Моделирование и анализ данных
2026, *16*(1), 157—176.
https://doi.org/10.17759/mda.2026160110
ISSN: 2219-3758 (печатный)
ISSN: 2311-9454 (online)

Modelling and Data Analysis
2026, *16*(1), 157—176.
https://doi.org/10.17759/mda.2026160110
ISSN: 2219-3758 (print)
ISSN: 2311-9454 (online)

МЕТОДИКА ПРЕПОДАВАНИЯ | TEACHING METHODS

Научная статья | Original paper

УДК: 378:517.97:303.7

Моделирование развития компетентности магистрантов на основе вариационного принципа

Н.И. Колачев[1, 2] ✉, **А.И. Адамский**[2], **Д.С. Дроздов**[1],
А.А. Заславский[2], **М.И. Подболотова**[2], **О.Б. Устюгова**[2]
[1] Национальный исследовательский университете «Высшая школа экономики»
г. Москва, Российская Федерация
[2] Московский городской педагогический университет
г. Москва, Российская Федерация
✉ nkolachev@hse.ru

Резюме

Контекст и актуальность. Несмотря на широкое распространение компетентностного подхода в высшем образовании, сохраняется разрыв между пониманием компетентности как динамического процесса и инструментами её проектирования и управления. Доминирующие практики фиксации результатов обучения ориентированы на статические «срезы», что ограничивает возможности прогнозирования и целенаправленного развития компетентности. В этой связи актуализируется необходимость формального моделирования траекторий развития компетентности на основе принципов оптимальности, заимствованных из математических теорий вариационного исчисления и оптимального управления. **Цель**. Разработать и эмпирически проверить модель развития компетентности магистрантов, основанную на вариационном принципе, позволяющую рассматривать образовательный процесс как задачу оптимального управления траекторией формирования ключевых компетенций. **Методы и материалы**. В исследовании приняли участие 24 студента первого курса магистерской программы «Управление школой и образовательная политика» (83% женщин). Компетентность оценивалась по семи показателям, отражающим способность устанавливать причинно-следственные связи между нормой и деятельностью (шкала 0—3, суммарный балл 0—21). Данные собирались в трёх замерах в процессе решения учебной аналитической задачи. Теоретическая модель строилась на основе вариационного исчисления (уравнения Эйлера–Лагранжа, условия трансверсальности), эмпирическая проверка осуществлялась с применением многоуровневого регрессионного анализа (модели со случайными коэффициентами). **Результаты.** Аналитическое решение экстремальной задачи показало, что оптимальная траектория развития компетентности имеет линейный характер и соответствует принципу минимизации «длины» образовательного пути, интерпретируемому как минимизация когнитивных и мотивационных перегрузок. Эмпирические данные подтвердили преимущественно линейную динамику роста компетентности у большинства студентов. Многоуровневая регрессионная модель выявила статистически значимый прирост результатов от замера к замеру и отрицательную связь между исходным уровнем и темпом роста, что указывает на компенсаторный характер развития. Высокое значение условного коэффициента детерминации свидетельствует о ключевой роли индивидуальных траекторий в формировании компетентности. **Выводы**. Показано, что развитие компетентности целесообразно рассматривать как неэргодический процесс, требующий перехода от анализа межиндивидуальных различий к моделированию внутрииндивидуальной динамики. Вариационный подход создаёт основу для нормативного проектирования образовательных траекторий и позволяет интегрировать математические модели оптимальности в образовательную аналитику и системы сопровождения обучения. Рекомендуется использовать предложенную модель как инструмент прогнозирования и планирования педагогических интервенций, направленных на поддержание устойчивого и ресурсосберегающего развития ключевых компетентностей обучающихся.

Ключевые слова: компетентность, магистрант, вариационный принцип, функционал, экстремаль

Для цитирования: Колачев, Н.И., Адамский, А.И., Дроздов, Д.С., Заславский, А.А., Подболотова, М.И., Устюгова, О.Б. (2026). Моделирование развития компетентности магистрантов на основе вариационного принципа. *Моделирование и анализ данных, 16*(1), 157—176. https://doi.org/10.17759/mda.2026160110

Modeling master's students' competence development based on the variational principle

N.I. Kolachev[1, 2] ✉, **A.I. Adamsky**[2], **D.S. Drozdov**[1],
A.A. Zaslavsky[2], **M.I. Podbolotova**[2], **O.B. Ustyugova**[2]
[1] HSE University, Moscow, Russian Federation
[2] Moscow City University, Moscow, Russian Federation
✉ nkolachev@hse.ru

Abstract

Context and relevance. Despite the widespread adoption of the competency-based approach in higher education, a gap remains between the understanding of competence as a dynamic process and the tools available for its design and management. Dominant practices of learning outcomes assessment rely on static "snapshots," which limits the possibilities for forecasting and purposeful development of competence. In this context, there is a growing need for formal modeling of competence development trajectories based on principles of optimality derived from the mathematical theories of the calculus of variations and optimal control. **Objective.** To develop and empirically test a model of master's students' competence development based on the variational principle, which conceptualizes the educational process as a problem of optimal control over the trajectory of key competence formation. **Methods and materials.** The study involved 24 first-year master's students enrolled in the program School Leadership and Educational Policy (83% women). Competence was assessed using seven indicators reflecting the ability to establish causal relationships between norms and practices (scale 0—3; total score range 0—21). Data were collected across three measurement points during the completion of an analytical learning task. The theoretical model was constructed using tools of the calculus of variations (Euler–Lagrange equations, transversality conditions), and the empirical validation was conducted through multilevel regression analysis with random effects models. **Results.** The analytical solution of the extremal problem demonstrated that the optimal trajectory of competence development is linear in nature and corresponds to the principle of minimizing the "length" of the educational path, interpreted as the minimization of cognitive and motivational overload. Empirical data confirmed a predominantly linear pattern of competence growth for most students. The multilevel regression model revealed a statistically significant increase in performance across measurement points, as well as a negative association between initial competence level and growth rate, indicating a compensatory pattern of development. The high value of the conditional coefficient of determination highlights the crucial role of individual trajectories in competence formation. **Conclusions.** The findings suggest that competence development should be conceptualized as a non-ergodic process, which requires a shift from the analysis of interindividual differences to the modeling of intraindividual dynamics. The variational approach provides a foundation for the normative design of educational trajectories and enables the integration of mathematical models of optimality into educational analytics and learning support systems. The proposed model is recommended as a tool for forecasting and planning pedagogical interventions aimed at fostering sustainable and resource-efficient development of students' key competencies.

