Моделирование и анализ данных
2026, *16*(3), 202—218.
https://doi.org/10.17759/mda.2026160310
ISSN: 2219-3758 (печатный)
ISSN: 2311-9454 (online)

Modelling and Data Analysis
2026, *16*(3), 202—218.
https://doi.org/10.17759/mda.2026160310
ISSN: 2219-3758 (print)
ISSN: 2311-9454 (online)

Научная статья | Original paper

УДК 519.6:517.926:004.85

Построение многослойного решения уравнения Дюффинга на основе аналитической модификации численных методов

И.Ю. Вандакуров, Д.А. Тархов, Т.А. Шемякина ✉
Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого (ФГАОУ ВО СПбПУ), Санкт-Петербург, Российская Федерация
✉ sh_tat@mail.ru

Резюме

Контекст и актуальность. Целью статьи является исследование нового подхода к построению приближённых решений параметрических дифференциальных уравнений. Новый подход соединяет аналитическую модификацию итерационных формул обычных численных методов с физически информированными нейронными сетями. Новый метод позволяет построить иерархию приближённых решений, обладающих высокой точностью при малом размере нейронной сети. Для задач с параметрами метод позволяет строить параметрические модели с решениями в виде функций. Для этих моделей параметры задачи входят в число входных переменных. **Методы и материалы.** Работа метода проиллюстрирована на примере уравнения Дюффинга. Для построения приближённого параметрического решения применяется аналитическая модификация метода Хойна. Наш подход позволяет строить математические модели трёх уровней. В качестве моделей первого уровня мы исследуем метод аналитической модификации с подбором оптимального параметра. В качестве моделей второго уровня мы строим модели, в которых параметр является нейронной сетью, на вход которой подаётся параметр задачи. Эти модели являются несколько более сложными, но и более точными. В качестве моделей третьего уровня рассматриваются модели, в которых параметр метода Хойна является нейронной сетью, на вход которой подаётся параметр задачи и независимая переменная. **Результаты.** В результате получается иерархия адаптивных моделей различной сложности и точности, которые позволяет легко адаптировать эти модели к данным наблюдений за изучаемым объектом. **Выводы**. Предложенный метод построения многослойного нейросетевого решения для параметрических обыкновенных дифференциальных уравнений

© Вандакуров И.Ю., Тархов Д.А., Шемякина Т.А., 2026

CC BY-NC

на основе аналитической модификации численных методов можно применить для других дифференциальных уравнений, систем дифференциальных уравнений, уравнений в частных производных и так далее.

Ключевые слова: уравнение Дюффинга, аналитическая модификация численных методов, метод Хойна, параметрическое решение, нейронные сети

Для цитирования: Вандакуров, И.Ю., Тархов, Д.А., Шемякина, Т.А. (2026). Построение многослойного нейросетевого решения уравнения Дюффинга на основе аналитической модификации численных методов. *Моделирование и анализ данных, 16*(3), 202—218. https://doi.org/10.17759/mda.2026160310

Construction of a multilayer solution of the Duffing equation based on analytical modification of numerical methods

I.Y. Vandakurov, D.A. Tarkhov, T.A. Shemyakina ✉
Peter the Great Saint Petersburg Polytechnic University, Saint Petersburg, Russian Federation
✉ sh_tat@mail.ru

Abstract

Context and relevance. The purpose of the article is to study a new approach to constructing approximate solutions of parametric differential equations. The new approach combines the analytical modification of iterative formulas of conventional numerical methods with physically informed neural networks. The new method allows us to build a hierarchy of approximate solutions with high accuracy with a small neural network size. For problems with parameters, the method allows you to build parametric models with solutions in the form of functions. For these models, the task parameters are among the input variables. **Methods and materials.** The operation of the method is illustrated by the example of the Duffing equation. An analytical modification of the Heun's method is used to construct an approximate parametric solution. Our approach allows us to build mathematical models of three levels. As models of the first level, we investigate the method of analytical modification with the selection of the optimal parameter. As second-level models, we build models in which the parameter is a neural network, which is input to the task parameter. These models are somewhat more complex, but also more accurate. The models of the third level are considered models in which the parameter of the Heun's method is a neural network, the input of which is a task parameter and an independent variable. **Results.** The result is a hierarchy of adaptive models of varying complexity and accuracy, which makes it easy to adapt these models to the observational data of the object under study. **Conclusions.** The proposed method for constructing a multilayer neural

network solution for parametric ordinary differential equations based on an analytical modification of numerical methods can be applied to for other differential equations, systems of differential equations, partial differential equations, et al.

Keywords: Duffing equation, analytical modification of numerical methods, Hein's method, parametric solution, neural networks

For citation: Vandakurov, I.Y., Tarkhov, D.A., Shemyakina, T.A. (2026). Construction of a multilayer neural network solution of the Duffing equation based on analytical modification of numerical methods. *Modelling and Data Analysis, 16*(3)*,* 202—218. (In Russ.). https://doi.org/10.17759/mda.2026160310

Введение

Для приближённого решения дифференциальных уравнений разработано, исследовано и апробировано на многих разнообразных задачах большое число методов. С одной стороны, это широкая палитра численных методов (Вержбицкий, 2005), (Вержбицкий, 2021), (Кольцова, 2026), (Hairer, Wanner, Norsett, 1993), (Kembhavi, Kumar, 2023), с другой — приближённые аналитические методы, типа разложения в ряд Тейлора, асимптотических методов и т.д. (Umer, Olejnik, 2025). Для этих методов доказаны теоремы, гарантирующие точность приближения. Однако, эти методы обладают рядом недостатков. Численные методы в качестве приближённого решения дают значения искомой функции только в дискретных точках. Для получения функционального приближения приходится решать задачу интерполяции, разложение в степенной ряд, что даёт, как правило, хорошее приближение только в малой окрестности начальной точки. Есть и более важный недостаток — если исходная модель реального объекта в виде дифференциального уравнения изначально неточна, то уточнение её численного решения с помощью использования измерений затруднено.

