Моделирование и анализ данных
2026, *16*(1), 74—86.
https://doi.org/10.17759/mda.2026160105
ISSN: 2219-3758 (печатный)
ISSN: 2311-9454 (online)

Modelling and Data Analysis
2026, *16*(1), 74—86.
https://doi.org/10.17759/mda.2026160105
ISSN: 2219-3758 (print)
ISSN: 2311-9454 (online)

МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ | OPTIMIZATION METHOD

Научная статья | Original paper

УДК 519.856

Решение задачи логистики в квантильной постановке с ограничением на время доставки

А.В. Наумов
ФГБОУ ВО «Московский авиационный институт
(национальный исследовательский университет)»
г. Москва, Российская Федерация
✉ naumovav@mail.ru

Резюме

Контекст и актуальность. В статье рассматривается квантильная постановка задачи логистики с ограничением на время выполнения задания. Задачи транспортной логистики давно и хорошо исследованы в детерминированной постановке, однако учет вероятностного ограничения на время доставки груза переводит задачу в класс задач стохастической оптимизации и требует разработки специальных методов решения. **Цель.** Для компании необходимо осуществить транспортировку однотипного груза с нескольких складов до конечных потребителей. Время доставки груза для каждого потребителя ограничено. Требуется минимизировать издержки связанные с доставкой грузов с учетом того, что время в пути от каждого склада до каждого конечного потребителя случайно. За каждым складом закреплено некоторое количество транспортных средств. Все транспортные средства однотипны и в рамках задания осуществляют лишь одну доставку со склада до одного потребителя. **Гипотеза**. Для решения задачи требуется разработка специального алгоритма решения, так как использование алгоритмов решения детерминированных задач оптимизации наталкиваются на трудности связанные большой размерностью эквивалентной детерминированной задачи. **Методы и материалы**. Задача формулируется в терминах стохастического линейного программирования с квантильным критерием и стратегией оптимизации в виде матрицы булевых переменных. Уровень доверительной вероятности отражает вероятность выполнения совместного ограничения на время доставки товара каждому из потребителей. Для решения задачи предлагается эффективный алгоритм решения.

Результаты. Приводятся результаты численного эксперимента, отражающие эффективность алгоритма. **Выводы**. Приведенные результаты показывают эффективность предложенного алгоритма по сравнению со стандартными алгоритмами детерминированной оптимизации, применяемыми для решения приведенной в работе эквивалентной детерминированной задачи.

Ключевые слова: задача логистики, стохастическое линейное программирование, квантильный критерий

Для цитирования: Наумов, А.В. (2026) Решение задачи логистики в квантильной постановке с ограничением на время доставки. *Моделирование и анализ данных, 16*(1), 74—86. https://doi.org/10.17759/mda.2026160105

Solving the logistics problem in a quantile formulation with a limitation on the delivery time

A.V. Naumov
Moscow Aviation Institute (State Research University)
Moscow, Russian Federation
✉ naumovav@mail.ru

Abstract

Context and relevance. The article discusses the quantile statement of the logistics problem with a limitation on the task execution time. The problems of transport logistics have long been well studied in deterministic formulation, however, taking into account the probabilistic limitation on the time of delivery of cargo, the problem translates into the class of stochastic optimization problems and requires the development of special solution methods. **Objective.** For the company, it is necessary to transport the same type of cargo from several warehouses to the final consumers. The delivery time for each consumer is limited. It is required to minimize the costs associated with the delivery of goods, taking into account the fact that the travel time from each warehouse to each end consumer is stochastic. A number of vehicles are assigned to each warehouse. All vehicles are of the same type and within the framework of the task they carry out only one delivery from the warehouse to one consumer. **Hypothesis.** To solve the problem, the development of a special solution algorithm is required, since the use of algorithms for solving deterministic optimization problems run into difficulties associated with a large dimension of an equivalent deterministic problem. **Methods and materials.** The problem is formulated in terms of stochastic linear programming with a quantile criterion and an optimization strategy in the form of a matrix of Boolean variables. The confidence level reflects the likelihood of meeting a joint time limit on the delivery of goods to each of the consumers. To solve the problem, an effective solution algorithm is proposed. **Results.** The results of the numerical experiment are given, reflecting the effectiveness of the algorithm. **Conclusions.** The shown results show the effectiveness of the proposed algorithm in comparison with standard deterministic optimization algorithms used to solve the equivalent deterministic problem given in the work.

