

Научная статья | Original paper

УДК 378.147:512.7

Алгебраические кривые высших порядков в преподавании высшей математики. Кривые выше третьего порядка

Е.Д. Куланин ✉, М.Е. Степанов

Московский государственный психолого-педагогический университет
г. Москва, Российская Федерация

✉ lucas03@mail.ru

Резюме

Контекст и актуальность. В рабочих программах дисциплин «Геометрия и топология», «Математический анализ», «Математика» и других, входящих в образовательные программы специальностей по информационным технологиям, важное место занимает понятие алгебраической кривой. Освоение этого понятия требует от студентов способности к абстрактному мышлению и зачастую вызывают существенные затруднения. **Цель.** Повысить качество усвоения учебного материала по дисциплинам, связанным с понятием алгебраической кривой, используя при этом программные средства для визуализации различных алгебраических кривых и семейств алгебраических кривых. Ещё одной не менее важной целью является описание вопросов, которые могут стать темами курсовых и дипломных работ. **Гипотеза.** Использование программных средств для визуализации различных алгебраических кривых и семейств алгебраических кривых позволяет преподавателю максимально понятно подать материал, а студентам лучше усвоить материал и получить навыки решения задач на построение алгебраических кривых. **Методы и материалы.** В большинстве заданий в этой статье предлагается написать компьютерную программу, визуализирующую алгебраические кривые и их семейства. **Результаты.** Разработана система заданий, позволяющих студентам строить циклоидальные кривые с помощью компьютерных программ. **Выводы.** Применение разработанной системы учебных заданий подтвердило важность использования специальных программных средств для усвоения материала по теории алгебраических кривых.

Ключевые слова: высшее образование, методика преподавания математики, аналитическая геометрия, визуальные образы, алгебраические кривые порядка



выше трех, циклоидальные кривые, эпициклоиды и гипоциклоиды, трохойды, эпитрохойды и гипотрохойды, методы построения алгебраических кривых, геометрические образы алгебраических кривых

Для цитирования: Куланин, Е.Д., Степанов, М.Е. (2026). Алгебраические кривые высших порядков в преподавании высшей математики. Кривые выше третьего порядка. *Моделирование и анализ данных*, 16(3), 274—291. <https://doi.org/10.17759/mda.2026160314>

Algebraic curves of higher orders in the teaching of higher mathematics. Curves of order higher than three

Y.D. Kulanin ✉, M.E. Stepanov

Moscow State University of Psychology and Education, Moscow, Russian Federation

✉ lucas03@mail.ru

Abstract

Context and relevance. In the working programs of the disciplines “Geometry and Topology”, “Mathematical Analysis”, “Mathematics” and others, included in the educational programs of specialties in information technologies, an important place is occupied by the concept of an algebraic curve. The development of this concept requires students to have the ability to think abstractly and often cause significant difficulties. **Purpose.** To improve the quality of learning the educational material on disciplines related to the concept of an algebraic curve, while using software tools for visualization various algebraic curves and families of algebraic curves. Another equally important goal is to describe issues that can become the topics of term papers and theses. **Hypothesis.** The use of software tools for visualizing various algebraic curves and families of algebraic curves allows the teacher to present the material in the most understandable way, and students to better understand the material and acquire the skills of solving problems on the construction of algebraic curves. **Methods and materials.** Most of the exercises in this article involve writing a computer program that visualizes algebraic curves and their families. **Results.** A system of tasks has been developed that allows students to construct cycloidal curves using computer programs. **Conclusions.** The use of the developed system of educational tasks has confirmed the importance of using special software tools for mastering the theory of algebraic curves.

Keywords: higher education, methods of teaching mathematics, analytical geometry, visual images, algebraic curves of order higher than three, cycloidal curves, epicycloids and hypocycloids, trochoids, epitrochoids and hypotrochoids, methods of constructing algebraic curves, geometric images of algebraic curves



For citation: Kulanin, Y.D., Stepanov, M.E. (2026). Algebraic curves of higher orders in the teaching of higher mathematics. Curves of order higher than three. *Modelling and Data Analysis*, 16(3), 274–291. (In Russ.). <https://doi.org/10.17759/mda.2026160314>

Введение

Статья продолжает цикл методических разработок авторов (Куланин, Степанов, Нуркаева, 2020); (Куланин, Степанов, Нуркаева, 2021); (Куланин, Степанов, 2024); (Куланин, Степанов, 2025).

Непосредственно она продолжает статью «Алгебраические кривые высших порядков в преподавании высшей математики. Кубические кривые» (Куланин, Степанов, 2026). В ней обсуждаются некоторые проблемы, связанные с путями повышения культуры математического мышления студентов-математиков. Главным объектом обсуждения являются алгебраические кривые выше третьей степени. Авторы опираются на опыт работы на факультете информационных технологий МГППУ.

