

2

**МОДЕЛИРОВАНИЕ
И АНАЛИЗ ДАННЫХ**

НАУЧНЫЙ ЖУРНАЛ

**MODELLING
AND DATA ANALYSIS**

SCIENTIFIC JOURNAL

2024

ISSN: 2219-3758

ISSN: 2311-9454 (ONLINE)

МОДЕЛИРОВАНИЕ И АНАЛИЗ ДАННЫХ

НАУЧНЫЙ ЖУРНАЛ

2024 • Том. 14 • № 2

MODELLING AND DATA ANALYSIS

SCIENTIFIC JOURNAL

2024 • Vol. 14 • № 2



Московский государственный
психолого-педагогический университет
Moscow State University
of Psychology & Education

Моделирование и анализ данных

Главный редактор:

Л.С. Куравский ФГБОУ ВО МГППУ, Россия

Заместители главного редактора:

С.Д. Кулик МИФИ, Россия

А.В. Пантелеев МАИ, Россия

Редакционный совет

Председатель редакционного совета:

Г.Г. Амосов МИАН, Россия

Члены редакционного совета:

В.А. Барабанщиков ФГБОУ ВО МГППУ, Россия

Питер Бентлер Калифорнийский университет
Лос-Анджелеса, США

А.В. Горбатов МИСиС, Россия

Л.С. Куравский ФГБОУ ВО МГППУ, Россия

Леонид Либкин Эдинбургский университет,
Великобритания

А.А. Марголис ФГБОУ ВО МГППУ, Россия

В.В. Рубцов ФГБОУ ВО МГППУ, Россия

Д.В. Ушаков ИП РАН, Россия

Девид Фрэнсис Университет Хьюстона, США

Редакционная коллегия:

К.К. Абгарян ФИЦ ИУ РАН, Россия

Г.Г. Амосов МИАН, Россия

М.В. Воронов ФГБОУ ВО МГППУ, Россия

Е.Л. Григоренко МГУ им. М.В. Ломоносова,
Россия; Йельский университет,
США

В.К. Захаров МГУ им. М.В. Ломоносова,
Россия

А.И. Кибзун МАИ, Россия

Леонид Либкин Эдинбургский университет,
Великобритания

В.Р. Милов НГТУ им. Р.Е. Алексеева,
Россия

А.В. Наумов МАИ, Россия

Д.Л. Ревизников МАИ, Россия

Холлинг Хайнц Университет Мюнстера,
Германия

Девид Фрэнсис Университет Хьюстона,
США

К.В. Хорошенков Брэдфордский университет,
Великобритания.

Г.А. Юрьев ФГБОУ ВО МГППУ, Россия

Моделирование и анализ данных

Издательство ФГБОУ ВО МГППУ

Издается с 2011 года. Периодичность: 4 раза в год.

Свидетельство регистрации СМИ: ПИ № ФС77-66444

Дата регистрации: 14.07.2016

Формат: 70×100/16

Все права защищены. Название журнала, логотип, рубрики, все тексты и иллюстрации являются собственностью ФГБОУ ВО МГППУ и защищены авторским правом. Перепечатка материалов и использование иллюстраций допускается только с письменного разрешения редакции.

© ФГБОУ ВО «Московский государственный психолого-педагогический университет», 2024, № 2

Modelling and Data Analysis

Editor-in-Chief:

L.S. Kuravsky MSUPE, Russia

Deputy Editors-in-Chief:

S.D. Kulik MPEPhI, Russia

A.V. Panteleev MAI, Russia

The Editorial Council

Chairman of the Editorial Council:

G.G. Amosov MI RAS, Russia

The Members of the Editorial Council:

V.A. Barabanschikov MSUPE, Russia

Peter Bentler University of California,
USA

A.V. Gorbатов MISIS, Russia

L.S. Kuravsky MSUPE, Russia

Leonid Libkin University of Edinburgh,
UK

A.A. Margolis MSUPE, Russia

V.V. Rubtsov MSUPE, Russia

D.V. Ushakov IP RAS, Russia

David Francis University Of Houston, USA

The Editorial Board:

K.K. Abgaryan IU RAS, Russia

G.G. Amosov MI RAS, Russia

M.V. Voronov MSUPE, Russia

E.L. Grigorenko Lomonosov Moscow State
University, Russia;
Yale University, USA

V.K. Zakharov Lomonosov Moscow State
University, Russia

A.I. Kibzun MAI, Russia

Leonid Libkin University of Edinburgh,
UK

V.R. Milov NNSTU n.a. R.E. Alekseev,
Russia

A.V. Naumov MAI, Russia

D.L. Reviznikov MAI, Russia

Holling Heinz University Of Münster,
Germany

David Francis University Of Houston,
USA

K.V. Horoshenkov University of Bradford,
UK

G.A. Yuryev MSUPE, Russia

Modelling and Data Analysis

Publisher MSUPE

Frequency: since 2011

Published: 4 times a year

The mass medium registration certificate:

PN № ФС77-66444.

From: 14.07.2016

Format: 70×100/16

All rights reserved. Journal title, logo, rubrics, all texts and images are the property of MSUPE and copyrighted. Using reprints and illustrations is allowed only with the written permission of the publisher.

© MSUPE, 2024, no. 2



СОДЕРЖАНИЕ

АНАЛИЗ ДАННЫХ

Новиков Н.П., Виноградов В.И.

Опыт использования архитектуры сети Transformer для аппроксимации политики агента в обучении с подкреплением..... 7

Колачев Н.И.

Применение статистик m^* и d^* для оценки качества данных психологического исследования с помощью закона Бенфорда (на примере измерения времени реакции)..... 23

Свекольникова Е.А., Пановский В.Н.

Обзор open-source библиотек для решения задач прогнозирования временных рядов..... 45

Смерчинская С.О., Яманаева Р.Р.

Экспертное задание нечётких строгих порядков..... 62

Пантелеев А.В., Попова Н.С.

Разработка и применение многокритериального метода муравьиных колоний в задаче оптимизации инвестиционного портфеля..... 80

Юрьев Г.А.

Об опыте разработки адаптивного гибридного фильтра ЭЭГ сигнала с адаптивностью по расширенной информации 98

Червен-Водали Е.Б., Сидорова В.Б., Антипова С.Н.

Оценка влияния психологических параметров на результаты анкетирования студентов 114

МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ

Куравский Л.С., Грешиников И.И., Махортов И.А., Бондаренко Н.В.

Интеллектуальная поддержка экипажа при выводе гражданского воздушного судна из сложного пространственного положения..... 124

КОМПЛЕКСЫ ПРОГРАММ

Гудкова Е.А.

Анализ и документирование требований для программного комплекса по проведению вычислительных экспериментов и численному исследованию системы «расходомерная трубка – жидкость» кориолисова расходомера 140

Ксемидов Б.С., Абгарян К.К.

Адаптивная интеллектуальная обучающая система..... 152



МЕТОДИКА ПРЕПОДАВАНИЯ

Куланин Е.Д., Степанов М.Е.

Воспитание в высшей школе 166

Куланин Е.Д., Степанов М.Е.

Использование образов в преподавании высшей математики 192



◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇ **CONTENTS** ◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇

DATA ANALYSIS

Novikov N.P., Vinogradov V.I.
Experience in Using the Transformer Network Architecture
to Approximate Agent's Policy in Reinforcement Learning 21

Kolachev N.I.
Application of the m^* and d^* Statistics
for Assessing the Quality of Data in Psychological Research
Using Benford's Law (Illustrated with Reaction Time Measurements)..... 42

Svekolnikova E.A., Panovskiy V.N.
Review of Open-Source Libraries for Solving Time Series Forecasting Problems 60

Smerchinskaya S.O., Yamamaeva R.R.
Expert Assignment of Fuzzy Strict Orders 78

Pantelev A.V., Popova N.S.
Development and Application of a Multi-Objective
Ant Colony Optimization Method for Portfolio Problem..... 96

Yuryev G.A.
The Experience of Developing an Adaptive Hybrid
EEG Signal Filter with Extended Information Adaptability..... 112

Cherven-Vodali E.B., Sidorova V.B., Antipova S.N.
Assessment of the Influence of Psychological
Parameters on Results Student Survey 122

OPTIMIZATION METHODS

Kuravsky L.S., Greshnikov I.I., Makhortov I.A., Bondarenko N.V.
Intelligent Crew Support when Recovering
a Civil Aircraft from a Difficult Spatial Position..... 138

SOFTWARE

Gudkova E.A.
Analysis and Documentation of Requirements for the Software
Package for Conducting Computational Experiments and Numerical
Investigation "Flow Tube – Liquid" System of a Coriolis Flow Meter 150

Ksemidov B.S., Abgaryan K.K.
Adaptive Intelligent Tutoring System..... 164



METHOD OF TEACHING

<i>Kulanin Y.D., Stepanov M.E.</i> Education in High School	189
<i>Kulanin Y.D., Stepanov M.E.</i> The Use of Images in Teaching Higher Mathematics	224

◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆ АНАЛИЗ ДАННЫХ ◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆

УДК 004.85

Опыт использования архитектуры сети Transformer для аппроксимации политики агента в обучении с подкреплением

Новиков Н.П.*

Московский авиационный институт
(национальный исследовательский университет) (МАИ)
г. Москва, Российская Федерация
e-mail: rtyderson@gmail.com

Виноградов В.И.**

Московский авиационный институт
(национальный исследовательский университет) (МАИ)
г. Москва, Российская Федерация
ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-3773-9653>
e-mail: vvinogradov@inbox.ru

В данной статье рассмотрены основные положения алгоритма глубокого обучения с подкреплением и использование нейронных сетей для аппроксимации политики агента. Рассмотрено сравнение использования полносвязной нейронной сети и сети Transformer в алгоритме обучения с подкреплением.

Ключевые слова: искусственный интеллект, машинное обучение, глубокое обучение с подкреплением, марковские процессы принятия решений, Transformer, оптимизация.

Для цитаты:

Новиков Н.П., Виноградов В.И. Опыт использования архитектуры сети Transformer для аппроксимации политики агента в обучении с подкреплением // Моделирование и анализ данных. 2024. Том 14. № 2. С. 7–22. DOI: <https://doi.org/10.17759/mda.2024140201>

*Новиков Никита Павлович, студент магистратуры, институт «Компьютерные науки и прикладная математика» Московский авиационный институт (национального исследовательского университета) (МАИ), г. Москва, Российская Федерация, e-mail: rtyderson@gmail.com

**Виноградов Владимир Иванович, кандидат физико-математических наук, доцент, кафедра «Математическая кибернетика» Московский авиационный институт (национального исследовательского университета) (МАИ), г. Москва, Российская Федерация, ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-3773-9653>, e-mail: vvinogradov@inbox.ru



1. ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время алгоритмы глубокого обучения с подкреплением помогают решать задачи искусственного интеллекта методом проб и ошибок, не обладая априорными знаниями о решаемой задаче. Сам термин подкрепление (reinforcement) обозначает награду или наказание за результат, который может зависеть не только от принятых решений, но и некоторых неподконтрольных факторов. Вместо подачи обучающей выборки на вход алгоритму обучение происходит за счёт взаимодействия с некоторой средой (environment). Под желаемым результатом подразумевается максимизация некоторой скалярной величины, называемой наградой (reward). Саму сущность (систему), которая принимает решения и взаимодействует со средой, принято называть агентом (agent). При взаимодействии агента с миром или средой агенту доступно только некоторое наблюдение (observation) текущего состояния данной среды. Агент взаимодействует со средой посредством действий (actions), которые выбираются благодаря некоторой процедуре. Данную процедуру принято называть стратегией или политикой (policy). Сам процесс взаимодействия агента и среды называется динамикой среды (world dynamics), которая определяет условия, по которым меняются состояния среды во времени и генерируется некоторая награда.

Основываясь на том, что агент взаимодействует со средой, а соответственно, выполняет какие-либо действия благодаря своей стратегии, которая моделируется некоторым распределением, в широкое применение вошло использование глубоких нейронных сетей для аппроксимации данной функции распределения. В связи с прогрессом в области искусственного интеллекта появилось множество новых архитектур нейронных сетей, а именно архитектура сети Transformer, именно она будет использована в данной работе. Благодаря ей стало возможно обрабатывать последовательности векторов и вектор контекста самой последовательности, не теряя при этом входную информацию.

2. СВЯЗЬ С ОПТИМАЛЬНЫМ УПРАВЛЕНИЕМ И МАРКОВСКИМ ПРОЦЕССОМ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ

Буквами s , a , r принято обозначать состояния, действия и награды, буква t используется для идентификации времени. Для объяснения задачи в терминах оптимального управления нужно свести её в рамки лапласовского детерминизма и определить модель мира [1]. Это означает, что положение, скорости и ускорения всех атомов вселенной задают её исходное состояние, а изменение этого состояния происходит согласно некоторым дифференциальным уравнениям. Исходя из вышеупомянутых высказываний, систему можно описать:

$$\dot{s} = f(s, t),$$

где f – функция перехода состояний среды, s – текущее состояние среды, \dot{s} – скорость изменения состояния среды.

Поскольку агент обладает некоторой стратегией принятия решений, а соответственно может влиять на среду, то основываясь на уравнении выше можно описать взаимодействие агента со средой следующим образом:

$$\dot{s} = f(s, a(s, t), t).$$

Начальное условие: $s_0 = s(t_0) \in S$ – произвольное состояние в множестве возможных состояний агента, $a(s, t)$ – это действие, выбранное агентом в определённый момент времени t , кроме того, выбранное действие зависит от состояния, в котором находится агент в момент времени t . Награда агента также моделируется в каждый момент времени и составляет $r(s, a(s, t), t)$. Итоговая награда складывается из сумм наград за каждый временной шаг, именно это значение максимизируется агентом и является целевой функцией:

$$R = \sum_{t=0}^T \gamma^t r_t \rightarrow \max_{\pi},$$

где γ – коэффициент дисконтирования, r_t – награда агента на шаге t , π – политика (стратегия) агента, T – максимальное количество шагов в среде.

Коэффициент дисконтирования $\gamma \in [0, 1]$ – важная переменная, влияющая на то, как оцениваются будущие вознаграждения. Чем больше значение – тем больший вес имеют будущие вознаграждения, полученные агентом.

Описываемую задачу можно представить через определение марковской цепи, где переход из состояния в состояние зависит только от текущего момента времени и состояния агента, но не зависит от всей предыдущей истории взаимодействия агента со средой. Таким образом, предложенное свойство Марковости позволяет свести задачу к MDP – Марковскому процессу принятия решений (Markov Decision Process, MDP). Данное определение не проявляется в усложнении задачи, поскольку его легко представить в виде:

$$(S, A, P, r),$$

где S, A, P – это описание среды, а именно:

S – пространство состояний, множество состояний, в которых в каждый момент времени может находиться среда;

A – пространство действий, множество вариантов действий, из которых агент производит свой выбор на каждом шаге;

P – функция перехода, которая задаёт изменение среды после того, как в состоянии s было выбрано действие a ;

r – $S \times A \rightarrow \mathbb{R}$: функция награды, которая выдаёт скалярную величину за выбор действия a в состоянии s . Именно она выступает в роли «обучающего сигнала».



3. ОПИСАНИЕ ПОСТАВЛЕННОЙ ЗАДАЧИ И МОДЕЛИ МИРА

Целью данной работы является проверка применимости архитектуры сети Transformer для аппроксимации политики агента и сравнение с полносвязной архитектурой сети в задаче обучения с подкреплением посредством обработки последовательности данных. Идея использования архитектуры сети Transformer основывается на том, что множество алгоритмов обучения с подкреплением страдает от увеличения пространства действий, что прямым образом сказывается на сходимости алгоритма решения. Поэтому использование новой архитектуры сети с возможностью обработки последовательностей позволит уменьшить пространство действий, что приведёт к ускорению сходимости и увеличению суммарной награды.

Задачу можно сформулировать следующим образом. Агенту доступны: вид пространства состояний, вид пространства действий и взаимодействие со средой. Благодаря последнему, агент собирает данные путём выбора некоторого действия, перемещающего его из одного состояния в другое, где совершаемое агентом действие принадлежит некоторой стратегии (политике), которую аппроксимирует нейронная сеть. Требуется определить стратегию агента, максимизирующую суммарную награду на основе его опыта взаимодействия со средой.

Для реализации решения поставленной задачи используется симулятор Mujoco – бесплатный физический движок с открытым исходным кодом, принадлежащий DeepMind. Существует одиннадцать сред Mujoco: Ant, Hopper, Humanoid и др. Для реализации и тестирования поставленной задачи использовалась среда Ant, которая основана на модели мира, представленной Шульманом, Морицем, Левином, Джорданом и Аббилем в работе [6]. Ant – это 3D робот, который состоит из туловища с прикреплёнными к нему четырьмя ногами, где каждая из которых состоит из двух секций. Суть задачи сводится к удержанию роботом равновесия и движения вышеупомянутого вперёд, путём координации его действий с помощью приложения крутящих моментов к каждому шарниру робота. Шарниры находятся на стыках креплений секций ног и соединений самих ног с туловищем.

Таким образом, пространство действий можно представить в виде вектора размерности 8 (Таблица 1), где каждое значение представляет собой крутящий момент, приложенный к шарнирному соединению.

Таблица 1

Пространство действий агента (робота Ant)

Индекс	Действие	Минимальное значение	Максимальное значение
0	Крутящий момент, приложенный к шарниру между туловищем и задним правым бедром	-1	1
1	Крутящий момент, приложенный к шарниру между двумя секциями задней правой ноги	-1	1



Индекс	Действие	Минимальное значение	Максимальное значение
2	Крутящий момент, приложенный к шарниру между туловищем и передним левым бедром	-1	1
3	Крутящий момент, приложенный к шарниру между двумя секциями передней левой ноги	-1	1
4	Крутящий момент, приложенный к шарниру между туловищем и передним правым бедром	-1	1
5	Крутящий момент, приложенный к шарниру между двумя секциями передней правой ноги	-1	1
6	Крутящий момент, приложенный к шарниру между туловищем и задним левым бедром	-1	1
7	Крутящий момент, приложенный к шарниру между двумя секциями задней левой ноги	-1	1

Пространство наблюдений для робота описывается значениями положения различных частей его тела и скоростями этих отдельных частей. Следовательно, для описания состояния робота используется вектор размерности 27, который описан в таблице 2.

Таблица 2

Пространство состояний агента (робота Ant)

Индекс	Наблюдение	Значение
0	Координата туловища по оси z	Позиция (м)
1	x – ориентация туловища	Угол наклона (рад)
2	y – ориентация туловища	Угол наклона (рад)
3	z – ориентация туловища	Угол наклона (рад)
4	w – ориентация туловища	Угол наклона (рад)
5, 7, 9, 11	Углы между туловищем и секциями каждой ноги	Угол наклона (рад)
6, 8, 10, 12	Углы между двумя секциями каждой ноги	Угол наклона (рад)
13	Скорость движения туловища по x – координате	Скорость (м/с)
14	Скорость движения туловища по y – координате	Скорость (м/с)
15	Скорость движения туловища по z – координате	Скорость (м/с)
16	x – координата угловой скорости движения туловища	Угловая скорость (рад/с)
17	y – координата угловой скорости движения туловища	Угловая скорость (рад/с)
18	z – координата угловой скорости движения туловища	Угловая скорость (рад/с)
19, 21, 23, 25	Угловая скорость угла между туловищем и секциями каждой ноги	Угол наклона (рад)
20, 22, 24, 26	Угловая скорость угла между двумя секциями каждой ноги	Угол наклона (рад)

Вознаграждение для агента состоит из трёх частей:

- 1) награда за устойчивость (если агент оставался на ногах до конца эпизода);
- 2) награда за движение вперёд, которая измеряется как скорость продвижения робота вперёд;



3) отрицательная награда за величину действия (нормировка по действиям).

Кроме того, в начальном состоянии к позиционным значениям состояния робота добавляется некоторый равномерный шум $U(-0.01, 0.01)$, а к значениям скоростей добавляется нормальный гауссовский шум $\mathcal{N}(0, 0.01)$.

Симуляция, или как её называют иначе – эпизод, заканчивается при достижении агентом (роботом) заданной точки, при перевороте робота или при окончании длины симуляции (1000 временных интервалов).

4. ОПИСАНИЕ АЛГОРИТМА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ

В алгоритмах обучения с подкреплением сбор данных является важной частью. Определяя политику взаимодействия со средой, можно повлиять на то, для каких состояний s, a мы получаем сэмпл s' из функции переходов. Собираемые данные – траектории (роллауты), используются для обучения алгоритма.

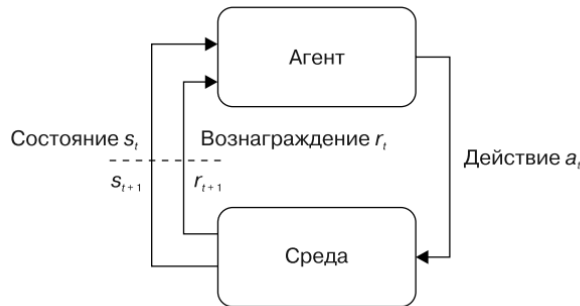


Рис. 1. Схема взаимодействия агента и среды

Для решения задачи использовался алгоритм, основывающийся на Policy Gradient подходе. Такой класс алгоритмов использует оценки градиента функционала по параметрам стратегии (политики). Алгоритм Proximal Policy Optimization (PPO) [2] считается устоявшимся решением в обучении с подкреплением, именно этот алгоритм использовался при создании алгоритма, победившего профессионалов в киберспортивной игре Dota 2.