Keywords: competence, master's student, variational principle, functional, extremal trajectory

For citation: Kolachev, N.I., Adamsky, A.I., Drozdov, D.S., Zaslavsky, A.A., Podbolotova, M.I., Ustyugova, O.B. (2026). Modeling master's students' competence development based on the variational principle. *Modelling and Data Analysis, 16*(1), 157—176. (In Russ.). https://doi.org/10.17759/mda.2026160110

Введение

Несмотря на всеобщее признание компетентностного подхода в высшем образовании, сохраняется фундаментальный разрыв между декларируемой природой компетентности и инструментами для работы с ней. Если компетентность понимать как способность действовать в сложных или новых контекстах (Фрумин и др., 2018), то есть как динамическую переменную, то ключевым для образовательной политики становится вопрос об оптимальных траекториях и условиях ее развития. Однако действующая система нормирования и проектирования образовательного процесса, сосредоточенная на фиксации статических «срезов» результата (в виде списков компетенций), оказывается слепа к этой динамике. В результате, налицо кризис управляемости: мы декларируем сложный, стохастический результат, но не оперируем языком и моделями для проектирования процессов его достижения. Большинство исследований либо редуцируют компетентность до статической латентной переменной, поддающейся измерению, либо ограничиваются описательной аппроксимацией траекторий, не задавая явных принципов оптимальности образовательного движения. Этот разрыв между психометрией «срезов» и нормативным моделированием «пути» делает невозможным ответ на ключевой для практики вопрос: как, в условиях жестких ресурсных и временных ограничений, спроектировать образовательную среду, гарантирующую нахождение и прохождение каждым студентом своей оптимальной траектории развития?

Для преодоления этого разрыва необходим переход от качественных описаний к формальному моделированию. В данной работе мы обосновываем, что развитие компетентности может и должно рассматриваться как задача оптимального управления. В такой постановке образовательные воздействия (со стороны среды, педагога, цифровых систем) и собственные выборы учащегося могут выступать управлениями, а результирующая траектория развития — решением, минимизирующим (или максимизирующим) некоторый функционал качества (например, время достижения целевого уровня компетентности при заданных когнитивных затратах). Классические основы такого взгляда заложены в вариационном исчислении (принцип наименьшего действия, уравнения Эйлера — Лагранжа), теории оптимального управления (принцип максимума Понтрягина) и динамическом программировании (уравнение Беллмана). Эти разделы математики предоставляют мощный аналитический аппарат и общий язык для строгой формулировки функционалов цели, ресурсных ограничений и выведения необходимых условий оптимальности траекторий. Новизна нашего подхода заключается не в применении самого этого аппарата, а в его адаптации для решения нормативно-управленческой задачи образовательной политики: создания принципиально новой рамки для проектирования образовательных программ, индивидуальных траекторий и систем педагогической поддержки, основанной на идее поиска экстремали в пространстве образовательных возможностей.

Таким образом, проблема данной работы формулируется не как чисто математическая, а как проектно-политическая: в условиях ограниченного времени и иных ресурсов необходимо определить принципы (условия оптимальности) и построить модель, позволяющую конструировать образовательные среды, в которых наиболее вероятным и эффективным сценарием становится нахождение и реализация студентом оптимальной траектории развития ключевых компетентностей.

Постановка задачи на языке математики

Согласно выработанным подходам (Алексеев и др., 1979), точно поставленная экстремальная задача включает в себя два элемента: функционал и ограничения. Под функционалом понимают правило или закон, по которому функции, определенной на множестве ограничений, ставится в соответствие действительное число ($\boldsymbol{J}:\boldsymbol{X}\to\overline{\boldsymbol{R}}$), где $\overline{\boldsymbol{R}}$ — это расширенная вещественная прямая, включающая $-\infty$ и $+\infty$. При этом под ограничением понимается некоторое подмножество $\boldsymbol{C}\subseteq\boldsymbol{X}$, а точки $\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{C}$ являются допустимыми по ограничению. При этом сама задача формулируется следующим образом: найти экстремум (нижнюю или верхнюю грань) функционала $\boldsymbol{J}$ при условии, что $\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{C}$. Таким образом, для точной постановки задачи необходимо описать $\boldsymbol{X}$, $\boldsymbol{J}$ и $\boldsymbol{C}$.

Пусть $\boldsymbol{K}'=\dfrac{\boldsymbol{dK}}{\boldsymbol{dt}}$ — скорость формирования компетентности, а $\boldsymbol{K}$ — текущий уровень сформированности компетентности. Тогда интегральная, т. е. в течение всего обучения, скорость выражается через функционал, который необходимо устремить к экстремуму:

$$\boldsymbol{J}=\int_0^{46}\boldsymbol{K'dt}\to\boldsymbol{extr}$$

Однако в таком виде функционал не имеет вариационного решения, т. к. зависит только от граничных условий. Кажется разумным задать функционал следующего вида, который имеет хорошо изученные свойства:

$$\boldsymbol{J}=\int_0^{46}\sqrt{1+\boldsymbol{K}'^2}\,\boldsymbol{dt}\to\boldsymbol{extr}$$

Функционал теперь зависит не только от краевых условий, но и от самого процесса развития компетентности. Это функционал длины кривой, и экстремаль — это кривая, соединяющая две точки и имеющая минимальную длину. То есть имеет смысл устремлять к минимуму заданный функционал. Таким образом, мы определили два элемента для решения экстремальной задачи — определили вид $\boldsymbol{X}$ и $\boldsymbol{J}$.

Теперь необходимо определить $\boldsymbol{C}$, то есть граничные условия. В нашем случае временной интервал обучения составляет от 0 до 46 недель. Количество учебных недель определено учебным планом.

Начальное условие, то есть $\boldsymbol{K}(0)$, возможно определить на основе имеющихся эмпирических данных. Например, в качестве $\boldsymbol{K}(0)$ можно использовать средний результат оценки компетентности на старте обучения. В общем виде предположим, что $\boldsymbol{K}(0)=\boldsymbol{a}$. При этом конечное состояние неизвестно; $\boldsymbol{K}(46)=\boldsymbol{b}$. Таким образом, перед нами встает экстремальная задача со свободным правым концом.

Итоговый вид экстремальной задачи таков:

$$\boldsymbol{J}=\int_0^{46}\sqrt{1+\boldsymbol{K}'^2}\,\boldsymbol{dt}\to\boldsymbol{min},\ \boldsymbol{K}(0)=\boldsymbol{a},\boldsymbol{K}(46)=\boldsymbol{b}$$

Таким образом, мы свели задачу к хорошо известной — о поиске кратчайшего пути.