Keywords: logistics problem, stochastic linear programming, quantile criterion

For citation: Naumov, A.V. (2026). Solving the logistics problem in a quantile formulation with a limitation on the delivery time. *Modelling and Data Analysis, 16*(1)*,* 74—86. (In Russ.). https://doi.org/10.17759/mda.2026160105

Введение

Задачи транспортной логистики давно и хорошо исследованы в детерминированной постановке, в том числе классиками линейного программирования (Ашманов, 2021). Современная классификация подобных задач и методов их решения представлена, например, в (Шестаков, Зуенко, 2022). Традиционные оптимизационные методы решения подобных задач, базирующиеся на теории линейного программирования актуальны и в современных научных исследованиях (Хайрулин, 2014). Другим трендом в практике решения транспортных задач является использование методов теории графов, например, (Агапова, Попова, 2021). Часто ряд параметров в логистических задачах являются неопределенными. Для их моделирования используют, в том числе, случайные величины. Результаты, учитывающие влияние случайных параметров в транспортных задачах логистики, отражены, например, в работах (Наумов, Уланов, 2003, Наумов, Богданов, 2006, Гайнанов, Игнатов, Наумов, Рассказова, 2020). Как правило (Наумов, Уланов, 2003, Наумов, Богданов, 2006), в роли случайных параметров выступает объем доставки товара, определяемый спросом на него. Однако в современных условиях, когда все большую долю рынка завоевывает сетевая торговля, организуемая маркетплейсами, все более важную роль начинают играть сроки доставки товара конечному потребителю. Они определяются рядом параметров: доступностью товаров на складах, оперативностью и организованностью работы складского персонала и службы планирования и на конечном этапе дорожной обстановкой по пути доставки от склада к конечному потребителю. Время выполнения определенного задания учитывается в качестве случайного параметра и в других приложениях теории стохастической оптимизации, например, в теории тестирования (Наумов, Мартюшова, Степанов, 2024, Наумов, Устинов, Степанов, 2024, Наумов, Мхитарян, Черыгова, 2019). В качестве распределения случайного времени выполнения определенного задания рассматриваются как непрерывные распределения, например, логнормальное или гамма-распределение (Van der Linden, Scrams, Schnipke, 1999, Босов и др., 2019), так и дискретные (Наумов, Мартюшова, Степанов, 2024, Наумов, Устинов, Степанов, 2024, Наумов, Мхитарян, Черыгова, 2019). Использование дискретных распределений случайных параметров обосновано с одной стороны возможностью аппроксимации ими соответствующих непрерывных распределений и возможностью построения этих распределений на основе анализа гистограмм, полученных на базе обработки имеющейся статистической информации о времени выполнения задания. С другой стороны использование дискретных распределений позволяет свести полученные задачи стохастической оптимизации к детерминированным задачам смешанного целочисленного программирования (Кибзун, Наумов, Норкин, 2013).

В данной работе рассматривается задача формирования оптимального плана доставки однотипной продукции компании с имеющихся складов до конечных потребителей, например, точек розничной торговли, или точек выдачи товара. За каждым складом закреплено некоторое количество транспортных средств. Все транспортные средства однотипны и в рамках рассматриваемого горизонта планирования осуществляют лишь одну доставку со склада до одного потребителя. Время доставки товара считается случайной величиной с известным дискретным законом распределения. Задача формулируется в терминах стохастического линейного программирования с квантильным критерием и стратегией оптимизации в виде матрицы булевых переменных.