Основываясь на [2], итоговую процедуру работы алгоритма можно представить следующим образом. Собирается большой набор переходов (s, a, r, s') по политике, где каждый переход – это один временной шаг агента в среде. Текущая версия стратегии (политики) агента π_θ и вероятности выбранных действий сохраняются. Для всех пар состояние-действие (s, a) рассчитывается оценка Advantage функции (функции полезности) методом GAE [2].

Из полученного набора данных (датасета) берутся батчи пар $s \sim d_{\pi^{old}}(s)$, $a \sim \pi^{old}(a|s)$, где $d_{\pi^{old}}(s)$ – распределение состояний, полученное по политике агента π^{old} , и считается Монте-Карло оценка градиента целевой функции:



$$E_{s \sim \pi_{old}(s)} E_{a \sim \pi_{old}(a|s)} \left[\min \left(\rho(\theta) A^{\pi_{old}}(s, a), \rho^{clip}(\theta) A^{\pi_{old}}(s, a) \right) - C \sqrt{KL(\pi_{old} || \pi_{\theta})} \right] \rightarrow \max_{\theta}$$

где C – константа, KL – KL-дивергенция, $\rho(\theta) = \frac{\pi_{\theta}(s|a)}{\pi_{old}(a|s)}$, $\rho^{clip}(\theta) = clip(\rho(\theta), 1 - \epsilon, 1 + \epsilon)$, $\epsilon \in (0, 1)$, $clip$ – усечение в пределах $[1 - \epsilon, 1 + \epsilon]$.

Алгоритм Proximal Policy Optimization

Гиперпараметры:

M – количество параллельных сред,

N – длина роллаутов (траекторий),

B – размер мини-батчей (пакетов данных),

N_{epoch} – количество эпох (итераций) обучения,

γ – коэффициент дисконтирования,

λ – параметр GAE оценки,

ϵ – параметр обрезки для актёра (сеть, моделирующая стратегию агента),

$\hat{\epsilon}$ – параметр обрезки для критика (сеть, «оценивающая» принятые решения),

$V_{\phi}(s)$ – нейронная сеть (произвольной архитектуры) критика с параметрами ϕ ,

$\pi_{\theta}(a|s)$ – нейронная сеть (произвольной архитектуры) для стратегии агента (актера) с параметрами θ ,

α – коэффициент масштабирования ошибки критика,

Оптимизатор – Stochastic Gradient Descent (используется для оптимизации нейронных сетей критика и актёра).

Псевдокод алгоритма:

Инициализировать θ, ϕ .

На каждом шаге:

В каждой параллельной среде собрать роллаут $(s_0, a_0, r_0, \dots, s_N, a_N, r_N)$ длины N , используя стратегию π_{θ} , сохраняя вероятности выбора действий как $\pi_{old}(a|s)$, а выход критика на встреченных состояниях как $V^{old}(s) \cdot V_{\phi}(s)$.

Для каждой пары s, a из роллаутов посчитать одношаговую оценку Advantage:

$$\psi_1(s_t, a_t) = r_t + \gamma(1 - done_{t+1})V_{\phi}(s_{t+1}) - V_{\phi}(s_t),$$

где $done$ – показатель конца эпизода.

Посчитать Advantage оценку:

$$\psi_{GAE}(s_{N-1}, a_{N-1}) = \psi_1(s_{N-1}, a_{N-1})$$

1) Для t от $(N - 2)$ до 0 :

$$\psi_{GAE}(s_t, a_t) = \psi_1(s_t, a_t) + \gamma \lambda (1 - done_t) \psi_{GAE}(s_{t+1}, a_{t+1})$$

2) Посчитать целевое значение (таргет) для критика:

$$y(s) = \psi_{GAE}(s, a) + V_{\phi}(s),$$



где s – из роллаута, собранного в п. 1.

3) Составить датасет из шестёрок:

$$(s, a, \psi_{GAE}(s, a), y(s), \pi^{old}(a|s), V^{old}(s)),$$

где $V^{old}(s)$ – старая политика критика.

Выполнить N_epochs проходов по роллауту, генерируя мини-батчи шестёрок $\mathbb{T} = (s, a, \psi_{GAE}(s, a), y(s), \pi^{old}(a|s), V^{old}(s))$, размером B .

Для каждого мини-батча:

- Вычислить ошибку критика:

$$Loss_1(\mathbb{T}, \phi) = (y(s) - V_\phi(s))^2,$$

$$Loss_2(\mathbb{T}, \phi) = (y(s) - clip(V_\phi(s) - V^{old}(s), -\hat{\epsilon}, \hat{\epsilon}))^2,$$

$$Loss^{critic}(\phi) = \frac{1}{B} \sum_{\mathbb{T}} max(Loss_1(\mathbb{T}, \phi), Loss_2(\mathbb{T}, \phi)).$$

Сделать шаг градиентного спуска по ϕ , используя $\nabla_\phi Loss^{critic}(\phi)$.

Нормализовать $\psi_{GAE}(s, a)$ по батчу, чтобы в среднем значения равнялись 0, а дисперсия – 1.

Посчитать коэффициенты для выборки по важности (importance sampling):

$$r_\theta(\mathbb{T}) = \frac{\pi_\theta(a|s)}{\pi^{old}(a|s)}$$

- Посчитать обрезанную версию градиента:

$$r_\theta^{clip}(\mathbb{T}) = clip(r_\theta(\mathbb{T}), 1 - \epsilon, 1 + \epsilon)$$

- Вычислить градиент для нейронной сети актёра:

$$\nabla_\theta^{actor} = \frac{1}{B} \sum_{\mathbb{T}} \nabla_\theta \min(r_\theta(\mathbb{T}) \psi_{GAE}(s, a), r_\theta^{clip}(\mathbb{T}) \psi_{GAE}(s, a))$$

Сделать шаг градиентного подъёма по θ , используя ∇_θ^{actor} .

Работы, рассматривающие решение поставленной задачи, как правило, использовали данный алгоритм, в котором в роли аппроксиматора политики агента выступала полносвязная глубокая нейронная сеть. Архитектура такой сети представляет собой перцептрон, состоящий из двух скрытых линейных слоёв с гиперболическим тангенсом (\tanh) в качестве функции активации и количеством нейронов 64, 64 и 8 для актёра и 64, 64 и 8 для критика соответственно. Пример архитектуры такой сети представлен на рисунке 2.

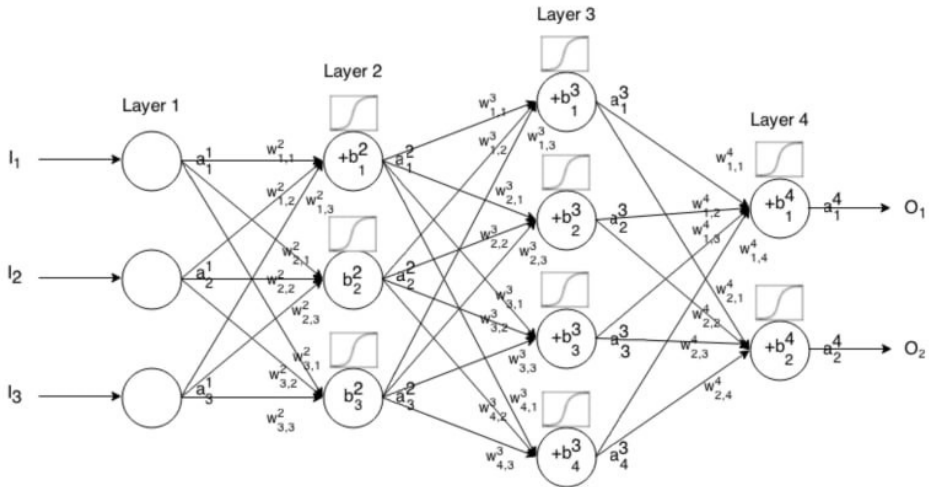


Рис. 2. Схема архитектуры полносвязной нейронной сети

Выходная размерность сети соответствует пространству действий агента, следовательно, при увеличении размерности задачи возникали проблемы с увеличением количества выходных нейронов сети актёра.

В данной работе для борьбы с «проклятием размерности» используется подход, который подразумевает замену представления пространства действий и, соответственно, замену архитектуры сети. Ключевой идеей является использование сети, состоящей из энкодера и декодера. Благодаря такому подходу, становится возможным использование последовательностей входных данных и сохранение внутренней информации самой последовательности без потери качества.

Основой для разработки сети в текущей работе послужила статья [3] об архитектуре сети Transformer, которая полностью основывается на механизме внимания и не использует рекуррентные слои или слои свертки. Ниже, на рисунке 3, представлено устройство сети Transformer.

Основная идея заключается в том, что сеть разбивается на два блока – энкодер и декодер, слева и справа на рисунке 3 соответственно.

Энкодер последовательно применяет к исходной последовательности N блоков, в каждом из которых входные данные проходят через два основных слоя: multi-head attention и feed-forward. Multi-head attention состоит из нескольких наборов self-attention, которые можно по-другому назвать слоями самовнимания, они отличаются от обычного слоя внимания тем, что выходом слоя являются новые представления всё той же последовательности, каждый элемент которой напрямую взаимодействует друг с другом. Сама реализация данного слоя изложена в [3], стоит отметить лишь то, что благодаря распараллеливанию слоёв внимания удастся уловить намного больше внутренних зависимостей последовательности, что и реализует слой multi-head attention.

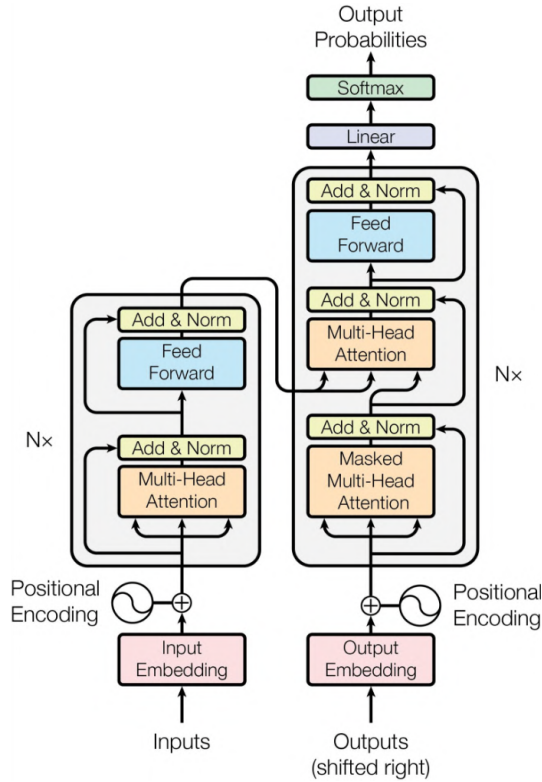


Рис. 3. Схема архитектуры Transformer

В декодере используется похожая структура, но основное отличие заключается в слое cross-attention (кросс-внимание). В данном слое для формирования результата многоголового внимания используются результаты обработки энкодером входной последовательности. Кроме того, на вход энкодеру подается вся последовательность сразу, в то время как декодер обрабатывает последовательность итерационно, т.е. на каждом шаге он получает информацию о текущем элементе последовательности (токене) и обо всех предыдущих, не заглядывая вперед.

Для использования описанной ранее архитектуры сети Transformer необходимо преобразовать входные данные в последовательность. Для этого необходимо объединить элементы входного вектора состояний в некоторые представления, основываясь на их информационной ценности. Таким образом, был получен новый входной вектор для нейронной сети $s = \{s_0, s_1, s_2, s_3, s_4\}$. Каждый элемент в данной последовательности отвечал за отдельную часть тела робота:

Элементы, описывающие торс робота:

$$s_0 = \{0, 1, 2, 3, 4, 13, 14, 15, 16, 17, 18\}$$



Элементы, описывающие переднюю левую ногу робота:

$$s_1 = \{5, 6, 19, 20\}$$

Элементы, описывающие переднюю правую ногу робота:

$$s_2 = \{7, 8, 21, 22\}$$

Элементы, описывающие заднюю левую ногу робота:

$$s_3 = \{9, 10, 23, 24\}$$

Элементы, описывающие заднюю правую ногу робота:

$$s_4 = \{11, 12, 25, 26\}$$

Данные векторы $s_0 \dots s_4$ содержат индексы элементов исходного вектора состояния. Описание каждого элемента состояния и их величин доступно в таблице 2 и в документации среды [4].

После представления вектора состояния в виде последовательности формируются входные эмбединги (векторные представления данных) и передаются в энкодер сети Transformer. В отличие от [3] позиционное кодирование не используется, поскольку информация о позициях ног и туловища в последовательности входного вектора не оказывает влияния на дальнейшее обучение, критична лишь их исходная инициализация.

Для использования декодера необходимо определить размерность выходного вектора. Так как агент способен управлять лишь шарнирными соединениями своих ног, то выходной вектор последовательности сокращается до 4 элементов, соответствующих каждой ноге робота. При этом каждый элемент содержит 2 величины крутящего момента для шарниров ноги. Благодаря такому подходу удалось сократить пространство действий до размерности 2, что в четыре раза меньше исходной размерности вектора действий из таблицы 1.

5. РЕЗУЛЬТАТЫ ЭКСПЕРИМЕНТОВ

Обучение агента проводилось на GPU, чтобы ускорить распараллеленные процессы в нейронной сети. Было запущено два эксперимента с одинаковым набором гиперпараметров для алгоритма PPO (см. табл. 3), реализованном в библиотеке StableBaselines на языке Python [5].

Таблица 3

Гиперпараметры алгоритма обучения с подкреплением PPO

Learning rate	0,0003
Количество шагов в эпизоде	1000
Размер мини-батча	64
Коэффициент дисконтирования γ	0,99



Коэффициент для оценки GAE λ	0,95
Размер clip PPO	0,2
Максимальное значение для обрезки градиента	0,5
Размер окна для усреднения оценки политики агента	100

В первом эксперименте использовалась полносвязная нейронная сеть с параметрами, описанными в таблице 4.

Таблица 4

Параметры полносвязной нейронной сети для алгоритма PPO

Количество скрытых слоёв	2
Количество нейронов в скрытых слоях	64
Функция активации	Tanh

Во втором эксперименте использовалась сеть архитектуры Transformer, параметры которой описаны в таблице 5.

Таблица 5

Параметры нейронной сети архитектуры Transformer для алгоритма PPO

Количество голов multi-head attention энкодера	4
Функция активации в полносвязном слое энкодера	ReLU
Количество голов в masked multi-head attention декодера	4
Функция активации в полносвязном слое декодера	Relu
Количество нейронов в слоях энкодера	64
Количество нейронов в слоях декодера	64
Размерность слоя эмбединга для энкодера	32
Размерность слоя эмбединга для декодера	32

После обучения агента на более чем 1 миллионе шагов в среде были получены следующие результаты. Для агента, обученного с помощью полносвязной сети длина эпизода достигала максимум 910 шагов в среде и среднее значение награды за эпизод 1212, синяя кривая на рисунках 3 и 4. Награда формируется из суммы нескольких значений:

- 1) награда за пребывание в «здоровом» состоянии, если муравей не перевернулся = 1;
- 2) награда за продвижение вперёд = 0.05;
- 3) штраф за слишком большое (по модулю) действие = $0.5 \text{ sum}(\text{действие агента}^2)$.

Результаты для агента, который был обучен с помощью сети Transformer, были выше, чем у предыдущего агента. Длина эпизода для него сошлась к значению 1000 уже за 475000 шагов в среде, в то время как роботу, политика которого основывалась на полносвязной сети, не удалось достигнуть такого результата за всё время обучения. Также, награда у нового агента достигала отметки в 1380 единиц и продолжала расти. Графики для данного агента описываются красной кривой на рисунках 4 и 5.

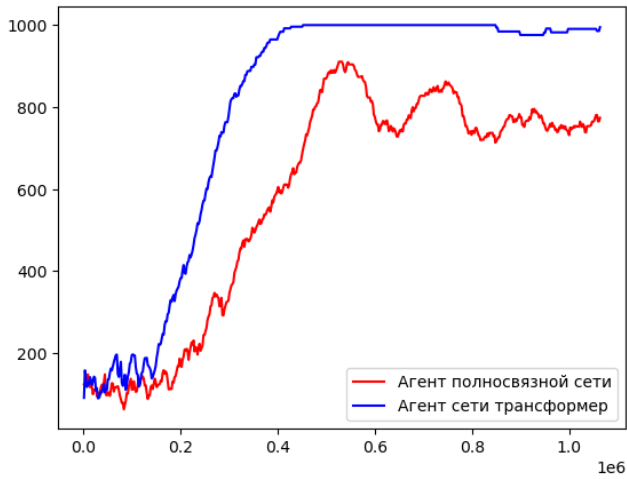


Рис. 4. График зависимости средней длины эпизода агентов от количества шагов обучения

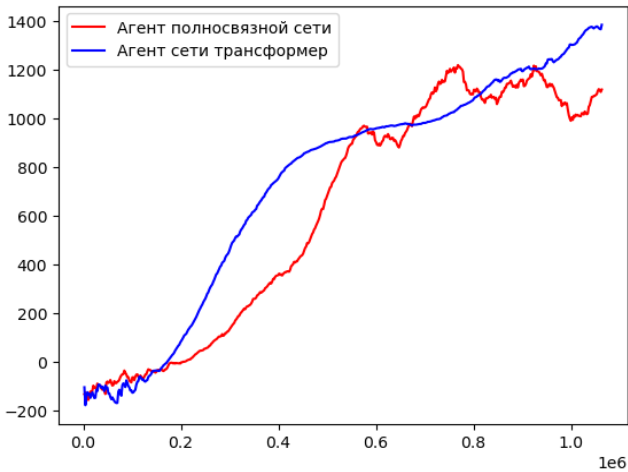


Рис. 5. График зависимости средней награды агентов от количества шагов обучения

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Апробация новой архитектуры сети Transformer для аппроксимации стратегии обучения агента позволила добиться положительных результатов. Благодаря использованию архитектуры сети Transformer при обучении робота передвижению, удалось



сузить пространство действий, увеличить продолжительность эпизода и получить награду, превосходящую результат, получаемый для решения аналогичной задачи с использованием глубокой полносвязной нейронной сети. Исходя из всего вышесказанного, можно сделать вывод, что применение архитектуры нейронной сети Transformer для использования в решении задач обучения с подкреплением может привести к улучшению качества результатов обучения и снижению вычислительных нагрузок.

Литература

1. Конспект по обучению с подкреплением // Arxiv URL: <https://arxiv.org/pdf/2201.09746.pdf> (дата обращения: 02.01.2024).
2. Proximal Policy Optimization Algorithms // Arxiv URL: <https://arxiv.org/pdf/1707.06347.pdf> (дата обращения: 24.12.2023).
3. Attention Is All You Need // Arxiv URL: <https://arxiv.org/abs/1706.03762> (дата обращения: 16.12.2023).
4. Gymnasium URL: <https://gymnasium.farama.org/> (дата обращения: 10.12.2023).
5. Stable Baselines Documentation // URL: <https://buildmedia.readthedocs.org/media/pdf/stable-baselines/master/stable-baselines.pdf> (дата обращения: 08.12.2023).
6. High-dimensional continuous control using generalized advantage estimation // Arxiv URL: <https://arxiv.org/pdf/1506.02438.pdf> (дата обращения: 07.12.2023).



Experience in Using the Transformer Network Architecture to Approximate Agent's Policy in Reinforcement Learning

Novikov N.P. *

Moscow Aviation Institute (National research university) (MAI), Moscow, Russian
e-mail: rtyderson@gmail.com

Vinogradov V.I. **

Moscow Aviation Institute (National research university) (MAI), Moscow, Russian
ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-3773-9653>
e-mail: vvinogradov@inbox.ru

This paper discusses the basics of the deep reinforcement learning algorithm and the use of neural networks to approximate the agent's policy. The comparison of using a fully connected neural network and a transformer network in the reinforcement learning algorithm is considered.

Keywords: artificial intelligence, machine learning, deep reinforcement learning, Markov decision processes, transformer, optimization.

For citation:

Novikov N.P., Vinogradov V.I. Experience in Using the Transformer Network Architecture to Approximate Agent's Policy in Reinforcement Learning. *Modelirovanie i analiz daniykh = Modelling and Data Analysis*, 2024. Vol. 14, no. 2, pp. 7–22. DOI: <https://doi.org/10.17759/mda.2024140201> (In Russ., abstr. in Engl.).

References

1. An outline of reinforcement learning // Arxiv URL: <https://arxiv.org/pdf/2201.09746.pdf> (circulation date: 02.01.2024).
2. Proximal Policy Optimization Algorithms // Arxiv URL: <https://arxiv.org/pdf/1707.06347.pdf> (circulation date: 24.12.2023).
3. Attention Is All You Need // Arxiv URL: <https://arxiv.org/abs/1706.03762> (circulation date: 16.12.2023).
4. Gymnasium URL: <https://gymnasium.farama.org/> (circulation date: 10.12.2023).

***Novikov Nikita Pavlovich**, master's student, Institute of Computer Science and Applied Mathematics, Moscow Aviation Institute (National Research University) (MAI), Moscow, Russia, e-mail: rtyderson@gmail.com

****Vinogradov Vladimir Ivanovich**, PhD, Associate Professor, Department of Mathematical Cybernetics, Moscow Aviation Institute (National Research University) (MAI), Moscow, Russia, ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-3773-9653>, e-mail: vvinogradov@inbox.ru



5. Stable Baselines Documentation // URL: <https://buildmedia.readthedocs.org/media/pdf/stable-baselines/master/stable-baselines.pdf> (circulation date: 08.12.2023).
6. High-dimensional continuous control using generalized advantage estimation // Arxiv URL: <https://arxiv.org/pdf/1506.02438.pdf> (circulation date: 07.12.2023).