В качестве преодоления таких проблем с конца прошлого века развиваются методы приближённого решения дифференциальных уравнений с помощью нейронных сетей (Guo, et al., 2025), (Lagaris, Likas, Fotiadis, 1998), (Liu, 2025), (Luo, et al., 2025), (Marcus, 2024), (Michaloglou, et al., 2025), (Ren, et al., 2025), (Tarkhov, Vasilyev, 2005), (Tarkhov, Vasilyev, 2020). Эти методы используют известные качества нейронных сетей — то, что они являются универсальными аппроксиматорами: устойчивы по отношению к ошибкам в данных, могут адаптироваться к поступлению новой информации. Особенно активно данное направление развивается после работ (Raissi, Perdikaris, Karniadakis, 2017(Part I and Part II)), (Raissi, Perdikaris, Karniadakis, 2019), в которых возник термин физически информированные нейронные сети (PINN).

Однако PINN обладают существенными недостатками, главный из которых — ресурсоёмкая процедура обучения. Существенным образом на длительность обучения влияет удачный выбор структуры сети и начальных значений весов. Такой выбор при стандартном подходе к построению и обучению PINN затруднён и обычно опирается на опыт исследователя.

В работе (Lazovskaya, Tarkhov, 2016) предложен новый класс нейроморфных моделей на основе аналитической модификации численных методов. Эти модели были построены для широкого набора задач (Tarkhov, Vasilyev, 2020), включая моделирование реальных объектов. В работе (Tarkhov, Lazovskaya, Malykhina, 2023) проведено объединение подхода PINN и подхода, основанного на аналитической модификации численных методов. Данная работа продолжает это направление исследований. Построенные модели хорошо подходят для использования при суррогатных вычислениях (Jiang, Zhou, Shao, 2020), (Manzoni, et al., 2020), (Ranft, von der Linden, 2021), (Zhou, Mei, Xu, 2023).

В данной работе представлен гибридный аналитико-нейросетевой подход к решению параметрических обыкновенных дифференциальных уравнений на основе модифицированной схемы Хойна. Метод сочетает аналитическую модификацию классических формул численного интегрирования дифференциальных уравнений с нейросетевой параметризацией коэффициентов схемы, что позволяет строить компактные параметрические суррогатные модели. Вместо непосредственной аппроксимации решения нейронная сеть используется для адаптивной настройки параметров численной схемы. Подход проверяется на уравнении Дюффинга (Kuznetsov, 2025), (Mohammed, 2025), (Piccirillo, et al., 2025) в качестве эталонной нелинейной системы. Исследуются три уровня моделей. Первый получается с помощью скалярной оптимизации параметра метода Хойна на основе минимизации ошибки решения задачи Коши для уравнения Дюффинга. Второй состоит в поиске параметра схемы в виде функции параметра в уравнении Дюффинга. Третий уровень состоит в поиске параметра схемы в виде нейросетевой функции двух переменных — параметра задачи и независимой переменной уравнения. Численные эксперименты показывают, что метод существенно повышает точность аппроксимации по сравнению с традиционными схемами с фиксированными параметрами, при этом требуя значительно меньших вычислительных ресурсов, чем стандартные физически информированные нейронные сети. Полученные результаты свидетельствуют о том, что предложенная аналитико-нейросетевая структура представляет собой эффективный и гибкий инструмент для параметрического анализа и моделирования нелинейных динамических систем.

Постановка задачи. Методы решения

Комбинированная схема Эйлера–Хойна

Рассмотрим задачу Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \mathbf{y}'(x) = \mathbf{f}(x, \mathbf{y}), \\ \mathbf{y}(0) = \mathbf{y}_0. \end{cases} \tag{1}$$

Чтобы построить численную аппроксимацию, мы применяем комбинированную схему Эйлера–Хойна:

$$\mathbf{y}_{k+1} = \mathbf{y}_k + h_k((1-u)\mathbf{f}(x_k, \mathbf{y}_k) + u\mathbf{f}(x_k + h_k, \mathbf{y}_k + h_k\mathbf{f}(x_k, \mathbf{y}_k)), \quad (2)$$

где u — вспомогательный параметр, h_k — обозначает размер шага.

При $u = 0$ схема (2) это явный метод Эйлера. При $u = 1$ схема (2) сводится к методу предиктор-корректор на основе неявного метода Эйлера. При $u = 0{,}5$ схема (2) соответствует правилу трапеции. При фиксированном значении $u = 0{,}5$ и равномерной дискретизации получается классический метод Хойна.

В случае равномерного разбиения на интервалы $x \in [a, b]$, мы определяем $x_k = x_{k-1} + h, \quad k = 0, ..., n, \; h = \dfrac{b-a}{n}$. Если формулировка задачи (1) содержит параметры, они автоматически вводятся в числовую схему через функцию f.

Применение схемы (2) обеспечивает дискретное численное решение. В данной работе мы предлагаем альтернативный подход, направленный на построение приближенного решения в функциональной форме. Используя схему (2), мы строим приближенное решение на переменном интервале: $D = [\min(x_0, x), \max(x_0, x)], \quad x \in [a, b]$. Пусть $h_k = h_k(x), \quad y_k = y_k(x), \quad y_0(x) = y_0$, тогда приближенное решение представляется в виде $y(x) \approx y_n(x)$. Число n называется числом слоёв модели.