Решение задачи

Первым шагом в решении экстремальной задачи является удовлетворение необходимого условия экстремума, а именно: решение уравнения Эйлера-Лагранжа. Формально в нашем случае оно выглядит следующим образом:

$$\frac{\partial\boldsymbol{F}}{\partial\boldsymbol{K}}-\frac{\boldsymbol{d}}{\boldsymbol{dt}}\left(\frac{\partial\boldsymbol{F}}{\partial\boldsymbol{K}'}\right)=0,$$

где $\boldsymbol{F}$ — подынтегральная функция, $\frac{\partial\boldsymbol{F}}{\partial\boldsymbol{K}}$ — частная производная по переменной $\boldsymbol{K}$, $\frac{\partial\boldsymbol{F}}{\partial\boldsymbol{K}'}$ — частная производная по переменной $\boldsymbol{K}'$, $\frac{\boldsymbol{d}}{\boldsymbol{dt}}$ — производная по переменной $\boldsymbol{t}$.

В нашем случае $\frac{\partial\boldsymbol{F}}{\partial\boldsymbol{K}}=0$, так как функционал явно не зависит от $\boldsymbol{K}$. При этом $\frac{\partial\boldsymbol{F}}{\partial\boldsymbol{K}'}=\frac{2\boldsymbol{K}'}{2\sqrt{1+\boldsymbol{K}'^2}}=\frac{\boldsymbol{K}'}{\sqrt{1+\boldsymbol{K}'^2}}$, а если $\frac{\boldsymbol{d}}{\boldsymbol{dt}}\left(\frac{\partial\boldsymbol{F}}{\partial\boldsymbol{K}'}\right)=0$, то это значит, что $\frac{\boldsymbol{K}'}{\sqrt{1+\boldsymbol{K}'^2}}=\boldsymbol{const}$. Таким образом, мы получили уравнение, которое решается прямым интегрированием. Решая дифференциальное уравнение, получаем следующее:

$$\frac{K'}{\sqrt{1+K'^2}}=C$$

$$\frac{K'^2}{1+K'^2}=C_1$$

$$K'^2=\frac{C_1}{1-C_1}$$

$$K'=\sqrt{\frac{C_1}{1-C_1}}=C_2$$

$$K=C_2t+C_3$$

Далее необходимо найти константы $\boldsymbol{C}_2$ и $\boldsymbol{C}_3$. Находим константу $\boldsymbol{C}_3$:

$$\boldsymbol{K}(0):\boldsymbol{C}_2\cdot 0+\boldsymbol{C}_3=\boldsymbol{a}\Rightarrow \boldsymbol{C}_3=\boldsymbol{a}$$

Так как у нас не задано значение $\boldsymbol{K}$ в конечной точке, необходимо воспользоваться условием трансверсальности (условием оптимального значения в конце). Оно формулирует дополнительные граничные условия для оптимального решения в тех случаях, когда один или оба конца траектории не фиксированы. Условие трансверсальности можно интерпретировать как требование, чтобы направление оптимальной траектории в конце интервала интегрирования было ортогонально границе области допустимых состояний.

В нашем случае конечная точка фиксирована, а значение нет, поэтому условие трансверсальности выглядит следующим образом:

$$\left[\frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial \boldsymbol{K}'}\right]_{\boldsymbol{t}=46}\cdot \Delta\boldsymbol{K}_{\boldsymbol{t}=46}=0$$

Откуда

$$\frac{\boldsymbol{K}'}{\sqrt{1+\boldsymbol{K}'^2}}=0$$

$$\boldsymbol{K}'=0\;\;\boldsymbol{K}=\boldsymbol{C}$$

Подставляем полученное значение в $\boldsymbol{K}=\boldsymbol{C}_2\boldsymbol{t}+\boldsymbol{a}$, получаем $\boldsymbol{C}_2=\boldsymbol{C}_2\boldsymbol{t}+\boldsymbol{a}$, откуда $-45\boldsymbol{C}_2\;=\boldsymbol{a}$, а $\boldsymbol{C}_2=\dfrac{\boldsymbol{a}}{-45}=\boldsymbol{b}$. Таким образом, подозрительная на экстремаль функция такова:

$$\boldsymbol{K}=\boldsymbol{b}\boldsymbol{t}+\boldsymbol{a}$$

Дальнейшее решение задачи связано с изучением выполнения достаточных условий экстремума. К достаточным условиям относятся следующие:

Семейство кривых подозрительных на экстремаль образуют поле.

Семейство кривых подозрительных на экстремаль удовлетворяют условию Лежандра.

Причем условия Лежандра могут быть двух видов — слабое и сильное. Слабое условие выглядит следующим образом (для максимума):

$$\boldsymbol{F}_{\boldsymbol{K}'\boldsymbol{K}'}<\boldsymbol{0}\text{ на кривой }\boldsymbol{y}(\boldsymbol{t})$$

Сильное условие Лежандра (для максимума) таково:

$$\boldsymbol{F}_{\boldsymbol{K}'\boldsymbol{K}'}\le 0\text{ для }\forall\text{и в некоторой окрестности }(\boldsymbol{t},\boldsymbol{K})\text{ рассматриваемой кривой}$$

Рассмотрим, образуют ли семейства кривых, подозрительных на экстремаль, поле. Для этого необходимо в функции $\boldsymbol{K} = \boldsymbol{bt} + \boldsymbol{a}$ зафиксировать одну из констант. Логично будет зафиксировать константу при переменной $\boldsymbol{t}$, а свободный член варьировать. Тогда необходимо проанализировать семейство кривых вида $\boldsymbol{K} = \boldsymbol{bt} + \tilde{\mathbf{N}}$ при $\boldsymbol{t} \in [0;46]$. Воспользуемся наглядной демонстрацией. На рисунке 1 для примера представлены отдельные кривые семейства кривых $\boldsymbol{K} = 0.02\boldsymbol{t} + \tilde{\mathbf{N}}$. Можно заметить, что в таком случае кривые не будут пересекаться и пройдут через каждую точку на области определения. Отсюда следует, что семейство кривых образует собственное поле.

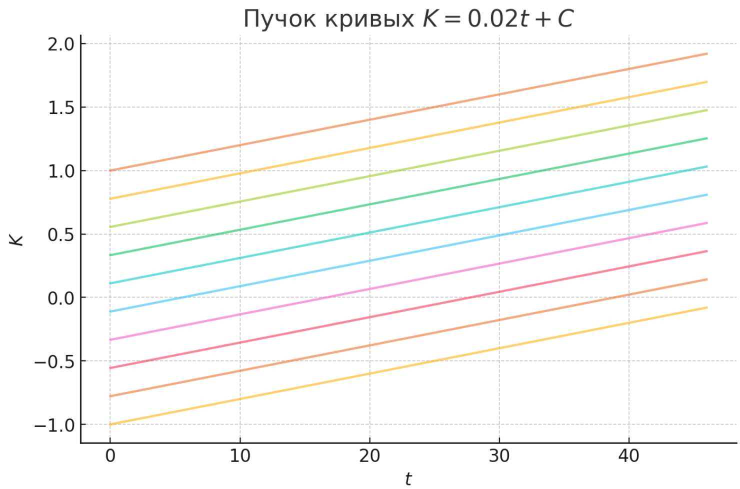

Рис. 1. Графическая репрезентация собственного поля семейства кривых (создано с помощью ChatGPT4o)

Fig. 1. Graphical representation of the proper field of a family of curves (created using ChatGPT-4o)

В другом случае — если мы зафиксируем свободный член, а коэффициент при переменной *t* будем варьировать — получится центральное поле. Графическая репрезентация центрального поля представлена на рисунке 2. При образовании центрального поля кривые пересекаются в одной точке; допустим, в точке с координатами (0; 5).

