

Научная статья | Original paper

УДК 378.147:512.7

Алгебраические кривые высших порядков в преподавании высшей математики. Кубические кривые

Е.Д. Куланин ✉, М.Е. Степанов

Московский государственный психолого-педагогический университет (МГППУ)
Москва, Российская Федерация

✉ lucas03@mail.ru

Резюме

Контекст и актуальность. В рабочих программах дисциплин «Геометрия и топология», «Математический анализ», «Математика» и других, входящих в образовательные программы специальностей по информационным технологиям, важное место занимает понятие алгебраической кривой. Освоение этого понятия требует от студентов способности к абстрактному мышлению и зачастую вызывают существенные затруднения. **Цель.** Повысить качество усвоения учебного материала по дисциплинам, связанным с понятием алгебраической кривой, используя при этом программные средства для визуализации различных алгебраических кривых и семейств алгебраических кривых. Ещё одной не менее важной целью является описание вопросов, которые могут стать темами курсовых и дипломных работ. **Гипотеза.** Использование программных средств для визуализации различных алгебраических кривых и семейств алгебраических кривых позволяет преподавателю максимально понятно подать материал, а студентам лучше усвоить материал и получить навыки решения задач на построение алгебраических кривых. **Методы и материалы.** В большинстве заданий в этой статье предлагается написать компьютерную программу, визуализирующую алгебраические кривые и их семейства. **Результаты.** Разработана система заданий, позволяющих студентам строить кубические кривые с помощью компьютерных программ. **Выводы.** Применение разработанной системы учебных заданий подтвердило важность использования специальных программных средств для усвоения материала по теории алгебраических кривых.

Ключевые слова: высшее образование, методика преподавания математики, аналитическая геометрия, визуальные образы, алгебраические кривые, кубические кривые, особые точки плоских кривых, классификация кубических



кривых, пучки кубических кривых, методы построения алгебраических кривых, геометрические образы алгебраических кривых, аффинные и проективные преобразования

Для цитирования: Куланин, Е.Д., Степанов, М.Е. (2026). Алгебраические кривые высших порядков в преподавании высшей математики. Кубические кривые. *Моделирование и анализ данных*, 16(2), 210–242. <https://doi.org/10.17759/mda.2026160212>

Algebraic curves of higher orders in teaching higher mathematics. Cubic curves

Y.D. Kulanin ✉, M.E. Stepanov

Moscow State University of Psychology and Education, Moscow, Russian Federation

✉ lucas03@mail.ru

Abstract

Context and relevance. In the working programs of the disciplines “Geometry and Topology”, “Mathematical Analysis”, “Mathematics” and others, included in the educational programs of specialties in information technologies, an important place is occupied by the concept of an algebraic curve. The development of this concept requires students to have the ability to think abstractly and often cause significant difficulties. **Purpose.** To improve the quality of learning the educational material on disciplines related to the concept of an algebraic curve, while using software tools for visualization various algebraic curves and families of algebraic curves. Another equally important goal is to describe issues that can become the topics of term papers and theses. **Hypothesis.** The use of software tools for visualizing various algebraic curves and families of algebraic curves allows the teacher to present the material in the most understandable way, and students to better understand the material and acquire the skills of solving problems on the construction of algebraic curves. **Methods and materials.** Most of the exercises in this article involve writing a computer program that visualizes algebraic curves and their families. **Results.** A system of tasks has been developed that allows students to construct cubic curves using computer programs. **Conclusions.** The use of the developed system of educational tasks has confirmed the importance of using special software tools for mastering the theory of algebraic curves.

Keywords: higher education, methods of teaching mathematics, analytical geometry, visual images, algebraic curves, cubic curves, special points of plane curves, classification of cubic curves, bundles of cubic curves, methods of constructing algebraic curves, geometric images of algebraic curves, affine and projective transformations



For citation: Kulanin, Y.D., Stepanov, M.E. (2026). Algebraic curves of higher orders in teaching higher mathematics. Cubic curves. *Modelling and Data Analysis*, 16(2), 210–242. (In Russ.). <https://doi.org/10.17759/mda.2026160212>

Введение

Статья продолжает цикл методических разработок авторов (Куланин, Степанов, Нуркаева, 2020); (Куланин, Степанов, Нуркаева, 2021); (Куланин, Степанов, 2024); (Куланин, Степанов, 2025).

Непосредственно она продолжает статью «Алгебраические кривые высших порядков в преподавании высшей математики. Методы построения алгебраических кривых» (Куланин, Степанов, 2025). В ней обсуждаются некоторые проблемы, связанные с путями повышения культуры математического мышления студентов-математиков.

Главным объектом обсуждения являются алгебраические кривые третьей степени. Авторы опираются на опыт работы на факультете информационных технологий МГППУ.

Итак, одним из направлений изучения алгебраических кривых является изучение конкретных видов этих кривых, то есть замечательных кривых (Савёлов, 1960), как их иногда называют. Но уже в случае кривых второго порядка важнейшим вариантом их изучения является разбиение множества всех таких кривых на классы. Основой разбиения может быть, как вид канонических уравнений, так и форма кривых. Естественно, возникает мысль о классификации алгебраических кривых определённого порядка, например, кубических кривых.

Прежде, чем говорить о классификации кубических кривых, рассмотрим достаточно простую задачу, состоящую в описании формы многочленов, зависящих от одной переменной. При этом, очевидно, необходимо использовать методы математического анализа и общей алгебры.

Задание 1. Описать форму кубических полиномов от одной переменной.

Решение. Прежде всего необходимо определиться с тем, что подразумевается под формой кубических многочленов от одной переменной. Надо полагать, что речь может идти о сравнении графиков соответствующих функций в декартовой системе координат. Обычно задачей первостепенной важности является вопрос о корнях многочлена. Но в данном случае основным фактором, определяющим форму графика, является наличие интервалов возрастания, убывания и экстремумов.

При этом параллельный сдвиг графика в декартовой плоскости и отражение относительно оси абсцисс формы не меняет. Таким образом, можно считать, что коэффициент при кубической степени положителен. Следовательно, при $x \rightarrow -\infty$, стремящемся к минус бесконечности, функция также стремится к минус бесконечности. Аналогичная ситуация при $x \rightarrow +\infty$, стремящемся к плюс бесконечности.

Поскольку производной кубического многочлена от одной переменной является квадратный многочлен. Именно его корни важны в данном случае. Если у производной действительных корней нет или только один кратности два, то функция



монотонно возрастает. Если же производная имеет два различных действительных корня, то функция имеет два экстремума. Очевидно, что это максимум и минимум.

Итак, функция возрастает, достигает локального максимума, убывает, пока не достигнет локального минимума, и снова начинает возрастать. Вопрос о том различаются ли формы графиков без корней и с одним корнем, решается по усмотрению студента, выполняющего задание.

Задание можно назвать излишне простым. Тем не менее, самостоятельное её решение студентом ставит перед ним ряд нестандартных вопросов. Прежде всего, речь идёт о том, как определять форму кривых. Чтобы решить эту проблему, студенту необходимо проявить творческий подход.

Далее могут решаться задания с постепенным возрастанием степеней. Первым шагом является следующая задача.

Задание 2. Описать форму полиномов четвёртой степени от одной переменной.

Решение. Нужно снова рассмотреть различные варианты наличия действительных корней у производной, которая является кубическим полиномом.

Более сложным вариантом рассмотрения формы графиков является изучение дробно-рациональных функций, то есть функций вида $y = \frac{f(x)}{g(x)}$, где $f(x)$ и $g(x)$ — многочлены.

Дело в том, что неявное описание таких функций даётся многочленом от двух переменных $f(x) - y \cdot g(x) = 0$. При этом график дробно-рациональной функции может быть построен без особых проблем, причем он показывает некоторые особенности формы многочленов от двух переменных степени выше второй. Речь идёт о том, что эти линии могут распадаться на несколько ветвей. При этом, выбирая порядок корней числителя и знаменателя, можно конструировать число ветвей и их форму.

Задание 3. Построить график дробно-рациональной функции, у которой числитель и знаменатель разложены на произведение двучленов первой степени.

Решение. Пусть для примера у функции $y = \frac{f(x)}{g(x)}$, имеет место разложение числителя и знаменателя на множители: $f(x) = (x - x_1) \cdot \dots \cdot (x - x_5)$ и $g(x) = (x - a_1) \cdot \dots \cdot (x - a_3)$. В точках $\{x_i\}$ расположены корни функции, а в точках $\{a_j\}$ — вертикальные асимптоты.

При этом общая совокупность этих чисел упорядочена следующим образом: $x_1, x_2, a_1, x_3, a_2, x_4, x_5, a_3$. График многочлена пятой степени будем строить с помощью сканирования координатной плоскости. Результат работы программы с четырьмя ветвями показан на рис. 1.