Кривые выше третьего порядка

Кривые высших порядков образуют очень сложные множества. Уже для кубик возникают проблемы с классификацией. И, конечно классификация кривых выше третьего порядка, несравненно сложнее. Шестнадцатая проблема Гильберта, которая предлагает разрешить вопрос о топологии алгебраических кривых и поверхностей, направлена в частности на вопросы, тесно связанные с классификацией алгебраических кривых (Проблемы Гильберта, 1969). Сделаны попытки классифицировать кривые четвёртого и пятого порядка. Кривые выше пятого порядка исследованы лишь по отдельным представителям (Савёлов А.А., 1960).

Однако уже в семнадцатом веке математики хорошо понимали, насколько алгебраических кривые высоких порядков могут иметь прихотливую и сложную форму. Великий математик и философ Готфрид Вильгельм Лейбниц был убежден в существовании гармонии мира и в том, что именно математика способна выразить гармонию вселенной в целом и гармонию телесных форм в частности. У Лейбница есть ссылка на слова амстердамского бургомистра Иоганна Гудде, который активно занимался геометрией, развивая методы Декарта: «Я думаю, что, говоря языком алгебры, если в одной формуле высшей характеристики выразить какое-либо существенное для универсума явление, то в такой формуле можно будет прочесть последующие, будущие явления во всех частях универсума и во все строго определенные времена, подобно тому, как господин Гудде был намерен в свое время начертить такую алгебраическую кривую, контур которой обозначил бы все черты определенного лица». Здесь мы встречаемся с первым указанием на роль алгебраических кривых при математическом моделировании сложных форм.

Мечта Гудде пока не осуществилась, но исследование кривых выше третьего порядка вполне возможно даже на уровне курсовых и дипломных работ. При этом



можно двигаться по тем же направлениям, которые использовались при изучении кривых третьего порядка. Прежде всего, можно познакомиться с замечательными кривыми высших порядков, описание которых дано в книге (Савёлов А.А., 1960).

Большой интерес представляет рассмотрение **циклоидальных кривых и трохоид**. О них достаточно подробно пишется в статьях (Степанов М.Е., 2015; Степанов М.Е., 2016). Циклоидальные кривые образуются при качении без скольжения одной окружности по другой, в том числе и по её внутреннему ободу. При этом круги могут иметь разный диаметр. Если вычерчивающее перо находится на ободу катящегося круга, то в случае внешнего соприкосновения кругов кривая называется **эпициклоидой**, а в случае внутреннего соприкосновения — **гипоциклоидой**. По аналогии с циклоидой могут рассматриваться удлинённые и укороченные эпициклоиды и гипоциклоиды. Они, в свою очередь называются **трохоидами**. При этом используются термины — эпитрохоиды и гипотрохоиды.

Познакомимся с эпициклоидами и гипоциклоидами. Начнём с эпициклоид. Эпициклоида представляет собой последовательность арок (рис. 1). Кроме того, эти арки могут располагаться на нескольких оборотах неподвижной окружности.

Алгебраическим кривыми являются те эпициклоиды, у которых отношение радиусов неподвижного (r_0) и катящегося кругов (r_1) является рациональным числом $k_1 = \frac{r_1}{r_0}$. Именно они являются замкнутыми. Пусть конкретное значение k_1 равно $\frac{m}{n}$, тогда n является числом арок, а m — числом оборотов, после которого арки смыкаются.

Задание 1. Доказать следующую теорему: «Пусть точки В и D движутся по окружности радиуса $r_0 + 2 \cdot r_1$ с постоянными скоростями, причём скорость точки D в $1 + \frac{1}{k_1}$ раз больше скорости точки В, где $k_1 = \frac{r_1}{r_0}$. Точка М, определяемая условием $BM = \frac{k_1}{1 + 2 \cdot k_1} BD$ описывает эпициклоиду, а любая хорда BD является касательной к этой эпициклоиде (рис. 1)».

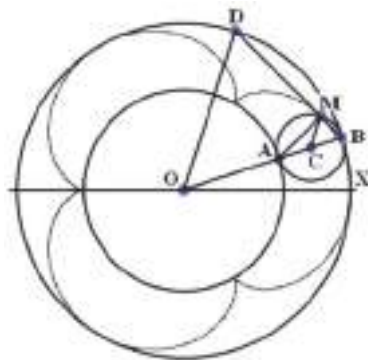


Рис. 1. Эпициклоида

Fig. 1. Epicycloid



Задание 2. На основе теоремы из предыдущего задания написать программу построения эпициклоиды.

Решение. В программе исходными величинами выбраны переменные m, n, r_0 . Величины k_1 и r_1 вычисляются на основе теоремы из предыдущего задания. На рисунках 2–4 показаны кардиоиды (одна арка на одном обороте), эпициклоиды с семью арками на одном обороте и эпициклоиды с пятью арками на двух оборотах ($m = 2, n = 5$).

```
GraphicsWindow.Width = 600
GraphicsWindow.Height = 600
pi = Math.Pi
'Число арок
n = 5
'Число оборотов, на которые опираются арки
m = 2
k1 = m/n
x0 = 300
y0 = 300
r0 = 100
GraphicsWindow.DrawEllipse(x0-r0, y0-r0, 2*r0, 2*r0)
r1 = r0*k1
r = r0 + 2*r1
GraphicsWindow.DrawEllipse(x0-r, y0-r, 2*r, 2*r)
For u1 = 0 To 2*pi*m Step 2*pi/5000
    u2 = u1*(1 + 1/k1)
    x1 = x0 + r*Math.Cos(u1)
    y1 = y0 - r*Math.Sin(u1)
    x2 = x0 + r*Math.Cos(u2)
    y2 = y0 - r*Math.Sin(u2)
    xm = x1 + (k1/(1 + 2*k1))*(x2 - x1)
    ym = y1 + (k1/(1 + 2*k1))*(y2 - y1)
    GraphicsWindow.SetPixel(xm, ym, "")
EndFor
```