Таким образом, найденная кривая $\boldsymbol{K} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{bt}$ включается в поле экстремалей.

Теперь проверим сильное условие Лежандра:

$$\boldsymbol{F}_{\boldsymbol{K}'\boldsymbol{K}'} = 2 > 0$$

Вторая производная по $\boldsymbol{K}'$ не зависит от $\boldsymbol{K}$, то есть постоянна и больше 0 для $\forall \boldsymbol{K}$. Но поскольку вторая производная положительна, то у заданного нами функционала имеется сильный минимум. Минимизация этого функционала может означать плавное, стабильное развитие компетентности (без резких скачков и перегрузок). Таким образом, оптимальной траекторией развития компетентности является линейная.

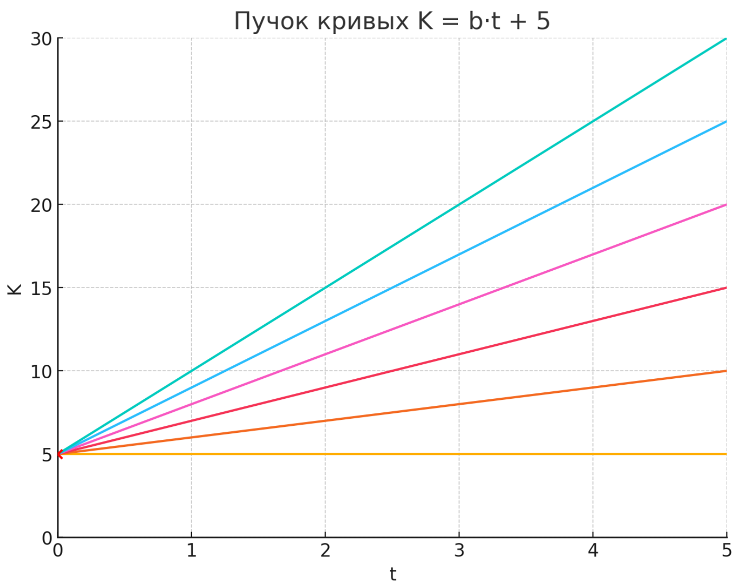

Рис. 2. Графическая репрезентация центрального поля семейства кривых (создано с помощью ChatGPT4o)

Fig. 2. Graphical representation of the central field of a family of curves (created using ChatGPT-4o)

От полученного детерминистического решения можно перейти к более соответствующей реальности форме — стохастической. Тогда оно будет выглядеть так:

$$\boldsymbol{K = a + bt + \varepsilon},$$

где ε — возмущение (остаток). Стохастическая форма на более знакомом языке представляет собой уравнение линейной регрессии.

Эмпирическая проверка решения

Выборка

В эмпирической части исследования приняли участие 24 студента первого курса магистерской программы «Управление школой и образовательная политика» Московского городского педагогического университета (МГПУ), год набора — 2024. Среди них 20 женщин (83%).

Процедура

В ходе обучения студенты решали задачу по курсу «Институциональная образовательная политика». Задача звучит так: «Составьте институциональный анализ реформы образования 1984 г.». Студенты имели возможность сделать три пробы решения задачи. Объём решения задачи не должен был превышать 5000 знаков с пробелами.

Инструмент

Ключевой компетентностью указанной магистерской программы является компетентность установления причинно-следственных отношений между нормой и деятельностью. Оценка этой компетентности проводится на основе 7 специально разработанных показателей: культурно-исторический анализ, анализ текущей образовательной ситуации, выявление противоречий, формулирование проблематики, постановка задачи, предложение способов решения задачи и оценка эффективности предлагаемых решений. Каждый показатель включает 4 балльную шкалу оценки: где 0 — показатель полностью не проявлен, 3 — показатель полностью проявлен. Минимальный балл — 0, максимальный — 21. Инструмент прошёл всю необходимую психометрическую проверку.

Статистический анализ

В качестве основного метода анализа была использована многоуровневая регрессия. Выбор многоуровневой регрессии в противовес классической обоснован несколькими обстоятельствами.

1. Многоуровневая регрессия учитывает корреляцию между измерениями, позволяя более точно оценивать параметры модели. В нашем случае производились замеры по одним и тем же людям, что делает наблюдения в базе данных зависимыми.
2. Многоуровневая регрессия позволяет моделировать результаты даже в условиях пропущенных значений. В нашем случае пропуски обусловлены тем, что студенты могли сами решать, какую пробу им отправлять на проверку.

Существует два класса многоуровневых моделей — с фиксированными коэффициентами регрессии (random intercept, fixed slope model) и с изменяющимся коэффициентами регрессии (random intercept, random slope model). Первый класс моделей подразумевает, что между индивидами изменяется только среднее значение, при этом коэффициенты регрессии одинаковы для всех. Второй класс предполагает, что разными являются как интериндивидуальные средние зависимой переменной, так и коэффициенты регрессии (связи) независимых переменных и зависимой (интраиндивидуальная изменчивость).

Математически первый класс моделей формулируется следующим образом:

$$\begin{cases} \boldsymbol{y_{ij} = \beta_{0j} + \beta_{1j}x_{1j} + \beta_{2j}x_{2j} + \cdots + \beta_{nj}x_{nj} + \varepsilon_{ij}} \\ \boldsymbol{\beta_{0j} = \gamma_{00} + \gamma_{01}x_{i1} + \gamma_{02}x_{i2} \ldots + \gamma_{0k}x_{ik} + u_{0j}}, \\ \qquad\qquad \boldsymbol{\beta_{nj} = \gamma_{n0}} \end{cases}$$

где $\boldsymbol{y_{ij}}$ — целевая зависимая переменная, $\boldsymbol{x_{1j}, x_{2j}, \ldots, x_{nj}}$ — предикторы первого уровня, $\boldsymbol{x_{i1}, x_{i2}, \ldots, x_{ik}}$ — предикторы второго уровня, $\boldsymbol{\beta_{0j}}$ — отклонение от общего выборочного среднего, γ_{00} — общее выборочное среднее, ε_{ij} — остатки первого уровня, u_{0j} — остатки второго уровня; $\varepsilon_{ij} \sim N(0, \sigma_\varepsilon^2)$, $u_{0j} \sim N(0, \sigma_u^2)$.