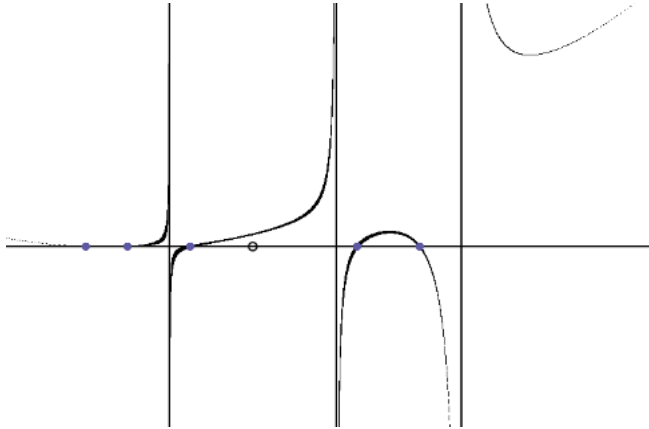


Рис. 1. Результат работы программы с четырьмя ветвями

Fig. 1 The result of a program with four branches

Текст программы

```
GraphicsWindow.Width = 800
GraphicsWindow.Height = 600
x0 = 300
y0 = 300
ed = 50
GraphicsWindow.DrawEllipse(x0-5, y0-5, 10, 10)
GraphicsWindow.DrawLine(0, y0, 800, y0)
'Корни многочленов
x1 = -4
x2 = -3
a1 = -2
x3 = -1.5
a2 = 2
x4 = 2.5
x5 = 4
a3 = 5
'Сканирование декартовой плоскости
For x = -6 To 14 Step .01
For y = -6 To 6 Step .01
'Вычисление значений функции  $z = F(x, y)$ 
z1 = (x - x1)*(x - x2)*(x - x3)*(x - x4)*(x - x5)
z2 = y*(x - a1)*(x - a2)*(x - a3)*30
z = (z1 - z2)
xe = x0 + x*ed
ye = y0 - y*ed
If Math.Abs(z) < 10 Then
GraphicsWindow.SetPixel(xe, ye, "blake")
```



```
EndIf
EndFor
EndFor
xe = x0 + a1*ed
GraphicsWindow.DrawLine(xe,0, xe,600)
xe = x0 + a2*ed
GraphicsWindow.DrawLine(xe,0, xe,600)
xe = x0 + a3*ed
GraphicsWindow.DrawLine(xe,0, xe,600)
xe = x0 + x1*ed
GraphicsWindow.FillEllipse(xe-5, y0-5,10,10)
xe = x0 + x2*ed
GraphicsWindow.FillEllipse(xe-5, y0-5,10,10)
xe = x0 + x3*ed
GraphicsWindow.FillEllipse(xe-5, y0-5,10,10)
xe = x0 + x4*ed
GraphicsWindow.FillEllipse(xe-5, y0-5,10,10)
xe = x0 + x5*ed
GraphicsWindow.FillEllipse(xe-5, y0-5,10,10)
```

Особые точки плоских кривых

Переходя к изучению кубических кривых, как единого множества, подобного совокупности кривых второго порядка, вспомним об особых точках регулярных плоских кривых (Погорелов, 1974).

Не будем вдаваться в математические тонкости и ограничимся определением на образном уровне. **Точка возврата** — это точка излома гладкой линии. При этом линия входит в точку возврата по касательной и по той же касательной исходит в обратную сторону (рис. 2). Легко понять, что циссоида Диоклеса имеет точку возврата. А что касается кривых второго порядка, то они точек возврата не имеют.

Узловая точка — это точка самопересечения кривой (рис. 3). Кривые второго порядка не имеют и узловых точек.

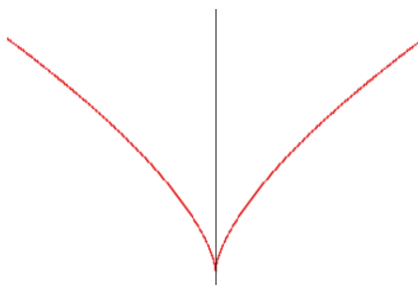


Рис. 2. Точка возврата
Fig. 2. Cusp

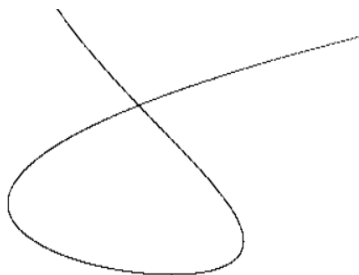


Рис. 3. Узловая точка
Fig. 3. Nodal point



Задание 4. Написать программу, которая строит линию с точкой возврата и линию с узловой точкой.

Решение. В учебниках дифференциальной геометрии, например, в (Погорелов, 1974), описываются параметрические формулы кривых, имеющих особые точки соответствующего вида. По этой причине программу легко написать. Рисунки 2 и 3 как раз и построены с её помощью.

```
GraphicsWindow.Width = 600
GraphicsWindow.Height = 500
' Начало координат
x0 = 300
y0 = 200
'Единичный отрезок
ed = 100
'Узловая точка
For t = -3 To 3 Step .001
x = x0 + (t*t*t*t - 3*t*t)*ed
y = y0 - (t*t + t)*ed
GraphicsWindow.SetPixel(x, y, "black")
EndFor
'Точка возврата
For t = -3 To 3 Step .001
x = x0 + t*t*t*ed
y = y0 - t*t*ed + 2.5*ed
GraphicsWindow.SetPixel(x, y, "red")
EndFor
```

Достаточно подробное описание алгебраических кривых должно содержать описание ветвей соответствующей кривой и перечисление её особых точек. Таким образом, поиск особых точек алгебраической кривой является одним из направлений изучения этих кривых.

В книге (Фихтенгольц, 1962) рассматриваются примеры кривых с особыми точками. Важно отметить то обстоятельство, что рассмотрение особенностей алгебраических кривых в данном случае рассматривается в рамках математического анализа.

С позиций алгебраической геометрии эти особенности изучаются в книге (Уокер, 1950). В ней также приводятся интересные примеры.

Задание 5. Написать программу, которая строит линию с точкой самокасания по формуле $2x^4 - 3x^2y + y^2 - 2y^3 + y^4 = 0$.

Решение. Результат работы соответствующей программы показан на рис. 4.

```
GraphicsWindow.Width = 600
GraphicsWindow.Height = 420
x0 = 300
y0 = 350
ed = 150
```



```
c = 2
For x = -2 To 2 Step .001
For y = 0 To 3 step .001
z = 2*x*x*x*x*x - 3*x*x*x*y + y*y - 2*y*y*y + y*y*y*y
If Math.Abs(z) < .005 Then
xe = x0 + x*ed
ye = y0 - y*ed
GraphicsWindow.SetPixel(xe, ye, "black")
EndIf
EndFor
EndFor
```

Задание 6. Построить «когтеобразное остриё» по формуле $x^4 + x^2y^2 - 2x^2y - xy^2 + y^2 = 0$.

Решение. В предыдущей программе заменить формулу, описывающую кривую. Результат показан на рис. 5.

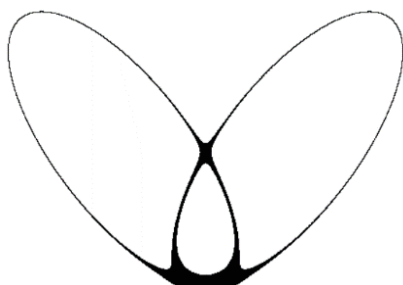


Рис. 4. Линия с точкой самокасания
Fig. 4. Line with self-tangency point

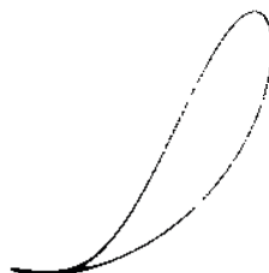


Рис. 5. «Когтеобразное остриё»
Fig. 5. «Claw-shaped point»

Задание 7. На основе изложенных фактов написать демонстрационную или обучающую программу, посвящённую особым точкам алгебраических кривых.

Исследование кубических кривых

Легко понять, что кубические кривые значительно более разнообразны, чем кривые второго порядка. Попытаемся хотя бы поверхностно ознакомиться с возможными формами кубических кривых. Будем исходить из того, что, кубический многочлен от двух переменных $F(x, y)$ может являться произведением многочленов меньшей степени, то есть быть приводимым.

При этом возможны два варианта. Сомножителями могут быть либо три многочлена первой степени от двух переменных, либо линейный многочлен и многочлен второй степени от двух переменных. В первом случае кубика $F(x, y) = 0$



вырождается в три прямые, во втором — она распадается на прямую и кривую второго порядка. Неприводимая кубика $F(x, y) - c = 0$ при изменении параметра c принимает новые формы, которые, однако, достаточно наглядным образом связаны с исходной вырожденной кривой.

Задание 8. Построить кривые третьего порядка на основе исходной линии, распадающейся на прямую и эллипс.

Решение. Естественно, что программа строит кривые методом сканирования. Результат работы программы при c от -5 до 0 показан на рис. 6, а при c от 0 до 5 показан на рис. 7.

```
GraphicsWindow.Width = 600
GraphicsWindow.Height = 600
x0 = 300
y0 = 300
ed = 100
For x = -3 To 3 Step .002
For y = -3 To 3 Step .002
s1 = x*x + y*y - x*y - 1
s2 = 3*x - y - 1
z = s1*s2
xe = x0 + x*ed
ye = y0 - y*ed
If Math.Abs(z) < .01 Then
GraphicsWindow.FillEllipse(xe-3, ye-3, 6, 6)
EndIf
EndFor
EndFor
For c = -5 To 0 Step .5
For x = -3 To 3 Step .002
For y = -3 To 3 Step .002
s1 = x*x + y*y - x*y - 1
s2 = 3*x - y - 1
z = s1*s2 + c
xe = x0 + x*ed
ye = y0 - y*ed
If Math.Abs(z) < .01 Then
GraphicsWindow.SetPixel(xe, ye, "black")
EndIf
EndFor
EndFor
EndFor
```

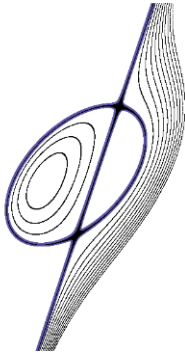


Рис. 6. Кривая, распадающаяся на прямую и эллипс

Fig. 6. Curve disintegrating into straight line and ellipse

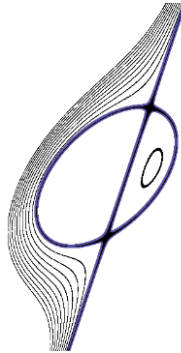


Рис. 7. Кривая, распадающаяся на прямую и эллипс

Fig. 7. Curve disintegrating into straight line and ellipse

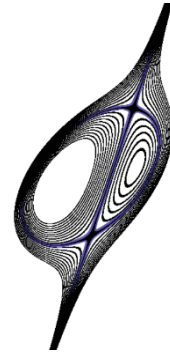


Рис. 8. Кривая, распадающаяся на овал и бесконечную ветвь

Fig. 8. Curve disintegrating into oval and infinite branch

Задание 9. Построить те кривые из предыдущего задания, которые распадаются на овал и бесконечную ветвь.