Материалы и методы

Требуется осуществить доставку товара с L складов производителя однотипной продукции до конечных потребителей или точки выдачи товара в количестве M точек. К моменту формирования задания на доставку на каждом из складов доступно k_l, $l=1,\ldots,L$ однотипных транспортных средств, общее количество которых на всех складах равно $N=\sum_{i=\overline{1,L}} k_l$. Каждое из транспортных средств может в рамках задания совершить одну доставку со склада, где оно находится, до любой конечной точки доставки за случайное время T_{ij} , $i=1,\ldots,N;$ $j=1,\ldots,M$, которое моделируется дискретной случайной величиной, имеющей известный законом распределения с возможными значениями $T_{ij}^{\text{í}}$, $v=1,\ldots,V$. Случайная природа времени доставки определяется транспортной обстановкой по пути следования и оперативностью работы (загруженностью) складских служб, осуществляющих подготовку и загрузку транспортного средства, определенного к доставке. Будем считать, что все величины T_{ij} , $i=1,\ldots,N;$ $j=1,\ldots,M$ независимы. Тогда общее количество возможных значений $T^{\text{í}}$ случайной матрицы $T=\left\|T_{ij}\right\|$ равно $V^{N*\text{M}}$. Стоимость доставки товара i-ым транспортным средством до j-ой точки доставки равна $\tilde{n}_{ij}$, $i=1,\ldots,N;$ $j=1,\ldots,M$. Каждый склад характеризуется детерминированным на момент формирования транспортного задания объемом имеющегося в наличие товара z_l, $l=1,\ldots,L$. Объем товара, необходимый к доставке в каждую точку также известен y_j, $j=1,\ldots,M$. Предполагается, что вместимость любого транспортного средства позволяет его осуществить. Для каждой точки доставки определено время τ_j, $j=1,\ldots,M$, за которое в рамках формируемого задания доставка должна быть осуществлена. Нарушение сроков доставки нежелательно, так как отрицательно влияет на имидж компании и может повлечь потерю части заказов товара. Поэтому, в силу случайной природы времени доставки, это ограничение требуется к выполнению с заданной вероятностью $\alpha \in (0,1)$ Требуется минимизировать суммарные затраты на доставку товара по точкам с учетом выполнения вероятностного ограничения на соблюдения сроков доставки.

В роли оптимизационной стратегии выступает матрица булевых переменных $U = \left\| U_{ij} \right\|$ размерностью $N * M$, где

$$U_{ij} \triangleq \begin{cases} 1, \text{если i-е транспортное средство осуществляет доставку в j-ю точку }, \\ \qquad 0, \text{если не осуществляет.} \end{cases}$$

Таким образом, первые k_1 строк в матрице U соответствуют транспортным средствам находящимся на 1-м складе, и так далее, последние k_L строк соответствуют транспортным средствам находящимся на складе с номером L к моменту формирования задания на доставку. Рассмотрим величину $K_l = \sum_{t=\overline{1,l}} k_t$, $l = 1,\dots,L$, пусть $K_0 = 0$.

Задача формулируется в терминах одноэтапной задачи стохастического линейного программирования с квантильным критерием (Наумов, Игнатов, 2022). Рассмотрим функцию квантили:

$$\Phi_\alpha(U) = \min\{\varphi : \mathrm{P}\{ \textstyle\sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{M} U_{ij} c_{ij} \le \varphi;\ \max\limits_{i=1,N} T_{ij} U_{ij} \le \tau_j,\ j = \overline{1,M}\} \ge \alpha\}. \qquad (1)$$

Для поиска оптимальной стратегии доставки необходимо решить следующую оптимизационную задачу:

$$\Phi_\alpha(U) \to \min_{\mathrm{U} \in \{0,1\}^{\mathrm{N*M}}} \qquad (2)$$

при ограничениях:

$$\sum_{j=\overline{1,M}} U_{ij} \le 1, \ \ i = 1,\dots,N, \qquad (3)$$

$$\sum_{i=\overline{K_{l-1}+1,K_l}} \ \sum_{j=\overline{1,M}} y_j U_{ij} \le z_l,\ l = 1,\dots,L. \qquad (4)$$

Согласно доверительному методу [15] и утверждению, доказанному в [13], задача (2)-(3) эквивалентна следующей задаче целочисленного линейного программирования:

$$\sum_{i=\overline{1,N}} \ \sum_{j=\overline{1,M}} U_{ij} c_{ij} \to \min_{\mathrm{U} \in \{0,1\}^{\mathrm{N*M}}, \delta \in \{0,1\}^D} \qquad (5)$$

при ограничениях:

$$\sum_{j=\overline{1,M}} U_{ij} \le 1, \qquad (6)$$

$$\sum_{i=\overline{K_{l-1}+1,K_l}} \ \sum_{j=\overline{1,M}} y_j U_{ij} \le z_l,\ l = 1,\dots,L. \qquad (7)$$

$$\sum_{i=\overline{1,N}} U_{ij} T_{ij}^{\nu} \le \delta_\nu \tau_j + (1-\delta_\nu) T^{\mathrm{MAX}}, \nu = \overline{1,D}, j = 1,\dots,M, \tag{8}$$

$$\sum_{\nu=\overline{1,D}} p_\nu \delta_\nu \ge \alpha, , \tag{9}$$

где $D = V^{\mathrm{N*M}}$, а T^{MAX}-максимальное время, из всех возможных значений случайных величин $T_{ij},\ i=1,\dots,N;\ j=1,\dots,M$. Вектор $\delta \in \{0,1\}^D$ определяет вид оптимального доверительного множества в доверительном методе (Кан, Кибзун, 2009) решения задач квантильной оптимизации. Если координата δ_ν оптимального значения вектора δ принимает значение единица, то соответствующее ν-е возможное значение случайной матрицы $T = \left\| T_{ij} \right\|$ принадлежит оптимальному доверительному множеству, и ограничение (8) на время доставки должно быть выполнено. Если же $\delta_\nu = 0$, то ограничение (8) очевидно становится пассивным из-за выбора величины T^{MAX}.

