может быть сведена к перебору значений функции потерь в опорных точках.

Поскольку опорные точки, будучи близки к границе, строго границе не принадлежат, представляет интерес поиск более точного приближения. С этой целью возможно уточнение позиций точек с использованием разложения функции границы ядра в ряд Тейлора. Такой подход, однако, значительно повышает вычислительные затраты.

Третий подход является своего рода компромиссом с позиций точность вычислений-вычислительная нагрузка. Здесь максимизация функции потерь осуществляется раздельно по опорным точкам разных классов, т.е. по опорным точкам, лежащим внутри ядра вероятностного распределения и вне его. В качестве итогового принимается среднее значение.

5. Вектор u изменяется в соответствии с выбранным методом оптимизации, после чего осуществляется переход к шагу 4. В дальнейшем, для оптимизации нами использовалась библиотека Pythonscipy.minimize, метод SLSQP (SequentialLeastSquaresProgramming), представляющий собой специальную реализацию квазиньютоновских методов решения задач нелинейного программирования с ограничениями. Шаги 4, 5 повторяются до достижения сходимости.

Пример 1. В качестве примера рассмотрим задачу портфельной оптимизации, приведенную в (Васильева, 2018). Рассмотрим инвестиционный портфель, состоящий из одного безрискового и двух рисковых активов. Доход такого портфеля можно рассчитать по формуле

$$R(X,u) = \beta u_0 + u^T X,$$

где $\beta = const$ — доход безрискового актива, $X = \left[X_1, X_2\right]^T$ — доходы рисковых активов, u_0 — доля вложений в безрисковый актив, $u = \left[u_1, u_2\right]$ — доли вложений в рисковые активы. Для u выполнено $u_0 + u_1 + u_2 = 1$, поэтому в формуле дохода можно опустить зависимость от u_0. Необходимо выполнение ограничения $u_i \geq 0, i = 0,1,2$, поясняющее запрет на операции *short-sales* (продажа актива на фондовой бирже, не принадлежащего продавцу, а взятого им в кредит у брокерской компании, чтобы в последствии откупить этот актив обратно, заработав на разнице в цене).

Пусть вектор доходностей рисковых финансовых инструментов имеет невырожденное нормальное распределение с вероятностными характеристиками:

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} \sim N\left(\begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{12} & q_{22} \end{pmatrix}\right).$$

Для задачи (2) известно (Васильева, 2018) точное решение при следующих модельных параметрах: $\beta = 0{,}1$; $m_1 = 0{,}2$; $m_2 = 0{,}15$; $q_{11} = 4 \cdot 10^{-3}$; $q_{12} = 5 \cdot 10^{-5}$; $q_{22} = 10^{-4}$.

В Таблице 1 представлены решения для различных значений уровня квантили. Решения получены с помощью двух упомянутых выше методов минимизации целевой функции. В первом методе (M1) осуществляется перебор значений целевой функции по всем опорным точкам, во втором (M2) — максимизация функции потерь осуществляется раздельно по опорным точкам разных классов. В обоих методах размер случайной выборки был равным 40000. Как показали расчеты, такой размер выборки обеспечивает разброс значений целевой функции при различных реализациях, не превышающий 0,002. В Таблице 1 представлены осредненные по реализациям значения функции потерь. Отрицательные значения функции потерь соответствуют доходу инвестиционного портфеля. Видно, что использование разделения классов для опорных точек позволяет повысить точность решения.

Таблица 1 / Table 1

Значения функции потерь (Нормальное распределение)

Loss function values (Normal distribution)

Alpha	M1	M2	Точное решение
0.8	-0.1469	-0.1476	-0.1477
0.9	-0.1397	-0.1403	-0.1406
0.99	-0.1277	-0.1283	-0.1288

Аналогичный вывод можно сделать и из Таблицы 2, где представлены результаты решения задачи с равномерным распределением случайных параметров $X \sim U\left(\left[0{,}18;0{,}22\right]\times\left[0{,}04;0{,}26\right]\right)$.