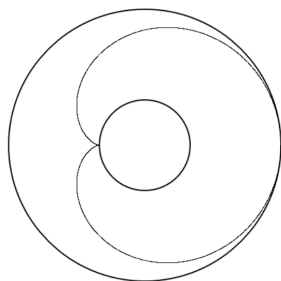


Рис. 2. Кардиоиды. Одна арка на одном обороте

Fig. 2. Cardioid. One arch on one turn

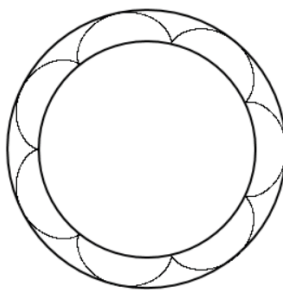


Рис. 3. Эпициклоиды с семью арками на одном обороте

Fig. 3. Epicycloid with seven arches in one revolution

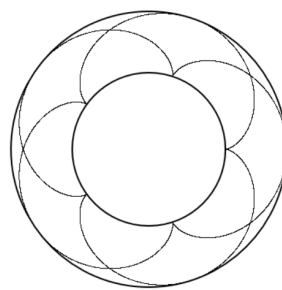


Рис. 4. Эпициклоиды с пятью арками на двух оборотах

Fig. 4. Epicycloid with five arches in two rotations



Задание 3. Если точка М делит отрезок ВD в отношении p , не зависящем от k_1 , то при $m = 1$ и $n = 1$ будет построена не кардиоида, а улитка Паскаля. Построить улитку Паскаля при $p = \frac{1}{2}$ (рис. 5).

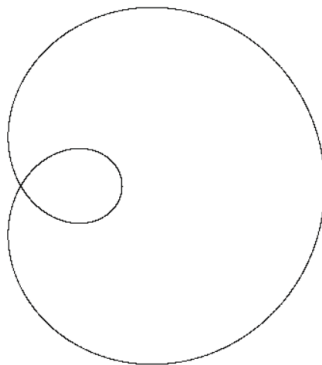


Рис. 5. Улитка Паскаля при $p=1/2$

Fig. 5. Pascal's snail with $p=1/2$

Перейдём к гипоциклоидам. Гипоциклоиды возникают при качении подвижной окружности по внутреннему ободу неподвижной окружности. При этом перо находится непосредственно на ободу подвижной окружности.

Приступая к изучению гипоциклоид, сохраним обозначения из первой части статьи. Прежде всего, речь идёт о том, что r_0 — радиус неподвижной окружности и r_1 — радиус подвижной окружности, наконец $k_1 = \frac{r_1}{r_0}$. По прежнему будем считать, что k_1 равно $\frac{m}{n}$. Как и для эписциклоид использование двух исходных параметров r_0 и k_1 позволяют строить любые гипоциклоиды. Кроме того, ведём обозначение $q = 1 - \frac{1}{k_1}$.

Задание 4. Доказать следующую теорему: «Пусть точки А и D движутся по окружности радиуса r_0 с постоянными угловыми скоростями в разные стороны, причём модуль скорости точки D в q раз больше скорости точки А. Тогда точка М, определяемая условием $AM = \frac{1}{1+q} \cdot AD$, описывает гипоциклоиду. Точка В является пересечением линии центров подвижной и неподвижной окружностей с окружностью радиуса $r_0 - 2 \cdot r_1$. Прямая ВМ является касательной к гипоциклоиде (рис. 6)).»

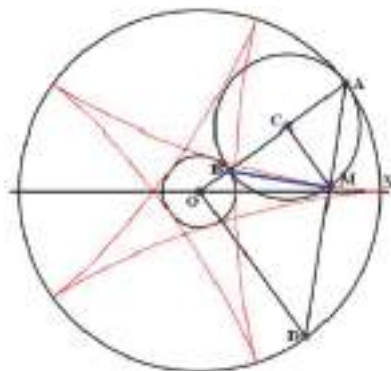


Рис. 6. Прямая BM является касательной к гипоциклоиде

Fig. 6. The straight line BM is tangent to the hypocycloid

Задание 5. На основе теоремы из предыдущего задания написать программу построения гипоциклоиды.