Получена 06.03.2024

Принята в печать 21.03.2024

Received 06.03.2024

Accepted 21.03.2024

Применение статистик m^* и d^* для оценки качества данных психологического исследования с помощью закона Бенфорда (на примере измерения времени реакции)

Колачев Н.И.*

Национальный исследовательский университет
«Высшая школа экономики» (ФГБОУ ВО «НИУ ВШЭ»)
г. Москва, Российская Федерация
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-3214-6675>
e-mail: nkolachev@hse.ru

Целью предлагаемого исследования было рассмотрение свойств статистик, используемых для изучения согласия распределения первой значащей цифры закону Бенфорда, m^* и d^* при достаточно скромных объёмах выборки ($10 \leq n \leq 70$). Для достижения цели было проведено симуляционное исследование. Симулировались данные лог-нормального распределения с параметрами, имитирующими распределение измерений времени реакции. Распределение первой значащей цифры изучалось у стандартизированных значений, возведённых в степень γ ; $5 \leq \gamma \leq 100$. Выяснилось, что статистика m^* не зависит от степени числа в отличие от d^* . Были установлены критические значения для выборок объёмом от 10 до 70 наблюдений с шагом $h = 10$. Оказалось, что критические значения при малых n статистики d^* близки к асимптотическим, в то время как критические значения статистики m^* существенно больше. Функциональность установленных критических значений проверялась в рамках экспериментального исследования: один респондент выполнял когнитивный тест Струпа в соответствии с инструкцией (контрольный случай), другой – нарушал её (экспериментальный случай). Обнаружено, что статистика d^* не позволяет дифференцировать поведение испытуемых. В свою очередь m^* оказалась чувствительной к изменениям в поведении респондентов и в экспериментальном случае существенно чаще позволяла отвергнуть нулевую гипотезу о соответствии распределения первой значащей цифры стандартизированного значения времени реакции закону Бенфорда в сравнении с контрольным. Таким образом, делается предварительный вывод о том, что статистика m^* в сравнении с d^* более функциональна при изучении качества данных о времени реакции при небольших n .

Ключевые слова: закон Бенфорда, время реакции, статистика m^* , статистика d^* .



Для цитаты:

Колачев Н.И. Применение статистик m^* и d^* для оценки качества данных психологического исследования с помощью закона Бенфорда (на примере измерения времени реакции) // Моделирование и анализ данных. 2024. Том 14. № 2. С. 23–44. DOI: <https://doi.org/10.17759/mda.2024140202>

***Колачев Никита Игоревич**, кандидат психологических наук, старший преподаватель департамента психологии, Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики» (ФГБОУ ВО «НИУ ВШЭ»), г. Москва, Российская Федерация, ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-3214-6675>, e-mail: nkolachev@hse.ru

1. ВВЕДЕНИЕ

Высокое качество собранных данных имеет ключевое значение для формулирования выводов во многих эмпирических исследованиях. На достоверность собираемых данных могут влиять различные факторы: несовершенства измерительного инструмента, методические погрешности, отсутствие стандартизации процедуры сбора данных и многое другое. Особого внимания требуют результаты измерения нефизических величин (например, мотивации, когнитивных процессов и пр.), которые не поддаются непосредственному, прямому измерению, и, как правило, подвержены влиянию флуктуаций в поведении респондента (испытуемого).

В части исследования качества многое сделано для оценки достоверности данных, собираемых опросно-анкетными методами. К примеру, хорошо известно, как справляться с таким фактором недостоверности самоотчётных данных, как социальная желательность [7]. Более того, разработаны специальные подходы для измерения характеристик личности, которые могут подвергаться искажениям при самоотчёте. К числу таких подходов относятся методы поведенческих сценариев [22], якорных виньеток [23], сценарных шкал [11].

При этом необходимо констатировать, что на сегодняшний день не предложены методы анализа достоверности данных о времени реакции, что делает настоящую работу особенно актуальной, ведь измерение времени реакции является основой когнитивной психологии [9].

Время реакции

Время реакции широко распространено и обычно используется в науках о поведении для оценки и моделирования когнитивных процессов, чаще всего внимания [16]. Под временем реакции понимают временной интервал между появлением какого-либо стимула и ответом (реакцией) на этот стимул со стороны испытуемого [3]. Обычно измеряется в миллисекундах (мс). В исследованиях с использованием показателя времени реакции выделяют три вида возможных реакций [1]:

- Простая сенсомоторная реакция (реакция на появление любого стимула);
- Дифференцировочная реакция простого выбора (реакция на стимулы определенного типа и игнорирование всех остальных);
- Дифференцировочная реакция сложного выбора (ответ на каждый тип стимула должен сопровождаться определенной реакцией).

На протяжении многих лет время реакции служило основой для значимых открытий в экспериментальной, когнитивной психологии, нейрофизиологии, таких как эффект Струпа [26], аффективный прайминг [29] и др. По сей день вопросы работы со временем реакции являются актуальными для исследователей. Так, известно, что распределение времени реакции во многих исследованиях имеет правостороннюю асимметрию [28], поэтому в качестве меры центральной тенденции рекомендуют использовать медиану или моду, а не среднее арифметическое. Кроме того, ряд исследователей говорит о лог-нормальности распределения времени реакции, то есть логарифм времени реакции имеет нормальное распределение [18]. Некоторые исследователи указывают, что распределение времени реакции подчиняется так называемому экс-гауссовскому распределению (смесь гауссовского и экспоненциального) [28].

Основным фактором, влияющим на качество данных о времени реакции, является невыполнение испытуемым поставленной задачи. Если испытуемый хаотично, бессистемно реагирует на стимулы (например, нажимать клавиши на клавиатуре компьютера, ведь большая часть современных исследований проводится в компьютерном формате, даже онлайн [24]), то исследователи получают недостоверные данные, ничего не свидетельствующие об особенностях познавательных процессов испытуемого. Существующие рекомендации по работе с данными о времени реакции лишь предлагают способы «подгонки» данных под существующие статистические методы, как, например, исключение выбросов по правилу « ± 2 стандартных отклонения», или методы работы с пропущенными данными [17]. Все эти рекомендации не позволяют судить о достоверности собранных данных. В связи с этим возникает острая необходимость в поиске способов проверки качества получаемых или генерируемых данных. Одним из вариантов может выступить использование закона Бенфорда.

Закон Бенфорда

Закон Бенфорда – известная закономерность в области математики. Она заключается в том, что в некотором большом наборе числовых данных первая значащая цифра, не включая ноль, встречается с частотой, равной $\log\left(1 + \frac{1}{k}\right)$, где k – первая значащая цифра от 1 до 9 [5]. Закономерность была получена Фрэнком Бенфордом, сотрудником известной компании «General Electric», на примере большого числа данных: длин рек, численности городов США, смертности и пр. [12]. Позднее этот закон нашёл отражение во многих областях человеческой деятельности. К примеру, закономерность Бенфорда используют для выявления подлога в бухгалтерской отчетности и оценки качества отчетности о движении денежных средств [8], фальсификаций на выборах, подсчёта количества числительных в статьях [2], достоверности данных профилактического скрининга в области медицины [10]. Поскольку закономерность Бенфорда воспроизводится на разнообразных данных, некоторые авторы называют её фундаментальным законом природы [6].

Стоит отметить, что не все переменные подчиняются закону Бенфорда. Так, считается, что «почтовые индексы, выигрышные номера в лото и рулетку, номера телефонов и любые объемы данных, размер которых не достаточен для применения



статистических методов» [4, с. 76]. Кроме того, время реакции в пределах от 100 до 200 мс может быть, например, результатом быстрой догадки. Такие быстрые реакции легко выявляются, и их обычно исключают из анализа [28]. При этом такие значения встречаются в распределении реже, чем, допустим, значения в интервале от 400 до 500 мс, что говорит о низкой согласованности первой значащей цифры исходных данных о времени реакции с законом Бенфорда, поскольку, согласно этому закону, цифры 1 и 2 встречаются чаще, чем 4 и 5.

Другой существенной проблемой применения закона Бенфорда является подбор подходящих методов оценки согласия эмпирических данных с этим законом. Тестирование гипотезы о соответствии эмпирического распределения значащих цифр закону Бенфорда обычно происходит методом хи-квадрата или с помощью критерия Колмогорова [21]. Как полагает Джон Морроу, эти тесты являются достаточно консервативными, то есть довольно часто не позволяют отклонить нулевую гипотезу в ситуации, когда данные не согласуются с законом Бенфорда (другими словами, имеют высокую вероятность ошибки II рода). В связи с этим возникла необходимость разработки новых тестов для проверки гипотезы о соответствии данных этому закону.

Модификации статистических тестов согласия с законом Бенфорда

Решением проблемы консервативности статистических тестов занялся Джон Морроу [21]. В своей работе он доказал следующую теорему:

пусть X – непрерывная случайная величина, B – закон Бенфорда, тогда

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \gamma^* : \forall \gamma \geq \gamma^* \left| x^\gamma - B \right| < \varepsilon,$$

где x^γ – стандартизированные значения из различных распределений (например, нормального, лог-нормального, экспоненциального и др.), возведённые в степень γ . В оригинальной статье вместо γ фигурирует α , однако, чтобы не путать этот параметр с уровнем значимости, который в статистике обозначается как α , было принято решение использовать другую греческую букву. По итогам анализа Дж. Морроу пришёл к выводу, что 10-е степени ($\gamma = 10$) стандартизированных значений имеют высокое согласие с законом Бенфорда. Однако остаётся неясным, почему выбрана именно 10-я степень.

Кроме того, вместо классических тестов на однородность, таких как хи-квадрат или тест Колмогорова, он предложил критические значения для двух тестов (m^* и d^*), предназначенных для проверки соответствия эмпирического распределения первой значащей цифры закону Бенфорда:

$$m^* = \sqrt{n} \cdot \max_{d \in \{1, \dots, 9\}} \left| P(\text{первая значащая цифра } X = d) - \log_{10} \left(1 + \frac{1}{d} \right) \right|$$

$$d^* = \sqrt{n} \cdot \left[\sum_{d \in \{1, \dots, 9\}} \left(P(\text{первая значащая цифра } X = d) - \log_{10} \left(1 + \frac{1}{d} \right) \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

где n – объём выборки, $\log_{10} \left(1 + \frac{1}{d} \right)$ – закон Бенфорда. В статистической литературе статистику m^* называют расстоянием Чебышёва, а d^* – евклидовым расстоянием [13].

Также учёный показал, что предложенные им статистические тесты достигают достаточной мощности при объёме выборки, превышающем 80 наблюдений (при уровне значимости $\alpha=0.01$).

Необходимо сказать, что психологические исследования, в которых фигурирует время реакции в качестве основной переменной, довольно часто проводятся на скромных по объёму выборках (как правило, $n < 50$). К примеру, Маршалек и коллеги [19] в рамках анализа множества публикаций показали, что средний размер выборки в серьёзном психологическом исследовании составляет 40 человек. Этому есть разумное объяснение. С одной стороны, это обусловлено отсутствием необходимости в больших объёмах, так как небольшой объём выборки компенсируется достаточным количеством производимых измерений у одного человека; с другой стороны, объясняется трудозатратностью самой процедуры сбора данных, так как экспериментальные когнитивные исследования занимают довольно много времени (в среднем 1–1,5 часа) и требуют от участников немалых усилий. Однако несмотря на сложившуюся практику, вопрос проверки качества данных остаётся ключевым, следовательно, даже маленькие по объёму выборки данных должны подвергаться анализу на предмет качества.

В связи с этим целью исследования является изучение свойств статистик m^* и d^* при скромных объёмах выборки ($10 \leq n \leq 70$) на основе данных о времени реакции. Для достижения поставленной цели были сформулированы следующие задачи:

1. Изучить, различаются ли значения m^* и d^* в зависимости от объёма выборки;
2. Исследовать, зависят ли значения статистик m^* и d^* от степени, в которую возводят стандартизированное значение времени реакции, при контроле объёма выборки;
3. Установить критические значения статистик m^* и d^* для небольших по объёму выборок ($10 \leq n \leq 70$) на основе симуляций из лог-нормального распределения;
4. Проверить функциональность установленных критических значений на экспериментальном (эмпирическом) примере.

Для решения поставленных задач сначала проведено симуляционное исследование. Был сгенерирован набор данных о времени реакции следующих объёмов (n): 10, 20, 30, 40, 50, 60 и 70. В качестве функции для генерации данных выбрана лог-нормальная с такими параметрами: $\mu = 5,984$, $\sigma = 0,1245$, что соответствует среднему времени реакции 400 мс и стандартному отклонению 50 мс. Эти значения часто используются в симуляционных исследованиях [28]. Затем сгенерированные значения были стандартизированы по следующей формуле:

$$\frac{x_i - \mu}{\sigma}$$

где x_i – i -е значение переменной из лог-нормального распределения. Далее стандартизированные значения были возведены в k -ю степень с шагом $h = 5$, начиная со второго



элемента; $k \in \{1, 5, 10, \dots, 100\}$. Именно у возведённых в k -ю степень стандартизированных значений изучалось распределение первых значащих цифр с помощью статистик m^* и d^* , описанных выше. В рамках симуляционного исследования изучалось поведение m^* и d^* . Для каждого объёма выборки (n) симулировалось 10^5 репликаций.

Прежде чем произвести поиск критических значений на основе данных симуляций, были проверены различия в средних значениях статистик m^* и d^* в разрезе разных объёмов выборок, а также в зависимости от степени числа. Изучение различий в средних в разрезе разных n проходило с помощью дисперсионного анализа (ANOVA). Модель в матричном виде выглядит следующим образом:

$$Y = X\beta + e$$

где Y – вектор зависимой переменной размера $n \times 1$, X – вектор независимой качественной переменной размера $n \times d$, β – вектор неизвестных параметров размера $d \times 1$, e – вектор остатков (ошибок) размера $n \times 1$.

Дисперсионный анализ основан на вычислении межгрупповой и внутригрупповой дисперсии и расчёте статистики Фишера (F -статистики):

$$D_{\text{меж.}} = \frac{\sum_{i=1}^k n_i \cdot (\bar{x}_i - \bar{x})^2}{k - 1}$$

$$D_{\text{внутр.}} = \frac{\sum_{i=1}^k D_i}{k}$$

$$F = \frac{D_{\text{меж.}}}{D_{\text{внутр.}}}$$

где n_i – объём выборки i -ой группы, \bar{x}_i – среднее i -ой группы, \bar{x} – общее среднее, k – количество групп, D_i – дисперсия i -ой группы.

Зависимость статистик от степени числа изучалась с помощью корреляции Спирмена (ρ):

$$\rho = 1 - \frac{6 \sum d_i^2}{n(n^2 - 1)}$$

где d_i^2 – разница рангов i -го наблюдения, n – количество наблюдений. Выбор именно этого коэффициента корреляции обоснован тем, что он учитывает не только линейные, но монотонно убывающие или монотонно возрастающие связи или зависимости (в отличие от коэффициента Пирсона).

Затем на основе распределения статистик m^* и d^* произведено отсечение по 90-му, 95-му и 99-му перцентилям, поскольку m^* и d^* являются односторонними критериями, что соответствует критическим значениям для $\alpha = 0,10$, $\alpha = 0,05$ и $\alpha = 0,01$. Полученные критические значения сравнивались с асимптотическими критическими значениями, представленными в работе Джона Морроу [21].

Симуляционное исследование дополнено экспериментальным (эмпирическим). В рамках этого исследования два респондента прошли когнитивный тест (тест Струпа), который заключается в том, что испытуемые нажимают нужные клавиши на клавиатуре компьютера в зависимости от цвета краски появившегося слова по следующему правилу: «←» – красный, «↑» – жёлтый, «↓» – зелёный, «→» – синий. Причём появившееся слово обычно означает цвет, тем самым возникает семантическая интерференция. В ходе выполнения теста фиксируется время реакции и правильность нажатия клавиши. Некоторые стимулы являлись нейтральными (например, вместо слова показывался набор символов «XXXXX»). На рисунке 1 представлен пример стимула.

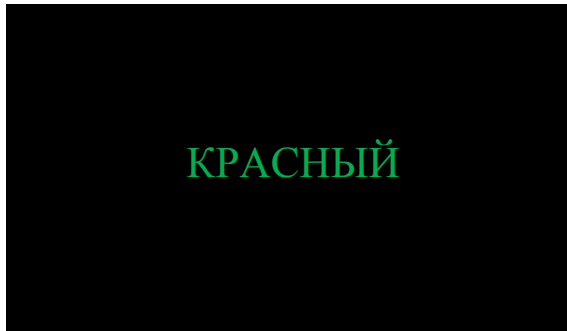


Рис. 1. Пример стимула в тесте Струпа

Первый респондент (контрольный случай) выполнял тест, согласно стандартной инструкции: «Ваша задача – как можно быстрее и точнее реагировать на окраску слова ведущей рукой. Для ответа необходимо использовать стрелки на клавиатуре: ВЛЕВО – для красного, ВВЕРХ – для желтого, ВНИЗ – для зелёного и ВПРАВО – для синего». Второй респондент (экспериментальный случай) был инструктирован выполнять тест в хаотичном, бессистемном режиме, игнорируя инструкцию к тесту.

У каждого респондента было сделано 85 замеров времени реакции, с тем чтобы можно было делать подвыборки измерений следующих размеров (n): 10, 20, 30, 40, 50, 60 и 70 с 105 репликациями для каждого объёма выборки. Данные случайным образом выбирались из всего массива измерений без возвращения. Предварительно данные о времени реакции были стандартизированы и возведены в 10-ю степень, то есть $\gamma = 10$.

Для проверки функциональности установленных критических значений статистик m^* и d^* проведён статистический анализ методом расчёта показателя отношения шансов. Исследовалось, влияет ли поведение респондента при прохождении теста Струпа на вероятность отвергнуть нулевую гипотезу о соответствии распределения первой значащей цифры времени реакции закону Бенфорда при $\alpha = 0,05$, используя установленные критические значения на основе данных симуляций. Такой уровень значимости объясняется тем, что он является конвенциональным в психологической науке [Dixon, 2003]. Сначала рассчитывался простой показатель шанса (*odds*, O) отвергнуть нулевую гипотезу для контрольного и экспериментального случая:



$$O = \frac{p_1}{p_0},$$

где p_1 – вероятность отвергнуть нулевую гипотезу, p_0 – обратное событие ($1 - p_1$).

Затем шанс экспериментального условия делился на шанс контрольного, тем самым получалось отношение шансов (*odds ratio*, *OR*):

$$OR = \frac{O_э}{O_к}$$

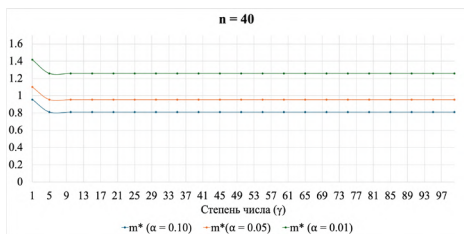
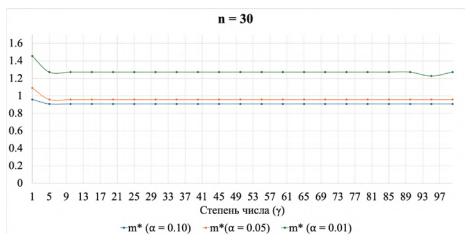
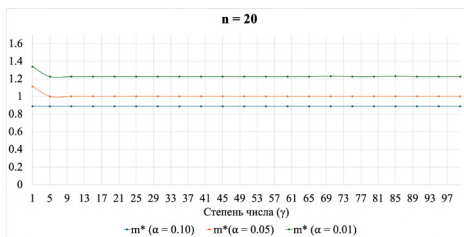
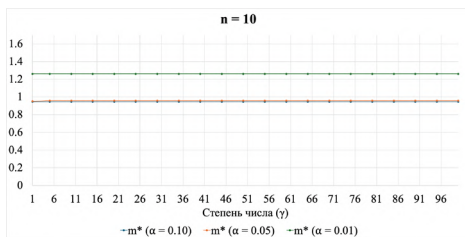
Для интерпретации отношения шансов использованы данные исследования Чена и коллег [14]. Согласно их исследованию, малый эффект наблюдается при отношении шансов, находящемся в полуинтервале [1,52; 2,74), средний – в полуинтервале [2,74; 4,72), большой – в полуинтервале [4,72; +∞).

Симуляция данных выполнена в среде R [24] с использованием базовых функций «*lnorm*» и «*sample*». Статистическая обработка данных проходила в программе *jamovi* [27]. Визуализация выполнена с помощью *Microsoft® Excel* [20].

2. РЕЗУЛЬТАТЫ

Симуляционное исследование

На рисунке 2 представлено поведение статистики m^* в зависимости от объёма выборки и степени числа. Можно заметить, что критические значения отличаются в зависимости от объёма выборки, это подтверждает дисперсионный анализ: $F(6, 140) = 45,709, p < 0,001$. При этом также можно наблюдать, что значения статистики стабилизируются при $\gamma \geq 5$, что даёт возможность предположить, что её значения не зависят от степени числа.