Таблица 2 / Table 2

Значения функции потерь (Унимодальное распределение)

Loss function values (Unimodal distribution)

Alpha	M1	M2	Точное решение
0.8	-0.1878	-0.1880	-0.1895
0.9	-0.1833	-0.1840	-0.1860
0.99	-0.1800	-0.1804	-0.1828

Решение задачи квантильной оптимизации с кусочно-линейной по случайным параметрам и выпуклой по стратегии оптимизации функцией потерь

Для рассматриваемого в настоящем разделе вида функции потерь ее минимизация на ядре вероятностной меры дает нижнюю оценку квантили. Верхняя оценка может быть получена с помощью оптимизации на доверительном множестве. Как отмечалось выше, для рассматриваемого класса функций потерь оптимальным доверительным множеством является многогранник. Применительно к варианту со стандартным нормальным распределением случайных параметров в (Иванов, Кибзун, Акмаева, 2023) была предложена аппроксимация доверительного множества шаром. Тогда задача (1) сводится к минимаксной задаче вида:

$$\psi(r) \triangleq \min_{u\in U}\left\{\max_{x\in B_r}\Phi(u,x) \mid \max_{x\in B_r}Q(u,x)\le 0\right\}, \tag{2}$$

где B_r — шар радиуса r и

$$B_r \triangleq \left\{x\in\mathbb{R}^m \mid \|x\|\le r\right\},$$

$\|x\| \triangleq \sqrt{x^T x}$ — евклидова норма вектора x.

В настоящей работе предлагается обобщение этого подхода на случай произвольного распределения случайных факторов. В качестве аппроксимирующей границы доверительного множества предлагается использовать поверхность уровня плотности вероятности. Доверительное множество представляется областью, ограниченной данной поверхностью. Определим данное множество как:

$$G_t = \{x : f(x) \geq t\}.$$

Тогда минимаксную задачу можно сформулировать аналогично (2):

$$\psi(t) = \min_{u \in U} \left\{ \max_{x \in G_t} \Phi(u, x) \mid \max_{x \in G_t} Q(u, x) \leq 0 \right\}.$$

В контексте решаемой задачи представляет интерес построение множества G_t^{α}, имеющего заданную вероятностную меру α, т.е. $P\left(x \in G_t^{\alpha}\right) = \alpha$.

Для этого сначала требуется определить уровень плотности вероятности t, соответствующий заданному уровню вероятности α. Т.е. необходимо решить нелинейное уравнение вида $g(t) = \alpha$, где $g(t) = \iiint_{G_t} f(x)dx$.

В настоящей работе это уравнение решается методом секущих, интегрирование осуществляется методом Монте-Карло с использованием сгенерированной случайной выборки. Далее выполняются следующие шаги:

1. Генерация случайной выборки по заданному закону распределения случайных параметров
2. Разметка случайной выборки.

Разметка осуществляется следующим образом. Первоначально все точки помечены меткой 0. В дальнейшем точки, в которых плотность вероятности не превышает уровень s помечаются меткой 1.

3. По размеченной выборке строится разделяющая поверхность, которая аппроксимирует поверхность уровня плотности вероятности. С этой целью, как и ранее, используется метод SVM. Принципиальным является тот факт, что получаемые опорные векторы хорошо аппроксимируют границу доверительного множества. Это свойство опорных векторов позволяет построить эффективный алгоритм решения минимаксной задачи для оптимизации функции потерь.

Минимаксная задача решается в итерационном цикле, направленном на поиск оптимальной стратегии оптимизации (вектор u).

В качестве стартового приближения задается начальная стратегия оптимизации. Далее в оптимизационном цикле выполняются следующие операции.

4. Осуществляется поиск максимального значения функции потерь на построенном доверительном множестве при заданной стратегии оптимизации.

На этом этапе высокую вычислительную эффективность удается получить с использованием опорных векторов, как это делалось для построения ядра вероятностной меры.

5. Вектор u изменяется в соответствии с выбранным методом оптимизации, после чего осуществляется переход к шагу 4. Как и ранее, для оптимизации нами использовалась библиотека Pythonscipy.minimize, метод SLSQP.

Шаги 4, 5 повторяются до достижения сходимости.