Мы рассматриваем три уровня моделей. Для моделей первого уровня u является параметром, который подбирается исходя из наилучшего удовлетворения решения задаче Коши (1). Для моделей второго уровня u является нейросетевой функцией параметра задачи. Для моделей третьего уровня u является функцией параметра задачи и переменной $x \in [a, b]$.

Уравнение Дюффинга

Для тестирования подхода мы рассматриваем задачу Коши для уравнения Даффинга:

$$\begin{cases} y''(x) + y(x) + \alpha y^3(x) = 0, \\ y(0) = 0, \quad y'(0) = 1. \end{cases} \quad (3)$$

где α — нелинейный параметр $\alpha \in [\alpha_{\min}, \alpha_{\max}]$.

Уравнение Дюффинга это нелинейное параметрическое дифференциальное уравнение второго порядка. Задачу Коши для этого уравнения используем для демонстрации предложенного авторами методов ее решения. Исследование задачи можно проводить при нулевом значении параметра, при малом значении параметра и возрастающей нелинейности с увеличением значения параметра.

Уравнение (1) стандартным образом сводится к системе двух обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка. Эта форма более удобна для записи итерационных формул стандартных численных методов интегрирования дифференциальных уравнений.

Для моделей первого уровня параметр u на схеме (2) считается константой, которая находится с помощью минимизации функционала ошибки, определенного на множестве точек выборки:

$$J(u) = \sum_{j=1}^{m} (y_n''(M_j) + y_n(M_j) + \alpha_j y_n^3(M_j))^2, \quad (4)$$

где $M_j = (x_j, \alpha_j), j = 1,...,m,$ — случайно сгенерированные точк выборки в области параметров.

Для повышения точности аппроксимации рассматриваются модели второго уровня, для которых параметр u на схеме (2) представлен в виде нейросетевой функции

$$u(\alpha) = \sum_{i=1}^{K} c_i v_i(\alpha, \mathbf{a}_i) + c_0, \quad (5)$$

где v_i — базисные функции, обычно сигмоидного вида. Мы выбираем $v_i(\alpha, \mathbf{a}_i) = th(a_i(\alpha - b_i))$.

Для ещё большего повышения точности аппроксимации параметр u на схеме (2) представлен в виде нейросетевой функции вида

$$u(x, \alpha) = \sum_{i=1}^{K} c_i v_i(x, \alpha, \mathbf{a}_i) + c_0, \quad (6)$$

где v_i — базисные функции, K — количество нейронов. Мы выбираем $v_i(\alpha, \mathbf{a}_i) = th(a_i(\alpha - b_i)th(d_i(x - e_i))$.

Параметры нейронной сети определяются путем минимизации функционала ошибки (4), определенного на множестве точек выборки.

Вычислительные эксперименты

Для оценки эффективности предложенного гибридного аналитико-нейронного метода были проведены численные эксперименты. Расчеты проводились в области $x \in [0, 2]$, $\alpha \in [0,1]$, с использованием двухслойных, трехслойных, четырехслойных и пятислойных композиций модифицированной численной схемы.

Исследование моделей первого уровня — скалярная оптимизация параметров схемы

В первой серии экспериментов параметр u на схеме (2) рассматривался как скалярная константа и оптимизировался напрямую, без параметризации нейронной сетью. Его оптимальное значение было определено путем минимизации функционала ошибки (4) во всей области параметров.

Результаты сравнения аналитического решения с приближенным решением, полученным по схеме (2) для различного количества слоев представлены (рис. 1) — (рис. 4).

Построенная нами приближенная модель при минимальном значении параметра задачи отражает качественные свойства точного решения исходного дифференциального уравнения для нулевого параметра, что показано на (рис. 1). При этом погрешность достаточно велика, чтобы исключить ее использование для количественных

выводов. Однако в первой половине интервала погрешность относительно невелика, но резко возрастает во второй половине.

Следует учитывать, что сама по себе приблизительная формула довольно проста.

При максимальном значении параметра задачи приближенная модель отражает качественный характер точного решения, что показано на (рис. 2). При этом она значительно отличается от него количественно, особенно в конце рассматриваемого интервала. Таким образом, эффективность метода слабо зависит от того, является ли исходное дифференциальное уравнение линейным или нет.

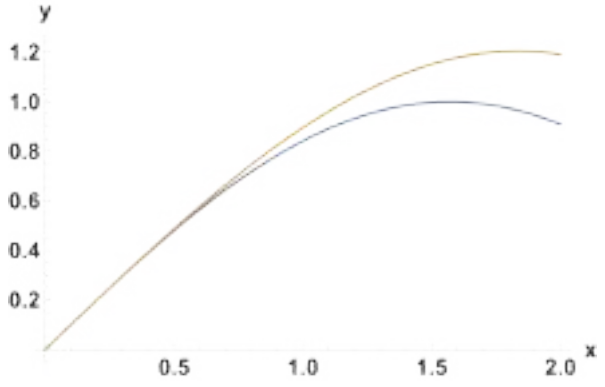

Рис. 1. Сравнение аналитического (синий) и приближенного (коричневый) решений, при скалярно-оптимизированном параметре $u = 0{,}3$ для 3-слойной схемы при параметре α_{min}

Fig. 1. Comparison of analytical (blue) and approximate (brown) solutions, with a scalar-optimized parameter $u = 0{,}3$ for a 3-layer circuit with the parameter α_{min}