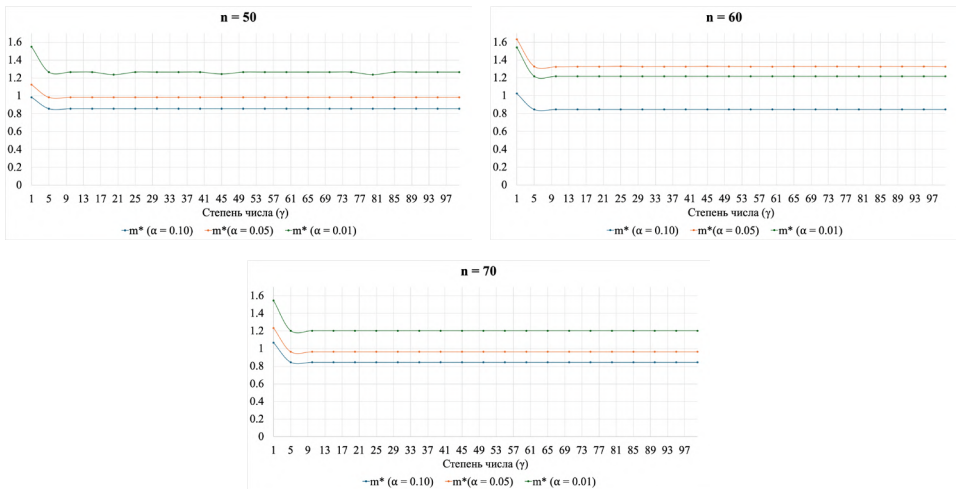


Рис. 2. Поведение статистики m^* в зависимости от объёма выборки и степени числа в симуляционном исследовании

В таблице 1 представлены корреляции Спирмена для разных объёмов выборки между степенью числа и значением статистики m^* с учётом исключения выбросов. Как правило, выбросы наблюдаются при $\gamma = 1$. Отметим, что корреляции не являются значимыми, следовательно, можно заключить, что связи между степенью числа и значением статистики m^* нет. Причём связь отсутствует вне зависимости от объёма выборки.

Таблица 1

Корреляции Спирмена для разных объёмов выборки между степенью числа и значением статистики m^* с учётом исключения выбросов

Объём выборки (n)	$m^*(\alpha = 0,10)$	$m^*(\alpha = 0,05)$	$m^*(\alpha = 0,01)$
10	0,00	0,00	0,00
20	0,00	0,00	0,29
30	0,00	0,00	-0,34
40	0,00	0,00	0,00
50	0,00	0,00	0,06
60	0,00	0,00	0,00
70	0,00	0,00	0,00

На рисунке 3 представлено поведение статистики d^* в зависимости от объёма выборки и степени числа. Как и в случае со статистикой m^* , критические значения d^* отличаются в зависимости от объёма выборки, это подтверждает дисперсионный анализ: $F(6, 140) = 34,755, p < 0,001$. При этом также можно наблюдать, что значения статистики стабилизируются при $\gamma \geq 5$, что даёт возможность предположить, что её значения не зависят от степени числа.

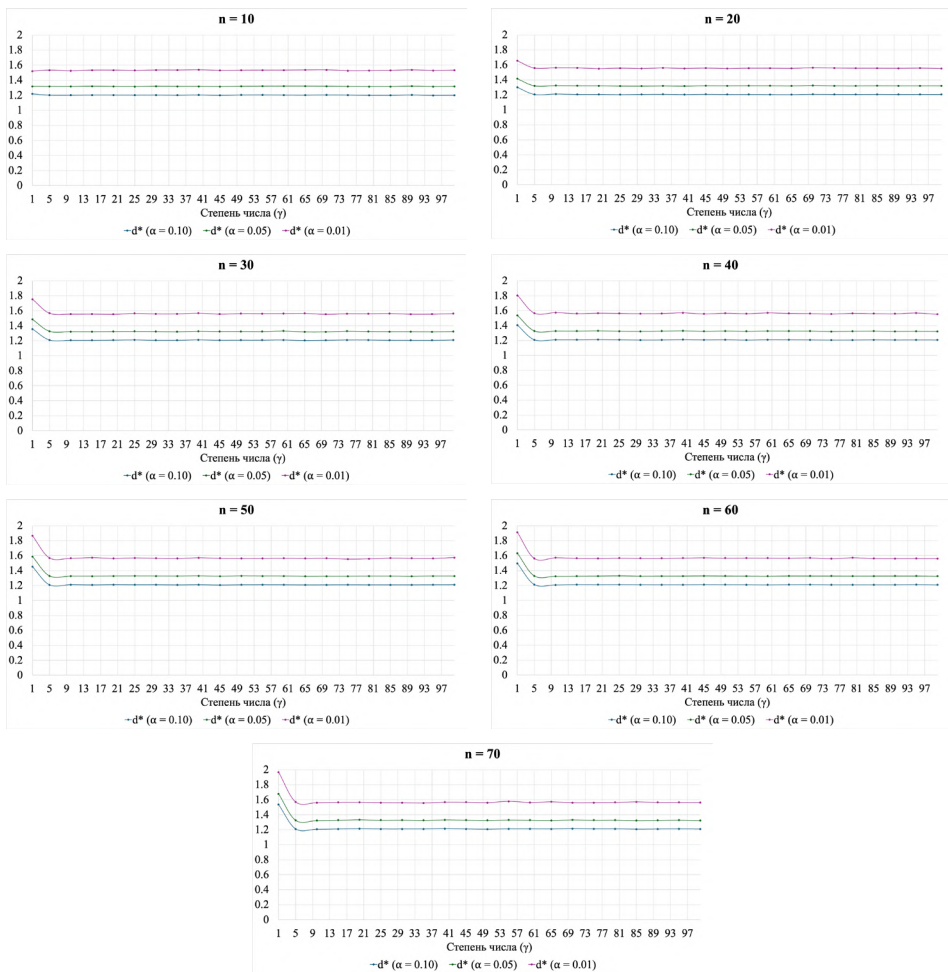


Рис. 3. Поведение статистики d^* в зависимости от объёма выборки и степени числа в симуляционном исследовании

В таблице 2 представлены корреляции Спирмена для разных объёмов выборки между степенью числа и значением статистики d^* с учётом исключения выбросов. Как правило, выбросы наблюдаются при $\gamma = 1$. Отметим, что корреляции не являются значимыми, однако наблюдается большая зависимость от степени числа, чем у статистики m^* .



Таблица 2

Корреляции Спирмена для разных объёмов выборки между степенью числа и значением статистики d^* с учётом исключения выбросов

Объём выборки (n)	$d^*(\alpha = 0,10)$	$d^*(\alpha = 0,05)$	$d^*(\alpha = 0,01)$
10	-0,17	0,03	-0,08
20	-0,20	0,01	-0,23
30	-0,01	-0,18	-0,06
40	-0,37	-0,55*	-0,38
50	-0,11	-0,33	-0,24
60	-0,40	0,01	-0,29
70	0,05	-0,15	0,04
Прим. * $p < 0,05$			

В таблице 3 представлены критические значения для статистики m^* , полученные в рамках симуляционного исследования. Отдельно указаны асимптотические значения статистики, полученные в исследовании Джона Морроу [21]. Можно заметить, что симуляционные и асимптотические критические значения становятся близки при увеличении объёма выборки.

Таблица 3

Критические значения для m^* при разных уровнях значимости

Объём выборки	$\alpha = 0,10$	$\alpha = 0,05$	$\alpha = 0,01$
10	0,946	0,958	1,262
20	0,890	1,002	1,225
30	0,907	0,958	1,273
40	0,809	0,955	1,259
50	0,856	0,983	1,266
60	0,847	0,968	1,219
70	0,845	0,965	1,204
Дж. Морроу (n > 80)	0,851	0,967	1,212

В таблице 4 представлены критические значения для статистики d^* , полученные в рамках симуляционного исследования. Отдельно указаны асимптотические значения статистики, полученные в исследовании Джона Морроу [21]. В отличие от m^* , симуляционные критические значения d^* достаточно близки к асимптотическим при любом значении α .

Таблица 4

Критические значения для d^* при разных уровнях значимости

Объём выборки	$\alpha = 0,10$	$\alpha = 0,05$	$\alpha = 0,01$
10	1,204	1,321	1,538
20	1,208	1,326	1,563
30	1,211	1,331	1,569
40	1,213	1,330	1,574

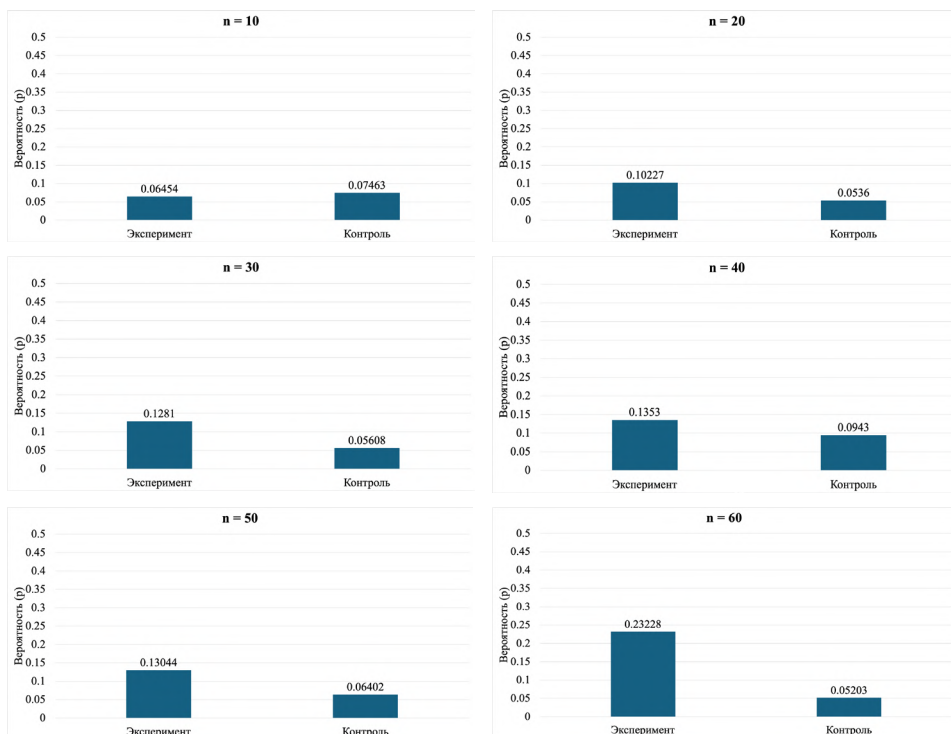


Объём выборки	$\alpha = 0,10$	$\alpha = 0,05$	$\alpha = 0,01$
50	1,211	1,329	1,572
60	1,212	1,330	1,571
70	1,214	1,333	1,578
Дж. Морроу ($n > 80$)	1,212	1,330	1,569

По итогам симуляционного исследования можно заключить, что, по нашим данным, статистика m^* в сравнении с d^* более предпочтительна при изучении соответствия распределения первой значащей цифры стандартизированного значения времени реакции закону Бенфорда, поскольку она не зависит от степени, в которую возводят стандартизированное значение (в пределах $5 \leq \gamma \leq 100$).

Экспериментальное исследование

На рисунке 4 представлены вероятности отвержения нулевой гипотезы о соответствии распределения первой значащей цифры закону Бенфорда для экспериментального и контрольного случаев в разрезе разных объёмов выборки. Можно заметить, что распределение вероятности для контрольного случая флуктуирует в районе значения 0,06, при этом для экспериментального увеличивается при увеличении объёма выборки. Также на основе представленных вероятностей можно рассчитать отношение шансов при сравнении экспериментального и контрольного случаев.



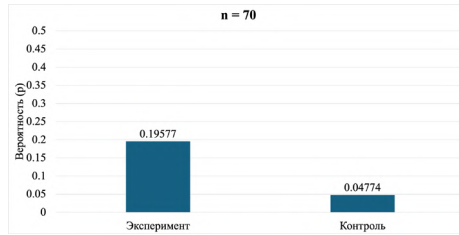


Рис. 4. Вероятность отвержения нулевой гипотезы о соответствии распределения первой значащей цифры закону Бенфорда для экспериментального и контрольного случаев на основе статистики t^*

При $n = 10$ шанс отвергнуть нулевую гипотезу в экспериментальном случае равен $\frac{0,06454}{1-0,06454}=0,068992795$, в контрольном – $\frac{0,07463}{1-0,07463}=0,080648822$. При этом отношение шансов (эксперимент vs. контроль) составляет $\frac{0,068992795}{0,080648822}=0,85547183 \approx 14\%$. То есть в экспериментальном случае шанс отвергнуть нулевую гипотезу примерно на 14% ниже, чем в контрольном. Или, если перевернуть отношение шансов, то получится, что в контрольном случае на 17% выше шанс отвергнуть нулевую гипотезу, чем в экспериментальном: $\frac{0,080648822}{0,068992795}=1,168945563 \approx 17\%$. При $n = 20$ шанс отвергнуть нулевую гипотезу в экспериментальном случае равен $\frac{0,10227}{1-0,10227}=0,113920667$, в контрольном – $\frac{0,0536}{1-0,0536}=0,056635672$. При этом отношение шансов (эксперимент vs. контроль) составляет $\frac{0,113920667}{0,056635672}=2,011464904 \approx 101\%$. То есть в экспериментальном случае шанс отвергнуть нулевую гипотезу примерно в 2 раза (или на 101%) выше, чем в контрольном. При $n = 30$ шанс отвергнуть нулевую гипотезу в экспериментальном случае равен $\frac{0,1281}{1-0,1281}=0,146920518$, в контрольном – $\frac{0,05608}{1-0,05608}=0,059411815$. При этом отношение шансов (эксперимент vs. контроль) составляет $\frac{0,146920518}{0,059411815}=2,472917542 \approx 147\%$. То есть в экспериментальном случае шанс отвергнуть нулевую гипотезу почти в 2.5 раза (или на 147%) выше, чем в контрольном. При $n = 40$ шанс отвергнуть нулевую гипотезу в экспериментальном случае равен $\frac{0,1353}{1-0,1353}=0,156470452$, в контрольном – $\frac{0,0943}{1-0,0943}=0,104118361$. При этом отношение шансов (эксперимент vs. контроль) составляет $\frac{0,156470452}{0,104118361}=1,50281324 \approx 50\%$. То есть в экспериментальном случае шанс отвергнуть нулевую гипотезу в 1.5 раза (или на 50%) выше, чем в контрольном. При $n = 50$ шанс отвергнуть нулевую



гипотезу в экспериментальном случае равен $\frac{0,13044}{1-0,13044}=0,1500069$, в контрольном – $\frac{0,06402}{1-0,06402}=0,068398897$. При этом отношение шансов (эксперимент vs. контроль) составляет $\frac{0,1500069}{0,068398897}=2,193118686 \approx 119\%$. То есть в экспериментальном случае шанс отвергнуть нулевую гипотезу почти в 2.2 раза (или на 119%) выше, чем в контрольном. При $n = 60$ шанс отвергнуть нулевую гипотезу в экспериментальном случае равен $\frac{0,23228}{1-0,23228}=0,302558224$, в контрольном – $\frac{0,05203}{1-0,05203}=0,054885703$. При этом отношение шансов (эксперимент vs. контроль) составляет $\frac{0,302558224}{0,054885703}=5,512514318 \approx 451\%$. То есть в экспериментальном случае шанс отвергнуть нулевую гипотезу в 5.5 раза (или на 451%) выше, чем в контрольном. При $n = 70$ шанс отвергнуть нулевую гипотезу в экспериментальном случае равен $\frac{0,19577}{1-0,19577}=0,243425388$, в контрольном – $\frac{0,04774}{1-0,04774}=0,050133367$. При этом отношение шансов (эксперимент vs. контроль) составляет $\frac{0,243425388}{0,050133367}=4,855556352 \approx 386\%$. То есть в экспериментальном случае шанс отвергнуть нулевую гипотезу почти в 4.9 раза (или на 386%) выше, чем в контрольном.

На основе границ размеров эффекта можно сделать вывод, что при объёме выборки от 10 до 50 различия между экспериментальным и контрольным случаем довольно малы. В то же время при $n = 60$ и $n = 70$ различия являются большими.

На рисунке 5 представлены вероятности отвержения нулевой гипотезы о соответствии распределения первой значащей цифры закону Бенфорда на основе статистики d^* для экспериментального и контрольного случаев в разрезе разных объёмов выборки. Можно заметить, что распределение вероятности обоих случаев нестабильно, изменяется в зависимости от объёма выборки – увеличивается при увеличении n .

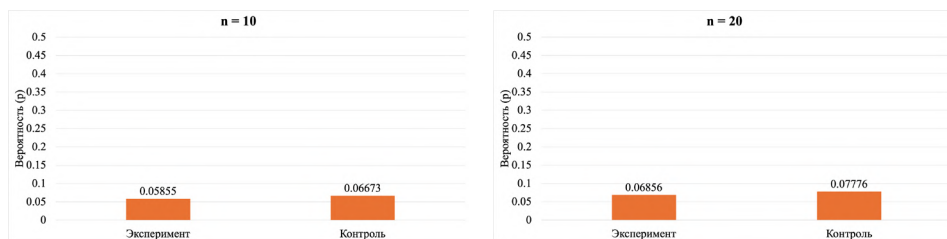


Рис. 5. Вероятность отвержения нулевой гипотезы о соответствии распределения первой значащей цифры закону Бенфорда для экспериментального и контрольного случаев на основе статистики d^*

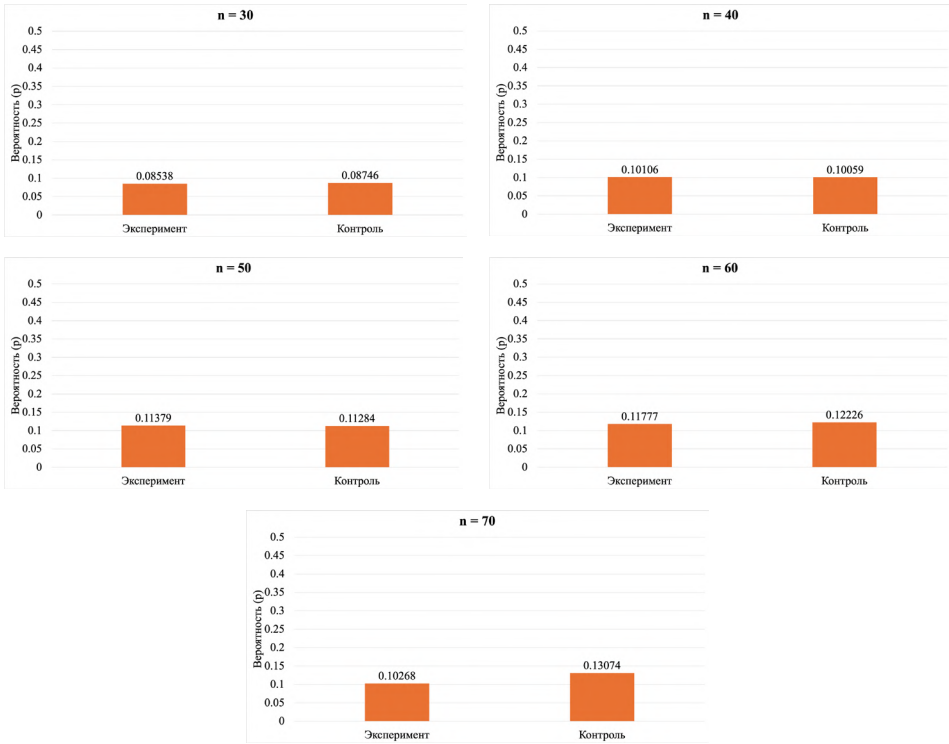


Рис. 5. Вероятность отвержения нулевой гипотезы о соответствии распределения первой значащей цифры закону Бенфорда для экспериментального и контрольного случаев на основе статистики d^*

При $n = 10$ шанс отвергнуть нулевую гипотезу в экспериментальном случае равен $\frac{0,05855}{1 - 0,05855} = 0,062191301$, в контрольном – $\frac{0,06673}{1 - 0,06673} = 0,07150128$. При этом отношение шансов (эксперимент vs. контроль) составляет $\frac{0,062191301}{0,07150128} = 0,869792824 \approx 13\%$. То есть в экспериментальном случае шанс отвергнуть нулевую гипотезу примерно на 13% ниже, чем в контрольном. При $n = 20$ шанс отвергнуть нулевую гипотезу в экспериментальном случае равен $\frac{0,06856}{1 - 0,06856} = 0,073606459$, в контрольном – $\frac{0,07776}{1 - 0,07776} = 0,084316447$. При этом отношение шансов (эксперимент vs. контроль) составляет $\frac{0,073606459}{0,084316447} = 0,87297866 \approx 13\%$. То есть в экспериментальном случае шанс отвергнуть нулевую гипотезу примерно на 13% ниже, чем в контрольном. При $n = 30$ шанс отвергнуть нулевую гипотезу в экспериментальном



случае равен $\frac{0,08538}{1-0,08538}=0,093350244$, в контрольном – $\frac{0,08746}{1-0,08746}=0,095842374$.

При этом отношение шансов (эксперимент vs. контроль) составляет $\frac{0,093350244}{0,095842374}=0,973997616 \approx 3\%$. То есть в экспериментальном случае шанс отвергнуть нулевую гипотезу на 3% ниже, чем в контрольном.

При $n = 40$ шанс отвергнуть нулевую гипотезу в экспериментальном случае равен $\frac{0,10106}{1-0,10106}=0,112421296$,

в контрольном – $\frac{0,10059}{1-0,10059}=0,111839984$. При этом отношение шансов (эксперимент vs. контроль) составляет $\frac{0,112421296}{0,111839984}=1,005197714 \approx 0,5\%$. То есть в экспериментальном случае шанс отвергнуть нулевую гипотезу в 1,005 раза (или

на 0,5%) выше, чем в контрольном. При $n = 50$ шанс отвергнуть нулевую гипотезу в экспериментальном случае равен $\frac{0,11379}{1-0,11379}=0,128400718$,

в контрольном – $\frac{0,11284}{1-0,11284}=0,127192389$. При этом отношение шансов (эксперимент vs. контроль) составляет $\frac{0,128400718}{0,127192389}=1,009500006 \approx 1\%$. То есть в экспериментальном случае шанс отвергнуть нулевую гипотезу почти в 1,01 раза (или на 1%) выше, чем в контрольном.