Несмотря на то, что задача (5)—(7) является детерминированной задачей целочисленного линейного программирования, поиск ее оптимального решения может быть затруднен большой размерностью этой задачи. Поэтому не лишено смысла в предложении специальных алгоритмов решения задачи (2)—(4), использующих ее специфику. Рассмотрим такой алгоритм:

Алгоритм

Шаг 0.

Положим $C^* := +\infty$, а $U^* \in \{0,1\}^{N\times M}$ — нулевой.

Шаг 1.

Исключим стратегии назначения, которые не удовлетворяют ограничению на время доставки даже в самом оптимистичном сценарии, где каждая доставка осуществляется за минимально возможное время $T_{ij}^{min} = \min_{\nu} T_{ij}^{\nu}$.

Из всех допустимых матриц $U \in \{0,1\}^{N\times M}$, удовлетворяющих условиям (3)—(4), выбираем N стратегий, образующих множество $\underline{U}$, для элементов которого выполнены условия:

$$\sum_{i=1}^{N} U_{ij} T_{ij}^{min} \le \tau_j,\ j = 1,\dots,M.$$

Перенумеруем все элементы множества $\underline{U}$. Таким образом, число от 1 до H однозначно определяет элемент множества. Под U^h будем понимать h-й элемент множества $\underline{U}$. Положим $h := 1$.

На этом шаге инициируется внешний цикл перебора всех N выбранных стратегий оптимизации.

Шаг 2.

Если $h > H$ то переходим к шагу 7. В противном случае полагаем $P_h := 0$, где P_h — вспомогательный параметр для расчета вероятности выполнения ограничений.

Шаг 3.

Пусть матрица U^h содержит ровно M единиц, расположенных в позициях $(i_1,1),(i_2,2),\dots,(i_M,M)$, где i_j — номер машины, назначенной *j*-му потребителю.

Рассмотрим подвектор $col\left(T_{i_1 1},T_{i_2 2},\dots,T_{i_M M}\right)$ случайной матрицы $T=T_{ij}$.

Положим $Q:=\mathrm{V}^M$, а $q:=1$.

На этом шаге инициализируется цикл перебора всех возможных реализаций

$$col\left(t^q_{i_1 1},t^q_{i_2 1},\dots,t^q_{i_M M}\right),\ \ q=1,2,\dots,V^M,$$

где V — число возможных значений каждой случайной величины T_{ij}.

Шаг 4.

Если $q>Q$, то переходим к шагу 6.

В противном случае вычисляем вероятность данной реализации:

$$p^q=\prod_{j=1}^{M}\mathrm{P}\left(T_{i_j j}=t^q_{i_j j}\right),$$

и проверяем выполнение ограничений по времени:

$$t^q_{i_j j}\le\tau_j,\ j=1,\dots,M.$$

Если все ограничения выполнены, то полагаем $P_h:=P_h+p^q$

Шаг 5.

Полагаем $q:=\mathrm{q}+1$, и переходим к началу шага 4.

Шаг 6.

Вычисляем значение критерия для стратегии U^h:

$$C^h:=\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M}U^h_{\mathrm{ij}}c_{ij},$$

Если величина $P_h\ge\ \alpha$ и $C^h<C^*$, то полагаем $C^*:=\ C^h$, $U^*:=U^h$.

Независимо от результата сравнения, полагаем $h:=h+1$ и переходим к шагу 2.

Шаг 7.

Если $C^*=+\infty$, то решение задачи (2)—(4) отсутствует.

В противном случае полагаем оптимальное значение критерия равным C^*, а оптимальную стратегию — равной U^*.