Решение. Изменяя параметр c от -1 до 1 с шагом 0 , получим семейство кривых, которое показано на рис. 8.

Можно считать, что в двух последних заданиях был произведён вычислительный эксперимент, который показал, что при изменении параметра c от минус бесконечности до малых по модулю отрицательных значений соответствующие кривые имеют одну бесконечную ветвь.

Затем появляется ещё одна овальная ветвь, которая сначала представляет собой точку, а затем растёт и обращается в исходный эллипс. Затем, уже при положительных значениях параметра c , возникают овалы во второй части эллипса. С ростом этого параметра овалы стягиваются в точку, а потом остаётся только одна бесконечная ветвь.

Это, так сказать, умозрительные выводы из вычислительного эксперимента. Желательно было бы провести теоретически обоснованное исследование соответствующей зависимости, например, позволяющих выяснить, при каких значениях параметра c овалы стягиваются в точки.

Прежде всего, нужно построить поверхность $z = F(x, y)$. Это поможет объяснить характер эволюции соответствующих кривых при изменении параметра c . Может проясниться и вопрос о том, при каких значениях параметра c овалы стягиваются в точки.

Задание 10. Построить поверхность $z = F(x, y)$, где $F(x, y) = 0$ формула кривой третьего порядка, распадающейся на прямую и эллипс.

Решение. Для наглядности предположим, что $F(x, y) = x \cdot (x^2 + y^2 - 1)$. Результат работы программы показан на рис. 9.



```
pi = Math.Pi
GraphicsWindow.Width = 600
GraphicsWindow.Height = 600
‘Система аксонометрических координат
ed = 225
x0 = 300
y0 = 300
k = 1/3
ug = pi/8
x1 = x0 + ed* Math.Cos(ug)
y1 = y0 – ed* Math.Sin(ug)*k
x2 = x0 + ed* Math.Cos(ug+pi/2)
y2 = y0 – ed* Math.Sin(ug+pi/2)*k
x3 = x0
y3 = y0 – ed/2
‘Декартова плоскость
For x = –1 To 1 Step .002
For y = –1 To 1 Step .2
z = 0
xe = x0 + x*(x1 – x0) + y*(x2 – x0) + z*(x3 – x0)
ye = y0 + x*(y1 – y0) + y*(y2 – y0) + z*(y3 – y0)
GraphicsWindow.SetPixel(xe, ye, “green”)
EndFor
EndFor
For x = –1 To 1 Step .2
For y = –1 To 1 Step .002
z = 0
xe = x0 + x*(x1 – x0) + y*(x2 – x0) + z*(x3 – x0)
ye = y0 + x*(y1 – y0) + y*(y2 – y0) + z*(y3 – y0)
GraphicsWindow.SetPixel(xe, ye, “green”)
EndFor
EndFor
‘Поверхность третьего порядка
For x = –1 To 1 Step .002
For y = –1 To 1 Step .2
s1 = x*x + y*y – 1
s2 = x
z = s1*s2
xe = x0 + x*(x1 – x0) + y*(x2 – x0) + z*(x3 – x0)
ye = y0 + x*(y1 – y0) + y*(y2 – y0) + z*(y3 – y0)
GraphicsWindow.SetPixel(xe, ye, “”)
EndFor
EndFor
For x = –1 To 1 Step .2
For y = –1 To 1 Step .002
s1 = x*x + y*y – 1
s2 = x
```



```

z = s1*s2
xe = x0 + x*(x1 - x0) + y*(x2 - x0) + z*(x3 - x0)
ye = y0 + x*(y1 - y0) + y*(y2 - y0) + z*(y3 - y0)
GraphicsWindow.SetPixel(xe, ye, "")
EndFor
EndFor

```

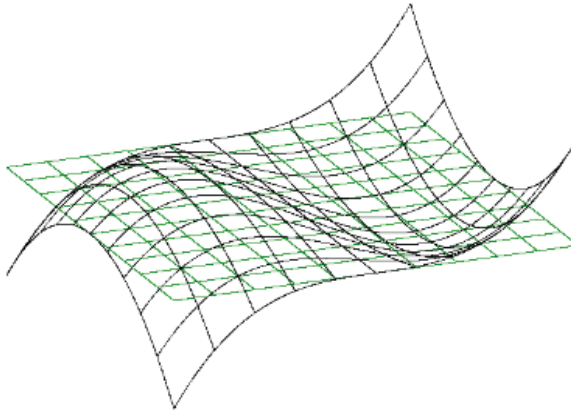


Рис. 9. Поверхность третьего порядка

Fig. 9. Third order surface

Рисунок 9 показывает, что функция $z = F(x, y)$ имеет локальный максимум и локальный минимум. Становится очевидным, что овалы стягиваются в точку именно в точках экстремума. Соответствующие кривые являются сечением поверхности плоскостями, касающимися поверхности в точках экстремума.

Задание 11. Для кривых третьего порядка на основе исходной линии, распадающейся на прямую и эллипс, найти те кривые, у которых овал стягивается в точку.

Решение. Согласно выше сказанному, задача сводится к поиску точек экстремума функции $z = F(x, y)$. В нашем случае речь идёт о функции $z = x \cdot (x^2 + y^2 - 1)$. Поскольку соответствующая поверхность симметрична относительно плоскости xOz , при любых значениях x и при $y = 0$ частная производная $\frac{\partial F}{\partial y} = 0$.

Таким образом, для нахождения экстремумов достаточно найти значения переменной x на оси Ox ($y = 0$), при которых производная функции $z = x^3 - x$ равна нулю. Очевидно, что соответствующие значения равны $\pm \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Рассмотрим локальный максимум, который достигается в точке $(-\frac{1}{\sqrt{3}}; 0)$. В ней $z = \frac{4}{3\sqrt{3}}$. Значит, овалы стягиваются в точку именно здесь, а соответствующая функция описывается формулой $x \cdot (x^2 + y^2 - 1) - \frac{4}{3\sqrt{3}} = 0$.



Результат работы программы, строящую эту кривую показан на рис. 10.

```
GraphicsWindow.Width = 400
GraphicsWindow.Height = 600
x0 = 200
y0 = 300
ed = 100
r = Math.SquareRoot(3)
GraphicsWindow.DrawLine(x0,0, x0,600)
GraphicsWindow.DrawEllipse(x0 - ed, y0 - ed, 2*ed, 2*ed)
For x = -1 To 0 Step .001
For y = -1 To 1 Step .001
z = x*x*x + x*y*y - x - 4/(3*r)
xe = x0 + x*ed
ye = y0 - y*ed
If Math.Abs(z) < .39 Then
GraphicsWindow.SetPixel(xe, ye, "black")
EndIf
EndFor
EndFor
For x = 0 To 2 Step .005
For y = -3 To 3 Step .005
z = x*x*x + x*y*y - x - 4/(3*r)
xe = x0 + x*ed
ye = y0 - y*ed
If Math.Abs(z) < .1 Then
GraphicsWindow.SetPixel(xe, ye, "black")
EndIf
EndFor
EndFor
```

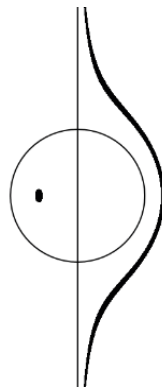


Рис. 10. Результат работы программы задания 11

Fig. 10. Result of task program 11



Пока мы имели дело с кривыми, порождаемыми исходной кривой, у которой эллипс и прямая пересекаются. Мы провели вычислительные эксперименты и составили представление о форме соответствующих кривых.

Можно перейти к рассмотрению других вариантов взаимного расположения прямой и эллипса. И в каждом из вариантов проделать аналогичные вычислительные эксперименты.

Задание 12. Рассмотреть те кривые третьего порядка на основе исходной линии, распадающейся на прямую и эллипс, для которых эллипс и прямая касаются друг друга.

Решение. Изучение указанного класса кривых можно провести с помощью соответствующей модификации программ из заданий 8–10. Форма кривых и вид поверхности показаны на рисунках 11 и 12.