При $n = 60$ шанс отвергнуть нулевую гипотезу в экспериментальном случае равен $\frac{0,11777}{1-0,11777}=0,133491266$, в контрольном – $\frac{0,12226}{1-0,12226}=0,139289539$.

При этом отношение шансов (эксперимент vs. контроль) составляет $\frac{0,133491266}{0,139289539}=0,958372519 \approx 4\%$. То есть в экспериментальном случае шанс отвергнуть нулевую гипотезу на 4% ниже, чем в контрольном.

При $n = 70$ шанс отвергнуть нулевую гипотезу в экспериментальном случае равен $\frac{0,10268}{1-0,10268}=0,114429635$, в контрольном – $\frac{0,13074}{1-0,13074}=0,150403792$.

При этом отношение шансов (эксперимент vs. контроль) составляет $\frac{0,114429635}{0,150403792}=0,760816158 \approx 24\%$. То есть в экспериментальном случае шанс отвергнуть нулевую гипотезу почти на 24% ниже, чем в контрольном.

В случае с использованием статистики d^* получается парадоксальная ситуация – шансы отвергнуть нулевую гипотезу оказываются немного выше в контрольном случае, нежели в экспериментальном. Правда шансы достаточно малы по размеру, это означает, что они практически не отличаются в обоих случаях.

3. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В предлагаемом исследовании на основе симуляций из лог-нормального распределения, отражающего распределение времени реакции, с параметрами $\mu = 5.984$, $\sigma = 0.1245$ изучалось поведение статистик согласия m^* и d^* . Выяснилось, что значения m^* не зависят от степени, в которую возводят стандартизированное значение

времени реакции, в то время как у d^* наблюдается небольшая отрицательная зависимость. Обе статистики зависят от объёма выборки (n), поэтому для каждого из анализируемых n были установлены отдельные критические значения при $\alpha = 0,10$, $\alpha = 0,05$ и $\alpha = 0,01$.

Необходимо отметить, что результаты наших симуляций относительно статистики d^* совпадают с заключениями Л. Кампанелли [13], который вывел линейные закономерности между n и d^* . Так, для $26 \leq n \leq 1000$ зависимость выглядит следующим образом:

$$d_{N,1-\alpha}^* = a + bn^{-1}$$

К примеру, при $\alpha = 0,05$ для $50 \leq n \leq 1000$ коэффициенты его формулы принимают вид: $a = 1,3286, b = -0,1151$. Если подставить $n=50$, то получится 1,326. В нашем случае критическое значение равняется 1,329, что довольно близко к результату по формуле Кампанелли (естественно, в рамках погрешности метода). По такой же логике можно проверить остальные критические значения. При этом важно учесть, что при $26 \leq n \leq 49$ коэффициенты a и b другие, а для $5 \leq n \leq 25$ значения представлены в табличном виде. Однако несмотря на сходство полученных результатов, статистика d^* оказалась нефункциональна при сравнении данных экспериментального исследования. Она оказалась нечувствительна к изменениям в поведении испытуемых, что отразилось в практически одинаковых шансах отвергнуть нулевую гипотезу о соответствии распределения первой значащей цифры закону Бенфорда.

Если говорить о статистике m^* , то как уже было отмечено, она оказалась менее чувствительной к степени, в которую мы возводили стандартизированное значение времени реакции, чем d^* . Кроме того, она оказалась более функциональной при сравнении двух разных паттернов поведения в экспериментальном исследовании. Выяснилось, что в эмпирическом исследовании при $20 \leq n \leq 70$ в экспериментальном случае шансы отвергнуть нулевую гипотезу о соответствии распределения первой значащей цифры стандартизированного значения времени реакции закону Бенфорда выше, чем в контрольном. Причём при $60 \leq n \leq 70$ эти шансы в 4–5 раз выше. Это даёт нам основание предположить, что статистика m^* позволяет лучше дифференцировать достоверные и недостоверные данные при измерении времени реакции. Тем не менее, требуются другие исследования (например, с симуляциями из отличных от лог-нормального распределений), чтобы увереннее говорить о большей полезности статистики m^* в сравнении с d^* при анализе данных о времени реакции.

Ограничения исследования

Предлагаемое исследование имеет ряд ограничений. Во-первых, в части симуляций был сделан упор на лог-нормальное распределение с конкретными параметрами. В связи с этим полученные закономерности неправомерно распространять на другие виды распределений или даже на лог-нормальное с иными значениями μ и σ . Требуются дальнейшие исследования по изучению свойств m^* и d^* . Во-вторых, функциональность статистик m^* и d^* изучалась в рамках эксперимента всего с двумя



испытуемыми, что ограничивает возможности обобщения выводов на более широкие случаи. Более того, экспериментальные условия и методика измерений были настроены под специфику дизайна и идеи исследования, что может влиять на воспроизводимость результатов в иных контекстах. Следовательно, крайне важно продолжить исследовательскую работу, направленную на проверку полученных результатов в более разнообразных условиях и с использованием различных методологических подходов, что позволит укрепить достоверность выводов и их применимость в более широком спектре ситуаций.

Литература

1. *Зайцев А.В., Лунандин В.И., Сурнина О.Е.* Время реакции в теоретических и прикладных исследованиях // Психологический вестник Уральского государственного университета. Вып. 3. 2002. Электронный ресурс: <https://elar.urfu.ru/bitstream/10995/3964/3/pv-01-03.pdf> (дата обращения: 03.03.2024).
2. *Зенков А.В.* Отклонения от закона Бенфорда и распознавание авторских особенностей в текстах // Компьютерные исследования и моделирование. 2015. Том 7. № 1. С. 197–201. DOI:10.20537/2076-7633-2015-7-1-197-201
3. *Карпенко Л.А., Петровский А.В., Ярошевский М.Г.* Краткий психологический словарь. Ростов-на-Дону, «ФЕНИКС», 1998. 505 с.
4. *Кувакина Л.В., Долгополова А.Ф.* Закон Бенфорда: сущность и применение // Современные наукоемкие технологии. 2013. № 6. С. 74–76.
5. *Куликова А.А., Прохоров Ю.В.* Односторонние устойчивые распределения и закон Бенфорда // Теория вероятностей и ее применения. 2004. Том 49. № 1. С. 178–184. DOI:10.4213/tvp244
6. *Лонэ М.* Теорема зонтика, или искусство правильно смотреть на мир через призму математики. Бомбора, 2022. 352 с.
7. *Осин Е.Н.* Проблема социальной желательности в исследованиях личностного потенциала. 2011. Электронный ресурс: <https://www.hse.ru/data/2012/08/28/1242770673/Осин%202011.pdf?ysclid=lt46qcsjlj468944400> (дата обращения: 27.02.2024)
8. *Попина О.Ю., Савельева М.Ю., Бородина Ю.Б.* Оценка качества отчетов о движении денежных средств российских организаций с использованием закона Бенфорда // Научные исследования: от теории к практике. 2016. № 4–2. С. 187–190.
9. Психология высших когнитивных процессов / Под ред. Т. Н. Ушаковой, Н. И. Чуприковой. М.: Ин-т психологии РАН, 2004. 303 с.
10. *Старунова О.А., Руднев С.Г., Иванова А.Е., Семенова В.Г., Стародубов В.И.* Применение закона Бенфорда для оценки качества данных профилактического скрининга // Математическая биология и биоинформатика. 2022. Том 17. № 2. С. 230–249. DOI:10.17537/2022.17.230
11. *Antipkina I., Ludlow L.H.* Parental involvement as a holistic concept using Rasch/Guttman scenario scales // Journal of Psychoeducational Assessment. 2020. Vol. 38. № 7. P. 846–865. DOI:10.1177/0734282920903164
12. *Benford F.* The law of anomalous numbers // Proceedings of the American philosophical society. 1938. P. 551–572.
13. *Campanelli L.* On the Euclidean distance statistic of Benford's law // Communications in Statistics-Theory and Methods. 2024. Vol. 53. № 2. P. 451–474. DOI:10.1080/03610926.2022.2082480

14. *Chen H., Cohen P., Chen S.* How big is a big odds ratio? Interpreting the magnitudes of odds ratios in epidemiological studies // *Communications in Statistics – simulation and Computation*. 2010. Vol. 39. № 4. P. 860–864. DOI:10.1080/03610911003650383
15. *Dixon P.* The p-value fallacy and how to avoid it // *Canadian Journal of Experimental Psychology/ Revue canadienne de psychologie expérimentale*. 2003. – Vol. 57. № 3. P. 189–202. DOI:10.1037/h0087425
16. *Dutilh G. et al.* The quality of response time data inference: A blinded, collaborative assessment of the validity of cognitive models // *Psychonomic bulletin & review*. 2019. Vol. 26. P. 1051–1069. DOI:10.3758/s13423-017-1417-2
17. *Lachaud C.M., Renaud O.* A tutorial for analyzing human reaction times: How to filter data, manage missing values, and choose a statistical model // *Applied Psycholinguistics*. 2011. Vol. 32. № 2. P. 389–416. DOI:10.1017/S0142716410000457
18. *Marmolejo-Ramos F. et al.* On the efficacy of procedures to normalize Ex-Gaussian distributions // *Frontiers in psychology*. 2015. Vol. 5. DOI:10.3389/fpsyg.2014.01548
19. *Marszalek J. M., Barber C., Kohlhart J., Cooper B. H.* Sample size in psychological research over the past 30 years // *Perceptual and motor skills*. 2011. Vol. 112. № 2. P. 331–348. DOI:10.2466/03.11.PMS.112.2.331-348
20. *Microsoft Corporation.* Microsoft Excel. 2018. URL: <https://office.microsoft.com/excel> (Accessed: 02.03.2024)
21. *Morrow J.* Benford's Law, Families of Distributions and a Test Basis // *CEP Discussion Papers dp1291*, Centre for Economic Performance, LSE. 2014. URL: <https://cep.lse.ac.uk/pubs/download/dp1291.pdf> (Accessed: 12.03.2024)
22. *Peng K., Nisbett R.E., Wong N.Y.C.* Validity problems comparing values across cultures and possible solutions // *Psychological methods*. 1997. Vol. 2. № 4. P. 329–344. DOI:10.1037/1082-989X.2.4.329
23. *Primi R. et al.* Anchoring Vignettes: Can They Make Adolescent Self-Reports of Social-Emotional Skills More Reliable, Discriminant, and Criterion-Valid? // *European Journal of Psychological Assessment*. 2016. Vol. 32. № 1. P. 39–51. DOI:10.1027/1015-5759/a000336
24. *R Core Team.* R: A language and environment for statistical computing. R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria. 2021. URL: <https://www.R-project.org/> (Accessed: 02.03.2024)
25. *Stoet G.* PsyToolkit: A novel web-based method for running online questionnaires and reaction-time experiments // *Teaching of Psychology*. 2017. Vol. 44. № 1. P. 24–31. DOI:10.1177/0098628316677643
26. *Stroop J.R.* Studies of interference in serial verbal reactions // *Journal of experimental psychology*. 1935. Vol. 18. № 6. P. 643–662.
27. *The jamovi project.* jamovi (Version 2.3) [Computer Software]. 2023. URL: <https://www.jamovi.org> (Accessed: 02.03.2024)
28. *Whelan R.* Effective analysis of reaction time data // *The psychological record*. 2008. Vol. 58. P. 475–482. DOI:10.1007/BF03395630
29. *Zhang Q., Kong L., Jiang Y.* The interaction of arousal and valence in affective priming: behavioral and electrophysiological evidence // *Brain research*. 2012. Vol. 1474. P. 60–72. DOI:10.1016/j.brainres.2012.07.023



Application of the m^* and d^* Statistics for Assessing the Quality of Data in Psychological Research Using Benford's Law (Illustrated with Reaction Time Measurements)

Nikita I. Kolachev*

HSE University, Moscow, Russia

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-3214-6675>

e-mail: nkolachev@hse.ru

The objective of the proposed study was to examine the properties of statistics used to assess the conformity of the distribution of the first significant digit to Benford's Law, m^* and d^* , with relatively modest sample sizes ($10 \leq n \leq 70$). A simulation study was conducted to achieve this goal. Data were simulated following a log-normal distribution with parameters that mimic the distribution of reaction time measurements. The distribution of the first significant digit was examined in standardized values raised to the power of γ ; $5 \leq \gamma \leq 100$. It was found that the statistic m^* does not depend on the power of the number, unlike d^* . Critical values were established for samples ranging from 10 to 70 observations with an increment of $h = 10$. It turned out that for small n , the critical values of the statistic d^* are close to asymptotic, while the critical values of the statistic m^* are significantly larger. The functionality of the established critical values was tested within the framework of an experimental study: one respondent performed the Stroop cognitive test in accordance with the instructions (control case), while another violated them (experimental case). It was discovered that the statistic d^* does not allow for differentiation in the behavior of subjects. Conversely, m^* proved sensitive to changes in respondent behavior, and in the experimental case, it significantly more often allowed for the rejection of the null hypothesis regarding the conformity of the distribution of the first significant digit of the standardized value of reaction time to Benford's Law compared to the control. Thus, a preliminary conclusion is made that the statistic m^* is more functional compared to d^* in studying the quality of data on reaction time with small n .

Keywords: Benford's Law, reaction time, m^* statistics, d^* statistics.

For citation:

Kolachev N.I. Using m^* and d^* Statistics to Evaluate the Quality of Data in Psychological Research via Benford's Law (Illustrated by Reaction Time Measurements). *Modelirovanie i analiz dannykh = Modelling and Data Analysis*, 2024. Vol. 14, no. 2, pp. 23–44. DOI: <https://doi.org/10.17759/mda.2024140202> (In Russ., abstr. in Engl.).

***Nikita I. Kolachev**, PhD (Psychology), Senior Lecturer, Department of Psychology, HSE University, Moscow, Russia, ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-3214-6675>, e-mail: nkolachev@hse.ru

References

1. Zajcev A.V., Lupandin V.I., Surnina O.E. Vremya reakcii v teoreticheskikh i prikladnykh issledovaniyakh. *Psihologicheskij vestnik Ural'skogo gosudarstvennogo universiteta*. Vyp. 3, 2002. Available at: <https://elar.urfu.ru/bitstream/10995/3964/3/pv-01-03.pdf> (Accessed: 03.03.2024). (In Russ.).
2. Zenkov A.V. Otkloneniya ot zakona Benforda i raspoznavanie avtorskih osobennostej v tekstah // *Kompyuternye issledovaniya i modelirovanie=Computer Research and Modeling*, 2015. Vol. 7, no. 1, pp. 197–201. DOI:10.20537/2076-7633-2015-7-1-197-201 (In Russ.).
3. Karpenko L.A., Petrovskij A.V., YArOshevskij M.G. Kratkij psihologicheskij slovar'. Rostov-na-Donu, «FENIKS», 1998. 505 p. (In Russ.).
4. Kuvakina L.V., Dolgopolova A.F. Zakon Benforda: sushchnost' i primenenie. *Sovremennye naukoemkie tekhnologii*, 2013. no. 6, pp. 74–76. (In Russ.).
5. Kulikova A. A., Prohorov YU. V. Odnostoronnie ustojchivye raspredeleniya i zakon Benforda. *Teoriya veroyatnostej i ee primeneniya*, 2004. Vol. 49, no. 1, pp. 178–184. DOI:10.4213/tpv244 (In Russ.).
6. Lone M. Teorema zontika, ili iskusstvo pravil'no smotret' na mir cherez prizmu matematiki. *Bombora*, 2022. 352 p. (In Russ.).
7. Osin E.N. Problema social'noj zhelatel'nosti v issledovaniyakh lichnostnogo potentsiala. 2011. Available at: <https://www.hse.ru/data/2012/08/28/1242770673/Osin%202011.pdf?ysclid=lt46qcsjll468944400> (Accessed: 27.02.2024) (In Russ.).
8. Popina O.YU., Savel'eva M.YU., Borodina YU.B. Ocenka kachestva otchetov o dvizhenii den-zhnyh sredstv rossijskikh organizacij s ispol'zovaniem zakona Benforda. *Nauchnye issledovaniya: ot teorii k praktike*, 2016. no. 4–2, pp. 187–190. (In Russ.).
9. Ushakova T.N., CHuprikova N.I. (Eds.) Psihologiya vysshih kognitivnyh processov. Moscow: In-t psihologii RAN, 2004. 303 p. (In Russ.).
10. Starunova O.A., Rudnev S.G., Ivanova A.E., Semenova V.G., Starodubov V.I. Primenenie zakona Benforda dlya ocenki kachestva dannyh profilakticheskogo skrininga. *Matematicheskaya biologiya i bioinformatika=Mathematical biology and bioinformatics*, 2022. Vol 17, no. 2. pp. 230–249. DOI:10.17537/2022.17.230 (In Russ.).
11. Antipkina I., Ludlow L. H. Parental involvement as a holistic concept using Rasch/Guttman scenario scales. *Journal of Psychoeducational Assessment*, 2020. Vol. 38, no. 7, pp. 846–865. DOI:10.1177/0734282920903164
12. Benford F. The law of anomalous numbers. *Proceedings of the American philosophical society*, 1938. pp. 551–572.
13. Campanelli L. On the Euclidean distance statistic of Benford's law. *Communications in Statistics-Theory and Methods*, 2024. Vol. 53, no. 2. pp. 451–474. DOI:10.1080/03610926.2022.2082480
14. Chen H., Cohen P., Chen S. How big is a big odds ratio? Interpreting the magnitudes of odds ratios in epidemiological studies. *Communications in Statistics – simulation and Computation®*, 2010. Vol. 39, no. 4, pp. 860–864. DOI:10.1080/03610911003650383
15. Dixon P. The p-value fallacy and how to avoid it // *Canadian Journal of Experimental Psychology. Revue canadienne de psychologie expérimentale*, 2003. Vol. 57, no. 3, pp. 189–202. DOI:10.1037/h0087425
16. Dutilh G. et al. The quality of response time data inference: A blinded, collaborative assessment of the validity of cognitive models. *Psychonomic Bulletin & Review*, 2019. Vol. 26, pp. 1051–1069. DOI:10.3758/s13423-017-1417-2
17. Lachaud C. M., Renaud O. A tutorial for analyzing human reaction times: How to filter data, manage missing values, and choose a statistical model. *Applied Psycholinguistics*, 2011. Vol. 32, no. 2, pp. 389–416. DOI:10.1017/S0142716410000457



18. Marmolejo-Ramos F. et al. On the efficacy of procedures to normalize Ex-Gaussian distributions. *Frontiers in Psychology*, 2015. Vol. 5. DOI:10.3389/fpsyg.2014.01548
19. Marszalek J. M., Barber C., Kohlhart J., & Cooper B. H. Sample size in psychological research over the past 30 years. *Perceptual and Motor Skills*, 2011. Vol. 112, no. 2, pp. 331–348. DOI:10.2466/03.11.PMS.112.2.331-348
20. Microsoft Corporation. Microsoft Excel. 2018. Available at: <https://office.microsoft.com/excel> (Accessed: 02.03.2024)
21. Morrow J. Benford's Law, Families of Distributions and a Test Basis. *CEP Discussion Papers dp1291*, Centre for Economic Performance, LSE, 2014. Available at: <https://cep.lse.ac.uk/pubs/download/dp1291.pdf> (Accessed: 12.03.2024)
22. Peng K., Nisbett R. E., Wong N. Y. C. Validity problems comparing values across cultures and possible solutions. *Psychological Methods*, 1997. Vol. 2, no. 4, pp. 329–344. DOI:10.1037/1082-989X.2.4.329
23. Primi R. et al. Anchoring Vignettes: Can They Make Adolescent Self-Reports of Social-Emotional Skills More Reliable, Discriminant, and Criterion-Valid? *European Journal of Psychological Assessment*, 2016. Vol. 32, no. 1, pp. 39–51. DOI:10.1027/1015-5759/a000336
24. R Core Team. R: A language and environment for statistical computing. R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria. 2021. Available at: <https://www.R-project.org/> (Accessed: 02.03.2024)
25. Stoet G. PsyToolkit: A novel web-based method for running online questionnaires and reaction-time experiments. *Teaching of Psychology*, 2017. Vol. 44, no. 1, pp. 24–31. DOI:10.1177/0098628316677643
26. Stroop J. R. Studies of interference in serial verbal reactions. *Journal of Experimental Psychology*, 1935. Vol. 18, no. 6, pp. 643–662.
27. The jamovi project. jamovi (Version 2.3) [Computer Software]. 2023. Available at: <https://www.jamovi.org> (Accessed: 02.03.2024)
28. Whelan R. Effective analysis of reaction time data. *The Psychological Record*, 2008. Vol. 58, pp. 475–482. DOI:10.1007/BF03395630
29. Zhang Q., Kong L., Jiang Y. The interaction of arousal and valence in affective priming: behavioral and electrophysiological evidence. *Brain Research*, 2012. Vol. 1474, pp. 60–72. DOI:10.1016/j.brainres.2012.07.023

Получена 13.03.2024

Принята в печать 28.03.2024

Received 13.03.2024

Accepted 28.03.2024

УДК 519.246.8, 004.9

Обзор open-source библиотек для решения задач прогнозирования временных рядов

Свекольникова Е.А.*

Московский авиационный институт
(национальный исследовательский университет) (МАИ)
г. Москва, Российская Федерация
ORCID: <https://orcid.org/0009-0000-6161-571X>
e-mail: elena.cvekolnikova@gmail.com

Пановский В.Н.**

Московский авиационный институт
(национальный исследовательский университет) (МАИ)
г. Москва, Российская Федерация
ORCID: <https://orcid.org/0009-0007-1708-8984>
e-mail: panovskiy.v@yandex.ru

Представлен обзор разнообразных open-source Python-библиотек, предназначенных для анализа и прогнозирования временных рядов. Охватываются такие инструменты, как Prophet, Kats, Merlion, а также алгоритмы ARIMA, LSTM, позволяющие исследовать сезонность, тренды и аномалии в данных временных рядов. Подробно рассмотрены возможности каждой библиотеки, их преимущества и области применения в анализе временных данных.