Результаты

Задача, рассмотренная в работе, решалась для следующих исходных данных:

$L=3,\ M=6,\ k_1=3,\ k_2=2,\ k_3=3,\ y_1=2.5,\ y_2=1.8,\ y_3=2.3,\ y_4=1.2,\ y_5=2.7,\ y_6==1.4,\ z_1=5.7,\ z_2=4.7,\ z_3=3.8,\ \tau_1=4.50,\ \tau_2=4.55,\ \tau_3=4.60,\ \tau_4=4.65,\ \tau_5=4.70,\tau_6=4.75.$

Таблица 1 / Table 1

Стоимость доставки $C = \left\| c_{ij} \right\|$

Delivery cost $C = \left\| c_{ij} \right\|$

$i = 1,2,3$	3000	3200	3400	3100	3300	3500
$i = 4,5$	6000	6200	6400	6100	6300	6500
$i = 6,7,8$	4500	4700	4900	4600	4800	5000

Таблица 2 / Table 2

Распределение времени доставки $T = \left\| T_{ij} \right\|,\ j = 1,2,3$

Distribution of delivery time $T = \left\| T_{ij} \right\|,\ j = 1,2,3$

	j=1				j=2				j=3			
$i = 1$	T_{ij}^{k}	2.0	2.6	4.8	T_{ij}^{k}	2.1	2.7	4.9	T_{ij}^{k}	2.2	2.8	5.0
	k	0.65	0.25	0.1	k	0.6	0.3	0.1	k	0.55	0.35	0.1
$i = 2$	T_{ij}^{k}	2.1	2.7	4.7	T_{ij}^{k}	2.2	2.8	4.8	T_{ij}^{k}	2.3	2.9	4.9
	k	0.62	0.28	0.10	k	0.58	0.32	0.10	k	0.54	0.36	0.10
$i = 3$	T_{ij}^{k}	1.9	2.5	4.9	T_{ij}^{k}	2.0	2.6	5.0	T_{ij}^{k}	2.1	2.7	5.1
	k	0.68	0.22	0.10	k	0.64	0.26	0.10	k	0.60	0.30	0.10
$i = 4$	T_{ij}^{k}	3.7	4.0	4.3	T_{ij}^{k}	3.8	4.1	4.4	T_{ij}^{k}	3.9	4.2	4.5
	k	0.25	0.50	0.25	k	0.20	0.60	0.20	k	0.15	0.70	0.15
$i = 5$	T_{ij}^{k}	3.8	4.1	4.4	T_{ij}^{k}	3.9	4.2	4.5	T_{ij}^{k}	4.0	4.3	4.6
	k	0.30	0.40	0.30	k	0.25	0.50	0.25	k	0.20	0.60	0.20
$i = 6$	T_{ij}^{k}	3.2	3.6	4.2	T_{ij}^{k}	3.3	3.7	4.3	T_{ij}^{k}	3.4	3.8	4.4
	k	0.45	0.40	0.15	k	0.40	0.45	0.15	k	0.35	0.50	0.15
$i = 7$	T_{ij}^{k}	3.3	3.7	4.1	T_{ij}^{k}	3.4	3.8	4.2	T_{ij}^{k}	3.5	3.9	4.3
	k	0.50	0.35	0.15	k	0.45	0.40	0.15	k	0.40	0.45	0.15
$i = 8$	T_{ij}^{k}	3.1	3.5	4.3	T_{ij}^{k}	3.2	3.6	4.4	T_{ij}^{k}	3.3	3.7	4.5
	k	0.40	0.45	0.15	k	0.35	0.50	0.15	k	0.30	0.55	0.15

Таблица 3 / Table 3

Распределение времени доставки $T = \left\| T_{ij} \right\|,\ j = 4,5,6$

Distribution of delivery time $T = \left\| T_{ij} \right\|,\ j = 4,5,6$

	j=4				j=5				j=6			
$i = 1$	T_{ij}^{k}	2.0	2.6	4.8	T_{ij}^{k}	2.1	2.7	4.9	T_{ij}^{k}	2.2	2.8	5.0
	k	0.65	0.25	0.1	k	0.6	0.3	0.1	k	0.55	0.35	0.1
$i = 2$	T_{ij}^{k}	2.1	2.7	4.7	T_{ij}^{k}	2.2	2.8	4.8	T_{ij}^{k}	2.3	2.9	4.9
	k	0.62	0.28	0.10	k	0.58	0.32	0.10	k	0.54	0.36	0.10