Таким образом, решив минимаксные задачи для ядра вероятностной меры K_α и множества G_t^α, получаем нижнюю и верхнюю оценки функции потерь:

$$\psi_\alpha \le \varphi_\alpha \le \psi(t_\alpha),$$

$$\psi_\alpha = \min_{u\in U}\left\{\max_{x\in K_\alpha} \Phi(u,x) \mid \max_{x\in K_\alpha} Q(u,x) \le 0\right\},$$

$$\psi(t_\alpha) = \min_{u\in U}\left\{\max_{x\in G_t^\alpha} \Phi(u,x) \mid \max_{x\in G_t^\alpha} Q(u,x) \le 0\right\}.$$

Далее применяется алгоритм улучшения верхней оценки [11]. Определим доверительный многогранник:

$$C_t = \{x : \Phi(u(t),x) \le \psi(t), Q(u(t),x \le 0\}$$

и его вероятностную меру

$$h(t) = P(X \in C_t).$$

Для получения оптимальной оценки будем решать нелинейное уравнение

$$h(t) = \alpha + \varepsilon,$$

где ε — малая поправка, обеспечивающая гарантированность оценки. Зная корень данного уравнения t^*, имеем оптимальную верхнюю оценку функции потерь:

$$\psi(t^*) = \min_{u\in U}\left\{\max_{x\in G_{t^*}} \Phi(u,x) \mid \max_{x\in G_{t^*}} Q(u,x) \le 0\right\}.$$

Для решения нелинейного уравнения в настоящей работе используется метод секущих. Вычисление вероятностной меры доверительного многогранника осуществляется методом Монте-Карло с использованием сгенерированной на предыдущих шагах алгоритма выборки.

Пример 2. Проиллюстрируем алгоритм на примере решения следующей задачи. Функция потерь:

$$\Phi(u,x) = \max(2u_1 + u_2 - u_3 + x_1 + x_2 - 0{,}5;$$

$$u_1 - 2u_2 + 1{,}5u_3 - x_1 + x_2 + 1;$$
$$-2u_1 - u_2 + u_3 + 2x_1 - x_2 - 1;$$
$$-u_1 - u_2 + u_3 - 2x_1 - x_2 - 1;$$
$$u_1u_2 + u_2u_3 - u_1u_3 + x_1 - x_2 + 1).$$

Ограничения: $-1 \le u_1 \le 1$, $-1 \le u_2 \le 1$, $-2 \le u_3 \le 2$, $-2 \le u_1 + u_2 + u_3 \le 2$

Распределение случайных факторов принято нормальным с теми же параметрами, что и в разделе 2.

Алгоритм вычисления ядра вероятностной меры для данного распределения проиллюстрирован на рис. 1—3.

На рис. 4 показана размеченная выборка из данного распределения и доверительное множество, ограниченное линией уровня плотности вероятности. Как и ранее, генерация случайных величин осуществлялась с помощью библиотеки Pythonscipy.stats. Заданный уровень квантили — 0,9. Число точек в выборке — 40000. Светлая внутренняя область на рис. 4 соответствует точкам, попадающим в доверительное множество. Для определения границы доверительного множества использовался метод SVM, библиотека Pythonsklearn.svm. Параметры метода аналогичны используемым ранее для построения ядра вероятностной меры: использовался базис из радиальных функций с параметром ширины, масштабируемым по дисперсии случайной величины, для улучшения обусловленности применялась L2-регуляризация.

На рис. 5 показаны опорные векторы (представлен каждый пятый вектор), полученные при нахождении границы ядра вероятностного распределения (красные маркеры) и границы доверительного множества (зеленые маркеры). Виден зазор между границами множеств, который минимизируется в итерационном алгоритме улучшения верхней оценки функции потерь. Начальный диапазон неопределенности функции потерь $\psi_\alpha \le \varphi_\alpha \le \psi(t_\alpha)$ составляет $3{,}152 \le \varphi_\alpha \le 5{,}179$. Результат работы итерационного алгоритма представлен на рис. 6. Граница доверительного множества стала заметно ближе к границе ядра. В результате диапазон неопределенности функции потерь сузился до $3{,}152 \le \varphi_\alpha \le 4{,}048$, , т.е. длина интервала неопределенности сократилась более чем вдвое (на 55,8 %), что свидетельствует об эффективности применяемого подхода.