Математически второй класс моделей выражается следующим образом:

$$\begin{cases} y_{ij} = \beta_{0j} + \beta_{1j}x_{1j} + \beta_{2j}x_{2j} + \dots + \beta_{nj}x_{nj} + \varepsilon_{ij} \\ \beta_{0j} = \gamma_{00} + \gamma_{01}x_{i1} + \gamma_{02}x_{i2} \dots + \gamma_{0k}x_{ik} + u_{0j} \\ \beta_{1j} = \gamma_{10} + \gamma_{11}x_{i1} + \gamma_{12}x_{i2} \dots + \gamma_{1k}x_{ik} + u_{1j} \\ \dots \\ \beta_{nj} = \gamma_{n0} + \gamma_{n1}x_{i1} + \gamma_{n2}x_{i2} \dots + \gamma_{nk}x_{ik} + u_{nj} \end{cases},$$

где y_{ij} — целевая зависимая переменная, $x_{1j}, x_{2j}, \dots, x_{nj}$ — предикторы первого уровня, $x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{ik}$ — предикторы второго уровня, β_{0j} — отклонение от общего выборочного среднего, γ_{00} — общее выборочное среднее, β_{ij}– коэффициент регрессии первого уровня, γ_{nk} — коэффициент регрессии второго уровня, ε_{ij} — остатки индивидуального уровня, u_{ij} — остатки группового уровня, $\varepsilon_{ij} \sim N(0, \sigma_\varepsilon^2)$, $u_{ij} \sim N(0, \sigma_u^2)$.

Для оценки параметров моделей, описанных выше, обычно используется метод максимального правдоподобия (Maximum Likelihood Estimation, MLE). Это обстоятельство позволяет использовать информационные критерии для сравнения двух классов моделей. Для того чтобы сравнить, какой класс моделей подходит данным лучше, обычно используют тест отношения правдоподобия (Likelihood Ratio Test, LRT), а также информационные критерии — информационный критерий Акаике (Akaike Information Criterion) или информационный критерий Байеса (Bayesian Information Criterion). Тест отношения правдоподобий основан на разнице удвоенных логарифмов функции правдоподобия (–2LL) двух моделей. Разница следует распределению хи-квадрат с количеством степеней свободы, равным разности количества параметров в двух сравниваемых моделях (Hox et al., 2017). Затем получившаяся разность сравнивается с критическим значением из распределения хи-квадрат для заданного уровня значимости (обычно 0,05). Если разность превышает критическое значение, то отвергается нулевая гипотеза о том, что более простая модель объясняет данные так же хорошо, как и более сложная. Это означает, что добавление дополнительных уровней или случайных эффектов в модель является статистически значимым.

Если модель с изменяющимися коэффициентами регрессии имеет более низкие значения AIC и BIC, а также статистически значимое улучшение правдоподобия по сравнению с моделью с фиксированными коэффициентами, то можно сделать вывод, что добавление в модель изменения коэффициентов оправдано. Если улучшение незначительно, может быть предпочтительно использовать более простую модель (с фиксированными коэффициентами).

Результаты эмпирического исследования

На рисунке 3 представлены коробчатые диаграммы результатов решения учебной задачи в трёх пробах (замерах). Можно видеть, что медианное значение результата решения задачи меньше в начальной пробе (замер 0) и с каждой пробой возрастает. При этом в замере 1 наблюдается наибольшая гомогенность результатов, поскольку длина ящика здесь наименьшая. Но наблюдается несколько нетипичных значений (обозначены выколотыми точками).

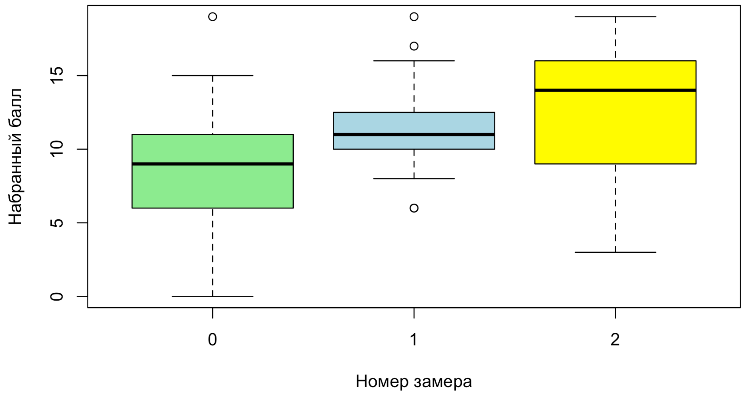

Рис. 3. Коробчатые диаграммы результатов решения учебной задачи в трёх замерах

Fig. 3. Boxplot of the results of task-solving across three measurements

На рисунке 4 представлены траектории результативности решения учебной задачи каждого студента. Можно заметить, что достаточно редко встречается нелинейный паттерн, у большинства заметна линейная динамика (как положительная, так и отрицательная).

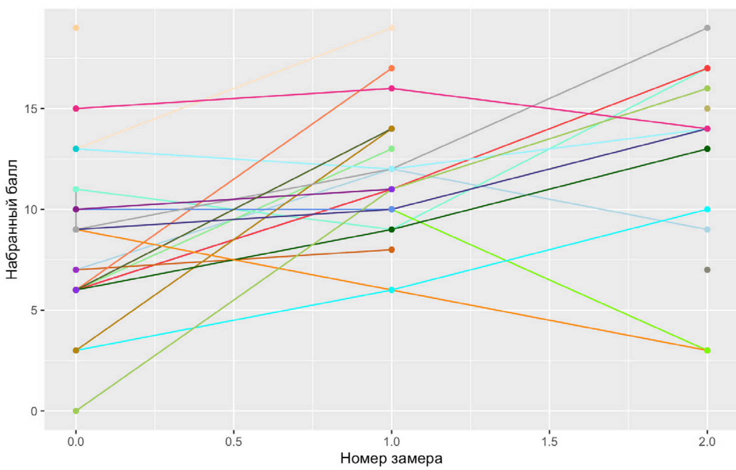

Рис. 4. Индивидуальные траектории результатов решения учебной задачи

Fig. 4. Individual trajectories of the results of task-solving

В таблице 1 представлены индексы согласия моделей с данными. Мы видим, что по индексу Акаике (AIC) модель с изменяющимися коэффициентами регрессии подходит данным несколько лучше, по индексу Байеса — наоборот. При этом тест отношения правдоподобий оказывается значимым, следовательно, можно принять, что модель с изменяющимися коэффициентами регрессии более предпочтительна.