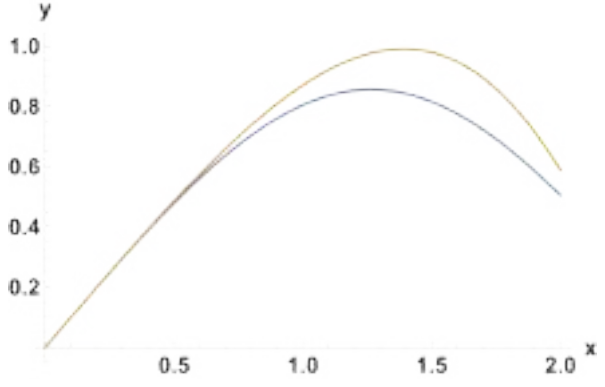

Рис. 2. Сравнение аналитического (синий) и приближенного (красный) решений, при скалярно-оптимизированном параметре $u = 0{,}3$ для 3-слойной схемы при параметре α_{max}

Fig. 2. Comparison of analytical (blue) and approximate (brown) solutions, with a scalar-optimized parameter $u = 0{,}3$ for a 3-layer circuit with the parameter α_{max}

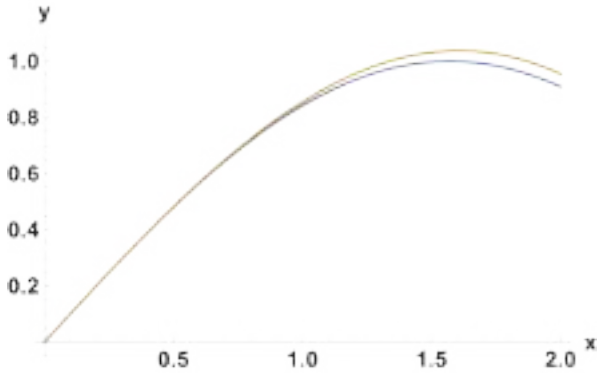

Рис. 3. Сравнение аналитического (синий) и приближенного (красный) решений, при скалярно-оптимизированном параметре u = 0,435 для 5-слойной схемы при параметре α_{min}

Fig. 3. Comparison of analytical (blue) and approximate (brown) solutions, with a scalar-optimized parameter u = 0,435 for a 5-layer circuit with the parameter α_{min}

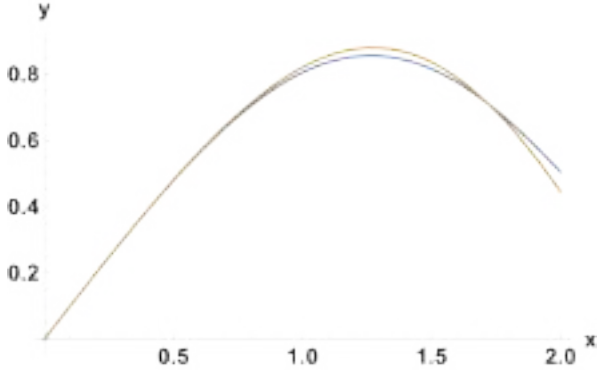

Рис. 4. Сравнение аналитического (синий) и приближенного (красный) решений, при скалярно-оптимизированном параметре u = 0,435 для 5-слойной схемы при параметре α_{max}

Fig. 4. Comparison of the analytical (blue) and approximate (red) solutions obtained with the scalar-optimized parameter u = 0,435 for a 5-layer circuit with the parameter α_{max}

При применении нашего метода с постоянным параметром u точность формулы возрастает с увеличением количества слоев, что показано на (рис. 3), хотя погрешность, особенно в конце интервала, все еще довольно велика.

С увеличением количества слоев погрешность продолжает уменьшаться. В то же время формулы становятся все более сложными, а для их вычисления требуется все больше ресурсов.

Можно сделать вывод, что по мере увеличения параметра, отвечающего за нелинейность задачи, погрешность не имеет тенденции к увеличению, что показано

на (рис. 4). Вместо этого она более равномерно распределяется по интервалу, обнуляясь в его конце.

Можно заметить, что увеличение количества слоев приводит к значительному повышению точности аппроксимации. Кроме того, оптимизация параметра u приводит к существенному снижению ошибки аппроксимации.

Количественный анализ ошибок для моделей первого уровня

В таблице 1 приведены среднеквадратические ошибки для оптимального параметра u, для разных номеров слоев. Результаты подтверждают, что (i) выбор оптимального скалярного параметра уменьшает ошибку аппроксимации и (ii) ошибка существенно уменьшается с увеличением количества слоев.

Таблица 1 / Table 1

Среднеквадратичные ошибки при скалярно-оптимизированном параметре u (для 2-, 3-, 4-, и 5-слойных схем)

Root-mean-square errors with a scalar-optimized parameter u (for 2-, 3-, 4-, and 5-layer schemes)

Layers	u_{opt}	$J(0,0)$	$J(0,5)$	$J(1,0)$	$J(u_{opt})$
$n = 2$	0,310	2,7847	1,28005	4.15704	0,547534
$n = 3$	0,300	1,6443	0,52325	0.766541	0,357948
$n = 4$	0,360	0,9335	0,28634	0.465874	0,254581
$n = 5$	0,435	0.57174	0.15675	0.344674	0.148771

Табл. 1 подтверждает вывод о том, что точность нашей модели монотонно возрастает с увеличением количества слоев. Другой вывод заключается в том, что погрешность для оптимального значения параметра ниже, чем для явного метода Эйлера и стандартного метода Хойна. Однако преимущество модели с оптимальным параметром перед стандартным методом Хойна уменьшается с увеличением количества слоев. Более того, при всех значениях количества слоев, на которых проводились вычислительные эксперименты, метод Хойна имеет преимущество перед явным методом Эйлера, и это преимущество возрастает с увеличением количества слоев.