Далее рассмотрим применение алгоритма к варианту логнормального распределения случайных факторов. Для иллюстративности примем, что компоненты случайного вектора не коррелированы и распределены одинаково $X \sim LogN(0;0,2)$. На рис. 7, 8 показаны размеченные выборки из данного распределения, а также ядро вероятностного распределения (рис. 7) и доверительное множество, ограниченное линией уровня плотности вероятности (рис. 8). Заданный уровень квантили — 0,9. На рис. 9 представлены опорные векторы (каждый пятый вектор), полученные при нахождении границы ядра (красные маркеры) и границы доверительного множества (зеленые маркеры). Начальный диапазон неопределенности функции потерь составляет $1{,}348 \le \varphi_\alpha \le 1{,}624$.

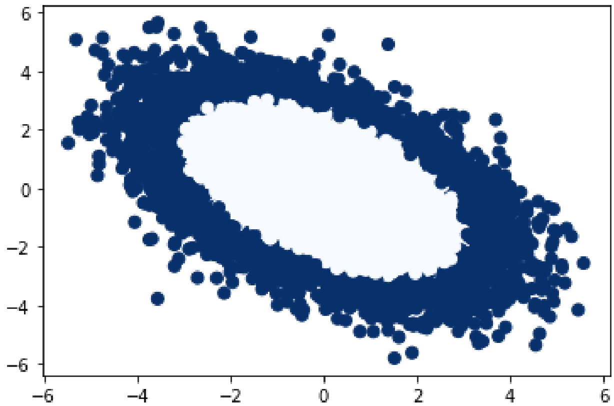

Рис. 4. Размеченная выборка из нормального распределения.
Светлая внутренняя область соответствует точкам,
попадающим в доверительное множество

Fig. 4. A labeled sample from a normal distribution.
The light inner region corresponds to points falling within the confidence set

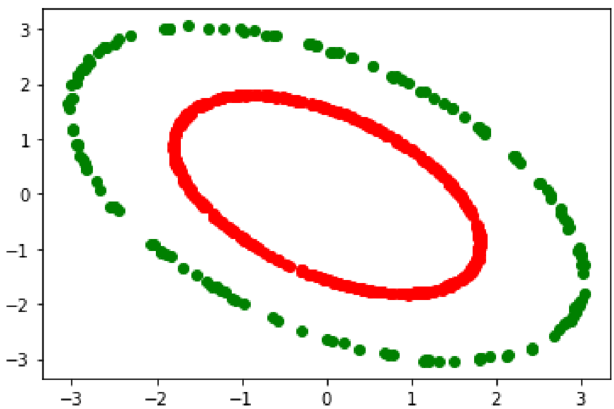

Рис. 5. Опорные векторы, полученные при нахождении
границы ядра вероятностного распределения (красные маркеры)
и границы доверительного множества (зеленые маркеры)

Fig. 5. Support vectors obtained by finding the boundary
of the kernel of the probability distribution (red markers)
and the boundary of the confidence set (green markers)

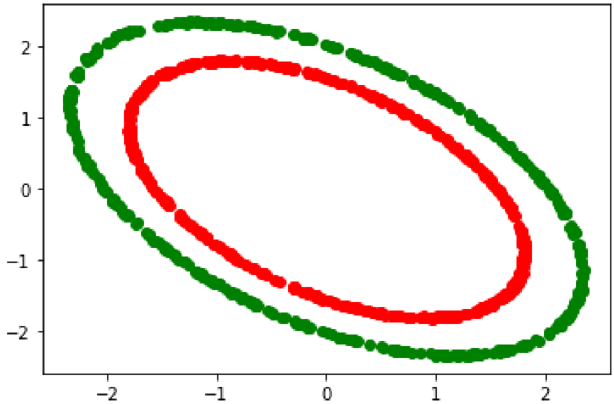

Рис. 6. Опорные векторы, полученные в ходе итерационного алгоритма. Обозначения аналогичны рис. 5

Fig. 6. Support vectors obtained during the iterative algorithm. The notations are similar to Fig. 5

В результате работы итерационного алгоритма граница доверительного множества приблизилась к границе ядра. Диапазон неопределенности функции потерь сузился на 40 % $(1{,}348 \le \varphi_\alpha \le 1{,}513)$, что подтверждает эффективность алгоритма.