Решение. Программа построения гипоциклоид похожа на программу построения эпициклоид. На рисунках 7–9 показаны дельтоида или кривая Штейнера (три арки на одном обороте), гипоциклоида с семью арками на одном обороте и гипоциклоида с девятью арками на двух оборотах ($m = 2, n = 9$).

```
GraphicsWindow.Width = 600
GraphicsWindow.Height = 600
pi = Math.Pi
'Число арок
n = 3
'Число оборотов, на которые опираются арки
m = 1
k1 = m/n
x0 = 300
y0 = 300
r0 = 250
GraphicsWindow.DrawEllipse(x0-r0, y0-r0, 2*r0, 2*r0)
r1 = r0*k1
r = r0-2*r1
q = 1-1/k1
GraphicsWindow.DrawEllipse(x0-r, y0-r, 2*r, 2*r)
For u1 = 0 To 2*pi*m Step 2*pi/5000
    u2 = u1*q
    x1 = x0 + r* Math.Cos(u1)
    y1 = y0 - r* Math.Sin(u1)
    x2 = x0 + r* Math.Cos(u2)
    y2 = y0 - r* Math.Sin(u2)
```



```
xm = x1 + (1/(1 + q))*(x2 — x1)  
ym = y1 + (1/(1 + q))*(y2 — y1)  
GraphicsWindow.SetPixel(xm, ym,»»»)  
EndFor
```

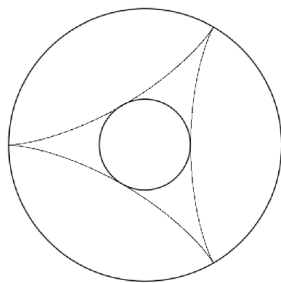


Рис. 7. Кривая Штейнера
(три арки на одном обороте)

Fig. 7. Steiner curve (three
arches in one rotation)

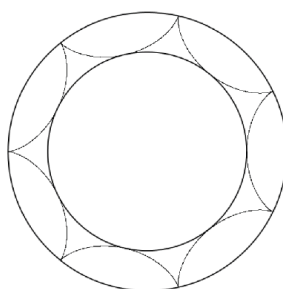


Рис. 8. Гипоциклоида
с семью арками
на одном обороте

Fig. 8. Hypocycloid with seven
arches in one revolution

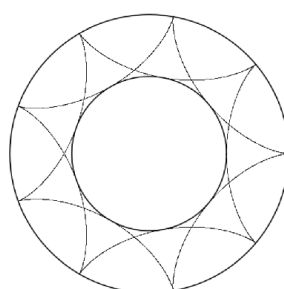


Рис. 9. Гипоциклоида
с девятью арками
на двух оборотах

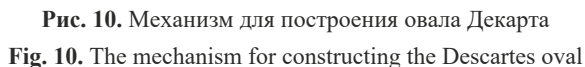
Fig. 9. Hypocycloid with
nine arches in two rotations

Задание 6. Написать обучающие или ознакомительные программы для изучения трохоид различных видов.

Рассмотрим в качестве ещё одного вида кривых выше третьего порядка **овалы Декарта**, имеющие три фокуса (Савёлов А.А., 1960). Один из вариантов их построения этих кривых, основанный на идеях крупного французского геометра Мишеля Шаля, жившего двумя веками позже Декарта, описан в (Степанов М.Е., 1996).

Кратко опишем механизм, с помощью которого может быть построен овал Декарта (рис. 10). Вообще использование механизмов для решения математических задач в духе Рене Декарта.

Стержень РМ с точкой Р, закреплённой шарниром, может вращаться вокруг неё так, чтобы пересекаться сразу с двумя окружностями. Через точки пересечения стержня с окружностями и центры окружностей проходят прямые, которые тоже можно смоделировать рычагами с шарнирами в центрах окружностей. Точка пересечения этих прямых вычерчивает овал Декарта.



Решение. Написание программы требует предварительного проведения ряда вычислений. Результат её работы показан на рис. 11.

```
GraphicsWindow.Width = 600
GraphicsWindow.Height = 600
x0 = -100
y0 = 300
l1 = 300
r1 = 200
l2 = 100
r2 = 20
d = Math.Sqrt(l1*l1 — r1*r1)
u = Math.ArcTan(r1/d)
For al = -(u-.001) To u-.001 Step 2*(u-.001)/5005
sb = l1* Math.Sin(al)/r1
cb = Math.Sqrt(1 — sb*sb)
tb = sb/cb
bt = Math.ArcTan(tb)
sg = l2*Math.Sin(al)/r2
cg = Math.Sqrt(1 — sg*sg)
tg = sg/cg
gm = Math.ArcTan(tg)
f1 = gm — al
f2 = al + bt
f3 = -(al + gm)
f4 = — (bt - al)
```



```
s = (11 — 12)* Math.Tan(f2)/(Math.Tan(f1) + Math.Tan(f2))
h = s*Math.Tan(f1)
GraphicsWindow.SetPixel(x0 + 12 + s, y0 + h,"")
s = (11 — 12)* Math.Tan(f4)/(Math.Tan(f1) + Math.Tan(f4))
h = s*Math.Tan(f1)
GraphicsWindow.SetPixel(x0 + 12 + s, y0 + h,"")
s = (11 — 12)* Math.Tan(f2)/(Math.Tan(f3) + Math.Tan(f2))
h = s*Math.Tan(f3)
GraphicsWindow.SetPixel(x0 + 12 + s, y0 + h,"")
s = (11 — 12)* Math.Tan(f4)/(Math.Tan(f3) + Math.Tan(f4))
h = s*Math.Tan(f3)
GraphicsWindow.SetPixel(x0 + 12 + s, y0 + h,"")
EndFor
```