Исследование моделей второго уровня — поиск параметра схемы как нейросетевая функция параметра задачи

Во второй серии экспериментов параметр u был представлен в виде нейросетевой функции коэффициента α, т.е. $u = u(\alpha)$.

Нейронные сети с одним, тремя и пятью нейронами представлены по формуле (5). Параметры сети были определены путем минимизации функционала ошибки (4), с использованием случайно выбранных точек в области $x \in [0, 2]$, $\alpha \in [0,1]$.

Построенная нами приближенная модель при минимальном значении параметра задачи несколько более точна, чем модель с оптимальным скалярным параметром, что показано на (рис. 5), однако точность представляется недостаточной.

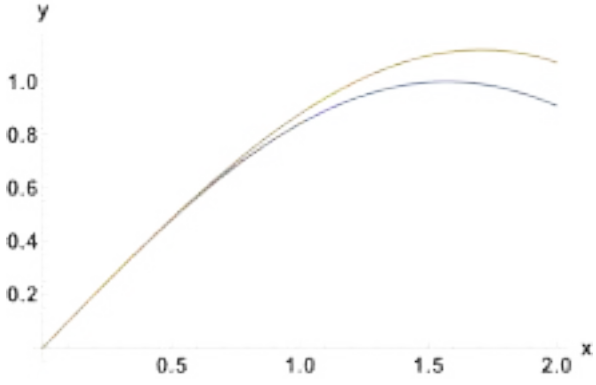

Рис. 5. Сравнение аналитического (синий) и приближенного (коричневый) решений, при нейросетевом параметре $u(\alpha)$ с 5 нейронами для 3-слойной схемы при параметре α_{min}

Fig. 5. Comparison of analytical (blue) and approximate (brown) solutions, with a neural network parameter $u(\alpha)$ with 5 neurons for a 3-layer circuit with the parameter α_{min}

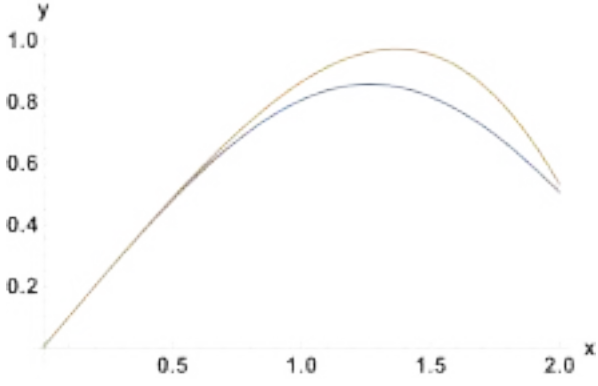

Рис. 6. Сравнение аналитического (синий) и приближенного (коричневый) решений, при нейросетевом параметре $u(\alpha)$ с 5 нейронами для 3-слойной схемы при параметре α_{max}

Fig. 6. Comparison of analytical (blue) and approximate (brown) solutions, with a neural network parameter $u(\alpha)$ with 5 neurons for a 3-layer circuit with the parameter α_{max}

При максимальном значении параметра задачи приближенная модель также точнее, чем модель с оптимальным скалярным параметром, что показано на (рис. 6), но её точность недостаточна, особенно в середине рассматриваемого интервала.

Таблица 2 / Table 2

Среднеквадратичные ошибки нейронной параметризации с сетями $u(\alpha)$
Root-mean-square errors of neural parameterization with networks $u(\alpha)$

Layers	$J(u_{opt})$	Neurons		
		$K=1$	$K=3$	$K=5$
$n=2$	$J(0,31)=0.547534$	0.165171	0.170768	0.140180
$n=3$	$J(0,3)=0.357948$	0.097581	0.091084	0.088857

Даже низкоразмерная нейронная параметризация повышает точность по сравнению со скалярно-оптимизированной настройкой, сохраняя при этом компактность формулы и добавляя возможность адаптации при использовании дополнительных данных.

Исследование моделей третьего уровня — поиск параметра схемы как нейросетевая функция параметра задачи и независимой переменной

В третьей серии экспериментов параметр u был представлен в виде нейросетевой функции, как независимой переменной, так и нелинейного коэффициента, т. е. $u=u(x,\alpha)$.

Нейронные сети с одним, тремя и пятью нейронами представлены по формуле (6). Такая конфигурация обеспечивает дополнительную гибкость и позволяет адаптивно регулировать коэффициент схемы в зависимости от домена.

Нейронная параметризация с двумя переменными обеспечивает наивысшую точность среди рассмотренных конфигураций, что показано на (рис. 7) — (рис. 9). Для многослойных схем в сочетании с приближенными и аналитическими решениями приближенные и аналитические решения становятся практически неразличимыми в изучаемой области.