Ключевые слова: Python-библиотека, временные ряды, open source, прогнозирование, тренд, Prophet, Kats, Merlion.

Для цитаты:

Свекольникова Е.А., Пановский В.Н. Обзор open-source библиотек для решения задач прогнозирования временных рядов // Моделирование и анализ данных. 2024. Том 14. № 2. С. 45–61. DOI: <https://doi.org/10.17759/mda.2024140203>

*Свекольникова Елена Андреевна, студентка, кафедра «Математическая кибернетика», Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет) (МАИ), г. Москва, Российская Федерация, ORCID: <https://orcid.org/0009-0000-6161-571X>, e-mail: elena.cvekolnikova@gmail.com

**Пановский Валентин Николаевич, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры «Математическая кибернетика», Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет) (МАИ), г. Москва, Российская Федерация, ORCID: <https://orcid.org/0009-0007-1708-8984>, e-mail: panovskiy.v@yandex.ru



1. ВВЕДЕНИЕ

В современной жизни во многих сферах трудно обойтись без временных рядов. Временные ряды применяются для хранения вполне ожидаемых последовательностей данных, например, сведений об изменениях складских запасов и погодных условий [1]. Это может быть любая информация, измеряемая через определенные промежутки времени: дни, месяцы, часы, минуты и т.д.

Временные ряды широко используются в различных областях, включая авиацию, финансы, экономику, метеорологию, медицину, техническое обслуживание и другие [1, 2]. Анализ временных рядов позволяет обнаруживать тренды, сезонные колебания, циклы и другие закономерности, что помогает в принятии решений, выявлении паттернов и прогнозировании данных. Прогнозирование – это важная часть инженерного процесса: предсказать предел выносливости деталей [17], показатели качества, надежности [18] и другие [19], количество остаточных ресурсов [20].

Изучение и анализ временных рядов имеет большое значение для прогнозирования будущих значений, выявления закономерностей, внедрения эффективных стратегий и принятия обоснованных решений на основе исторических данных. По сути, временные ряды являются необходимым инструментом во многих научных областях.

Предсказание временных рядов играет важную роль в различных областях кибернетики и информационных технологий, где анализ временных данных и прогнозирование будущих значений имеют ключевое значение. Вот некоторые области, где предсказание временных рядов чрезвычайно важно:

1. Финансовые рынки [1]:
 - Прогнозирование цен на финансовых рынках для принятия решений о торговле и инвестициях.
 - Моделирование волатильности цен для рискованного управления.
2. Промышленность и производство [1]:
 - Прогнозирование спроса на продукцию для планирования производства и управления запасами.
 - Предсказание отказов оборудования для предупреждения и проведения обслуживания.
3. Климатология и метеорология: предсказание погоды и климатических изменений для планирования действий в экстренных ситуациях и адаптации к изменениям климата [1].
4. Транспорт и логистика [2]:
 - Прогнозирование транспортного спроса для оптимизации маршрутов и планирования логистики.
 - Предсказание трафика для улучшения управления дорожным движением.
5. Здравоохранение [1]:
 - Прогнозирование распространения для разработки и реализации мер по предотвращению заболеваний и эпидемий и их контролю.
 - Предсказание медицинских показателей для диагностики заболеваний и планирования лечения.



6. Маркетинг и реклама: прогнозирование поведения потребителей для оптимизации маркетинговых стратегий и увеличения эффективности рекламы [1].

Анализ временных рядов и предсказание их значений являются важными инструментами в различных областях кибернетики и информационных технологий для прогнозирования трендов, принятия решений и оптимизации бизнес-процессов.

2. ОБЗОР OPEN-SOURCE БИБЛИОТЕК

В современном мире важно уметь пользоваться открытыми и доступными инструментами, чтобы прежде всего уметь задать базовый уровень для создания новых алгоритмов. К таким инструментам относятся:

- Google Colab (облачная среда для работы с Python, удобна для анализа данных и временных рядов) [6],
- Kaggle (платформа для соревнований по анализу данных, предоставляет доступ к множеству данных для работы с временными рядами) [7],
- библиотеки pandas, NumPy [8], Matplotlib [9], Seaborn [10], Statsmodels [11], Prophet [12], Kats [13], Merlion [14] в Python,
- Jupyter Notebook: популярная среда для интерактивных вычислений.

Эти инструменты предоставляют мощные средства для анализа и прогнозирования временных рядов, визуализации данных и создания моделей временных рядов.

3. PROPHET

Остановимся подробнее на библиотеках. Prophet – это библиотека для анализа и прогнозирования временных рядов. Её основные особенности и преимущества:

- Простота в использовании: Prophet обладает простым и интуитивно понятным программным интерфейсом приложения, что делает его доступным для широкого круга пользователей даже без глубоких знаний в анализе временных рядов.
- Устойчивость к отсутствию данных: может автоматически обрабатывать отсутствующие данные и аномалии, что упрощает процесс работы с реальными временными данными. Аномалия, или выброс, определяется как элемент, явно выделяющийся из набора данных, к которому он принадлежит, и существенно отличающийся от других элементов выборки [5].
- Учет сезонности и праздников: библиотека позволяет учитывать сложные сезонные и праздничные эффекты, что особенно важно для прогнозирования временных рядов с сезонными колебаниями.
- Гибкость в настройке: предлагает пользователю возможность настройки модели на основе его потребностей, включая изменение сезонности, добавление праздников и определение структуры тренда.
- Интерпретируемые результаты: Prophet генерирует прогнозы с интерпретируемым разложением на тренд, сезонность и праздники, что облегчает анализ и понимание прогнозов.



- Открытый исходный код: библиотека является проектом с открытым исходным кодом, что способствует активному развитию и поддержке сообществом пользователей.
- Визуализация позволяет делать интуитивно понятные графики. На графике изображено, как тренд и сезонность взаимодействуют и формируют общую динамику временного ряда (рис. 1).

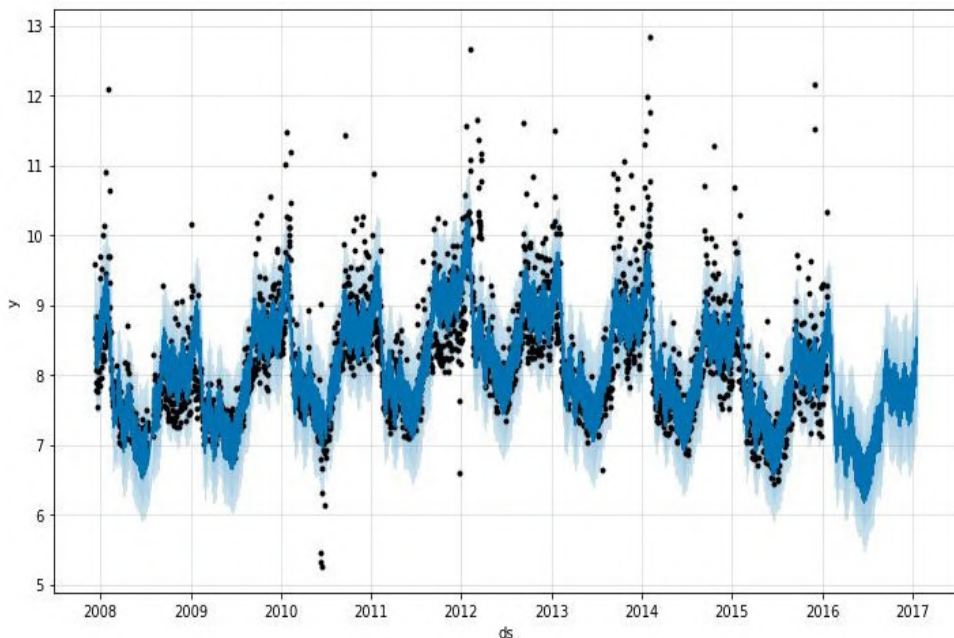


Рис. 1. Визуализация тренда и сезонности в Prophet

Благодаря простоте использования, гибкости в настройке и возможности учета сложных сезонных эффектов, Prophet стал популярным инструментом для анализа и прогнозирования временных рядов в различных областях.

В библиотеке Prophet в основном используется адаптивный алгоритм анализа временных рядов, основанный на аддитивной регрессии «trend + seasonality + holidays» (тренд + сезонность + праздники).

Основные компоненты модели в Prophet включают [12]:

1. Тренд (Trend):
 - Prophet автоматически определяет и моделирует общий тренд изменений в данных временного ряда.
 - Тренд может быть линейным или нелинейным, в зависимости от структуры данных.
2. Сезонность (Seasonality):
 - Prophet учитывает сезонные колебания в данных, например, ежедневные, еженедельные, ежемесячные или годовые паттерны.



- Модель Prophet может учесть как аддитивные, так и мультипликативные компоненты сезонности.
 - 3. Праздники (Holidays):
 - Библиотека Prophet предоставляет возможности для включения праздников и важных событий в модель.
 - Праздничные дни могут оказывать значительное влияние на временной ряд.
 - 4. Шум и аномалии: Prophet умеет обрабатывать аномалии и шум в данных, предоставляя возможности для их учета при анализе временных рядов.
- Этот набор компонентов позволяет модели Prophet адаптироваться к различным структурам и особенностям временных рядов, обеспечивая устойчивость к отсутствию данных, изменчивости в данных и корректировку прогнозов в соответствии с обнаруженными аномалиями и праздничными эффектами.

4. KATS

Другой библиотекой в Python, используемой для работы с временными рядами, является Kats. Kats (Kit to Analyze Time Series) – это мощная библиотека для анализа временных рядов. Она предоставляет широкий спектр функций и алгоритмов для работы с временными данными.

Основные возможности Kats:

1. Моделирование и прогнозирование: различные алгоритмы, такие как ARIMA, LSTM (Long Short-Term Memory), TBATS (Trigonometric seasonal components, Box-Cox transformation, ARMA errors, Trend and Seasonal components) и другие, для моделирования и прогнозирования временных рядов.
2. Детекция аномалий: Kats включает инструменты для обнаружения аномалий и нестандартных паттернов во временных рядах.
3. Преобразование данных: имеет функции для подготовки и обработки временных данных, включая работу с пропущенными значениями.
4. Анализ и визуализация:
 - Визуализация К-мер спектров помогает визуально исследовать уникальные шаблоны в данных (рис. 2).
 - Обладает возможностями для визуализации данных и результатов моделирования.
 - Возможность проводить анализ сезонности, трендов и других характеристик временных рядов.

Преимущества использования Kats:

- Многофункциональность: предлагает разнообразные инструменты для полноценного анализа временных рядов.
- Простота использования: обладает удобным интерфейсом и интуитивно понятными функциями.

Kats – это надежный инструмент для анализа временных рядов, который объединяет в себе множество функций, начиная от моделирования и прогнозирования



и заканчивая анализом и визуализацией данных. Kats может стать отличным выбором для решения задач анализа и прогнозирования.

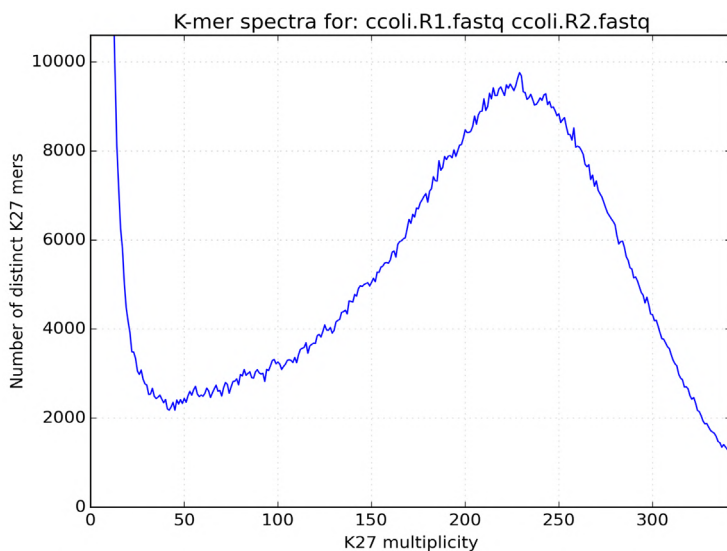


Рис. 2. Визуализация данных в Kats

В библиотеке Kats представлены разнообразные алгоритмы для работы с временными рядами:

1. Prophet-ARIMA: комбинация модели Prophet и модели ARIMA для улучшения точности прогнозирования.
2. Arima: модель ARIMA (Autoregressive Integrated Moving Average) для анализа и прогнозирования временных рядов.
3. LSTM: рекуррентная нейронная сеть, применяемая для моделирования временных данных с учетом долгосрочных зависимостей.
4. TBATS: комбинированный метод, учитывающий сезонность, тренды и другие компоненты временных рядов.

Это лишь небольшой список ключевых алгоритмов, доступных в Kats. Библиотека Kats также включает другие методы и инструменты для работы с временными рядами, такие как детекция аномалий, визуализация данных, подготовка данных и другие функции, которые помогут в анализе и прогнозировании временных данных.

5. TBATS

TBATS (Trigonometric seasonal components, Box-Cox transformation, ARMA errors, Trend and Seasonal components) – это комплексный метод анализа и прогнозирования временных рядов, который учитывает множество компонентов и особенностей временных данных для создания достоверных прогнозов.



Основные особенности:

1. Учет сезонности: обеспечивает учет различных видов сезонности в данных, таких как дневная, недельная, месячная сезонности и другие.
2. Применение преобразований Вох-Сох: используются для стабилизации дисперсии и приведения данных к более нормальному распределению.
3. Учет авторегрессионных ошибок ARMA: включает в себя компоненты авторегрессии и скользящего среднего для обработки корреляции ошибок в данных.
4. Моделирование трендов и сезонности: TBATS моделирует как долгосрочные тренды, так и сезонные колебания временных рядов для точного прогнозирования.
5. Гибкость и настройка: позволяет настраивать параметры модели в зависимости от особенностей конкретного временного ряда для достижения оптимальных результатов.

Преимущества использования метода:

- Универсальность: способность моделировать различные сезонности и компоненты временных рядов.
- Прогностическая точность: обеспечивает более точные прогнозы благодаря учету нескольких аспектов данных.
- Гибкость настройки: позволяет адаптировать модель к специфическим характеристикам конкретного временного ряда.

Метод TBATS представляет собой инструмент для анализа и прогнозирования временных рядов, объединяя в себе различные аспекты, такие, как сезонность, тренды, авторегрессии и другие компоненты. Его гибкость и способность к адаптации делают его привлекательным выбором для повышения точности и достоверности прогнозов в различных областях анализа временных данных.

6. LSTM

Другим инструментом в Kats, используемым для анализа временных рядов, является LSTM:

LSTM (Long Short-Term Memory) – это вид рекуррентных нейронных сетей, специально разработанный для обработки последовательных данных и умения запоминать долгосрочные зависимости во временных рядах.

Основные особенности:

1. Долгосрочная память: способны эффективно удерживать информацию на протяжении длительных периодов времени, что делает их особенно полезными для анализа временных рядов с долгосрочными зависимостями.
2. Избегание проблем затухания (градиенты становятся слишком малыми по мере распространения через глубокие слои нейронной сети, поэтому веса слоев не обновляются, и сеть перестает обучаться) и взрыва градиентов (градиенты становятся очень большими, из-за чего обновления весов становятся больше чем требуется, что может сбить оптимизацию сети).



3. Гибкость моделирования: могут быть настроены для моделирования различных видов временных рядов, а также включать дополнительные компоненты, такие как сезонность или тренды.
4. Адаптивная сеть: способность LSTM к адаптации к изменяющимся условиям временных данных позволяет им эффективно прогнозировать и анализировать временные ряды даже в условиях изменчивости.

Преимущества использования:

- Умение запоминать зависимости в данных: могут удерживать информацию на длительные временные интервалы, что позволяет им учитывать сложные временные зависимости.
- Гибкость моделирования: возможность настройки под различные характеристики временного ряда делает их удобным инструментом анализа данных.
- Применение в различных областях: LSTM успешно применяются в прогнозировании рядов, обработке текстов, обработке изображений и других областях машинного обучения.

Метод представляет собой эффективный и гибкий подход к анализу временных рядов, способный учитывать сложные структуры и зависимости в данных. Их способность к долгосрочному запоминанию и адаптации делает LSTM одним из наиболее мощных инструментов в области анализа временных данных.

7. ARIMA

В Kats есть модель ARIMA, которую активно применяют для работы с временными рядами:

ARIMA (Autoregressive Integrated Moving Average) – это модель временных рядов, которая объединяет компоненты авторегрессии (AR - Autoregressive) и скользящего среднего (MA - Moving Average) с интегрированием (I-Integrated), что позволяет эффективно моделировать и прогнозировать временные данные.

Основные характеристики:

1. Авторегрессия: отвечает за моделирование зависимости текущего значения временного ряда от предыдущих значений в этом же ряду.
2. Интегрирование: позволяет обработать нестационарность данных путем их дифференцирования до достижения стационарности. Нестационарность данных означает непостоянность статистических характеристик ряда со временем.
3. Скользящее среднее (будущие значения предсказываются по известным предыдущим значениям [1]): учитывает зависимость текущего значения ряда от ранее случившихся ошибок модели.

Применение:

- ARIMA в Kats позволяет анализировать временные ряды, моделировать тренды и сезонные колебания, а также совершать прогнозирование на основе исторических данных.
- Он эффективен для прогнозирования временных рядов с линейными зависимостями и относительно стабильными трендами.



Преимущества использования:

- Простота применения: ARIMA позволяет легко моделировать временные ряды без большого числа настраиваемых параметров.
- Устойчивость к стационарности: применение интегрирования в ARIMA позволяет учесть случаи, когда временные данные нестационарны.

ARIMA широко используется для анализа и моделирования временных рядов, особенно в случаях, когда данные обладают линейной структурой и стационарностью. В контексте Kats, ARIMA открывает возможности для прогнозирования временных рядов, что делает его ценным инструментом для исследования временных данных.

8. MERLION

Merlion – это библиотека для анализа временных рядов, разработанная Яндексом. Она предлагает разнообразные инструменты и методы для работы с временными данными.

Работа с временными рядами в Merlion:

1. Загрузка данных: предоставляет удобные способы загрузки и подготовки временных данных из различных источников, включая CSV-файлы, базы данных и другие форматы.
2. Предобработка и очистка данных: позволяет проводить предварительную обработку данных, включая устранение пропущенных значений, фильтрацию выбросов и приведение данных к нужному формату.
3. Моделирование и прогнозирование: предлагает широкий спектр моделей для анализа и прогнозирования временных рядов, включая SARIMA, ARIMA, Prophet, LSTM и другие.
4. Оценка качества модели: позволяет оценить качество построенных моделей с использованием различных метрик, таких как среднеквадратичная ошибка (MSE), коэффициент детерминации и других [1].
5. Разработка собственных моделей: помимо встроенных алгоритмов можно разрабатывать собственные модели для анализа временных рядов, что расширяет возможности анализа данных.
6. Визуализация: Merlion обладает возможностями для визуализации временных рядов, прогнозов моделей, а также показателей качества предсказаний, что способствует более наглядному анализу данных. Позволяет обнаружить аномалии с помощью модели DefaultDetector (рис. 3).

Преимущества использования:

- Широкий выбор моделей: разнообразные методы и алгоритмы для работы с временными рядами.
- Удобство в использовании: интуитивный интерфейс, что упрощает анализ и моделирование временных данных.
- Гибкость и масштабируемость: способен эффективно обрабатывать как небольшие, так и крупномасштабные временные ряды.

Merlion обладает разнообразными функциональностями для работы с данными, позволяет исследовать, моделировать и прогнозировать временные данные, делая процесс анализа более эффективным и удобным.