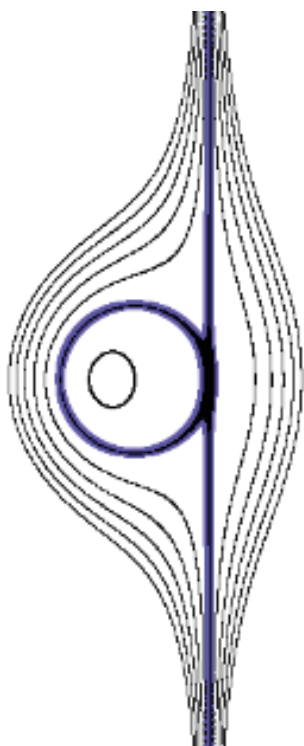


Рис. 11. Кривые задания 12

Fig. 11. Job Curves 12

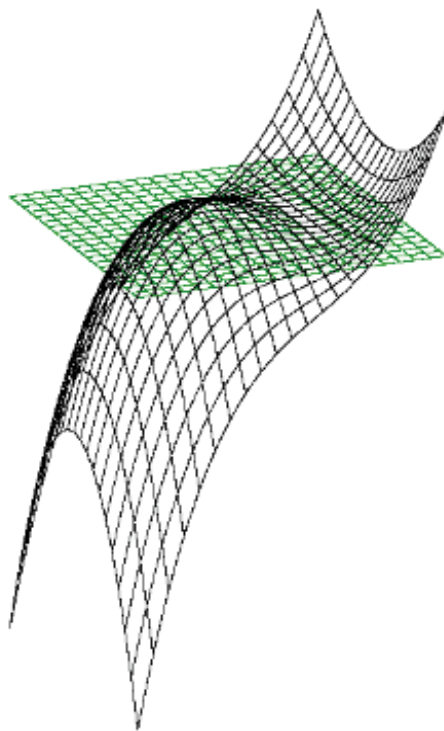


Рис. 12. Поверхность задания 12

Fig. 12. Job Surface 12

Задание 13. Рассмотреть те кривые третьего порядка на основе исходной линии, распадающейся на прямую и эллипс, для которых эллипс и прямая не пересекаются.

Решение. И здесь достаточно модифицировать программы из заданий 8–10. Форма кривых и вид поверхности показаны на рисунках 19 и 20.

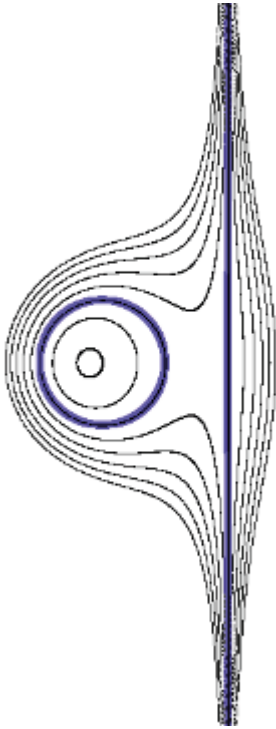


Рис. 13. Кривые задания 13
Fig. 13. Job Curves 13

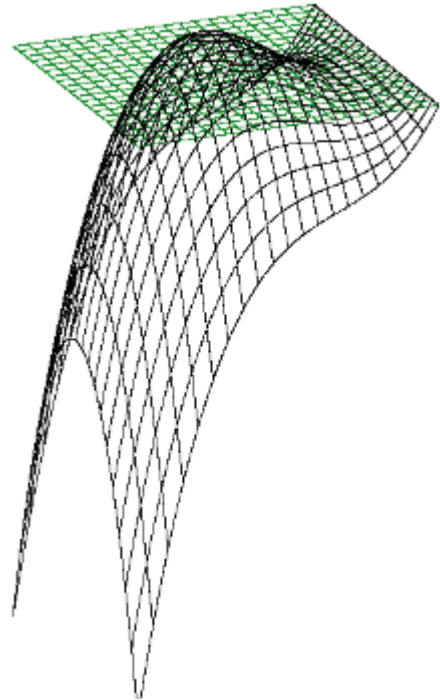


Рис. 14. Поверхность задания 12
Fig. 14. Job Surface 12

Результаты заданий 8—13 можно объединить в единое исследование.

Задание 14. Исследовать кривые третьего порядка, возникающие на основе исходной линии, распадающейся на прямую и эллипс. Учесть различные варианты взаимного расположения прямой и эллипса и описать форму соответствующих кривых.

Исследование кубических кривых в этом ключе может быть продолжено. В следующих трёх заданиях будет указано общее направление исследования.

Задание 15. Исследовать кривые третьего порядка, возникающие на основе исходной линии, распадающейся на прямую и гиперболу. Учесть различные варианты взаимного расположения прямой и гиперболы и описать форму соответствующих кривых.

Пояснения. Следует использовать те же программы, модифицировав их. Взаимное расположение прямой и гиперболы можно характеризовать словами: пересечение с одной ветвью, пересечение с двумя ветвями, касание, асимптота, отсутствие пересечения.

Сейчас ограничимся построением одной единственной кривой $y \cdot (x^2 - y^2 - 1) = 2$ в качестве примера рис. 15) и построением соответствующей поверхности (рис. 16).

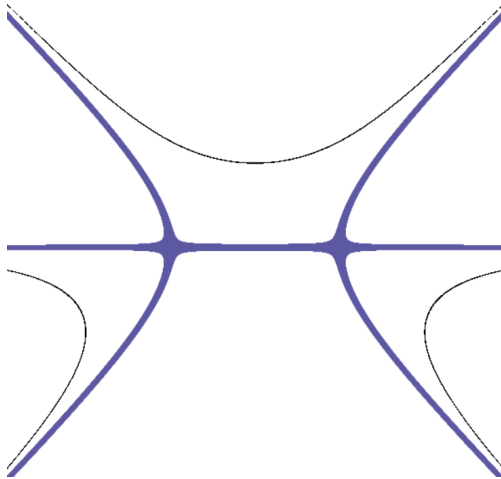


Рис. 15. Кривая задания 15
Fig. 15. Job Curve 15

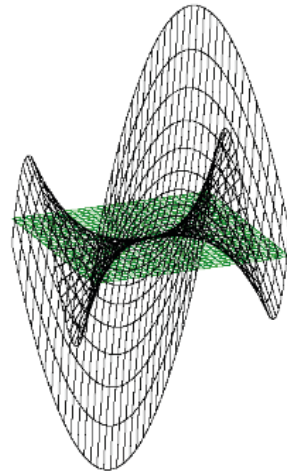


Рис. 16. Поверхность задания 15
Fig. 16. Job Surface 15

Задание 16. Исследовать кривые третьего порядка, возникающие на основе исходной линии, распадающейся на прямую и параболу. Учесть различные варианты взаимного расположения прямой и параболы и описать форму соответствующих кривых.

Пояснения. Взаимное расположение прямой и параболы можно характеризовать словами: пересечение, касание, отсутствие пересечения.

На данный момент ограничимся построением единственной кривой $(x-2y) \cdot (x-y^2) = -1$ в качестве примера (рис. 17) и построением соответствующей поверхности (рис. 18).

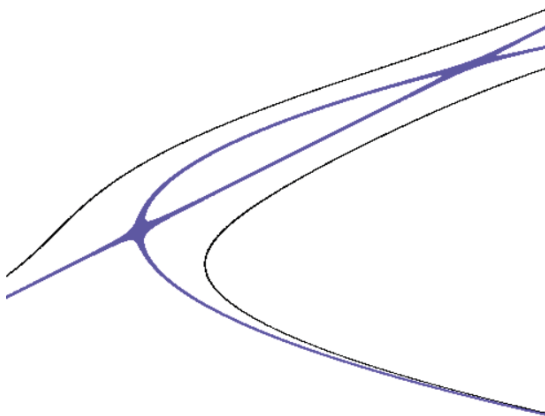


Рис. 17. Кривая задания 16
Fig. 17. Job Curve 16

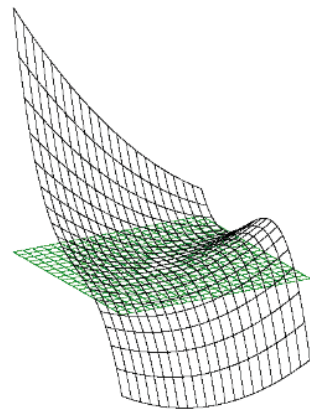


Рис. 18. Поверхность задания 16
Fig. 18. Job Surface 16



Задание 17. Исследовать кривые третьего порядка, возникающие на основе исходной линии, распадающейся на три прямые. Учесть различные варианты взаимного расположения прямых и описать форму соответствующих кривых.

Пояснения. Взаимное расположение трёх прямых можно характеризовать словами в разных вариантах: пересечение, параллельность, совпадение, число точек пересечения.

В качестве примера ограничимся построением кривой $(x - y - 2) \cdot (x - 2y) \cdot (x + y - 1) - 2 = 0$ на основе трёх прямых, образующих треугольник (рис. 19), и построением поверхности (рис. 20).