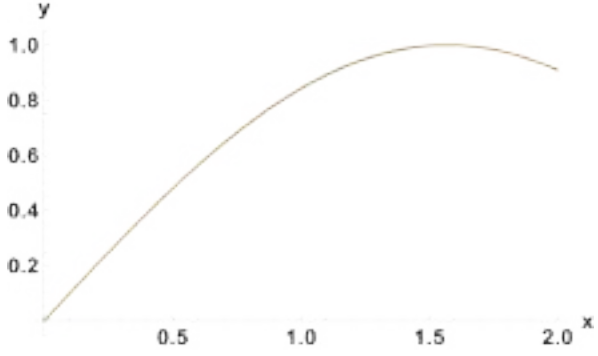

Рис. 7. Сравнение аналитического (синий) и приближенного (коричневый) решений, при нейросетевом параметре $u=u(x,\alpha)$ с 3 нейронами для 3-слойной схемы при параметре $\alpha_{\min}$

Fig. 7. Comparison of analytical (blue) and approximate (brown) solutions, with a neural network parameter $u=u(x,\alpha)$ with 3 neurons for a 3-layer circuit with the parameter $\alpha_{\min}$

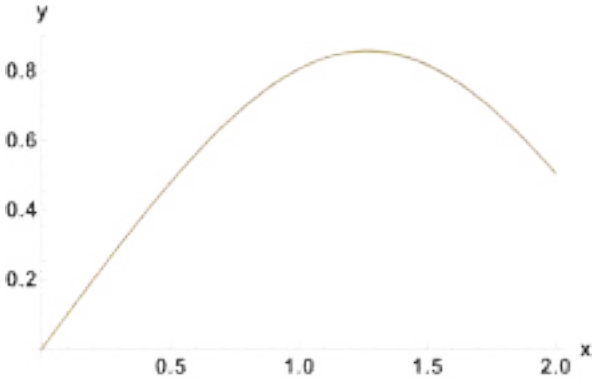

Рис. 8. Сравнение аналитического (синий) и приближенного (коричневый) решений, при нейросетевом параметре $u = u(x,\alpha)$ с 3 нейронами для 3-слойной схемы при параметре $\alpha_{\max}$

Fig. 8. Comparison of analytical (blue) and approximate (brown) solutions, with a neural network parameter $u = u(x,\alpha)$ with 3 neurons for a 3-layer circuit with the parameter $\alpha_{\max}$

Применение модели, для которой параметр метода (2) является нейросетевой функцией параметра задачи и независимой переменной в задаче (1) с тремя нейронами, дает достаточно точную модель при $\alpha_{\min}$ параметра задачи на всём рассматриваемом интервале изменения независимой переменной, что показано на (рис. 7).

Графики точного и приближенного решений задачи (1), для которой параметр метода (2) является нейросетевой функцией параметра задачи и независимой переменной с тремя нейронами, дает достаточно точную модель при $\alpha_{\max}$ параметра задачи на (рис. 8) также практически совпадают.

Этот результат свидетельствует о том, что точность приближенного решения, полученного с помощью нашего метода, практически не зависит от степени нелинейности дифференциального уравнения в рассматриваемом диапазоне изменения параметра, ответственного за нелинейность.

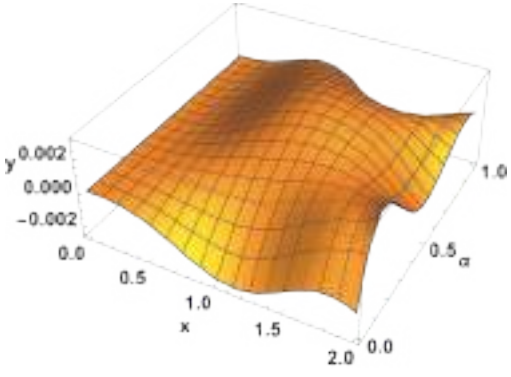

Рис. 9. Разность аналитического и приближенного решений, при нейросетевом параметре $u = u(x,\alpha)$ с 3 нейронами для 3-слойной схемы при параметре $\alpha \in [\alpha_{\min}, \alpha_{\max}]$

Fig.9. The difference between analytical and approximate solutions, with a neural network parameter $u = u(x,\alpha)$ with 3 neurons for a 3-layer circuit with the parameter $\alpha \in [\alpha_{\min}, \alpha_{\max}]$

Общее сравнение

Количественное сравнение результатов нейронной параметризации представлено в табл. 3 для различных размеров сетей и количества слоёв. Наименьшие среднеквадратические ошибки достигаются для многоуровневых схем в сочетании с нейронной параметризацией $u(x,\alpha)$.

Таблица 3 / Table 3

Среднеквадратичные ошибки нейронной параметризации с сетями $u(x,\alpha)$

Root-mean-square errors of neural parameterization with networks $u(x,\alpha)$

Layers	$J(u_{opt})$	Neurons		
		$K=1$	$K=3$	$K=5$
$n=2$	$J(0,31)=0.547534$	0.112035	0.005008	0.003217
$n=3$	$J(0,3)=0.357948$	0.017912	0.001489	0.002081

Результаты, приведенные в таблице 3, позволяют нам сделать несколько важных выводов.

Во-первых, нейросетевые зависимости параметра метода от параметра задачи и от двух переменных (параметра задачи и независимой переменной) дают значительно лучшие результаты, чем зависимости с постоянным параметром, даже если последний выбран оптимально.

Во-вторых, в случае, когда параметр метода зависит только от параметра задачи, увеличение числа нейронов сверх единицы практически не приводит к улучшению. Более того, улучшение по сравнению со случаем с постоянным оптимальным параметром практически не зависит от количества слоев модели.

В-третьих, для случая, когда параметр метода зависит как от параметра задачи, так и от независимой переменной, увеличение числа слоев и количества нейронов значительно повышает точность модели.

Заключение

В этой статье предложен гибридный аналитико–нейронный подход к решению параметрических обыкновенных дифференциальных уравнений, основанный на модифицированной схеме Хойна. Метод сочетает классическое численное интегрирование с параметризацией коэффициентов схемы нейронной сетью, что позволяет создавать компактные и эффективные суррогатные модели. Формулы классического численного интегрирования используются в виде их аналитической модификации, которая позволяет перейти от приближенного решения в виде таблицы чисел к приближенному решению в виде функции. Предложенный подход может быть легко

перенесен на другие известные методы численного интегрирования и другие методы их параметризации — введение параметра, отвечающего за регулировку шага, положения начальной точки процесса численного интегрирования и т.д.