	j=4				j=5				j=6			
$i = 3$	T_{ij}^{k}	1.9	2.5	4.9	T_{ij}^{k}	2.0	2.6	5.0	T_{ij}^{k}	2.1	2.7	5.1
	k	0.68	0.22	0.10	k	0.64	0.26	0.10	k	0.60	0.30	0.10
$i = 4$	T_{ij}^{k}	3.7	4.0	4.3	T_{ij}^{k}	3.8	4.1	4.4	T_{ij}^{k}	3.9	4.2	4.5
	k	0.25	0.50	0.25	k	0.20	0.60	0.20	k	0.15	0.70	0.15
$i = 5$	T_{ij}^{k}	3.8	4.1	4.4	T_{ij}^{k}	3.9	4.2	4.5	T_{ij}^{k}	4.0	4.3	4.6
	k	0.30	0.40	0.30	k	0.25	0.50	0.25	k	0.20	0.60	0.20
$i = 6$	T_{ij}^{k}	3.2	3.6	4.2	T_{ij}^{k}	3.3	3.7	4.3	T_{ij}^{k}	3.4	3.8	4.4
	k	0.45	0.40	0.15	k	0.40	0.45	0.15	k	0.35	0.50	0.15
$i = 7$	T_{ij}^{k}	3.3	3.7	4.1	T_{ij}^{k}	3.4	3.8	4.2	T_{ij}^{k}	3.5	3.9	4.3
	k	0.50	0.35	0.15	k	0.45	0.40	0.15	k	0.40	0.45	0.15
$i = 8$	T_{ij}^{k}	3.1	3.5	4.3	T_{ij}^{k}	3.2	3.6	4.4	T_{ij}^{k}	3.3	3.7	4.5
	k	0.40	0.45	0.15	k	0.35	0.50	0.15	k	0.30	0.55	0.15

Отличие в распределении времени доставки от склада до точки доставки объясняется взаимным расположением этих объектов, оперативностью работы складских служб, техническим состоянием автомобиля и квалификацией водителя. В результате решения задачи (5)—(8) были получены следующие результаты.

Таблица 4 / Table 4

Зависимость оптимального решения задачи от параметра α

Dependence of the optimal solution of the problem on the α parameter

α	**Равные 1 элементы оптимальной матрицы U^***	**Оптимальное значение критерия**	**Время расчета (сек)**
0.6	c_11, c_22, c_33, c_64, c_75, c_86	24000	47.91
0.7	c_11, c_22, c_33, c_64, c_75, c_86	24000	47.40
0.8	c_11, c_22, c_43, c_64, c_75, c_86	27000	47.46
0.9	c_11, c_42, c_53, c_64, c_75, c_86	30000	47.69
0.95	Нет решения	—	47.72

Обсуждение результатов

Полученные результаты работы алгоритма демонстрируют существенную зависимость оптимального решения от выбранного априори уровня доверительной вероятности, делая вероятностное ограничение на время выполнения доставки товара доминирующим при выборе оптимальной стратегии доставки. За счет априорного сокращения множества допустимых стратегий оптимизации время работы предложенного автором алгоритма оказывается приемлемым с точки зрения его использования при планировании доставки товара. Значительный перебор всех возможных значений матрицы булевых переменных U, являющейся решением задачи, может быть существенно сокращен за счет априорного учета детерминированных ограничений задачи. На этом основана идея предложенного автором алгоритма решения рассматриваемой задачи. Для предложенных выше данных удается сократить перебор возможных стратегий оптимизации с 2^{8*6} до величины меньше либо равной $C_8^6 = 28$.

Заключение

В работе предложена базовая модель оптимального планирования доставки товара со складов предприятия до точек выдачи товара или розничной торговли. Отличительной особенностью данной модели является учет случайного времени доставки в виде вероятностного ограничения, что особенно актуально для работы современных маркетплейсов. Данная модель может быть усложнена возможностью использования, в рамках планируемого задания на доставку, автомобилей различной грузоподъемности, с различной стоимостью доставки и т.д. Полученная задача стохастического линейного программирования допускает сведение к детерминированной задаче линейного программирования с булевыми переменными и большой размерностью. Трудности, вызванные большой размерностью полученной детерминированной задачи делает актуальной разработку специальных подходов к поиску оптимального решения исходной задачи.

Можно отметить, что подобные модели могут быть также использованы в других прикладных областях теории оптимизации, таких как финансовая математика (Игнатов, 2020), оптимизация в мультиагентных системах (Kuravsky, Popkov, 2018), и других областях (Santoso, Ahmed, Goetschalckx, Shapiro, 2005).