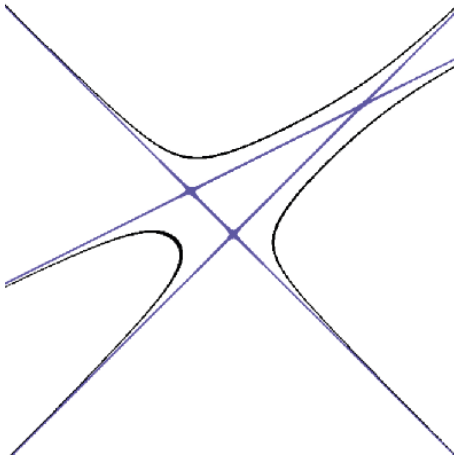


Рис. 19. Кривая задания 17

Fig. 19. Job Curve 17

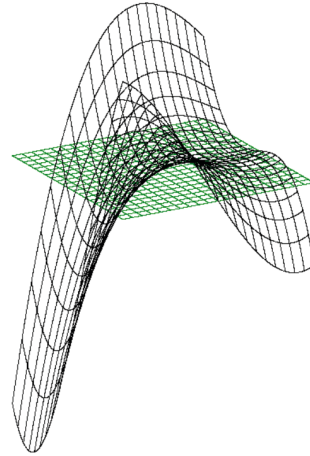


Рис. 20. Поверхность задания 17

Fig. 20. Job Surface 17

Кроме того подхода, который состоял в привязке к фиксированному характеру сомножителей, возможно использование и иных направлений исследования кубических кривых. Вместо постоянства геометрических свойств сомножителей можно рассматривать алгебраическое сходство сомножителей. Покажем это на примере.

Задание 18. Исследовать кривые третьего порядка, возникающие на основе формулы $y^2 - (x+1) \cdot (x^2 + c) = 0$ при различных значениях параметра c .

Решение. Рассмотрим вид кривых при $c = -0,1; c = 0$ и $c = 0,1$. Приведённая ниже программа строит соответствующие кривые. Они показаны на рис. 21, 22 и 23.

```
GraphicsWindow.Width = 600
GraphicsWindow.Height = 600
x0 = 200
y0 = 300
ed = 100
c = -.1
For x = -2 To 3 Step .002
```



```

For y = -3 To 3 Step .002
z = y*y - (x + 1)*(x*x - c)
xe = x0 + x*ed
ye = y0 - y*ed
If Math.Abs(z) < .01 Then
GraphicsWindow.SetPixel(xe, ye, "black")
EndIf
EndFor
EndFor
    
```

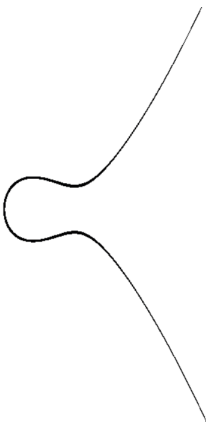


Рис. 21. Кривая задания 18 ($c = -0,1$)
Fig. 21. Job Curve 18 ($c = -0,1$)

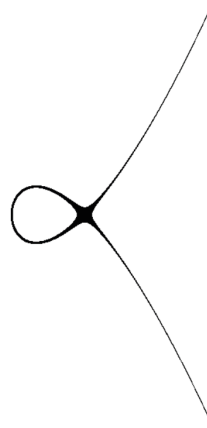


Рис. 22. Кривая задания 18 ($c = 0$)
Fig. 22. Job Curve 18 ($c = 0$)

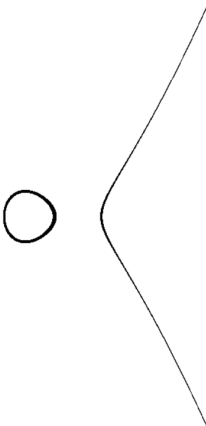


Рис. 23. Кривая задания 18 ($c = 0,1$)
Fig. 23. Job Curve 18 ($c = 0,1$)

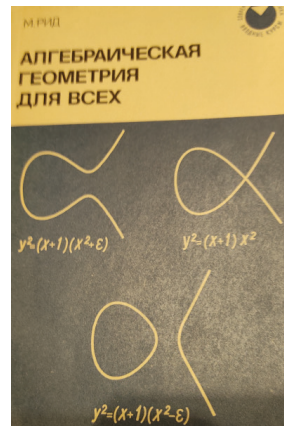


Рис. 24. Кривые с рис. 21 — рис. 23
 на обложке книги (Рид М., 1991)
Fig. 24. Curves with Fig. 21 — Fig. 23
 on the cover of the book (Reid M., 1991)



Отметим, что соответствующие кривые изображены на обложке книги (Рид М, 1991) (рис. 24).

На первый взгляд формула $y^2 = (x+1) \cdot (x^2 + c)$, описывающая соответствующие кривые, является одним из частных вариантов. Но вскоре мы увидим, что общая формула $y^2 = p_3(x)$, где $p_3(x)$ — многочлен третьей степени, является универсальным описанием кубических кривых.

Классификация кубических кривых

Перейдём к вопросам классификации кубических кривых, которые, несомненно, могут стать содержательными темами для курсовых и дипломных работ. В книге (Стройк, 1990) отмечается роль Ньютона в разработке теории кривых третьего порядка. Приведём пространную цитату оттуда.

«Ньютон писал ... о плоских кривых третьего порядка. В «Перечислении линий третьего порядка» он дал классификацию плоских кривых третьей степени на 72 вида, исходя из своей теоремы о том, что каждую кубическую кривую можно получить из «расходящейся параболы» $y^2 = ax^3 + bx^2 + cx + d$ при центральном проектировании одной плоскости на другую. Это было первым важным новым результатом, полученным путем применения алгебры к геометрии, так как все предыдущие работы были просто переводом Аполлония на алгебраический язык».

Доказательство того, что уравнение кубической кривой может быть приведено к виду $y^2 = ax^3 + bx^2 + cx + d$ даётся в книге (Уокер, 1950). Обзор ньютоновской классификации кубических кривых приводится в книге (Савёлов, 1960). При этом используются несколько иные исходные формулы, своя для каждой из групп, на которые разбивается множество кубических кривых.

1-я группа. Кривые описываются формулой $xy^2 + ey = ax^3 + bx^2 + cx + d$, причём $a > 0$. Форма этих кривых определяется видом корней ещё одного уравнения, левая часть, которого является многочленом четвёртой степени $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + \frac{e^2}{4} = 0$.

Рассматриваются пять различных случаев, из которых мы выберем только два:

- корни либо комплексные, либо различные действительные;
- два действительных корня равны между собой, а два других либо комплексные, либо одновременно больше или меньше равных корней.

Задание 19. Построить кривую третьего порядка, возникающую на основе первого случая.

Решение. Построим вспомогательный многочлен с комплексными корнями. Например, можно взять произведение двух квадратных трёхчленов без действительных корней: $P(x) = (x^2 + 1) \cdot (x^2 + 4) = x^4 + 5x^2 + 4$.

Таким образом, $a = 1, b = 0, c = 5, d = 0$ и $e = 4$. Из этого следует, что уравнение кубики имеет вид: $xy^2 + 4y - x^3 - 5x = 0$. Построим её методом сканирования (рис. 25).



Задание 20. Построить кривую третьего порядка, возникающую на основе второго случая.

Решение. Построим вспомогательный многочлен с двумя комплексными корнями и двумя равными действительными. Например, можно взять произведение квадратного трёхчлена без действительных корней на квадрат двучлена:

$$P(x) = (x^2 + 1) \cdot (x^2 - 2x + 1) = x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x + 1$$

Таким образом, $a = 1, b = 2, c = 2, d = 1$ и $e = 2$. Из этого следует, что уравнение кубики имеет вид: $xy^2 + 2y - x^3 + 2x^2 - 2x + 2 = 0$. Построим её методом сканирования (рис. 26).

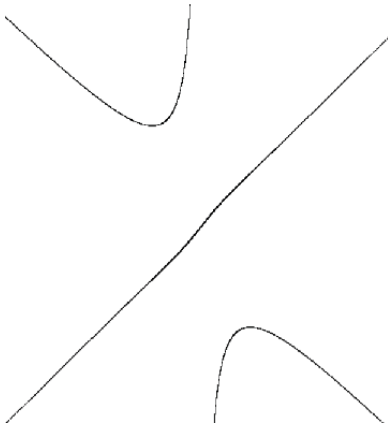


Рис. 25. Кривая задания 19
Fig. 25. Job Curve 19

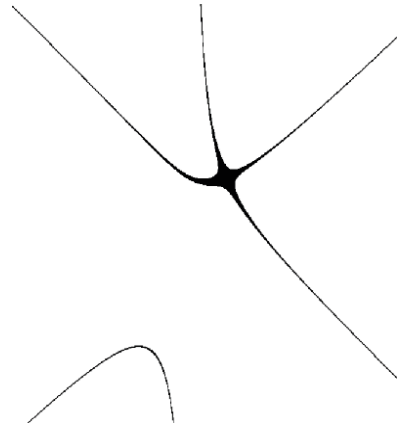


Рис. 26. Кривая задания 20
Fig. 26. Job Curve 20

Все кривые этой группы имеют три асимптоты.

Задание 21. Используя описание из книги (Савёлов, 1960) построить изображение кривых первой группы и их асимптот.

2-я группа. Кривые описываются формулой $xy^2 + ey = ax^3 + bx^2 + cx + d$, но в данном случае $a < 0$. И как и ранее форма этих кривых определяется видом корней многочлена

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + \frac{e^2}{4} = 0.$$

Здесь тоже рассматриваются пять различных случаев, и вновь мы выберем только два из них:

- все корни вспомогательного многочлена действительны и различны;
- все корни вспомогательного многочлена действительны, и два средних корня равны между собой, а из двух других один больше, а другой меньше средних корней.



Задание 22. Построить кривую третьего порядка второй группы, возникающую на основе первого случая.