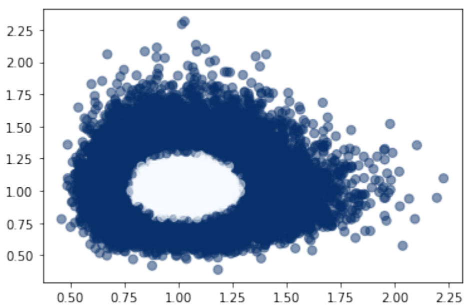

Рис. 7. Размеченная выборка из логнормального распределения. Светлая внутренняя область соответствует точкам, попадающим ядро вероятностной меры

Fig. 7. A labeled sample from a lognormal distribution. The light inner region corresponds to points falling within the kernel of the probability measure

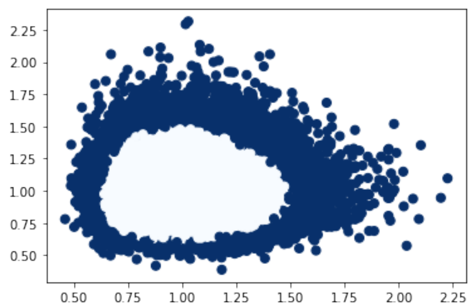

Рис. 8. Размеченная выборка из логнормального распределения. Светлая внутренняя область соответствует точкам, попадающим доверительное множество

Fig. 8. A labeled sample from a lognormal distribution. The light inner region corresponds to points falling within the confidence set

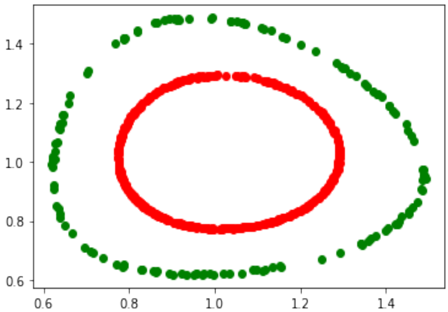

Рис. 9. Опорные векторы, полученные при нахождении границы ядра вероятностного распределения (красные маркеры) и границы доверительного множества (зеленые маркеры). Вариант логнормального распределения случайных факторов

Fig. 9. Support vectors obtained by finding the kernel boundary of the probability distribution (red markers) and the confidence set boundary (green markers). A variant of the lognormal distribution of random factors

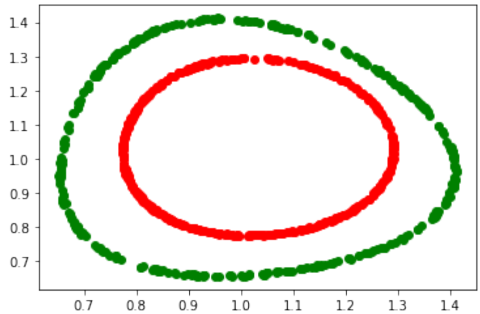

Рис. 10. Опорные векторы, полученные в ходе итерационного алгоритма. Вариант логнормального распределения случайных факторов. Обозначения аналогичны рис. 9

Fig. 10. Support vectors obtained during the iterative algorithm. A variant of the lognormal distribution of random factors. The notations are similar to Fig. 9

Заключение

В статье предлагается алгоритм решения задачи стохастического программирования с квантильным критерием в случае кусочно-линейной по случайным параметрам и выпуклой по стратегии функции потерь. Алгоритм является обобщением на случай произвольного унимодального распределения случайных параметров предложенного ранее алгоритма поиска оптимального доверительного множества. К особенностям алгоритма относится выбор доверительного множества, ограниченного поверхностью уровня плотности вероятности случайной величины. Для построения такого множества используется метод Монте-Карло для генерации и разметки случайной выборки в сочетании с методом опорных векторов. Применение опорных векторов позволяет эффективно решать характерные для квантильной оптимизации минимаксные задачи.