Таблица 1 / Table 1

Индексы согласия моделей с данными

Goodness-of-fit statistics

Модель	**AIC**	**BIC**	**LR test**
С фиксированными коэффициентами	372,84	381,54	
С изменяющимися коэффициентами	370,21	383,25	6,63*

Примечание: «*» — корреляция значима на уровне 0,05 (двусторонняя); *Note:* «*» — correlation is significant at the 0,05 level (two-sided).

В таблице 2 представлены результаты многоуровневого регрессионного моделирования на основе модели с изменяющимися коэффициентами. Мы видим, что все переменные модели значимы. Интерцепт значимо отличается от 0 и составляет 8,75. То есть средний балл группы в первом замере составляет 8,75. Коэффициент при переменной номера замера так же значимо отличен от 0 и составляет 2,29. То есть с каждой пробой результат студентов увеличивался в среднем на 2,29 балла. При этом корреляция фиксированных эффектов достаточно велика и отрицательна (–0,67). Это говорит о том, что чем ниже был стартовый результат студента, тем сильнее наблюдается прирост результата от пробы к пробе. По итогам моделирования с помощью многоуровневой регрессии получилось следующее уравнение: Набранный бал = = **8,75** + **2,29** x Номер замера + $\boldsymbol{\varepsilon}$.

Таблица 2 / Table 2

Результаты многоуровневого регрессионного моделирования

Results of the multilevel regression

Предиктор	b (SE)
Фиксированные эффекты	
Интерцепт	8,75*** (0,80)
Номер замера	2,29** (0,76)
Случайные эффекты	
Дисперсия интерцепта	10,92
Дисперсия коэффициента регрессии при переменной «Номер замера»	9,52

Случайные эффекты	
Дисперсия остатков	5,86
Корреляция случайных эффектов интерцепта и переменной «Номер замера»	-0,67***
Marginal R^2 / Conditional R^2	0,17 / 0,82

Примечание: «**» — корреляция значима на уровне 0,01 (двусторонняя); «***» — корреляция значима на уровне 0,001 (двусторонняя); *Note:* «**» — correlation is significant at the 0,01 level (two-sided); «***» — correlation is significant at the 0,001 level (two-sided).

Обсуждение результатов

Представленная работа продемонстрировала возможность формализованного описания процесса развития профессиональной компетентности в терминах вариационного исчисления. Предложенная модель, минимизирующая функционал длины траектории $J = \int_0^{46} \sqrt{1+K'^2}\,dt$, задаёт принцип наименьшего действия в обучении — оптимальная траектория характеризуется плавностью и стабильностью изменения компетентности без избыточных колебаний или перегрузок. С позиций культурно-исторической теории (Выготский, 2005) развитие компетентности не является внутренне детерминированным процессом усвоения знаний, а представляет собой социально опосредованную трансформацию деятельности субъекта в культурно заданной ситуации. В этом контексте математическая модель вариационного типа, описывающая плавное, линейное нарастание уровня компетентности, отражает процесс внутреннего присвоения культурных средств деятельности, происходящий в устойчивой социальной среде обучения.

Полученное аналитическое решение $K = a + bt$ описывает линейную зависимость уровня компетентности от времени, что соответствует гипотезе о равномерном наращивании компетентности при устойчивой образовательной среде. Сильное условие Лежандра, выполняющееся для данного функционала ($F_{K'K'} > 0$), указывает на наличие строгого минимума, что в психолого-педагогическом контексте может быть интерпретировано как состояние оптимальной учебной нагрузки, минимизирующей когнитивные и мотивационные потери (Sweller et al., 2019).

Эмпирически наблюдаемый рост результатов по трём пробам решения задачи — при сохранении отрицательной корреляции между исходным уровнем и приростом — соотносится с концепцией зоны ближайшего развития (ЗБР). Участники, начавшие с более низкого уровня компетентности, продемонстрировали больший темп прироста, что отражает действие механизма опосредованного усвоения: при наличии педагогической поддержки и культурных образцов деятельности, обучающийся способен выполнять действия, которые ранее находились за пределами его актуального уровня (Выготский, 2005). Вариационно-оптимизационный принцип в этом контексте выражает стремление системы обучения свести усилия к минимуму, направив деятельность в зону, где затраты когнитивных и мотивационных ресурсов минимальны при максимальном приросте культурных форм действия.

С позиций современной интерпретации КИТ (Engeström, 2001; Rogoff, 2003) выявленная динамика компетентности иллюстрирует ко-эволюцию индивидуальных и коллективных траекторий. Магистерская программа выступает как культурно-организованная система деятельности, а процесс решения учебных задач — как совместное конструирование смыслов внутри этой системы. Линейность роста в такой ситуации указывает на стабильность системы взаимодействий, где инструменты, нормы и роли уже установлены, а участники действуют в общей логике. Случайные эффекты, выявленные многоуровневой моделью, можно трактовать как индивидуальные вариации интериоризации — различия в том, как быстро и полно каждый студент присваивает общие культурные средства анализа (в данном случае — способы установления причинно-следственных связей между нормой и деятельностью).

Переход от детерминистического решения к стохастическому виду $K = a + bt + \varepsilon$ обеспечивает связку с эмпирическими моделями роста компетентности. С этой точки зрения многоуровневая регрессионная модель, примененная к данным магистрантов, является стохастическим аналогом вариационного решения, где случайная компонента ε отражает индивидуальные различия и ситуативные флуктуации в ходе обучения (Raudenbush & Bryk, 2002).

Высокие значения условного коэффициента детерминации ($R^2_{conditional} = 0,82$) указывают, что большая часть дисперсии компетентности объясняется различиями между участниками и их индивидуальными траекториями. Это согласуется с принципом индивидуализации обучения, где интраиндивидуальные различия играют ключевую роль в темпе и форме развития (Rogoff, 2003).

Также представляется важным рассмотреть полученные результаты через призму принципа эргодичности. Построенная вариационно-аналитическая модель развития компетентности допускает двойное толкование — как индивидуальной траектории и как усреднённого состояния системы (по множеству обучающихся). Этот переход от микродинамики к макродинамике требует рассмотрения эргодичности системы, то есть возможности приравнять среднее по времени и среднее по совокупности (Molenaar, 2008; Hamaker, 2012). В эргодической системе предполагается, что процесс, протекающий во времени у одного индивида, тождественен распределению состояний в популяции. Однако в психологии и образовании это условие почти никогда не выполняется (Fisher et al., 2018). Развитие компетентности характеризуется индивидуально-специфическими зависимостями, контекстными колебаниями и нелинейными обратными связями, что делает его неэргодическим процессом: усреднённая динамика не описывает динамику отдельного обучающегося. Хотя по форме для большинства студентов была характерна линейная положительная динамика результата (см. рисунок 4).