Предложенная структура была проверена с использованием уравнения Даффинга. Численные эксперименты показали, что оптимизация численных параметров и нейронная параметризация значительно повышают точность аппроксимации. Увеличение числа уровней и использование адаптивных нейронных коэффициентов приводят к существенному снижению вычислительной ошибки при сохранении низких вычислительных затрат. Рассмотренный подход может быть легко применен к другим обыкновенным дифференциальным уравнениям, системам обыкновенных дифференциальных уравнений, уравнениям в частных производных и т.д.

По сравнению с традиционными нейронными сетями, основанными на физике, предлагаемый подход требует значительно меньшего количества ресурсов для обучения и обеспечивает более быструю конвергенцию. Это делает его перспективным инструментом для параметрического анализа и эффективного моделирования нелинейных динамических систем. Кроме того, более компактные модели нейронных сетей легче адаптировать к данным наблюдений за целевым объектом, что представляет особый интерес при использовании в системах реального времени.

Будущая работа будет сосредоточена на распространении предложенного метода на жесткие системы, уравнения в частных производных и многомерные задачи, а также на дальнейшем исследовании его применимости в практическом моделировании и имитационных задачах. На основе рассмотренного подхода может быть легко разработан пакет приложений для моделирования реальных технических объектов, что станет значительным вкладом в развитие Индустрии 4.0.

Список источников / References

1. Вержбицкий, В.М. (2005). Численные методы. Математический анализ и обыкновенные дифференциальные уравнения. (400 с.). М.: Оникс 21 век.
   Verzhbitsky, V.M. (2005). Numerical methods. Mathematical analysis and ordinary differential equations. (400 p.). Moscow: Onyx 21st century. (In Russ.).
2. Вержбицкий, В.М. (2021). Численные методы математической физики. (210 с.). Москва, Берлин: Директ-Медиа.
   Verzhbitsky, V.M. (2021). Numerical Methods of Mathematical Physics. (210 p.). Moscow, Berlin: Direct-Media. (In Russ.).
3. Кольцова, Э.М. (2026). Численные методы решения уравнений математической физики и химии. В: Э.М. Кольцова, А.С. Скичко, А.В. Женса (Ред.), *Учебник для вузов* (210 с.). М: Изд. Юрайт.
   Koltsova, E.M. (2026). Numerical methods for solving equations of mathematical physics and chemistry. In: E.M. Koltsova, A.S. Skichko, A.V. Zhensa (Ed.), *Textbook for universities* (220 p.). Moscow: Yurait Publishing House (In Russ.).
4. Guo, J., Zhu, H., Yang, Y., Guo, C. (2025). Advances in physics-informed neural networks for solving complex partial differential equations and their engineering applications: A systematic

review. *Engineering applications of artificial intelligence.* vol. 161:112044, doi:10.1016/j.engappai.2025.112044

5. Hairer, E., Wanner, G., Norsett, S.P. (1993). Solving Ordinary Differential Equations I. Springer, Berlin. https://doi.org/10.1007/978-3-540-78862-1
6. Jiang, P., Zhou, Q., Shao, X. (2020). Surrogate Model-Based Engineering Design and Optimization. Springer, *Tracts in Mechanical Engineering*. doi:10.1007/978-981-15-0731-1
7. Kembhavi, A., Kumar, R. (2023). Advances and Applications in Numerical Analysis. Perceptions of success and its relationship to the level of achievement in fencing. *International Journal of Contemporary Research in Multidisciplinary, 2(5):* 66–70.
8. Kuznetsov, S.V. (2025). On the extreme stiffness of degenerate Duffing oscillator: A feature overlooked by Ueda. *Mechanics Research Communications*. vol. 148:104504, doi:10.1016/j.mechrescom.2025.104504
9. Lagaris, I.E., Likas, A., Fotiadis, D.I. (1998). "Artificial neural networks for solving ordinary and partial differential equations," *IEEE Transactions on Neural Networks*, vol. 9, pp. 987–1000.
10. Lazovskaya, T., Tarkhov, D. (2016). 'Multilayer neural network models based on grid methods', in *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering; 158(1):012061*
11. Liu, G.-R. (2025). PINN with Python. An Introduction Scientech Publisher LLC. 293 p.
12. Luo, K., Zhao, J., Wang, Y., Li, J., Wen, J., Liang, J., Soekmadji, H., Liao, S. (2025). Physics-informed neural networks for PDE problems: *a comprehensive review Artif Intell Rev 58(323)*
13. Manzoni, L., Papetti, D.M., Cazzaniga, P., Spolaor, S., Mauri, G., Besozzi, D., Nobile, M.S. (2020). Surfing on Fitness Landscapes: A Boost on Optimization by Fourier Surrogate Modeling. Entropy, *22(285).*
14. Marcus, J. (2024). Neuer Machine Learning for Engineers: *Introduction to Physics-Informed, Explainable Learning Methods for AI in Engineering Applications*. 258 p.
15. Michaloglou, A., Papadimitriou, I., Gialampoukidis, I. et al. (2025). Physics-Informed Neural Networks in Materials Modeling and Design: A Review. Arch Computat Methods Eng. doi:10.1007/s11831-025-10448-9
16. Mohammed, J.K. (2025). Recent Advances in Approximate Methods for Predicting Nonlinear Vibrations in Cantilever Beams and Plates: *A Review Eurasian journal of science and Engineering 11(2).*
17. Piccirillo, V., Balthazar, J.M., Lima, J.J., Tusset, A.M. (2025). Stabilization of unstable periodic orbits in a Duffing system using an optimal time-delayed feedback control and pseudospectral method Chaos, *Solitons & Fractals.* Vol. 194:116201.
18. Raissi, M., Perdikaris, P., Karniadakis, G.E. (2017). 'Physics Informed Deep Learning (Part I): Data-driven Solutions of Nonlinear Partial Differential Equations.' *arXiv 1711.10561*.
19. Raissi, M., Perdikaris, P., Karniadakis, G.E. (2017). 'Physics Informed Deep Learning (Part II): Data-driven Discovery of Nonlinear Partial Differential Equations', *arXiv:1711.10566*
20. Raissi, M., Perdikaris, P., Karniadakis, G.E. (2019). 'Physics-informed neural networks: A deep learning framework for solving forward and inverse problems involving nonlinear partial differential equations', *J. Comput. Phys.*, (378), pp. 686–707.
21. Ranft, S., von der Linden, W. (2021). "Bayesian Surrogate Analysis and Uncertainty Propagation". *Physical Sciences Forum. 3 (1): 6. arXiv:2101.04038.*