Список источников / References

1. Ардабьевский, П.А., Гончар, Д.А., Кан, Ю.С. (2020) Статистическое моделирование ядра вероятностного распределения и его применение к решению задачи квантильной оптимизации с билинейной функцией потерь. *Моделирование и анализ данных*. (с. 69—84). Том 10. № 3. DOI: https://doi.org/10.17759/mda.2020100306].
   Ardabevsky, P.A., Gonchar, D.A., Kan, Yu.S. (2020) Statistical modeling of the probability distribution kernel and its application to solving the quantile optimization problem with a bilinear loss function. *Modeling and Data Analysis*. (pp. 69—84). Vol. 10. No. 3. DOI: https://doi.org/10.17759/mda.2020100306]. (In Russ.)
2. Васильева, С.Н. (2018) Алгоритмы анализа и оптимизации квантильного критерия в задачах стохастического программирования с билинейными и квазилинейными функциями потерь. *Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук*. Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)».
   Vasilyeva, S.N. (2018) Algorithms for Analysis and Optimization of the Quantile Criterion in Stochastic Programming Problems with Bilinear and Quasilinear Loss Functions. *Dissertation for the degree of Candidate of Physical and Mathematical Sciences*. Moscow Aviation Institute (National Research University). (In Russ.)
3. Васильева, С.Н., Кан, Ю.С. (2015) Метод решения задачи квантильной оптимизации с билинейной функцией потерь. *Автоматика и Телемеханика*. (с. 83—101). № 9.
   Vasilyeva, S.N., Kan, Yu.S. (2015) Method for solving the quantile optimization problem with a bilinear loss function. *Automation and Remote Control*. (pp. 83—101). No. 9. (In Russ.)
4. Вьюгин, В. (2013) *Математические основы теории машинного обучения и прогнозирования*. МЦМНО, 2013. 390 с. ISBN 978-5-4439-0111-4.
   Vyugin, V. (2013) Mathematical foundations of the theory of machine learning and forecasting. MCMS, 2013. 390 p. ISBN 978-5-4439-0111-4. (In Russ.)
5. Иванов, С.В., Кибзун, А.И., Акмаева, В.Н. (2023) Параметрический алгоритм поиска гарантирующего решения задачи квантильной оптимизации. *Автоматика и телемеханика*. (с. 73—8). № 8.
   Ivanov, S.V., Kibzun, A.I., Akmaeva, V.N. (2023) Parametric algorithm for searching for a guaranteed solution to a quantile optimization problem. *Automation and Remote Control*. (pp. 73—8). No. 8. (In Russ.)
6. Кибзун, А.И., Кан, Ю.С. (2009) *Задачи стохастического программирования с вероятностными критериями*. М.: Физматлит.
   Kibzun, A.I., Kan, Yu.S. (2009) Stochastic *programming problems with probabilistic criteria*. Moscow: Fizmatlit. (In Russ.)
7. Кибзун, А.И., Лебедев, А.А., Малышев, В.В. (1984) О сведении задачи с вероятностными ограничениями к эквивалентной минимаксной. *Изв. АН СССР, Техническая кибернетика*, (с. 73—80). № 4.
   Kibzun, A.I., Lebedev, A.A., Malyshev, V.V. (1984) On the reduction of a problem with probabilistic constraints to an equivalent minimax problem. *Izvestiya AN SSSR, Technical Cybernetics*. (pp. 73—80). No. 4. (In Russ.)
8. Кибзун, А.И., Малышев, В.В. (1984) Обобщенный минимаксный подход к решению задач с вероятностными ограничениями. *Изв. АН СССР, Техническая кибернетика,* (с. 20—29). № 1.

Kibzun, A.I., Malyshev, V.V. (1984) Generalized minimax approach to solving problems with probabilistic constraints. *Izvestiya AN SSSR, Technical Cybernetics*. (pp. 20—29). No. 1. (In Russ.)