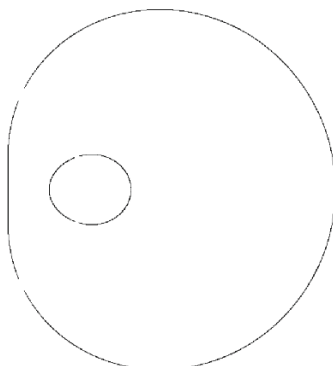


Рис. 11. Овал Декарта
Fig. 11. The Descartes oval

Сравнив рисунки 5 и 11, можно прийти к выводу, что овал Декарта имеет нечто общее с улиткой Паскаля, поскольку он похож на разорванную улитку. Это обстоятельство может послужить темой для исследования.

Естественно, что могут проводиться и другие **исследования кривых высших порядков**. Подобно исследованию кривых третьего порядка можно начать с рассмотрения многочленов высших порядков $F(x, y) = 0$ от двух переменных, разлагающихся на множители, а именно на неприводимые многочлены меньшей степени. Затем можно перейти к построению кривых вида $F(x, y) = c$ с помощью сканирования.

Задание 8. Рассмотреть кривую пятого порядка, уравнение которой разлагается на два следующих кубических многочлена $y + x^3 = 0$ и $x^2 y - 1 = 0$. Написать программу, которая строит на её основе другие кривые пятого порядка.

Решение. Результат работы программы показан на рисунке 12.



```
GraphicsWindow.Width = 600
GraphicsWindow.Height = 600
x0 = 300
y0 = 300
ed = 100
For x = -3 To 3 Step .002
For y = -3 To 3 Step .002
s1 = y + x*x*x
s2 = x*y — 1
z = s1*s2
xe = x0 + x*ed
ye = y0 — y*ed
If Math.Abs(z) < .01 Then
GraphicsWindow.FillEllipse(xe-3, ye-3, 6, 6)
EndIf
EndFor
EndFor
For c = -5 To 5 Step .5
For x = -3 To 3 Step .002
For y = -3 To 3 Step .002
s1 = y + x*x*x
s2 = x*y — 1
z = s1*s2 + c
xe = x0 + x*ed
ye = y0 — y*ed
If Math.Abs(z) < .01 Then
GraphicsWindow.SetPixel(xe, ye, "blake")
EndIf
EndFor
EndFor
EndFor
```

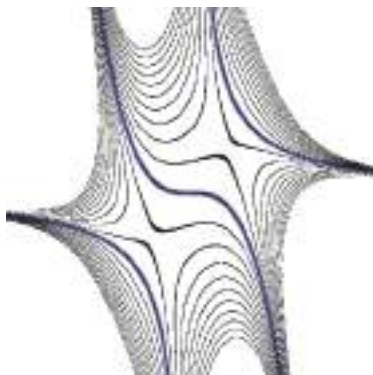


Рис. 12. Кривая пятого порядка

Fig. 12. The fifth-order curve



Задание 9. Перейти от схематического изображения лица (рис. 13), выполненного с помощью кругов, на изображение, очерченное двумя алгебраическими кривыми.

Решение. Исходный рисунок состоит из семи окружностей. Следовательно, программа строит две кривые четырнадцатого порядка. Результат показан на рис. 14.

```
GraphicsWindow.Width = 600
GraphicsWindow.Height = 600
x0 = 300
y0 = 300
ed = 75
eps = 5
For c = -40 To -5 Step 35
For x = -4 To 4 Step .002
For y = -3 To 3 Step .002
s1 = x*x + .8*y*y — 4
s2 = (x-1)*(x-1) + (y-1/2)*(y-1/2) — 1/4
s3 = (x+1)*(x+1) + (y-1/2)*(y-1/2) — 1/4
s4 = x*x + y*y — 1/4
s5 = x*x + (y+1)*(y+1) — 1/4
s6 = (x-2.25)*(x-2.25) + y*y — 1/9
s7 = (x+2.25)*(x+2.25) + y*y — 1/9
z = s1*s2*s3*s4*s5*s6*s7 + c
xe = x0 + x*ed
ye = y0 — y*ed
If Math.Abs(z) < eps Then
GraphicsWindow.SetPixel(xe, ye, "black")
EndIf
EndFor
EndFor
eps = 1
EndFor
```



Рис. 13. Схематическое изображение лица с помощью кругов

Fig. 13. Schematic representation of a face using circles

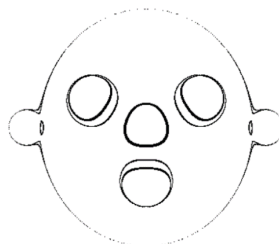


Рис. 14. Схематическое изображение лица с помощью алгебраических кривых

Fig. 14. Schematic representation of a face using algebraic curves



Результат можно рассматривать как математическую шутку. Но можно воспринять его как малюсенький шаг к выше упомянутой задаче Иоганна Гудде.