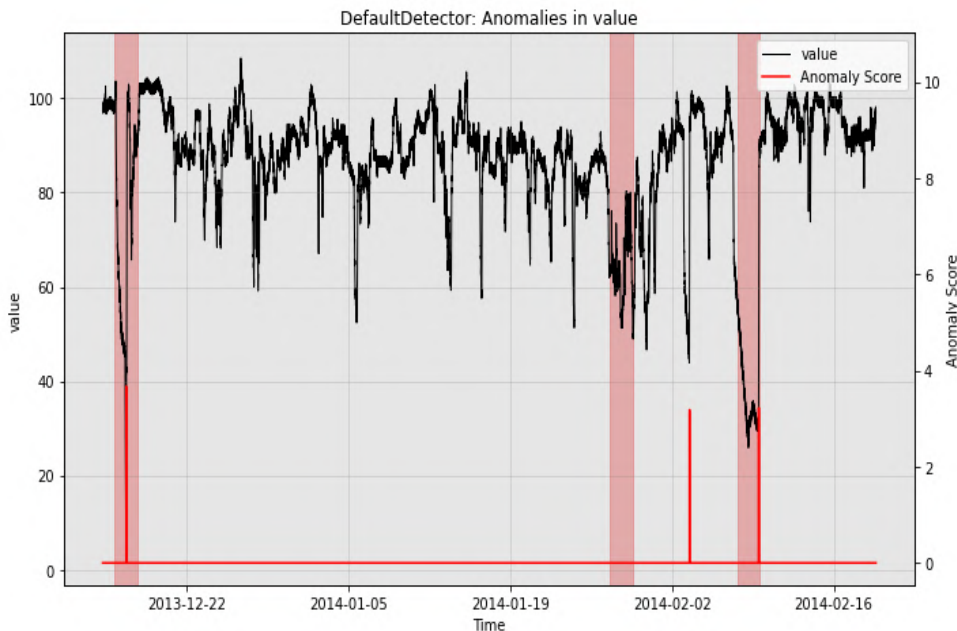


Рис. 3. Визуализация аномалий в Merlion

В библиотеке Merlion для анализа временных рядов доступны различные алгоритмы и модели:

1. ARIMA (Autoregressive Integrated Moving Average): модель для моделирования и прогнозирования временных рядов, учитывающая авторегрессию, интегрирование и скользящее среднее.
2. SARIMA (Seasonal Autoregressive Integrated Moving-Average): расширение модели ARIMA с учетом сезонности для анализа и прогнозирования временных данных.
3. Prophet: модель, разработанная для прогнозирования временных рядов с учетом сезонности и праздников.
4. LSTM (Long Short-Term Memory): рекуррентная нейронная сеть LSTM для работы с динамическими временными данными и изучения долгосрочных зависимостей.
5. Классическая экспоненциальная сглаживающая модель (Exponential Smoothing): модель для прогнозирования временных рядов, учитывающая экспоненциально убывающие веса для прошлых значений.
6. DeepAR: модель DeepAR для прогнозирования с учетом автокорреляции и нелинейных зависимостей в данных [15].



7. Модели обнаружения аномалий: Merlion также предлагает алгоритмы для обнаружения аномалий во временных рядах, что помогает выявлять необычные и выбивающиеся паттерны.

Это лишь небольшой перечень некоторых доступных алгоритмов в библиотеке Merlion: она предлагает широкий спектр методов и моделей для анализа, моделирования и прогнозирования временных рядов, делая ее универсальным инструментом для работы с данными временных рядов.

9. SARIMA

В библиотеке Merlion есть модель SARIMA (Seasonal Autoregressive Integrated Moving-Average), которая является расширением модели ARIMA для учета сезонности во временных рядах. Она включает в себя компоненты авторегрессии, интегрирования, скользящего среднего и учитывает сезонный компонент для более точного прогнозирования временных данных.

Основные характеристики:

1. Сезонность: позволяет учитывать сезонные колебания во временных рядах, что делает ее эффективной для прогнозирования данных с периодическими изменениями.
2. Стационарность: учитывает нестационарность временных данных через интегрирование, что позволяет обеспечить адекватное моделирование и прогнозирование.
3. Авторегрессия и скользящее среднее: присутствие компонентов авторегрессии и скользящего среднего позволяет учесть зависимость текущих значений ряда от предыдущих значений и ошибок модели.

Применение модели:

- Для анализа и прогнозирования временных рядов с учетом сезонных изменений и долгосрочных зависимостей.
- Может быть эффективно применена для данных, в которых присутствует ярко выраженная сезонность.

Преимущества использования:

- Учет сезонности: позволяет учесть цикличность и регулярные изменения во временных рядах.
- Прогнозирование точных значений: модель особенно полезна для точного прогнозирования в данных с сезонной динамикой.
- Универсальность: SARIMA является гибкой моделью, которая может быть настроена по различным сценариям анализа временных данных.

Способность учитывать сезонные компоненты и долгосрочные зависимости делает SARIMA важным инструментом для работы с данными, где присутствует периодичность изменений.



10. EXPONENTIAL SMOOTHING

Классическая экспоненциальная сглаживающая модель (Exponential Smoothing) – это метод прогнозирования временных рядов, основанный на усреднении предыдущих значений с использованием экспоненциального взвешивания, чтобы учесть влияние более недавних данных на прогноз.

Основные характеристики:

1. Взвешивание данных: экспоненциальное сглаживание позволяет придать больший вес более свежим данным, что делает модель более чувствительной к последним наблюдениям.
2. Простота и эффективность: метод является простым в реализации и обладает хорошей способностью адаптироваться к изменчивости временных данных.
3. Учет трендов и сезонности: в классической модели экспоненциального сглаживания можно встретить вариации, учитывающие тренды и сезонность в данных.

Применение метода:

- Прогнозирование временных рядов: используется для прогнозирования будущих значений временных рядов на основе предыдущих данных.
- Анализ трендов и структуры данных: этот метод помогает выявить тренды и основные паттерны во временных данных.

Преимущества использования:

- Простота и понятность: экспоненциальное сглаживание просто в использовании и понимании.
- Хорошая адаптивность: работает с быстро меняющимися данными и обеспечивает гибкую настройку.
- Эффективность в обработке больших объемов данных: справляется с большим объемом временных данных и быстро вычисляет прогнозы.

Классическая экспоненциальная сглаживающая модель в Merlion представляет собой простой, но многофункциональный метод для анализа и прогнозирования временных рядов. Ее преимущества включают простоту использования, адаптивность к изменчивым данным и хорошую способность к прогнозированию основных паттернов в данных.

11. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Прогнозирование временных рядов применяется в авиационной и ракетно-космической технике для планирования предупредительного технического обслуживания или замены деталей до возможного отказа, позволяет прогнозировать процесс износа материалов и компонентов, расход топлива, траектории ракет и спутников, пассажиропоток, загруженность аэропортов.

Благодаря прогнозированию временных рядов появляется возможность улучшить управление рисками, повысить безопасность полетов, оптимизировать процессы и ресурсы, а также повысить эффективность систем в целом.



В мире анализа временных рядов Python представляет множество мощных библиотек, которые обеспечивают широкие возможности для анализа, моделирования и прогнозирования данных. Такие библиотеки, как Prophet, Kats, Merlion и другие предоставляют спектр методов и инструментов, позволяющих исследовать сезонность, тренды, аномалии и другие характеристики временных рядов.

Python-библиотеки обладают гибкостью, простотой использования и возможностью настройки под различные типы данных, что предоставляет широкий выбор для исследователей, аналитиков и специалистов по анализу данных. Сочетание разнообразных алгоритмов, визуализации и анализа данных делает эти библиотеки необходимыми инструментами для успешного решения задач, связанных с временными рядами. Внедрение этих инструментов в рабочий процесс поможет сделать анализ временных данных более точным, информативным и эффективным. В табл. 1 представлены результаты сравнения библиотек и методов, рассмотренных в статье.

Таблица 1

Сравнение библиотек и их методов

Библиотека/метод	Основные преимущества
Prophet	Автоматически обрабатывает многие характерные особенности временных рядов, такие как изменчивость тренда, сезонность и праздники.
Kats	Многофункциональность: предлагает разнообразные инструменты для полноценного анализа временных рядов (TBATS, LSTM, ARIMA).
TBATS	Способность моделировать временные ряды с несколькими сложными компонентами, такими как сезонность, тренды, изменяющаяся дисперсия и авторегрессионная составляющая ошибок.
LSTM	Возможность эффективно удерживать информацию на протяжении длительных периодов времени, что делает их особенно полезными для анализа временных рядов с долгосрочными зависимостями.
ARIMA	Моделирование сложных временных рядов, учитывая как авторегрессионные компоненты (зависимость от предыдущих значений временного ряда), так и скользящие средние компоненты (управление случайной изменчивостью данных).
Merlion	Разработка собственных моделей для анализа и прогнозирования временных рядов, что расширяет возможности анализа данных.
SARIMA	Позволяет моделировать сложные сезонные зависимости в данных, что делает его идеальным инструментом для прогнозирования временных рядов с явно выраженной сезонностью.
Exponential Smoothing	Подходит для прогнозирования временных рядов с быстро меняющимися трендами и колебаниями: за счет весов, присваиваемых различным точкам данных, в зависимости от их удаленности от текущего момента времени.



Литература

1. *Эйлин Нильсен*. Практический анализ временных рядов: прогнозирование со статистикой и машинное обучение.: Пер. с англ. – СПб.: ООО “Диалектика”, 2021. – 544 с.
2. *Бокс Дж., Дженкинс Г.М.* Анализ временных рядов, прогноз и управление. М.: Мир, 1974. 406 с.
3. *Дж. Вандер Плас*. Python для сложных задач: наука о данных и машинное обучение. – СПб.: Питер, 2018. – 576 с.
4. *Чернобровов Алексей*. ТОП-7 Python-библиотек для анализа временных рядов. URL: <https://chernobrovov.ru/articles/top-7-python-bibliotek-dlya-vremennyh-ryadov.html>. (Дата обращения: 02.03.2024)
5. *С.Г. Антипов, М.В. Фомина*. Проблема обнаружения аномалий в наборах временных рядов. Программные продукты и системы, № 2 (98) 2012 г. – 168с. – С. 78–82.
6. Google Colab: [Электронный ресурс]. URL: <https://colab.research.google.com/>. (Дата обращения: 04.03.2024)
7. Kaggle: [Электронный ресурс]. URL: <https://www.kaggle.com/>. (Дата обращения: 04.03.2024)
8. NumPy: [Электронный ресурс]. URL: <https://numpy.org/doc/>. (Дата обращения: 04.03.2024)
9. Matplotlib: [Электронный ресурс]. URL: <https://matplotlib.org/stable/index.html>. (Дата обращения: 04.03.2024)
10. Seaborn: [Электронный ресурс]. URL: <https://seaborn.pydata.org/>. (Дата обращения: 04.03.2024)
11. Statsmodels: [Электронный ресурс]. URL: <https://www.statsmodels.org/stable/index.html>. (Дата обращения: 04.03.2024)
12. Prophet: [Электронный ресурс]. URL: <https://prophet.readthedocs.io/en/latest/>. (Дата обращения: 04.03.2024)
13. Kats: [Электронный ресурс]. URL: <https://kat.readthedocs.io/en/latest/>. (Дата обращения: 04.03.2024)
14. Merlion: [Электронный ресурс]. URL: <https://opensource.salesforce.com/Merlion/latest/index.html>. (Дата обращения: 04.03.2024)
15. DeepAR Forecasting Algorithm: [Электронный ресурс]. URL: <https://docs.aws.amazon.com/sagemaker/latest/dg/deepar.html>. (Дата обращения: 04.03.2024)
16. Python: [Электронный ресурс]. URL: <https://www.python.org/> (Дата обращения: 04.03.2024)
17. *Письмаров А.В.* К вопросу прогнозирования предела выносливости резьбовых деталей с поверхностным упрочнением // Труды МАИ. 2023. № 129. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=173003>
18. *Пуганов М.Н., Куликов А.В., Новомейский Д.Н.* Прогнозные математические модели тонкоплёночных элементов микросборок // Труды МАИ. 2023. № 131. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=175920>
19. *Блинов А.В., Разумов Д.А.* Процедура формализации стратегий как элемент методики учета факторов неопределенности при прогнозировании показателей



- реализации программ создания космической техники // Труды МАИ. 2022. № 122. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=164270>
20. *Беляев Б.В., Лебедев А.С.* Методика прогнозирования остаточного ресурса при разгерметизации летательных аппаратов // Труды МАИ. 2022. № 125. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=168167>



Review of Open-Source Libraries for Solving Time Series Forecasting Problems

Elena A. Svekolkonikova*

Moscow Aviation Institute (National Research University) (MAI), Moscow, Russia

ORCID: <https://orcid.org/0009-0000-6161-571X>

e-mail: elena.cvekolnikova@gmail.com

Valentin N. Panovskiy**

Moscow Aviation Institute (National Research University) (MAI), Moscow, Russia

ORCID: <https://orcid.org/0009-0007-1708-8984>

e-mail: panovskiy.v@yandex.ru

An overview of various open-source Python libraries for time series analysis and forecasting is presented. It covers such tools as Prophet, Kats, Merlion, as well as ARIMA, LSTM algorithms, which allow to study seasonality, trends and anomalies in time series data. The capabilities of each library, their advantages and applications in time series data analysis are discussed in detail.

Keywords: Python library, time series, open source, forecasting, trend, Prophet, Kats, Merlion.

For citation:

Svekolkonikova E.A., Panovskiy V.N. Review of Open-Source Libraries for Solving Time Series Forecasting Problems. *Modelirovanie i analiz dannykh = Modelling and Data Analysis*, 2024. Vol. 14, no. 2, pp. 45–61. DOI: <https://doi.org/10.17759/mda.2024140203> (In Russ., abstr. in Engl.).

References

1. Eileen Nielsen. Practical time series analysis: forecasting with statistics and machine learning.: Per. from English – St. Petersburg.: Dialectics, 2021. – 544 p.
2. Box J., Jenkins G.M. Time series analysis, forecast and management. M.: Mir, 1974. 406 p.
3. J. Vander Plas. Python for Complex Problems: Data Science and Machine Learning. – St. Petersburg: Peter, 2018. – 576 p.
4. Alexey Chernobrovov. Top 7 Python libraries for time series analysis. URL: <https://chernobrovov.ru/articles/top-7-python-bibliotek-dlya-vremennyh-ryadov.htm> l. (Date of reference: 02.03.2024)

****Elena A. Svekolkonikova***, Student, Department of Mathematical cybernetics, Moscow Aviation Institute (National Research University) (MAI), Moscow, Russia, ORCID: <https://orcid.org/0009-0000-6161-571X>, e-mail: elena.cvekolnikova@gmail.com

*****Valentin N. Panovskiy***, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Department of Mathematical cybernetics, Moscow Aviation Institute (National Research University) (MAI), Moscow, Russia, ORCID: <https://orcid.org/0009-0007-1708-8984>, e-mail: panovskiy.v@yandex.ru



5. S.G. Antipov, M.V. Fomina. The problem of anomaly detection in sets of time series. Program products and systems, No. 2 (98) 2012. – 168 p. – Pp. 78–82.
6. Google Colab: [Electronic resource]. URL: <https://colab.research.google.com/>. (Date of reference: 04.03.2024)
7. Kaggle: [Electronic resource]. URL: <https://www.kaggle.com/>. (Date of reference: 04.03.2024)
8. NumPy: [Electronic resource]. URL: <https://numpy.org/doc/>. (Date of reference: 04.03.2024)
9. Matplotlib: [Electronic resource]. URL: <https://matplotlib.org/stable/index.html>. (Date of reference: 04.03.2024)
10. Seaborn: [Electronic resource]. URL: <https://seaborn.pydata.org/>. (Date of reference: 04.03.2024)
11. Statsmodels: [Electronic resource]. URL: <https://www.statsmodels.org/stable/index.html>. (Date of reference: 04.03.2024)
12. Prophet: [Electronic resource]. URL: <https://prophet.readthedocs.io/en/latest/>. (Date of access: 04.03.2024)
13. Kats: [Electronic resource]. URL: <https://kat.readthedocs.io/en/latest/>. (Date of reference: 04.03.2024)
14. Merlion: [Electronic resource]. URL: <https://opensource.salesforce.com/Merlion/latest/index.html>. (Date of reference: 04.03.2024)
15. DeepAR Forecasting Algorithm: [Electronic resource]. URL: <https://docs.aws.amazon.com/sagemaker/latest/dg/deepar.html>. (Date of access: 04.03.2024)
16. Python: [Electronic resource]. URL: <https://www.python.org/> (Date of access: 04.03.2024)
17. Pismarov A.V. To the question of prediction of the endurance limit of threaded parts with surface hardening // Trudy MAI. 2023. no. 129. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=173003>
18. Piganov M.N., Kulikov A.V., Novomeisky D.N. Predictional mathematical models of thin-film elements of microassembly // Trudy MAI. 2023. no. 131. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=175920>
19. Blinov A.V., Razumov D.A. The procedure of formalization of strategies as an element of the methodology for taking into account uncertainty factors in forecasting the indicators of the implementation of space technology development programs // Trudy MAI. 2022. no. 122. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=164270>
20. Belyaev B.V., Lebedev A.S. Methodology for predicting the residual resource during depressurization of aircraft // Trudy MAI. 2022. no. 125. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=168167>

Получена 08.04.2024
Принята в печать 23.04.2024

Received 08.04.2024
Accepted 23.04.2024

УДК 519.816

Экспертное задание нечётких строгих порядков

Смерчинская С.О.*

Московский авиационный институт
(национальный исследовательский университет) (МАИ)
г. Москва, Российская Федерация
ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-0614-1835>
e-mail: svetlana_os@mail.ru

Яманаева Р.Р.**

Московский авиационный институт
(национальный исследовательский университет) (МАИ)
г. Москва, Российская Федерация
ORCID: <https://orcid.org/0009-0000-2874-1466>
e-mail: m.e.dragon@mail.ru

В работе представлен метод опроса экспертов для случая агрегирования нечётких предпочтений, задаваемых через попарное сравнение альтернатив. Показана возможность уменьшения числа вопросов, задаваемых экспертам при опросе. На примере разобрано взятие нечёткого транзитивного замыкания для бинарного отношения, создаваемого экспертом в ходе опроса, и за счёт этого сокращения числа сравнений.

Ключевые слова: групповой выбор, эксперт, бинарное отношение, опрос, строгий порядок, транзитивное отношение.

Для цитаты:

Смерчинская С.О., Яманаева Р.Р. Экспертное задание нечётких строгих порядков // Моделирование и анализ данных. 2024. Том 14. № 2. С. 62–79. DOI: <https://doi.org/10.17759/mda.2024140204>

***Смерчинская Светлана Олеговна**, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математической кибернетики института «Компьютерные науки и прикладная математика» Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет) (МАИ), г. Москва, ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-0614-1835>, e-mail: svetlana_os@mail.ru

****Яманаева Римма Ренатовна**, студент магистратуры института «Компьютерные науки и прикладная математика», Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет) (МАИ), г. Москва, Российская Федерация, ORCID: <https://orcid.org/0009-0000-2874-1466>, e-mail: m.e.dragon@mail.ru



1. ВВЕДЕНИЕ

Пусть в рамках задачи группового выбора из множества альтернатив надо выбрать некоторое подмножество наилучших или расставить альтернативы по предпочтительности, с учётом советов всех заинтересованных лиц. В качестве заинтересованных лиц выступают эксперты, которые должны выразить свои мнения относительно той или иной альтернативы. При выявлении предпочтений экспертов на множестве альтернатив необходимо упрощать процедуру так, чтобы она отвечала неким интуитивным критериям достоверности, скорости и другим. Для этого надо, чтобы эксперту было как можно проще делать выбор из альтернатив.

Распространённым алгоритмом выявления предпочтений является парнодоминантный механизм выбора [1, 3], при котором экспертам предлагается попарно сравнивать альтернативы и выбирать более предпочтительную из пары. Выбор осложняется тем, что эксперт иногда не может точно сказать, какая из альтернатив лучше. Но при этом у него есть некоторая степень уверенности в том, что выбираемая альтернатива имеет приоритет перед другой. Чтобы выразить эту степень уверенности можно использовать аппарат нечётких множеств [6, 7, 8], в частности, нечётких бинарных отношений. Такой подход может помочь получить от экспертов информацию более точно (по сравнению с чёткими бинарными отношениями) отражающую мнение эксперта и его внутреннее понимание о том, какая альтернатива лучше.

В силу того, что эксперты могут быть не знакомы с самим механизмом построения отношения (а также и агрегированного отношения [4, 5]) и могут говорить, подчас, противоречивые вещи, предлагается упростить эксперту задачу выражения мнения. Для упрощения можно сократить количество вопросов, задаваемых эксперту, так, чтобы исключить противоречия. Например, эксперт может сказать, что альтернатива А лучше Б, а Б лучше В. Если после этих двух утверждений эксперт укажет, что В лучше А, построенное на основании такого ответа отношение не будет удовлетворять условию непротиворечивости. Для того, чтобы соблюсти условие непротиворечивости предлагается после первых двух вопросов автоматически указать, что А лучше В. За счёт этого исключаются явные противоречия.

Вывод о том, что в данном примере А лучше В, делается на основании транзитивного замыкания конструируемого отношения. В статье показано, что транзитивное замыкание не обязательно вычислять после каждого вопроса, заданного эксперту (процедура взятия транзитивного замыкания требует вычислительных ресурсов), и количество выполнений этой операции можно сократить.

Благодаря предположениям выше можно добиться сокращения числа вопросов, задаваемых эксперту в ходе выявления предпочтения, а также добиться более быстрого получения непротиворечивой информации, более тонко отражающей нюансы предпочтений эксперта, с учётом силы уверенности в предоставляемом ответе при каждом сравнении альтернатив.

Проблемы, с которыми можно столкнуться, проводя опрос экспертов, связаны с психологическим аспектом человеческого мышления [1]. Во-первых, при опросе

может влиять выбор пар, предложенных эксперту для сравнения – последовательность предъявления пар может сыграть роль в итоговом предпочтении. В этом отличие от полного опроса эксперта, когда ему предлагается сравнить все возможные пары альтернатив (но в этом случае в бинарном отношении могут выявиться противоречия). Во-вторых, эксперты могут не быть в состоянии численно отразить свое мнение при сравнении альтернатив, человеку может быть сложно выразить неформализованную, интуитивно понимаемую информацию в конкретных числах. В-третьих, каждый эксперт может иметь свою внутреннюю шкалу для задания предпочтительности, и может случиться так, что для одного из экспертов число 0.7 – это очень сильная степень уверенности, а для другого это же число выражает неярко выраженную уверенность. В этом заключаются отличия от задачи для чётких бинарных отношений.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Задано множество альтернатив $A = \{a_1, \dots, a_n\}$, множество экспертов $E = \{E_1, \dots, E_m\}$. Индивидуальное предпочтение эксперта – нечёткое отношение строгого порядка ρ , заданное на множестве A матрицей R предпочтений эксперта. Матрица $\tilde{R}^t = \tilde{R}_{ij}^t \in M_n([0; 1])$, $t = 1, \dots, m$ – квадратная матрица порядка n с элементами из $[0; 1]$. Элемент \tilde{R}_{ij}^t указывает с какой степенью достоверности для эксперта альтернатива a_i предпочтительнее, чем a_j . В итоге для отношений экспертов требуется построить нечёткое агрегированное отношение, являющееся нечётким строгим порядком [4, 5, 9].