22. Ren, Z., Zhou, S., Liu, D., Liu, O. (2025). Physics-Informed Neural Networks: A Review of Methodological Evolution, Theoretical Foundations, and Interdisciplinary Frontiers Toward Next-Generation Scientific Computing Zhuang Zhao, Ye Wang, Weijian Zhang, Zhenggang Ba, Lin Sun, Physics-informed neural networks in heat transfer-dominated multiphysics systems: A comprehensive review, *Engineering Applications of Artificial Intelligence. vol. 157:111098*.
23. Tarkhov, D., Vasilyev, A. (2005). 'New neural network technique to the numerical solution of mathematical physics problems. I: Simple problems *Optical Memory and Neural Networks'*, *Information Optics*, (14). pp. 59–72. II: Complicated and nonstandard problems, *Optical Memory and Neural Networks'*, *Information Optics.* (14), pp. 97–122.
24. Tarkhov, D., Vasilyev, A. (2020). *Semi-Empirical Neural Network Modeling and Digital Twins Development, Academic Press: Cambridge, MA, USA.* 281 p. ISBN: 978-0-12-815651-3.
25. Tarkhov, D., Lazovskaya, T., Malykhina, G. (2023). Constructing Physics-Informed Neural Networks with Architecture Based on Analytical Modification of Numerical Methods by Solving the Problem of Modelling Processes in a Chemical Reactor. *Sensors, 23:663.* https://doi.org/10.3390/s23020663
26. Umer, M., Olejnik, P. (2025). Approximate Analytical Approaches to Nonlinear Differential Equations: A Review of Perturbation, Decomposition and Coefficient Methods in Engineering Archives of Computational Methods in Engineering. vol. 32, 2767–2798p.
27. Zhou, M., Mei, G., Xu, N. (2023). Enhancing Computational Accuracy in Surrogate Modeling for Elastic–Plastic Problems by Coupling S-FEM and Physics-Informed Deep Learning. *Mathematics*. 11(9), 2016. https://doi.org/10.3390/math11092016

Информация об авторах

Игорь Юрьевич Вандакуров, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры Высшая математика, института Физики и Математики, Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого (ФГАОУ ВО СПбПУ), Санкт-Петербург, Российская Федерация, ORCID: https://orcid.org/0009-0001-7799-5013, e-mail: vandak_iyu@spbstu.ru

Дмитрий Альбертович Тархов, доктор технических наук, профессор кафедры Высшая математика, института Физики и Математики, Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого (ФГАОУ ВО СПбПУ), Санкт-Петербург, Российская Федерация, ORCID: https://orcid.org/0000-0002-9431-8241, e-mail: dtarkhov@gmail.com

*Татьяна Алексеевна Шемякина***,** кандидат физико-математических наук, доцент кафедры Высшая математика, института Физики и Математики**,** Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого (ФГАОУ ВО СПбПУ), Санкт-Петербург, Российская Федерация, ORCID: https://orcid.org/0000-0001-9572-1406, e-mail: sh_tat@mail.ru

Information about the authors

Igor Y. Vandakurov, Candidate of Physico-mathematical Sciences, Associate Professor of the Department of Higher Mathematics, Institute of Physics and Mathematics, Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University (SPbPU), Saint Petersburg, Russian Federation, ORCID: https://orcid.org/0009-0001-7799-5013, e-mail: vandak_iyu@spbstu.ru

Dmitry A. Tarkhov, Doctor of Technical Sciences, Professor of the Department of Higher Mathematics, Institute of Physics and Mathematics, Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University (SPbPU), Saint Petersburg, Russian Federation, ORCID: https://orcid.org/0000-0002-9431-8241, e-mail: dtarkhov@gmail.com

Tatyana A. Shemyakina, Candidate of Physico-mathematical Sciences, Associate Professor of the Department of Higher Mathematics, Institute of Physics and Mathematics, Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University (SPbPU), Saint Petersburg, Russian Federation, ORCID: https://orcid.org/0000-0001-9572-1406, e-mail: sh_tat@mail.ru

Вклад авторов

Все авторы приняли участие в обсуждении результатов и согласовали окончательный текст рукописи.

Contribution of the authors

All authors participated in the discussion of the results and approved the final text of the manuscript.

Конфликт интересов

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Conflict of interest

The authors declare no conflict of interest.

Поступила в редакцию 13.04.2026 — Received 2026.04.13
Поступила после рецензирования 07.08.2026 — Revised 2026.08.07
Принята к публикации 07.08.2026 — Accepted 2026. 08.07
Опубликована 30.09.2026 — Published 2026.09.30