Далее обратимся к **построению пучков алгебраических кривых**. Это построение можно провести программами аналогичными тем программам, которые использовались в заданиях 26 и 27 статьи (Куланин, Степанов, 2026). Вместо девяти точек речь пойдёт о двадцати пяти точках. Пучок в целом мы строить не будем и ограничимся только отдельными кривыми, входящими в него.

Задание 10. Построить алгебраическую кривую пятого порядка на основе двух кривых, распадающихся на два семейства — пять горизонтальных прямых и пять вертикальных прямых.

Решение. Результаты работы программы при различных значениях λ_1 на рис. 15 ($\lambda_1 = 0.25$), 16 ($\lambda_1 = 0.5$) и 17 ($\lambda_1 = 0.55$).

```
GraphicsWindow.Width = 600
GraphicsWindow.Height = 600
x0 = 300
y0 = 300
ed = 100
lm1 = .25
lm2 = 1 — lm1
For x = -3 To 3 Step .002
For y = -3 To 3 Step .002
s1 = (x - 2)*(x - 1)*x*(x + 1)*(x + 2)
s2 = (y - 2)*(y - 1)*y*(y + 1)*(y + 2)
z = lm1*s1 + lm2*s2
If Math.Abs(z) < .01 Then
xe = x0 + x*ed
ye = y0 — y*ed
GraphicsWindow.SetPixel(xe, ye, "black")
EndIf
EndFor
EndFor
For x = -2 To 2
For y = -2 To 2
xe = x0 + x*ed
ye = y0 — y*ed
GraphicsWindow.FillEllipse(xe-5, ye-5, 10, 10)
EndFor
EndFor
```

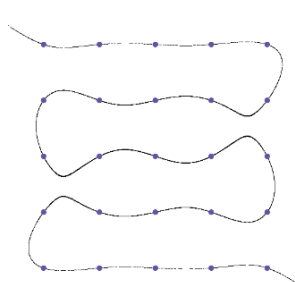


Рис. 15. Кривая пятого
порядка из задания 10
($\lambda_1 = 0.25$)

Fig. 15. Fifth-order curve
from task 10 ($\lambda_1 = 0.25$)

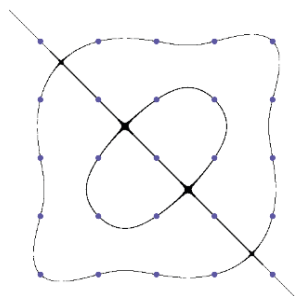


Рис. 16. Кривая пятого
порядка из задания 10
($\lambda_1 = 0.5$)

Fig. 16. Fifth-order curve
from task 10 ($\lambda_1 = 0.5$)

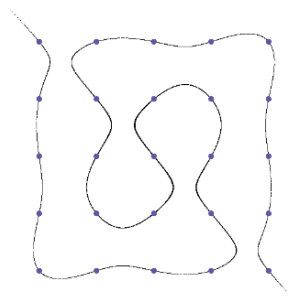


Рис. 17. Кривая пятого
порядка из задания 10
($\lambda_1 = 0.55$)

Fig. 17. Fifth-order curve
from task 10 ($\lambda_1 = 0.55$)

Наконец, можно рассматривать линейные системы алгебраических кривых любого порядка.

Задание 11. Провести преобразование астроида, уравнение которой имеет вид $(x^2 + y^2 - r^2)^3 + 27r^2x^2y^2 = 0$, в окружность (рис. 18).

Решение. Программа очень компактна.

```
GraphicsWindow.Width = 620
GraphicsWindow.Height = 600
x0 = 300
y0 = 300
ed = 100
r1 = 1
r2 = 2.5
For lm1 = 0 To 1 Step .1
    lm2 = 1 — lm1
    For x = -3 To 3 Step .005
        For y = -3 To 3 Step .005
            xe = x0 + x*ed
            ye = y0 — y*ed
            z1 = (x*x + y*y — r1*r1)*(x*x + y*y — r1*r1)*(x*x + y*y — r1*r1) + 27*r1*r1*x*x*y*y
            z2 = (x*x + y*y — r2*r2)
            z = lm1*z1 + lm2*z2
            If Math.Abs(z) < .1 Then
                GraphicsWindow.SetPixel(xe, ye, "")
            EndIf
        EndFor
    EndFor
EndFor
```

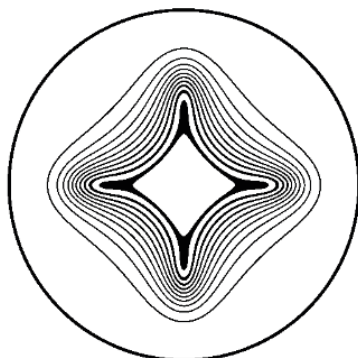


Рис. 18. Преобразование астроида в окружность

Fig. 18. Converting an astroid into a circle

Заключение

В данной статье рассматриваются вопросы, связанные с углублённым изучением кривых выше третьего порядка. Особое внимание уделяется методам построения алгебраических кривых.