Список источников / References

1. Агапова, Е.Г., Попова, Т.М. (2021). Математическая модель задачи логистики с переменным тарифом. *International Journal of Advanced Studies: Transport and Information Technologies,* 11(2), 7—20. (In Russ.). DOI: 10.12731/2227-930X-2021-11-2-7-20
   Agapova, E.G., Popova, T.M. (2021). Mathematical model of the problem of logistics with a variable tariff. *International Journal of Advanced Studies: Transport and Information Technologies,* 11(2), 7—20. (In Russ.). https://doi.org/10.12731/2227-930X-2021-11-2-7-20
2. Ашманов, С.А. *Линейное программирование*. (2021). URSS. Изд. 2. стереотип.
   Ashmanov, S.A. Linear programming. (2021). URSS. Publ. 2, Stereotyp. (In Russ.).
3. Босов, А.В., Мхитарян, Г.А., Наумов, А.В., Сапунова, А.П. (2019). Использование гамма-распределения в задаче формирования ограниченного по времени теста. *Информатика и ее применение*, 13(4), 12—18. (In Russ.). *https://doi.org/10.14357/19922264190402*
   Bosov, A.V., Naumov, A.V., Mhitarian, G.A., Sapunova A.P. (2019). Using gamma distribution in a time-limited test problem. *Informatics and its application (Russia),*13(4), 12—18. (In Russ.). https://doi.org/10.14357/19922264190402
4. Гайнанов, Д.Н., Игнатов, А.Н., Наумов, А.В., Рассказова, В.А. (2020). О задаче назначения «технологического окна» на участках железнодорожной сети. *Автоматика и Телемеханика,* 6, 3—16. (In Russ.). https://doi.org/10.31857/S0005231020060013

Gainanov, D.N., Ignatov, A.N., Naumov, A.V., Rasskazova, V.A. (2020). On track procession assignment problem at the railway network sections. *Automation and Remote Control,* 81(6), 967—977. https://doi.org/10.1134/S0005117920060028

5. Игнатов, А.Н. (2020). О формировании позиционного управления в многошаговой задаче портфельной оптимизации с вероятностным критерием. *Автоматика и телемеханика*,12, 50—66. (In Russ.). https://doi.org/10.31857/S000523102012003X
Ignatov, A.N. (2020). On the construction of positional control in the multistep portfolio optimization problem with probabilistic criterion. *Automation and Remote Control,* 81(12), 2181—2193.

6. Кан, Ю.С., Кибзун, А.И. (2009). *Задачи стохастического программирования с вероятностными критериями*. М.: Физматлит.
Kan, Yu.S., Kibzun, A.I. (2009). *Stochastic programming problems with probabilistic criteria*. M.: Fizmatlit. (In Russ.).

7. Кибзун, А.И., Наумов, А.В., Норкин, В.И. (2013). О сведении задачи квантильной оптимизации с дискретным распределением к задаче смешанного целочисленного программирования. *Автоматика и Телемеханика*, 6, 66—86. (In Russ.). https://doi.org/10.1134/S0005117913060064.
Kibzun, A.I., Naumov, A.V., Norkin, V.I. (2013). On reducing a quantile optimization problem with discrete distribution to a mixed integer programming problem. *Automation and Remote Control,* 74(6), 951—967. https://doi.org/10.1134/S0005117913060064.

8. Наумов, А.В., Мартюшова, Я.Г., Степанов, А.Е. (2024). Оптимизация прохождения ограниченного по времени теста по квантильному критерию. *Информатика и её применения*, 18(4), 44—51. (In Russ.). *https://doi.org/10.14357/19922264240406*
Naumov, A.V., Martyushova, Ya.G., Stepanov, A.E. (2024). Optimization of passing a time-limited test according to the quantile criterion. *Informatics and its application (Russia),*18(4), 44—51. (In Russ.). *https://doi.org/10.14357/19922264240406*

9. Наумов, А.В., Богданов, А.Б. (2006). Решение двухэтапной задачи логистики в квантильной постановке. *Автоматика и Телемеханика*, 12, 36—42. (In Russ.).
Naumov, A.V., Bogdanov, A.B. (2006). Solution to a two-step logistic problem in a quantile statement. *Automation and Remote Control,* 67(12),1893—1899. *https://doi.org/10.1134/S0005117906120034*

10. Наумов, А.В., Игнатов, А.Н. (2022). *Решение задач стохастического линейного программирования с квантильным критерием*. М: Доброе слово и Ко.
Naumov, A.V., Ignatov, A.N. (2022*). Solving stochastic linear programming problems with quantile criterion*. M: Kind word and Co. (In Russ.).