Неэргодичность в нашем случае выражает принцип индивидуальной оптимальности развития. В обучении нельзя ожидать, что все участники будут двигаться одинаково, даже если внешние условия (программа, задачи, длительность) идентичны. Каждый субъект находит свой «минимальный путь» в пространстве культурных и когнитивных состояний. Отрицательная корреляция между исходным уровнем и скоростью роста означает, что система демонстрирует свойство гомеостатической компенсации: чем ниже начальное состояние, тем сильнее потенциал роста — то есть динамика стабилизирует распределение, приближая систему к квазистационарному состоянию без выравнивания структурно-функциональных особенностей. Это подтверждает неэргодический характер процесса: равновесие достигается не через одинаковое поведение, а через разное направление индивидуальных изменений (Fisher, 2015; Ram & Gerstorf, 2009). Понимание развития компетентности как неэргодического процесса требует перехода от анализа межиндивидуальных различий к анализу внутрииндивидуальной динамики (within-person modeling). Многоуровневая регрессия, использованная в работе, уже частично решает эту задачу, позволяя одновременно оценивать групповые и индивидуальные параметры.

Практическая значимость полученного результата состоит в возможности предсказательного моделирования хода обучения. Использование стохастических вариантов вариационных уравнений позволяет не только прогнозировать уровень компетентности на любом этапе программы, но и определять оптимальные точки интервенций (например, момент необходимости усложнения задач или внедрения поддержки учебной деятельности). Хотя это требует более длительных наблюдений за развитием компетентности студентов. Также предложенный подход может быть интегрирован в интеллектуальные системы сопровождения обучения и образовательную аналитику (de Baker & Inventado, 2014). В перспективе модель может быть обобщена на нелинейные формы (например, логистическую или экспоненциальную), которые более адекватно описывают развитие компетентности при сложных образовательных траекториях, а также на стохастические дифференциальные уравнения, учитывающие шумовую компоненту образовательной среды (Øksendal, 2003; van der Maas et al., 2017).

Заключение

В настоящем исследовании была решена поставленная цель — разработана и апробирована модель развития компетентности студентов, основанная на вариационном принципе и трактующая образовательный процесс как задачу оптимального управления траекторией формирования компетентности. Полученные результаты имеют значимость для теории образования и психологии развития, поскольку предлагают новую рамку осмысления компетентности не как статического результата, а как динамического, управляемого процесса. Впервые показано, что аппарат вариационного исчисления может быть продуктивно адаптирован для нормативного моделирования образовательных процессов и проектирования условий, способствующих устойчивому развитию ключевых компетенций. Тем самым исследование вносит вклад в преодоление разрыва между психометрическим анализом «срезов» и управленческим моделированием «траекторий». Практическая значимость работы выходит за рамки узкопрофессиональной педагогической проблематики. Предложенный подход может быть использован при проектировании образовательных программ, разработке систем академического сопровождения и в образовательной аналитике, включая интеллектуальные системы поддержки обучения. В более широком междисциплинарном контексте результаты исследования открывают возможности для применения вариационно-оптимизационных моделей в областях управления человеческим капиталом, организационного развития и цифровых систем поддержки принятия решений, где также требуется учитывать индивидуальные траектории роста и ресурсные ограничения. Вместе с тем полученные выводы задают и направления дальнейших исследований. Перспективными являются проекты, направленные на расширение эмпирической базы за счёт более репрезентативных выборок и длительных лонгитюдных дизайнов, а также на разработку нелинейных и стохастических версий модели, более адекватных реальным образовательным процессам. Особый интерес представляет интеграция вариационного подхода с современными методами образовательной аналитики и машинного обучения, что позволит перейти от описания оптимальных траекторий к их автоматизированному прогнозированию и поддержке в реальном времени.

Ограничения. Выборка исследования была небольшой (24 участника) и гомогенной по ряду признаков: все студенты обучались в одной магистерской программе, в одном вузе и в одинаковом образовательном контексте. Это ограничивает внешнюю валидность результатов и не позволяет обобщать найденные закономерности на другие профессиональные группы или образовательные программы. Вторым ограничением выступает ограниченный временной диапазон измерений. Они были проведены в течение первого семестра первого года обучения, что может снижать достоверность вывода в части переноса на динамику в течение всех двух лет обучения.

Limitations. The study sample was small (24 participants) and homogeneous in several respects: all students were enrolled in the same master's program, at the same university, and within the same educational context. This limits the external validity of the findings and prevents the generalization of the observed patterns to other professional groups or educational programs. A second limitation concerns the restricted time frame of the measurements. Data were collected during the first semester of the first year of study only, which may reduce the robustness of conclusions regarding the applicability of the results to competence development dynamics over the entire two-year program.

Список источников / References

1. Выготский, Л.С. (2005). *Психология развития человека.* М.: Смысл; Эксмо. 1136 с.
   Vygotsky, L.S. (2005). *Psychology of human development.* Moscow: Smysl Publ.; Eksmo. (In Russ.).
2. Фрумин, И.Д., Добрякова, М.С., Баранников, К.А., Реморенко, И.М. (2018). *Универсальные компетентности и новая грамотность: чему учить сегодня для успеха завтра. Предварительные выводы международного доклада о тенденциях трансформации школьного образования.* Москва: НИУ ВШЭ.

Frumin, I.D., Dobryakova, M.S., Barannikov, K.A., Remorenko, I.M. (2018). *Universal competencies and new literacy: What to teach today for success tomorrow. Preliminary findings of an international report on trends in school education transformation.* Moscow: HSE University. (In Russ.).