Обсуждение соответствующих вопросов может помочь молодым преподавателям при изучении различных разделов высшей математики. Кроме того, некоторые рассмотренные темы могут быть предложены в качестве тем курсовых и дипломных работ.

Список источников / References

1. Александров, П.С. (Ред.). (1969). *Проблемы Гильберта: сборник*. Наука.
Alexandrov, P. S. (Ed.). (1969). *Hilbert's problems: A collection*. Nauka.
2. Дьедонне, Ж. (1972). *Линейная алгебра и элементарная геометрия*. Наука.
Dieudonné, J. (1972). *Linear algebra and elementary geometry*. Nauka.
3. Куланин, Е.Д., Степанов, М.Е. (2022). Всестороннее рассмотрение математических понятий как методический прием. *Моделирование и анализ данных*, 12(4), 67–84. <https://doi.org/10.17759/mda.2022120405>
Kulanin, Y.D., Stepanov, M.E. (2022). Comprehensive review of mathematical concepts as a methodological approach. *Modeling and Data Analysis*, 12(4), 67–84. <https://doi.org/10.17759/mda.2022120405>
4. Куланин, Е.Д., Степанов, М.Е. (2022). Из опыта работы в режиме дистанционного обучения. *Моделирование и анализ данных*, 12(3), 58–70. <https://doi.org/10.17759/mda.2022120305>
Kulanin, Y.D., Stepanov, M.E. (2022). From the experience of working in remote mode education. *Modeling and Data Analysis*, 12(3), 58–70. <https://doi.org/10.17759/mda.2022120305>
5. Куланин, Е.Д., Степанов, М.Е. (2022). О визуализации решений некоторых экстремальных задач. *Моделирование и анализ данных*, 12(4), 94–104. <https://doi.org/10.17759/mda.2022120407>



- Kulanin, Y.D., Stepanov, M.E. (2022). On the visualization of solutions to some extremal problems. *Modeling and Data Analysis*, 12(4), 94–104. <https://doi.org/10.17759/mda.2022120407>
6. Куланин, Е.Д., Степанов, М.Е. (2024). Вычислительный эксперимент в преподавании высшей математики на примере теории чисел. *Моделирование и анализ данных*, 14(1), 170–195. <https://doi.org/10.17759/mda.2024140111>
- Kulanin, Y.D., Stepanov, M.E. (2024). Computational experiment in teaching higher mathematics on the example of number theory. *Modeling and Data Analysis*, 14(1), 170–195. <https://doi.org/10.17759/mda.2024140111>
7. Куланин, Е.Д., Степанов, М.Е. (2024). Вычислительный эксперимент в преподавании высшей математики: Комбинаторика и её приложения. *Моделирование и анализ данных*, 14(3), 174–202. <https://doi.org/10.17759/mda.2024140310>
- Kulanin, Y.D., Stepanov, M.E. (2024). Computational experiment in teaching higher mathematics: Combinatorics and its applications. *Modeling and Data Analysis*, 14(3), 174–202. <https://doi.org/10.17759/mda.2024140310>
8. Куланин, Е.Д., Степанов, М.Е. (2024). Использование образов в преподавании высшей математики. *Моделирование и анализ данных*, 14(2), 192–225. <https://doi.org/10.17759/mda.2024140212>
- Kulanin, Y.D., Stepanov, M.E. (2024). Using images in teaching higher mathematics. *Modeling and Data Analysis*, 14(2), 192–225. <https://doi.org/10.17759/mda.2024140212>
9. Куланин, Е.Д., Степанов, М.Е. (2025). Алгебраические кривые высших порядков в преподавании высшей математики: Методы построения алгебраических кривых. *Моделирование и анализ данных*, 15(4), 122–137. <https://doi.org/10.17759/mda.2025150408>
- Kulanin, Y.D., Stepanov, M.E. (2025). Algebraic curves of higher orders in the teaching of higher mathematics: Methods of constructing algebraic curves. *Modeling and Data Analysis*, 15(4), 122–137. <https://doi.org/10.17759/mda.2025150408>
10. Куланин, Е.Д., Степанов, М.Е. (2026). Алгебраические кривые высших порядков в преподавании высшей математики: Кубические кривые. *Моделирование и анализ данных*, 16(2), 210–242. <https://doi.org/10.17759/mda.2026160212>
- Kulanin, Y.D., Stepanov, M.E. (2026). Algebraic curves of higher orders in teaching higher mathematics: Cubic curves. *Modeling and Data Analysis*, 16(2), 210–242. <https://doi.org/10.17759/mda.2026160212>
11. Куланин, Е.Д., Нгуен Ву Куанг, Степанов, М.Е. (2019). Осязаемая предметность с компьютерной поддержкой. *Моделирование и анализ данных*, 9(4), 145–156. <https://doi.org/10.17759/mda.2019090412>
- Kulanin, Y.D., Nguyen Vu Quang, Stepanov, M.E. (2019). Tangible subjectivity with computer support. *Modeling and Data Analysis*, 9(4), 145–156. <https://doi.org/10.17759/mda.2019090412>
12. Куланин, Е.Д., Степанов, М.Е., Нуркаева, И.М. (2020). Роль образного мышления в научном мышлении. *Моделирование и анализ данных*, 10(2), 110–128. <https://doi.org/10.17759/mda.2020100209>
- Kulanin, Y.D., Stepanov, M.E., Nurkaeva, I.M. (2020). The role of imagination in scientific thinking. *Modeling and Data Analysis*, 10(2), 110–128. <https://doi.org/10.17759/mda.2020100209>
13. Куланин, Е.Д., Степанов, М.Е., Нуркаева, И.М. (2021). О различных подходах к решению экстремальных задач. *Моделирование и анализ данных*, 11(1), 40–60. <https://doi.org/10.17759/mda.2021110104>