9. Кибзун, А.И., Наумов, А.В. (1995) Гарантирующий алгоритм решения задачи квантильной оптимизации. *Космические исследования.* (с. 160—165) Т. 33. № 2.
Kibzun, A.I., Naumov, A.V. (1995) A Guaranteeing Algorithm for Solving a Quantile Optimization Problem. *Space Research.* (pp. 160—165) Vol. 33. No. 2. (In Russ.)
10. Мэрфи, К.П. (2022) *Вероятностное машинное обучение: введение*. М.: ДМК Пресс.
Murphy, K.P. (2022) *Probabilistic Machine Learning: An Introduction.* Moscow: DMK Press Publ.
11. Наумов, А.В., Иванов С.В. (2011) Исследование задачи стохастического линейного программирования с квантильным критерием. *Автоматика и Телемеханика*. (с. 142—158) № 2.
Naumov, A.V., Ivanov, S.V. (2011) On stochastic linear programming problems with the quantile criterion. *Autom. Remote Control*. (pp. 353—369). V. 72. No. 2. (In Russ.)
12. Кристианини, Н., Шауи-Тейлор Дж. (2000) *Введение в машины опорных векторов и другие методы обучения на основе ядра.* Издательство Кембриджского университета. ISBN 978-1-139-64363-4.
Cristianini, N., Shawe-Taylor, J. (2000) *An Introduction to Support Vector Machines and Other Kernel-based Learning Methods.* Cambridge University Press. ISBN 978-1-139-64363-4.
13. Kan, Yu.S (2002) Application of the Quantile Optimization to Bond Portfolio Selection. Stochastic Optimization Techniques. Numerical Methods and Technical Applications. *Lecture Notes in Economics and Mathemaical Systems*. (pp. 285—308) Vol. 513. K.Marti ed. Berlin: Springer.
Кан, Ю.С. (2002) Применение квантильной оптимизации к выбору портфеля облигаций. *Методы стохастической оптимизации. Численные методы и технические приложения. Лекционные заметки по экономике и математическим системам.* (с. 285—308) Том 513. Под ред. К. Марти. Берлин: Springer.
14. Kibzun, A.I., Kan, Y.S. (1996) *Stochastic Programming Problems with Probability and Quantile Functions.* Chichester, New York, Brisbane, Toronto, Singapore: John Wiley & Sons.
Кибзун, А.И., Кан, Ю.С. (1996) *Задачи стохастического программирования с вероятностными и квантильными функциями*. Чичестер, Нью-Йорк, Брисбен, Торонто, Сингапур: Изд. John Wiley & Sons.
15. Statnikov, A., Aliferis, C.F., Hardin D.P. A (2011) *Gentle Introduction to Support Vector Machines in Biomedicine: Theory and methods.* World Scientific. ISBN 978-981-4324-38-0.
Статников, А., Алиферис, К.Ф., Хардин Д.П. А. (2011) *Мягкое введение в машины опорных векторов в биомедицине: теория и методы.* World Scientific. ISBN 978-981-4324-38-0.

Информация об авторах

Акмаева Валентина Николаевна, старший преподаватель, кафедра 804 «Теория вероятностей и компьютерное моделирование» Института № 8, Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет) (МАИ), Москва, Российская Федерация, ORCID https://orcid.org/0009-0007-6215-2295, e-mail: akmaevavn@mai.ru

Information about the authors

Akmaeva Valentina Nikolaevna, Senior Lecturer, Department 804 “Probability Theory and Computer Modeling”, Institute No. 8, Moscow Aviation Institute (National Research

University) (MAI), Moscow, Russian Federation, ORCID: https://orcid.org/0009-0007-6215-2295, e-mail: akmaevavn@mai.ru

Конфликт интересов

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Conflict of interest

The authors declare no conflict of interest.

Поступила в редакцию 16.02.2026
Поступила после рецензирования 20.02.2026
Принята к публикации 21.02.2026
Опубликована 31.03.2026

Received 2026.02.16
Revised 2026.02.20
Accepted 2026.02.21
Published 2026.03.31