3. De Baker, R.S.J., & Inventado, P.S. (2014). Chapter X: Educational data mining and learning analytics. *Comput. Sci*, 7, 1—16.
4. Engeström, Y. (2001). Expansive learning at work: Toward an activity theoretical reconceptualization. *Journal of Education and Work*, 14(1), 133—156.
5. Fisher, A.J. (2015). Toward a dynamic model of psychological assessment: Implications for personalized intervention. *Journal of Personality Assessment*, 97(4), 362—373.
6. Fisher, A.J., Medaglia, J.D., & Jeronimus, B.F. (2018). Lack of group-to-individual generalizability is a threat to human subjects research. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 115(27), E6106–E6115.
7. Hamaker, E.L. (2012). Why researchers should think "within-person": A paradigmatic rationale. In: M.R. Mehl & T.S. Conner (Eds.), *Handbook of research methods for studying daily life* (pp. 43—61). New York: The Guilford Press.
8. Hox, J., Moerbeek, M., & Van de Schoot, R. (2017). *Multilevel analysis: Techniques and applications*. New York: Routledge. https://doi.org/10.4324/9781315650982
9. Molenaar, P.C. (2008). On the implications of the classical ergodic theorems: Analysis of developmental processes has to focus on intra-individual variation. *Developmental Psychobiology*, 50(1), 60—69.
10. Øksendal, B. (2003). Stochastic differential equations. In: Stochastic differential equations: An introduction with applications (pp. 38—50). Berlin, Heidelberg: Springer.
11. Ram, N., & Gerstorf, D. (2009). Time-structured and net intraindividual variability: Tools for examining the development of dynamic characteristics and processes. *Psychology and Aging*, 24(4), 778.
12. Raudenbush, S.W., & Bryk, A.S. (2002). *Hierarchical linear models: Applications and data analysis methods (Vol. 1)*. Thousand Oaks, CA: Sage.
13. Rogoff, B. (2003). *The cultural nature of human development.* Oxford: Oxford University Press.
14. Sweller, J., Van Merriënboer, J.J., & Paas, F. (2019). Cognitive architecture and instructional design: 20 years later. *Educational Psychology Review*, 31(2), 261—292.
15. Van Der Maas, H.L., Kan, K.J., Marsman, M., & Stevenson, C.E. (2017). Network models for cognitive development and intelligence. *Journal of Intelligence*, 5(2), 16.

Информация об авторах

Колачев Никита Игоревич, кандидат психологических наук, доцент департамента психологии, Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики» (ФГАОУ ВПО НИУ ВШЭ); доцент дирекции образовательных программ, Московский городской педагогический университет (ГАОУ ВО МГПУ), Москва, Российская Федерация, ORCID: https://orcid.org/0000-0002-3214-6675, e-mail: nkolachev@hse.ru

Адамский Александр Изотович, кандидат педагогических наук, доцент дирекции образовательных программ, Московский городской педагогический университет

(ГАОУ ВО МГПУ), Москва, Российская Федерация; научный руководитель, Институт проблем образовательной политики «Эврика», Москва, Российская Федерация, ORCID: https://orcid.org/0000-0002-5395-9464, e-mail: aadam93@gmail.com

Дроздов Данила Сергеевич, аспирант, стажёр-исследователь департамента психологии, Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики» (ФГАОУ ВПО НИУ ВШЭ), Москва, Российская Федерация, ORCID: https://orcid.org/0009-0007-2940-813X, e-mail: Drozdov.D.S@hse.ru

Заславский Алексей Андреевич, кандидат педагогических наук, доцент дирекции образовательных программ, Московский городской педагогический университет (ГАОУ ВО МГПУ), Москва, Российская Федерация, ORCID: https://orcid.org/0009-0009-4994-8971, e-mail: zaslavskijjaa@mgpu.ru

Подболотова Марина Ивановна, кандидат педагогических наук, доцент дирекции образовательных программ, Московский городской педагогический университет (ГАОУ ВО МГПУ), Москва, Российская Федерация, ORCID: https://orcid.org/0000-0002-4208-1385, e-mail: podbolotovami@mgpu.ru

Устюгова Ольга Борисовна, старший преподаватель дирекции образовательных программ, Московский городской педагогический университет (ГАОУ ВО МГПУ), Москва, Российская Федерация, ORCID: https://orcid.org/0000-0003-0886-2185, e-mail: ustyugovaob@mgpu.ru

Information about the authors

Nikita I. Kolachev, PhD in Psychology, Associate Professor, Department of Psychology, HSE University, Moscow, Russian Federation; Associate Professor, Directorate of Educational Programmes, Moscow City University, Moscow, Russian Federation, ORCID: https://orcid.org/0000-0002-3214-6675, e-mail: nkolachev@hse.ru

Alexander I. Adamsky, PhD in Pedagogy, Associate Professor, Directorate of Educational Programmes, Moscow City University, Moscow, Scientific Director, Institute for Problems of Educational Policy "Evrika", Moscow, Russia, ORCID: https://orcid.org/0000-0002-5395-9464, e-mail: aadam93@gmail.com

Danila S. Drozdov, PhD Student, Research Assistant, Department of Psychology, HSE University, Moscow, Russian Federation, ORCID: https://orcid.org/0009-0007-2940-813X, e-mail: Drozdov.D.S@hse.ru

Aleksey A. Zaslavskiy, PhD in Pedagogy, Associate Professor, Directorate of Educational Programmes, Moscow City University, Moscow, Russian Federation, ORCID: https://orcid.org/0009-0009-4994-8971, e-mail: zaslavskijjaa@mgpu.ru

Marina I. Podbolotova, PhD in Pedagogy, Associate Professor, Directorate of Educational Programmes, Moscow City University, Moscow, Russian Federation, ORCID: https://orcid.org/0000-0002-4208-1385, e-mail: podbolotovami@mgpu.ru

Olga B. Ustyugova, Senior Lecturer, Directorate of Educational Programmes, Moscow City University, Moscow, Russian Federation, ORCID: https://orcid.org/0000-0003-0886-2185, e-mail: ustyugovaob@mgpu.ru

Вклад авторов

Колачев Н.И. — применение математических и статистических методов для анализа данных; проведение исследования; сбор и анализ данных; визуализация результатов исследования; аннотирование, написание и оформление рукописи.

Адамский А.И. — планирование исследования; контроль за проведением исследования.

Дроздов Д.С. — планирование исследования; сбор данных; контроль за проведением исследования.

Заславский А.А. — планирование исследования; сбор данных; контроль за проведением исследования.

Подболотова М.И. — планирование исследования; сбор данных; контроль за проведением исследования.

Устюгова О.Б. — планирование исследования; сбор данных; контроль за проведением исследования.

Все авторы приняли участие в обсуждении результатов и согласовали окончательный текст рукописи.

Contribution of the authors

Nikita I. Kolachev — application of mathematical and statistical methods for data analysis; conduct of the study; data collection and analysis; visualization of the research results; manuscript annotation, writing, and preparation.

Alexander I. Adamsky — study design; supervision of the research process.

Danila S. Drozdov — study design; data collection; supervision of the research process.

Alexey A. Zaslavskiy — study design; data collection; supervision of the research process.

Marina I. Podbolotova — study design; data collection; supervision of the research process.

Olga B. Ustyugova — study design; data collection; supervision of the research process.

All authors participated in the discussion of the results and approved the final text of the manuscript.

Конфликт интересов

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Conflict of interest

The authors declare no conflict of interest.

Поступила в редакцию 15.01.2026
Поступила после рецензирования 23.01.2026
Принята к публикации 27.01.2026
Опубликована 31.03.2026

Received 2026.01.15
Revised 2026.01.23
Accepted 2026.01.27
Published 2026.03.31