Решение. В заданиях 19 и 20 вычисление коэффициентов уравнения проводились за пределами компьютерной программы. В случае действительных корней удобно все вычисления проводить непосредственно в программе. Для конкретной кривой, которую построит приводимая ниже программа, корнями вспомогательного многочлена являются числа $= 3, 1, 2$ и 4 . Кривая показана на рис. 27.

```
GraphicsWindow.Width = 600
GraphicsWindow.Height = 600
x0 = 300
y0 = 300
ed = 30
x1 = -3
x2 = 1
x3 = 2
x4 = 4
p1 = -(x1 + x2)
q1 = x1*x2
p2 = -(x3 + x4)
q2 = x3*x4
a = -1
b = -(p1 + p2)
c = -(q1 + p1*p2 + q2)
d = -(p1*q2 + p2*q1)
e = 2* Math.Sqrt(-q1*q2)
For x = -10 To 10 Step .005
For y = -10 To 10 Step .005
z = x*y*y + e*y - a*x*x*x - b*x*x - c*x - d
xe = x0 + x*ed
ye = y0 - y*ed
If Math.Abs(z) < .1 Then
GraphicsWindow.SetPixel(xe, ye, "black")
EndIf
EndFor
EndFor
```



Задание 23. Построить кривую третьего порядка второй группы, возникающую на основе второго случая.

Решение. Используем ту же программу для корней = 3, 1, 1 и 4 (рис. 28).

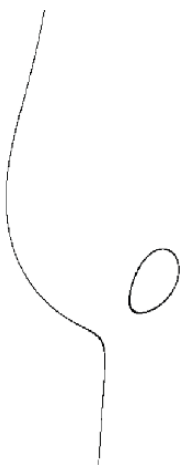


Рис. 27. Кривая задания 22

Fig. 27. Job Curve 22

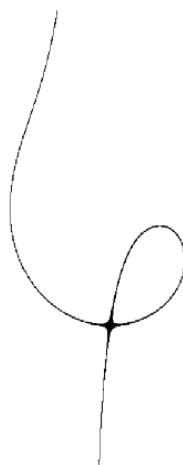


Рис. 28. Кривая задания 23

Fig. 28. Job Curve 23

Все кривые этой группы имеют одну асимптоту.

Задание 24. Используя описание из книги (Савёлов, 1960) построить изображение кривых второй группы и их асимптот.

Рассмотрение всех групп кривых и различных случаев в рамках каждой группы требует значительных усилий.

Задание 25. Напишите обучающие и демонстрационные программы, позволяющие познакомиться с классификацией кривых третьего порядка.

Свойства кубических кривых

В статье (Куланин, Степанов, 2025) описан метод построения пучков второго порядка. Аналогичные построения можно провести и для кривых третьего порядка. Суть метода такова. Пусть заданы две кривые третьего порядка $F_1(x, y) = 0$ и $F_2(x, y) = 0$, тогда линейная комбинация уравнений $\lambda_1 \cdot F_1(x, y) + \lambda_2 \cdot F_2(x, y) = 0$ также описывает кривую третьего порядка.

Проведём следующее построение. Выберем на декартовой плоскости четыре материальных точки. То есть точки, которые кроме координат имеют массу. Пусть это будут точки $\{A_i(x_i; y_i; m_i)\}$, где $i = 1, 2, 3, 4$.



Найдём координаты центров тяжести сторон четырёхугольника $A_1A_2A_3A_4$, а затем и координаты центра тяжести всего четырёхугольника.

При вычислении координат центра тяжести середины B_1 стороны A_1A_2 используются формулы $x_3 = \frac{x_1m_1 + x_2m_2}{m_1 + m_2}$ и $y_3 = \frac{y_1m_1 + y_2m_2}{m_1 + m_2}$.

Пусть точки B_2 , B_3 и B_4 , центры тяжести сторон A_2A_3 , A_3A_4 и A_4A_1 соответственно. Тогда центр тяжести C всего четырёхугольника совпадает с центрами тяжести отрезков B_1B_3 и B_2B_4 .

Итак, получено девять точек, расположенных на шести прямых: первая тройка A_1A_2 , B_4B_2 , A_4A_3 ; вторая тройка A_1A_4 , B_1B_3 , A_2A_3 (рис. 29).

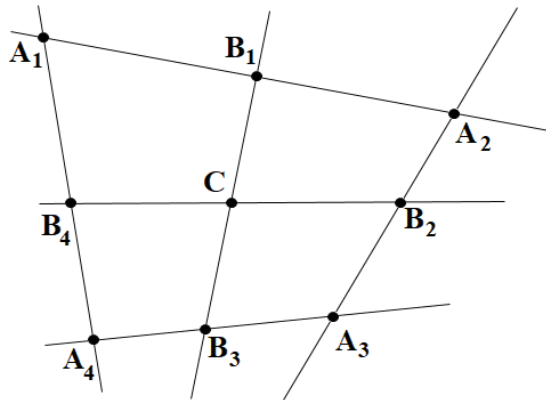


Рис. 29. Девять точек, расположенных на шести прямых

Fig. 29. Nine points located on six straight lines

Рассмотрим две кубические кривые, первая из которых распадается на первую тройку прямых, а вторая — на вторую тройку. Теперь можно построить пучок кубик, проходящих через все девять точек.

Задание 26. Напишите программу построения одной из кривых пучка при $\lambda_1 = 0,25$ и при $\lambda_2 = 1 - \lambda_1$ для наиболее простого для вычисления координат точек случая, когда прямые первой тройки горизонтальны, а прямые второй тройки вертикальны.

Решение. Программа строит изображение, которое показано на рис. 30.

```
GraphicsWindow.Width = 600
GraphicsWindow.Height = 600
x0 = 300
y0 = 300
```



```
ed = 100
lm1 = .25
lm2 = 1 - lm1
For x = -3 To 3 Step .002
For y = -3 To 3 Step .002
s1 = (x - 1)*x*(x + 1)
s2 = (y - 1)*y*(y + 1)
z = lm1*s1 + lm2*s2
If Math.Abs(z) < .01 Then
xe = x0 + x*ed
ye = y0 - y*ed
GraphicsWindow.SetPixel(xe, ye, "black")
EndIf
EndFor
EndFor
For x = -1 To 1
For y = -1 To 1
xe = x0 + x*ed
ye = y0 - y*ed
GraphicsWindow.FillEllipse(xe-5, ye-5, 10, 10)
EndFor
EndFor
```

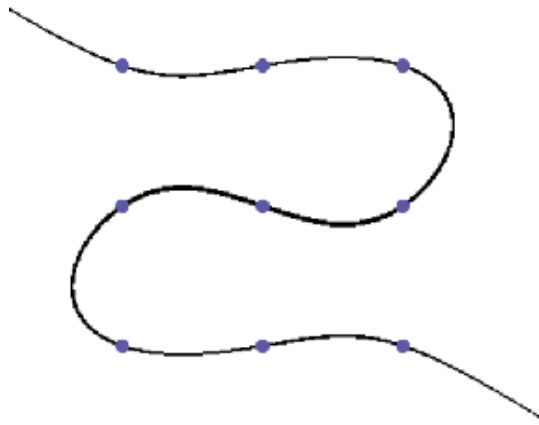


Рис. 30. Кривая задания 26

Fig. 30. Job Curve 26



Задание 27. Напишите программу построения пучка кубик.

Решение. Достаточно в предыдущей программе использовать цикл, меняющий параметр λ_1 , начиная от -2 до 3 с шагом $0,25$. Результат показан на рис. 31.

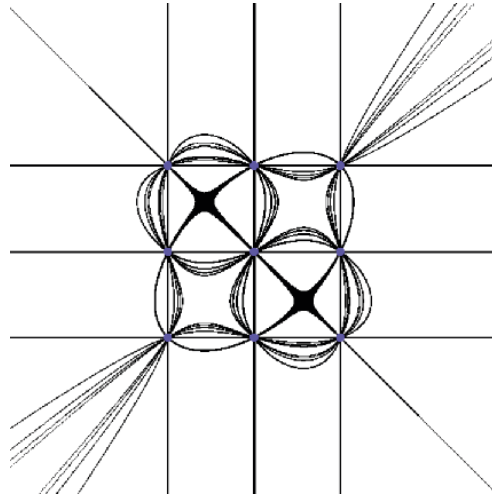


Рис. 31. Кривая задания 27

Fig. 31. Job Curve 27

Задание 28. Задайте четыре материальных точки $\{A_i(x_i; y_i; m_i)\}$, где $i = 1, 2, 3, 4$. Вычислите координаты остальных точек, получите уравнение двух троек прямых и постройте пучок кубик для этого случая.

Имеет место следующая **теорема о девяти точках**. Пусть кривая третьего порядка проходит через восемь точек конфигурации, показанной на рис. 29. Тогда она проходит и через девятую точку (Прасолов, Соловьёв, 1997). На её основе можно доказать классические теоремы Паскаля и Паппа.

Теорема Паскаля. Точки пересечения противоположных сторон вписанного в кривую второго порядка шестиугольника лежат на одной прямой

Задание 29. Используя свойства кривых третьего порядка, доказать теорему Паскаля для случая окружности и построить соответствующий чертёж (рис. 32).