Kulanin, Y.D., Stepanov, M.E., Nurkaeva, I.M. (2021). On different approaches to solving extreme problems. *Modeling and Data Analysis*, 11(1), 40–60. <https://doi.org/10.17759/mda.2021110104>

14. Куланин, Е.Д., Степанов, М.Е. (2025). Алгебраические кривые низших порядков в преподавании высшей математики. *Моделирование и анализ данных*, 15(1), 168–209. <https://doi.org/10.17759/mda.2025150110>
Kulanin, Y.D., Stepanov, M.E. (2025). Algebraic curves of lower order in the teaching of higher mathematics. *Modelling and Data Analysis*, 15(1), 168–209. (In Russ.). <https://doi.org/10.17759/mda.2025150110>
15. Куланин, Е.Д., Степанов, М.Е. (2025). Множества точек, находящихся на рациональных расстояниях друг от друга. *Моделирование и анализ данных*, 15(1), 210–251. <https://doi.org/10.17759/mda.2025150111>
Kulanin, Y.D., Stepanov, M.E. (2025). Sets of points that are a certain distance apart. *Modelling and Data Analysis*, 15(1), 210–251. (In Russ.). <https://doi.org/10.17759/mda.2025150111>
16. Савёлов, А.А. (1960). *Плоские кривые: Систематика, свойства, применения* (Справочное руководство). Государственное издательство физико-математической литературы.
Savelov, A.A. (1960). *Plane curves: Taxonomy, properties, applications* (Reference manual). State Publishing House of Physics and Mathematics Literature.
17. Степанов, М.Е. (1996). Рене Декарт: К 400-летию со дня рождения. *Математика (Еженедельное приложение к газете «Первое сентября»)*, (12).
Stepanov, M.E. (1996). René Descartes: On the 400th anniversary of his birth. *Mathematics (Weekly Supplement to the newspaper “Pervoye Sentyabrya”)*, (12).
18. Степанов, М.Е. (2015). Эрлангенская программа Клейна и геометрия треугольника. *Моделирование и анализ данных*(1).
Stepanov, M.E. (2015). Klein’s Erlangen program and triangle geometry. *Modeling and Data Analysis*(1).
19. Степанов, М.Е. (2016). Эрлангенская программа Клейна и геометрия треугольника: Окончание. *Моделирование и анализ данных*(1).
Stepanov, M.E. (2016). Klein’s Erlangen program and the geometry of a triangle: Conclusion. *Modeling and Data Analysis*(1).

Информация об авторах

Куланин Евгений Дмитриевич, кандидат физико-математических наук, профессор кафедры прикладной математики, Московский государственный психолого-педагогический университет (ФГБОУ ВО МГППУ), Москва, Российская Федерация. ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-6093-7012>, e-mail: lucas03@mail.ru

Степанов Михаил Евграфович, кандидат педагогических наук, доцент, Москва, Российская Федерация. ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-4803-8211>, e-mail: mestepanov@yandex.ru

Information about the authors

Yevgeny D. Kulanin, Candidate of Science (Physics and Mathematics), Professor of the Department of Applied Mathematics, Moscow State University of Psychology and Education (FGBOU VO MGPPU), Moscow, Russian Federation. ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-6093-7012>, e-mail: lucas03@mail.ru



Mikhail E. Stepanov, Candidate of Pedagogical Sciences, Associate Professor, Moscow, Russian Federation. ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-4803-8211>, e-mail: mestepanov@yandex.ru

Вклад авторов

Куланин Е.Д. — идеи исследования, написание и оформление рукописи, разработка методики, планирование исследования, визуализация результатов исследования.

Степанов М.Е. — идеи исследования, написание и оформление рукописи; разработка описанного ПО, планирование исследования, визуализация результатов исследования.

Все авторы приняли участие в обсуждении результатов и согласовали окончательный текст рукописи.

Contribution of the authors

Kulanin Y.D. — research ideas, writing and formatting of the manuscript, development of the methodology, research planning, and visualization of research results.

Stepanov M.E. — research ideas, writing and formatting of the manuscript, development of the described software, research planning, and visualization of research results.

All authors participated in the discussion of the results and approved the final text of the manuscript.

Конфликт интересов

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Conflict of interest

The authors declare no conflict of interest.

Поступила в редакцию 29.03.2026

Поступила после рецензирования 14.08.2026

Принята к публикации 15.08.2026

Опубликована 30.09.2026

Received 2026.03.29

Revised 2026.08.14

Accepted 2026.08.15

Published 2026.09.30