11. Наумов, А.В., Мхитарян, Г.А., Черыгова, Е.Е. (2019). Стохастическая постановка задачи формирования теста заданного уровня сложности с минимизацией квантили времени выполнения. *Вестник компьютерных и информационных технологий*, 2, 37—46. DOI: 10.14489/vkit.2019.02.pp.037-046.
Naumov, A.V., Mhitarian, G.A., Cherygova, E.E. (2019). Stochastic formulation of the task of forming a test of a given complexity level with minimization of quantile of execution time. *Bulletin of Computer and Information Technologies (Russia),* 2. 37—46. (In Russ.). DOI: 10.14489/vkit.2019.02.pp.037-046.

12. Наумов, А.В., Уланов, С.В. (2003). Учет риска в двухэтапных задачах оптимального распределения ресурсов. *Автоматика и Телемеханика*, 7, 109—116. (In Russ.).
Naumov, A.V., Ulanov, S.V. (2003). Risk in two-stage optimal resource allocation. *Automation and Remote Control,* 64(7),1115—1121. https://doi.org/10.1023/A:1024786218814
13. Наумов, А.В., Устинов, А.Э., Степанов, А.Е. (2024). О задаче максимизации вероятности успешного прохождения ограниченного по времени теста. *Автоматика и Телемеханика,* 1, 83—94. (In Russ.).
Naumov, A., Stepanov, A., Ustinov, A. (2024). On the Problem of Maximizing the Probability of Successful Passing of a Time-Limited Test. *Automation and Remote Control.* no. 1, pp. 83—94 DOI: 10.31857/S0005231024010056
14. Хайрулин, Р.З. (2014) Моделирование развоза грузов по разветвленной сети автодорог. *Вестник МГСУ,*7, 184—191.
Khairulin, R.Z. (2014).Modeling of cargo delivery along an extensive road network. *Bulletin of MGSU (Russia),*7, 184—191. (In Russ.).
15. Шестаков, А.В., Зуенко, А.А. (2022). Задачи логистики: классификация и методы решения. *Труды Кольского научного центра РАН*, *Серия: Технические науки*, 13 (2), 144—150. DOI: 10.37614/2949-1215.2022.13.2.014
Shestakov, A.V., Zuenko, A.A. (2022). Logistics tasks: classification and solution methods. *Proceedings of the Kola Scientific Center of the Russian Academy of Sciences, Series: Technical Sciences,* 13 (2), 144—150. (In Russ.). DOI: 10.37614/2949-1215.2022.13.2.014
16. Kuravsky, L.S., Popkov, S.I. (2018). Forecasting macro parameters representing the behavior of an applied multi-agent system. *International Journal of Modeling, Simulation, and Scientific Computing*, 9(6), Art. 1850052. https://doi.org/10.1142/S1793962318500526
17. Naumov, A.V., Ustinov, A.E., Stepanov, A.E. (2024). On the problem of maximizing the probability of successful passing a time-limited test. *Automation and Remote Control,* 85(6), 60—67. https://doi.org/10.1134/S0005117924010053
18. Santoso, T., Ahmed, S., Goetschalckx, M., Shapiro, A. (2005). A stochastic programming approach for supply chain network design under uncertainty. *European Journal of Operational Research*, 167(1), 95—115. https://doi.org/10.18452/8297
19. Van der Linden, W. J., Scrams, D. J., Schnipke, D. L. (1999). Using Response-Time Constraints to Control for Differential Speededness in Computerized Adaptive Testing. *Applied Psychological Measurement*, 23(3), 195—210. DOI: 10.1177/01466219922031329.

Информация об авторах

Андрей Викторович Наумов, доктор физико-математических наук, профессор кафедры «Теория вероятностей и компьютерное моделирование», факультет, Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет) (ФГБОУ ВО), Москва, Российская Федерация, ORCID: https://orcid.org/ 0000-0002-3631-6168, e-mail: naumovav@mail.ru

Information about the authors

Andrey V. Naumov, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Department of Probability Theory and Computer Modeling, Department of Psychology, Moscow Aviation Institute

(National Research University), Moscow, Russian Federation, ORCID: https://orcid.org/0000-0002-3631-6168, e-mail: naumovav@mail.ru

Конфликт интересов

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Conflict of interest

The authors declare no conflict of interest.

Поступила в редакцию 29.01.2026 — Received 2026.01.29
Поступила после рецензирования 15.02.2026 — Revised 2026.02.15
Принята к публикации 21.02.2026 — Accepted 2026.02.21
Опубликована 31.03.2026 — Published 2026.03.31