Решение. Возьмём в качестве восьми точек шесть точек на окружности и две точки пересечения противоположных сторон. Тогда окружность и прямая, проходящая через эти точки, могут рассматриваться как кубика. По теореме о девяти точках эта прямая должна проходить и через третью точку пересечения противоположных сторон. Следующая программа строит нужный чертёж.



```
GraphicsWindow.Width = 600
GraphicsWindow.Height = 600
x0 = 300
y0 = 250
ed = 100
r = 1
GraphicsWindow.DrawEllipse(x0 - r*ed, y0 - r*ed, 2*r*ed, 2*r*ed)
pi = Math.Pi
ug[1] = pi +.1
ug[2] = pi/2
ug[3] = -.5
ug[4] = -pi/4 +.3
ug[5] = -pi/2 -.3
ug[6] = -3*pi/4
For i = 1 to 6
x[i] = r* Math.Cos(ug[i])
y[i] = r* Math.Sin(ug[i])
EndFor
For i = 1 to 3
j = i + 4
If j = 7 Then
j = 1
EndIf
t1 = x[i]
p1 = y[i]
xe1 = x0 + ed*t1
ye1 = y0 - ed*p1
GraphicsWindow.FillEllipse(xe1-5, ye1-5,10,10)
t2 = x[i+1]
p2 = y[i+1]
xe2 = x0 + ed*t2
ye2 = y0 - ed*p2
GraphicsWindow.FillEllipse(xe2-5, ye2-5,10,10)
GraphicsWindow.DrawLine(xe1, ye1, xe2, ye2)
t3 = x[i+3]
p3 = y[i+3]
xe3 = x0 + ed*t3
ye3 = y0 - ed*p3
GraphicsWindow.FillEllipse(xe3-5, ye3-5,10,10)
t4 = x[j]
p4 = y[j]
xe4 = x0 + ed*t4
ye4 = y0 - ed*p4
GraphicsWindow.FillEllipse(xe4-5, ye4-5,10,10)
GraphicsWindow.DrawLine(xe3, ye3, xe4, ye4)
Peresech()
EndFor
```



```
GraphicsWindow.DrawLine(xe[1], ye[1], xe[2], ye[2])
GraphicsWindow.DrawLine(xe[1], ye[1], xe[3], ye[3])
Sub Peresech
k1 = (p2 - p1)/(t2 - t1)
b1 = p1 - k1*t1
k2 = (p4 - p3)/(t4 - t3)
b2 = p3 - k2*t3
tp = (b1 - b2)/(k2 - k1)
pp = k1*tp + b1
xe[i] = x0 + ed*tp
ye[i] = y0 - ed*pp
GraphicsWindow.FillEllipse(xe[i]-5, ye[i]-5,10,10)
GraphicsWindow.DrawLine(xe[i], ye[i], xe2, ye2)
GraphicsWindow.DrawLine(xe[i], ye[i], xe4, ye4)
EndSub
```

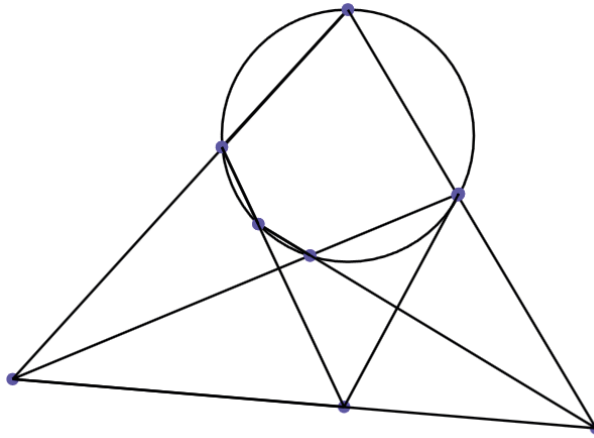


Рис. 32. Иллюстрация к заданию 29

Fig. 32. Illustration for task 29

Задание 30. Доказать теорему Паскаля для случая произвольной кривой второго порядка и построить соответствующий чертёж.

Пояснение. Необходимо, используя проективные преобразования (Александров, 1979), преобразовать уравнения окружности и прямых из предыдущего занятия. Для случая эллипса можно использовать аффинные преобразования.

Теорема Паппа. На первой прямой взяты точки А, С и Е, а на второй прямой — точки В, D и F. Тогда точки пересечения прямых АВ и DE, DC и EF, AF и CD лежат на одной прямой.



Задание 31. Используя свойства кривых третьего порядка, доказать теорему Паппа и построить соответствующий чертёж (рис. 33).

Решение. Доказательство теоремы Паппа аналогично доказательству теоремы Паскаля. Однако в данном случае кубика распадается на три прямые. Две даны изначально. И на каждой из них выбирают по три точки, то есть всего шесть точек (на первой А, С и Е, а на второй прямой В, D и F).

Ещё две точки являются точками пересечения АВ и DE, а также DC и EF. Прямая, проходящая через эти две точки, дополняет первые две прямые до кубики. По теореме о девяти точках эта прямая должна проходить и через третью точку пересечения прямых AF и CD. Программа, которая строит нужный чертёж, во многом похожа на программу из задания 29.

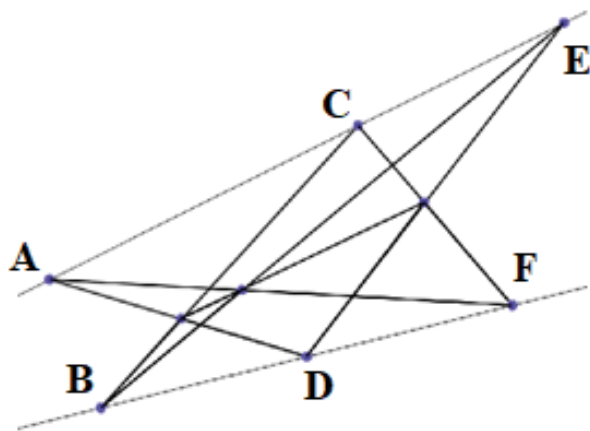


Рис. 33. Иллюстрация к заданию 31

Fig. 33. Illustration for task 31

Рассмотрим ещё два направления изучения кривых третьего порядка. Прежде всего рассмотрим обобщение того метода, с помощью которого строились пучки кубик. Речь идёт о линейных системах алгебраических кривых (Уокер, 1950). Любая кривая третьего порядка с точностью до постоянного множителя определяется десятью коэффициентами соответствующего многочлена, которые можно рассматривать как координаты точки в проективном пространстве.

Можно рассматривать эти многочлены и как вектора. К ним присоединяются и многочлены меньшего, чем три порядка. Таким образом, на основе любой конечной совокупности алгебраических кривых можно строить их линейные комбинации.

Рассмотрим следующую линейную комбинацию двух алгебраических кривых $F_1(x, y)$ и $F_2(x, y)$:

$$\lambda \cdot F_1(x, y) + (1 - \lambda) \cdot F_2(x, y) = 0.$$



Изменяя λ от нуля до единицы, можно осуществить преобразование первой кривой во вторую. Если же расширить интервал изменения λ , то в процесс преобразования будут вовлечены дополнительные кривые.

Задание 32. Провести преобразование кубической параболы $y = x^3$ в единичную окружность (рис. 34).

Решение. В программе для осуществления преобразования приходится использовать два цикла с разным шагом для параметра λ .

```
GraphicsWindow.Width = 620
GraphicsWindow.Height = 600
x0 = 150
y0 = 300
ed = 100
For x = -1.5 To 4.2 Step .002
For y = -3 To 3 Step .002
xe = x0 + x*ed
ye = y0 - y*ed
z1 = (x-3)*(x-3) + y*y - 1
If Math.Abs(z1) < .01 Then
GraphicsWindow.FillEllipse(xe-3, ye-3, 6, 6)
EndIf
z2 = y - x*x*x
If Math.Abs(z2) < .01 Then
GraphicsWindow.FillEllipse(xe-3, ye-3, 6, 6)
EndIf
EndFor
EndFor
For lm1 = -.1 To 1 Step .025
lm2 = 1 - lm1
For x = -1.5 To 4.5 Step .005
For y = -3 To 3 Step .005
xe = x0 + x*ed
ye = y0 - y*ed
z1 = (x-3)*(x-3) + y*y - 1
z2 = y - x*x*x
z = lm1*z1 + lm2*z2
If Math.Abs(z) < .01 Then
GraphicsWindow.SetPixel(xe, ye, "")
EndIf
EndFor
EndFor
EndFor
For lm1 = 1 To 2 Step .01
lm2 = 1 - lm1
For x = -1.5 To 4.5 Step .005
For y = -3 To 3 Step .005
```



```
xe = x0 + x*ed
ye = y0 - y*ed
z1 = (x-3)*(x-3) + y*y - 1
z2 = y - x*x*x
z = lm1*z1 + lm2*z2
If Math.Abs(z) < .01 Then
GraphicsWindow.SetPixel(xe, ye, "")
EndIf
EndFor
EndFor
EndFor
```

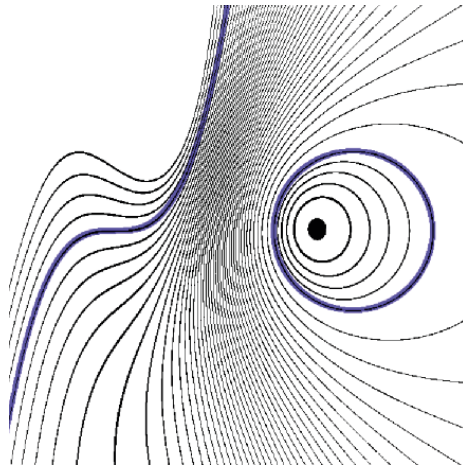


Рис. 34. Иллюстрация к заданию 32

Fig. 34. Illustration for task 32

Наконец, значительный интерес представляет изучение группового закона на кубиках (Рид, 1991, Прасолов, Соловьёв, 1997). Поскольку размеры статьи не позволяют рассмотреть эту тему подробно, ограничимся формулировкой задания.

Задание 33. Дать определение закона сложения несовпадающих точек на кубической кривой. Построить соответствующие чертежи, помогающие понять соответствующее определение.

Заключение

В данной статье рассматриваются вопросы, связанные с углублённым изучением кривых третьего порядка. Особое внимание уделяется методам построения алгебраических кривых.



Обсуждение соответствующих вопросов может помочь молодым преподавателям при изучении различных разделов высшей математики. Кроме того, некоторые рассмотренные темы могут быть предложены в качестве тем курсовых и дипломных работ.

Список источников / References

1. Дьедонне, Ж. (1972). *Линейная алгебра и элементарная геометрия*. Наука.
Dieudonné, J. (1972). *Linear algebra and elementary geometry*. Nauka.
2. Куланин, Е.Д., Степанов, М.Е. (2022). Всестороннее рассмотрение математических понятий как методический прием. *Моделирование и анализ данных*, 12(4), 67–84. <https://doi.org/10.17759/mda.2022120405>
Kulanin, Y. D., Stepanov, M. E. (2022). Comprehensive consideration of mathematical concepts as a methodological technique. *Modeling and Data Analysis*, 12(4), 67–84. <https://doi.org/10.17759/mda.2022120405>
3. Куланин, Е.Д., Степанов, М.Е. (2022). Из опыта работы в режиме дистанционного обучения. *Моделирование и анализ данных*, 12(3), 58–70. <https://doi.org/10.17759/mda.2022120305>
Kulanin, Y.D., Stepanov, M.E. (2022). From the experience of working in distance learning mode. *Modeling and Data Analysis*, 12(3), 58–70. <https://doi.org/10.17759/mda.2022120305>
4. Куланин, Е.Д., Степанов, М.Е. (2022). О визуализации решений некоторых экстремальных задач. *Моделирование и анализ данных*, 12(4), 94–104. <https://doi.org/10.17759/mda.2022120407>
Kulanin, Y.D., Stepanov, M.E. (2022). On the visualization of solutions to some extremal problems. *Modeling and Data Analysis*, 12(4), 94–104. <https://doi.org/10.17759/mda.2022120407>
5. Куланин, Е.Д., Степанов, М.Е. (2024). Вычислительный эксперимент в преподавании высшей математики на примере теории чисел. *Моделирование и анализ данных*, 14(1), 170–195. <https://doi.org/10.17759/mda.2024140111>
Kulanin, Y.D., Stepanov, M.E. (2024). Computational experiment in teaching higher mathematics: The case of number theory. *Modeling and Data Analysis*, 14(1), 170–195. <https://doi.org/10.17759/mda.2024140111>
6. Куланин, Е.Д., Степанов, М.Е. (2024). Вычислительный эксперимент в преподавании высшей математики: Комбинаторика и её приложения. *Моделирование и анализ данных*, 14(3), 174–202. <https://doi.org/10.17759/mda.2024140310>
Kulanin, Y.D., Stepanov, M.E. (2024). Computational experiment in teaching higher mathematics: Combinatorics and its applications. *Modeling and Data Analysis*, 14(3), 174–202. <https://doi.org/10.17759/mda.2024140310>
7. Куланин, Е.Д., Степанов, М.Е. (2024). Использование образов в преподавании высшей математики. *Моделирование и анализ данных*, 14(2), 192–225. <https://doi.org/10.17759/mda.2024140212>
Kulanin, Y.D., Stepanov, M.E. (2024). Using images in teaching higher mathematics. *Modeling and Data Analysis*, 14(2), 192–225. <https://doi.org/10.17759/mda.2024140212>
8. Куланин, Е.Д., Степанов, М.Е. (2025). Алгебраические кривые высших порядков в преподавании высшей математики: Методы построения алгебраических кривых. *Моделирование и анализ данных*, 15(4), 122–137. <https://doi.org/10.17759/mda.2025150408>



- Kulanin, Y.D., Stepanov, M.E. (2025). Algebraic curves of higher orders in teaching higher mathematics: Methods of constructing algebraic curves. *Modeling and Data Analysis*, 15(4), 122–137. <https://doi.org/10.17759/mda.2025150408>
9. Куланин, Е.Д., Степанов, М.Е. (2025). Алгебраические кривые низших порядков в преподавании высшей математики. *Моделирование и анализ данных*, 15(1), 210–251. <https://doi.org/10.17759/mda.2025150111>
Kulanin, Y.D., Stepanov, M.E. (2025). Algebraic curves of lower orders in teaching higher mathematics. *Modeling and Data Analysis*, 15(1), 210–251. <https://doi.org/10.17759/mda.2025150111>
10. Куланин, Е.Д., Нгуен Ву Куанг, Степанов, М.Е. (2019). Осязаемая предметность с компьютерной поддержкой. *Моделирование и анализ данных*, 9(4), 145–156. <https://doi.org/10.17759/mda.2019090412>
Kulanin, Y.D., Nguyen Vu Quang, Stepanov, M.E. (2019). Tangible subjectivity with computer support. *Modeling and Data Analysis*, 9(4), 145–156. <https://doi.org/10.17759/mda.2019090412>
11. Куланин, Е.Д., Степанов, М.Е., Нуркаева, И.М. (2020). Роль образного мышления в научном мышлении. *Моделирование и анализ данных*, 10(2), 110–128. <https://doi.org/10.17759/mda.2020100209>
Kulanin, Y.D., Stepanov, M.E., Nurkaeva, I.M. (2020). The role of imagery in scientific thinking. *Modeling and Data Analysis*, 10(2), 110–128. <https://doi.org/10.17759/mda.2020100209>
12. Куланин, Е.Д., Степанов, М.Е., Нуркаева, И.М. (2021). О различных подходах к решению экстремальных задач. *Моделирование и анализ данных*, 11(1), 40–60. <https://doi.org/10.17759/mda.2021110104>
Kulanin, Y.D., Stepanov, M.E., Nurkaeva, I.M. (2021). On different approaches to solving extremal problems. *Modeling and Data Analysis*, 11(1), 40–60. <https://doi.org/10.17759/mda.2021110104>
13. Лунгу, К.Н., Норин, В.П., Письменный, Д.Т., Шевченко, Ю.А., & Куланин, Е.Д. (2013). *Сборник задач по высшей математике с контрольными работами* (8-е изд., Т. 2). Lungu, K. N., Norin, V. P., Pismenny, D. T., Shevchenko, Y. A., Kulanin, Y. D. (2013). *Collection of problems in higher mathematics with control works* (8th ed., Vol. 2).
14. Прасолов, В.В. (1997). *Геометрические задачи древнего мира*. ФАЗИС. Prasolov, V. V. (1997). *Geometric problems of the ancient world*. FAZIS.
15. Савёлов, А.А. (1960). *Плоские кривые: Систематика, свойства, применения*. Государственное издательство физико-математической литературы. Savelov, A.A. (1960). *Plane curves: Systematics, properties, applications*. State Publishing House of Physical and Mathematical Literature.
16. Степанов, М.Е., Куланин, Е.Д. (2025). Множества точек, находящихся на рациональных расстояниях друг от друга. *Моделирование и анализ данных*, 15(1), 210–251. <https://doi.org/10.17759/mda.2025150111>
Stepanov, M.E., Kulanin, Y.D. (2025). Sets of points located at rational distances from each other. *Modeling and Data Analysis*, 15(1), 210–251. <https://doi.org/10.17759/mda.2025150111>

Информация об авторах

Куланин Евгений Дмитриевич, кандидат физико-математических наук, профессор кафедры прикладной математики, Московский государственный психолого-педагогический университет (ФГБОУ ВО МГППУ), г. Москва, Российская Федерация, ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-6093-7012>, e-mail: lucas03@mail.ru



Степанов Михаил Евграфович, кандидат педагогических наук, доцент, Московский государственный психолого-педагогический университет (ФГБОУ ВО МГППУ), г. Москва, Российская Федерация, ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-4803-8211>, e-mail: mestepanov@yandex.ru

Information about the authors

Evgeny D. Kulanin, Candidate of Science (Physics and Mathematics), Professor of the Department of Applied Mathematics, Moscow State University of Psychology and Education (MSUPE), Moscow, Russian Federation, ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-6093-7012>, e-mail: lucas03@mail.ru

Mikhail E. Stepanov, Candidate of Pedagogical Sciences, Associate Professor, Moscow State University of Psychology and Education (MSUPE), Moscow, Russian Federation, ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-4803-8211>, e-mail: mestepanov@yandex.ru

Вклад авторов

Куланин Е.Д. — идеи исследования, написание и оформление рукописи, разработка методики, планирование исследования, визуализация результатов исследования.

Степанов М.Е. — идеи исследования, написание и оформление рукописи; разработка описанного ПО, планирование исследования, визуализация результатов исследования.

Все авторы приняли участие в обсуждении результатов и согласовали окончательный текст рукописи.

Contribution of the authors

Kulanin E.D. — research ideas, writing and formatting of the manuscript, development of the methodology, research planning, and visualization of research results.

Stepanov M.E. — research ideas, writing and formatting of the manuscript, development of the described software, research planning, and visualization of research results.

All authors participated in the discussion of the results and approved the final text of the manuscript.

Конфликт интересов

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Conflict of interest

The authors declare no conflict of interest.

Поступила в редакцию 27.01.2026

Поступила после рецензирования 10.02.2026

Принята к публикации 12.02.2026

Опубликована 30.06.2026

Received 2026.01.27

Revised 2026.02.10

Accepted 2026.02.12

Published 2026.06.30