Пусть экспертная информация получается в форме попарных сравнений альтернатив. На информацию и на процедуру её выявления накладываются ограничения.

1. Информация, полученная от каждого эксперта по алгоритму опроса, должна быть:
 - а) однородной (т.е. единообразной, представленной в одной и той же форме для каждого эксперта);
 - б) непротиворечивой;
 - в) полной и достоверной (то есть, выражающей именно собственное мнение эксперта, а не сконструированный продукт выполнения алгоритма опроса).
2. Должна быть возможность пересмотреть решение для одного или нескольких экспертов в случае получения неудовлетворительных результатов.
3. Информация должна давать возможность построить агрегированное предпочтение (в виде упорядочения альтернатив или выявления наиболее предпочтительных).

Алгоритм опроса подразумевает возможность использования процедуры согласования получаемой от экспертов информации.

При сравнении альтернатив предполагаем, что есть несколько вариантов их взаимного сопоставления:

- альтернатива a_i предпочтительнее альтернативы a_j ;
- альтернатива a_j предпочтительнее альтернативы a_i ;
- альтернативы a_i и a_j несравнимы.

В таком случае можно задать асимметричное отношение (как в чётком, так и в нечётком случае). Для матрицы $\tilde{R}^t = \tilde{R}_{ij}^t$ предпочтений эксперта пункты будут выглядеть следующим образом:

$$\tilde{R}_{ij}^t > 0, \tilde{R}_{ji}^t = 0;$$

$$\tilde{R}_{ij}^t = 0, \tilde{R}_{ji}^t > 0;$$

$$\tilde{R}_{ij}^t = 0, \tilde{R}_{ji}^t = 0.$$

В ходе проведения опроса может возникнуть ситуация, в которой полученная от эксперта информация окажется противоречивой, т.е. в формируемом отношении предпочтения будет существовать противоречивый контур. Для того чтобы этого не случилось, необходимо к полученным в результате опроса отношениям предъявить такое естественное требование как транзитивность. Обеспечение транзитивности формируемого в ходе опроса отношения позволит, также, сократить количество задаваемых эксперту вопросов (количество сравниваемых пар альтернатив).

Например, получив информацию о том, что альтернатива a_1 предпочтительнее альтернативы a_2 , а альтернатива a_2 предпочтительнее альтернативы a_3 , по транзитивности получим: a_1 предпочтительнее a_3 . Если же предложить эксперту сравнить альтернативы a_1 и a_3 , эксперт может ответить, что a_3 менее предпочтительна, чем a_1 . За счёт этого получим противоречивый контур в отношении предпочтения данного эксперта.

3. СОКРАЩЕНИЕ ЧИСЛА ВОПРОСОВ ЭКСПЕРТУ

Обеспечение транзитивности экспертного предпочтения сводится к необходимости в ходе проведения опроса к формируемой матрице смежности (она же – матрица нечёткого предпочтения) \tilde{R}^t ($t = 1, \dots, m$), неоднократно применять процедуру взятия транзитивного замыкания и после этого сокращать количество вопросов, задаваемых эксперту, предполагая, что за счёт транзитивности выявляется необходимая информация.

Если отношение асимметричное и не содержит контуров [2], то при добавлении к нему свойства транзитивности (при взятии транзитивного замыкания) получим отношение строгого порядка (значок $>$ или $<$), также не содержащее контуров. В случае строгого порядка равноценность альтернатив не рассматривается, равноценные альтернативы могут быть только в нестрогом порядке (значок \geq или \leq). Надо заметить, что в случае нестроого порядка, при взятии транзитивного замыкания, отсутствие контуров не гарантируется.

В результате процедуры взятия транзитивного замыкания отношения для n альтернатив число вопросов с $\frac{n^2 - n}{2}$ может быть уменьшено до $n - 1$ (при $n = 100$ число вопросов с 4950 может сократиться вплоть до $n - 1 = 99$). Это может произойти, если, например, при сравнении альтернативы a_{i+1} с a_i ($n - 1$ вопрос, $i = 1, \dots, n - 1$) получим, что каждая альтернатива a_{i+1} не менее предпочтительна, чем a_i . В этом случае по транзитивности, очевидно, получим, что все n альтернатив попарно сравнимы.



Для доказательства следующих утверждений введём определения, относящиеся к нечётким бинарным отношениям.

Пусть $\mu_{\rho^t} = \tilde{R}^t$ – матрица принадлежности нечёткого бинарного отношения (аналогичная функции принадлежности) эксперта с номером t . $\mu_{\rho^t}(a_i, a_j) = \tilde{r}_{ij}^t$ – значение элемента матрицы эксперта. $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ – заданное множество альтернатив.

Используемые в статье операции [8] над нечёткими множествами (в частности, бинарными отношениями) связаны со следующими функциями принадлежности $\mu_\rho(x)$, $x \in \rho \subseteq A \times A$.

Функция принадлежности \bar{X} :

$$\mu_{\bar{X}}(x) = 1 - \mu_X(x).$$

Функция принадлежности $X \cap Y$:

$$\mu_{X \cap Y}(x) = \min(\mu_X(x), \mu_Y(x)).$$

Функция принадлежности $X \cup Y$:

$$\mu_{X \cup Y}(x) = \max(\mu_X(x), \mu_Y(x)).$$

Функция принадлежности $X - Y$:

$$\mu_{X - Y}(x) = \max(\mu_X(x) - \mu_Y(x), 0).$$

Для матриц \tilde{R}^X и \tilde{R}^Y бинарных отношений X и Y операции будут являться элементарными – операция выполняется для каждой пары элементов \tilde{R}_{ij}^X и \tilde{R}_{ij}^Y . Из результатов операций над элементами составляется результирующая матрица.

Композиция $\rho^2 = \rho \circ \rho$ нечетких бинарных отношений:

$$\mu_{\rho^2}(x, z) = \max_y(\min(\mu_\rho(x, y), \mu_\rho(y, z))).$$

Операция композиция производится над строками и столбцами подобно операции в матричном произведении по правилу «строка на столбец».

Транзитивное нечёткое бинарное отношение ρ – отношение, удовлетворяющее условию:

$$\forall (x, y), (y, z), (x, z) \in A \times A: \mu_\rho(x, z) \geq \max_y(\min(\mu_\rho(x, y), \mu_\rho(y, z)))$$

или

$$\rho \circ \rho \subseteq \rho \quad (\rho^2 \subseteq \rho).$$

Транзитивность является одним из основных свойств рационального отношения предпочтения ρ . Она означает, что если x не хуже y с достоверностью $\mu_\rho(x, y)$



а y не хуже z с достоверностью $\mu_\rho(y, z)$, то достоверность того, что x не хуже z не может быть меньше $\min(\mu_\rho(x, y), \mu_\rho(y, z))$.

Транзитивное замыкание $\hat{\rho}$ нечёткого бинарного отношения ρ :

$$|A| = n, (x, y) \in \rho \subseteq A \times A, \hat{\rho} = \rho \cup \rho^2 \cup \rho^3 \cup \dots \cup \rho^n.$$

Операция нечёткого транзитивного замыкания предполагает (для графа отношения) подсчёт максимальной пропускной способности среди всех возможных путей между альтернативами a_i и a_j – в матрице нечёткого транзитивно замкнутого отношения будет стоять это число.

Можно показать, что транзитивное замыкание нечёткого бинарного отношения без контуров может быть получено из объединения степеней с 1 по $n-1$.

$$\hat{\rho} = \rho \cup \rho^2 \cup \rho^3 \cup \dots \cup \rho^{n-1}.$$

Это связано с тем фактом, что ненулевой элемент на пересечении строки i и столбца j в матрице графа говорит о наличии пути из a_i в a_j , и если эта матрица степени n , то она говорит о наличии пути, состоящем из n шагов. Но в случае n альтернатив n шагов говорят о наличии контура, а ранее было дано предположение, что контуров в итоговом отношении не будет. Поэтому можно утверждать, что ρ^n – матрица, состоящая из нулей.

Также транзитивное замыкание можно находить по формуле Уоршалла, имеющей сложность $O(n^3)$.

Обязательно ли применять операцию взятия транзитивного замыкания к матрице смежности формируемого отношения после каждого сравнения двух альтернатив? На этот вопрос отвечают следующие утверждения.

Замечание. Утверждения основаны на свойстве упорядоченных пар принадлежать или не принадлежать отношению. В нечётком случае отсутствие пары означает 0 в элементе матрицы смежности (так же и в чётком случае), а любое ненулевое число уже говорит о некоторой степени принадлежности отношению (присутствие упорядоченной пары в отношении). Поэтому, заменяя любое число в матрице нечёткого отношения символом единицы, можно применять утверждения также и для случая нечёткого отношения.

Утверждение 1. Можно выбрать первые $n-1$ вопросов в попарном сравнении n альтернатив таким образом, что при применении процедуры взятия транзитивного замыкания $n-2$ раза (после каждого вопроса, начиная со второго) или один раз после последнего, $(n-1)$ -го, вопроса получим одну и ту же матрицу смежности формируемого отношения предпочтения.

Доказательство утверждения 1. Приведем два примера таких $n-1$ вопросов:

- альтернатива a_1 последовательно сравнивается с остальными альтернативами a_2, a_3, \dots, a_n ;
- альтернатива a_i сравнивается с a_{i+1} для всех $i = 1, \dots, n-1$.



И в том, и в другом случае каждый раз в сравнении участвует новая альтернатива, которая ранее ни с какой другой альтернативой не сравнивалась. Поэтому промежуточные взятия транзитивного замыкания не требуются. Таким образом, достаточно одного взятия транзитивного замыкания вместо $n - 2$.

Следующее утверждение обобщает утверждение 1 для случая задания произвольных по счету вопросов.

Пусть каждая альтернатива из подмножества $\tilde{A} = \{a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_k}\} (\tilde{A} \subseteq A)$ не сравнима ни с одной альтернативой из множества $A \setminus \tilde{A}$.

Утверждение 2. При применении процедуры взятия транзитивного замыкания $k - 2$ раза после каждого сравнения произвольной альтернативы $a_i \in A$ с альтернативами a_{i_1}, \dots, a_{i_k} из \tilde{A} или один раз после последнего, $k - 1$, вопроса получим одну и ту же матрицу смежности формируемого отношения предпочтения.

Доказательство утверждения 2. В этом утверждении, как и в предыдущем, каждый раз в сравнении участвует новая альтернатива, которая ранее ни с какой альтернативой не была сравнима. Поэтому промежуточные взятия транзитивного замыкания не требуются. Таким образом, достаточно одного взятия транзитивного замыкания вместо $k - 2$.

Замечание. Процедуру взятия транзитивного замыкания, очевидно, не стоит применять и в случае, когда отношение транзитивно. Проверка транзитивности отношения ρ сводится к проверке выполнения условия $\rho^2 \subseteq \rho$ и имеет небольшую вычислительную сложность $O(n^2)$.

Замечание. Для нечётких отношений предыдущие утверждения означают, что новая добавляемая альтернатива может только добавить новый путь, следовательно, может только увеличить пропускную способность между парой вершин-альтернатив в графе отношения.

Утверждение 3. Добавление к транзитивному отношению информации о сравнении двух ранее не сравниваемых альтернатив не приводит к получению противоречивого контура.

Доказательство утверждения 3. (От противного). Пусть ρ – транзитивное отношение на множестве A , которое не содержит упорядоченных пар $\langle a_i, a_j \rangle$ и $\langle a_j, a_i \rangle$. Предположим, что после добавления к ρ пары, например, $\langle a_i, a_j \rangle$, был получен противоречивый контур: $\langle a_i, a_j \rangle, \langle a_j, a_{j_1} \rangle, \dots, \langle a_{j_k}, a_i \rangle$. Но из цепочки $\langle a_j, a_{j_1} \rangle, \dots, \langle a_{j_k}, a_i \rangle$ этого контура по транзитивности ρ получаем $\langle a_j, a_i \rangle \in \rho$, а это противоречит тому, что альтернативы a_i и a_j не сравнимы по отношению ρ .

Таким образом, процедуру взятия транзитивного замыкания первоначально достаточно применить после сравнения $(n - 1)$ -й пары элементов, например, после сравнения одного из элементов со всеми остальными. Количество применений процедуры взятия транзитивного замыкания на следующих этапах зависит от числа оставшихся несравнимых альтернатив (утверждение 2).

Для определения того, что альтернатива из подмножества $\tilde{A} = \{a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_k}\} (\tilde{A} \subseteq A)$, т.е. не сравнима ни с какой альтернативой из множества A , будем использовать следующее утверждение.

Пусть $\tilde{R} = \tilde{r}_{ij}$ – матрица смежности порядка n (число альтернатив) произвольного отношения ρ на множестве A . Вектор $S = \langle s_1, s_2, \dots, s_n \rangle$ – n -мерный вектор с компонентами, вычисляемыми по следующей формуле:

$$s_i = \sum_{j=1}^n (\tilde{r}_{ij} + \tilde{r}_{ji}).$$

Утверждение 4. Если i -й элемент вектора S равен нулю ($s_i = 0$), то альтернатива $a_i \in \tilde{A}$.

Доказательство утверждения 4. Действительно, если i -я строка и i -й столбец матрицы R содержат только нулевые элементы, то это означает, что альтернатива a_i не сравнима ни с одним из элементов множества A . Утверждение справедливо и для случая нечёткого отношения ρ .

При программной реализации опроса эксперту предлагается заполнить первый столбец и первую строку матрицы с учетом асимметричности отношения ($n-1$ сравнение). Затем программа берет транзитивное замыкание полученного нечеткого отношения. Далее эксперту предлагается второй столбец и вторая строка, причем только если имеются нулевые элементы, симметричные относительно главной диагонали (будет $n-2$ или меньше сравнений). Затем программа берет транзитивное замыкание нечеткого отношения. И так далее, пока не будет достигнуто необходимое количество сравнений, в силу транзитивности или по результату выбора эксперта.

4. ПРИМЕР ПОСТРОЕНИЯ ЭКСПЕРТНЫХ ПРЕДПОЧТЕНИЙ

Далее приведён пример построения одной матрицы сравнений при количестве альтернатив $n = 4$.

Эксперт заполняет первые строку и столбец:

$$\mu_\rho = R = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0.24 \\ 0.4 & 0 & 0 & 0 \\ 0.12 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Эксперт проделал $3 = n-1$ сравнения. Количество имеющихся сравнений: 3. Далее проделаем операции по транзитивному замыканию:

$$\mu_\rho^2 = R^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \max(0, \min(0.24, 0.4)) \\ 0 & 0 & 0 & \max(0, \min(0.24, 0.12)) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.24 \\ 0 & 0 & 0 & 0.12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$



$$R^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = R^4.$$

$$\hat{\rho} = \rho \cup \rho^2 \cup \rho^3 \cup \rho^4, \mu_{\hat{\rho}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0.24 \\ 0.4 & 0 & 0 & 0.24 \\ 0.12 & 0 & 0 & 0.12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Количество имеющихся сравнений: 5.

Эксперт заполняет вторые строку и столбец:

$$R = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0.24 \\ 0.4 & 0 & 0 & 0.24 \\ 0.12 & 0.8 & 0 & 0.12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Эксперт проделал $1 \leq (n-2=2)$ сравнения. Количество имеющихся сравнений: 6.

Далее проделаем операции по транзитивному замыканию:

$$R^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \max(0, \min(0.24, 0.4)) \\ \max(0, \min(0.4, 0.8)) & 0 & 0 & \max(0, \min(0.24, 0.12), \min(0.8, 0.24)) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.24 \\ 0.4 & 0 & 0 & 0.24 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$R^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = R^4.$$

$$\mu_{\hat{\rho}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0.24 \\ 0.4 & 0 & 0 & \max(0.24, 0.24) \\ \max(0.12, 0.4) & 0.8 & 0 & \max(0.12, 0.24) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0.24 \\ 0.4 & 0 & 0 & 0.24 \\ 0.4 & 0.8 & 0 & 0.24 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$



Количество имеющихся сравнений: 6.

Всего необходимо сравнений для построения строгого порядка: $\frac{n^2 - n}{2} = \frac{16 - 4}{2} = 6$.

5. ПРИМЕР ПОСТРОЕНИЯ АГРЕГИРОВАННОГО СТРОГОГО ПОРЯДКА

Получив нечеткие строгие порядки от всех экспертов, программа приступает к выполнению алгоритма построения агрегированного строгого порядка. Алгоритм приводится в работе [4] и состоит из трех этапов.

1. Суммирование предпочтений.
2. Разрушение противоречивых контуров.
3. Взятие транзитивного замыкания.

Ниже приведён пример агрегирования матриц $R_k = (R_k)_{ij}$, $k = 1, \dots, m$ предпочтений m экспертов. Пусть предпочтения экспертов уже транзитивны.

$$R_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0.3 \\ 0.99 & 0 & 0.3 & 0.3 \\ 0.99 & 0 & 0 & 0.9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, R_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0.8 & 0.6 & 0 \\ 0 & 0 & 0.6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.99 & 0.9 & 0.6 & 0 \end{pmatrix}, R_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0.3 & 0.9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.3 & 0 & 0.9 \\ 0 & 0.3 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Суммирование предпочтений.

Агрегированная матрица $R = R_{ij}$ предпочтений строится по формуле:

$$R_{ij} = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m (R_k)_{ij}.$$

$$R = \begin{pmatrix} 0 & 0.6 & 0.3 & 0.4 \\ 0.33 & 0 & 0.3 & 0.1 \\ 0.33 & 0.1 & 0 & 0.6 \\ 0.33 & 0.4 & 0.2 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. Разрушение противоречивых контуров.

Найдём матрицу контуров (см. [4]), используя матрицу смежности r агрегированного отношения. Заметим, что это для отношения R по свойству транзитивности на диагонали могут стоять 1, например, в силу неасимметричности, а также, если находятся контуры.

$$r_k = (Trr) \& (Trr)^T \& r = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \& \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \& \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = r.$$



Здесь «&» (как и в [4]) обозначает операцию логического «И». Для матриц это означает поэлементное применение операции.

Последовательно удаляем дуги минимального веса из всех контуров и проверяем, не исключились ли контуры.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0.6 & 0.3 & 0.4 \\ 0.33 & 0 & 0.3 & \boxed{0.1} \\ 0.33 & \boxed{0.1} & 0 & 0.6 \\ 0.33 & 0.4 & 0.2 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0.6 & 0.3 & 0.4 \\ 0.33 & 0 & 0.3 & 0 \\ 0.33 & 0 & 0 & 0.6 \\ 0.33 & 0.4 & 0.2 & 0 \end{pmatrix} = R, r = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow r_k = r.$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0.6 & 0.3 & 0.4 \\ 0.33 & 0 & 0.3 & 0 \\ 0.33 & 0 & 0 & 0.6 \\ 0.33 & 0.4 & \boxed{0.2} & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0.6 & 0.3 & 0.4 \\ 0.33 & 0 & 0.3 & 0 \\ 0.33 & 0 & 0 & 0.6 \\ 0.33 & 0.4 & 0 & 0 \end{pmatrix} = R, r = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow r_k = r.$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0.6 & \boxed{0.3} & 0.4 \\ 0.33 & 0 & \boxed{0.3} & 0 \\ 0.33 & 0 & 0 & 0.6 \\ 0.33 & 0.4 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0.6 & 0 & 0.4 \\ 0.33 & 0 & 0 & 0 \\ 0.33 & 0 & 0 & 0.6 \\ 0.33 & 0.4 & 0 & 0 \end{pmatrix} = R, r = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r_k = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \& \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \& \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0.6 & 0 & 0.4 \\ \boxed{0.33} & 0 & 0 & 0 \\ 0.33 & 0 & 0 & 0.6 \\ \boxed{0.33} & 0.4 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0.6 & 0 & 0.4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.33 & 0 & 0 & 0.6 \\ 0 & 0.4 & 0 & 0 \end{pmatrix} = R, r = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = Trr \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r_k = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Контуров больше нет.

3. Взятие транзитивного замыкания.

Искомое отношение строгого порядка находится через создание транзитивного замыкания найденного графа с удалёнными контурами.

$$Tr R = Tr \begin{pmatrix} 0 & 0.6 & 0 & 0.4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.33 & 0 & 0 & 0.6 \\ 0 & 0.4 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0.6 & 0 & 0.4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.33 & 0.4 & 0 & 0.6 \\ 0 & 0.4 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

По транзитивности было добавлено ребро $\langle a_3, a_2 \rangle$:

$$\begin{aligned} & \max(\min(\langle a_3, a_1 \rangle, \langle a_1, a_2 \rangle), 0, 0, \min(\langle a_3, a_4 \rangle, \langle a_4, a_2 \rangle)) = \\ & = \max(\min(0.33, 0.6), 0, 0, \min(0.6, 0.4)) = \max(0.33, 0, 0, 0.4) = 0.4. \end{aligned}$$

По матрице $Tr R$ агрегированный строгий порядок будет такой: $a_3 \succ a_1 \succ a_4 \succ a_2$.

6. СИСТЕМА ПОДДЕРЖКИ ЭКСПЕРТНОГО ОПРОСА

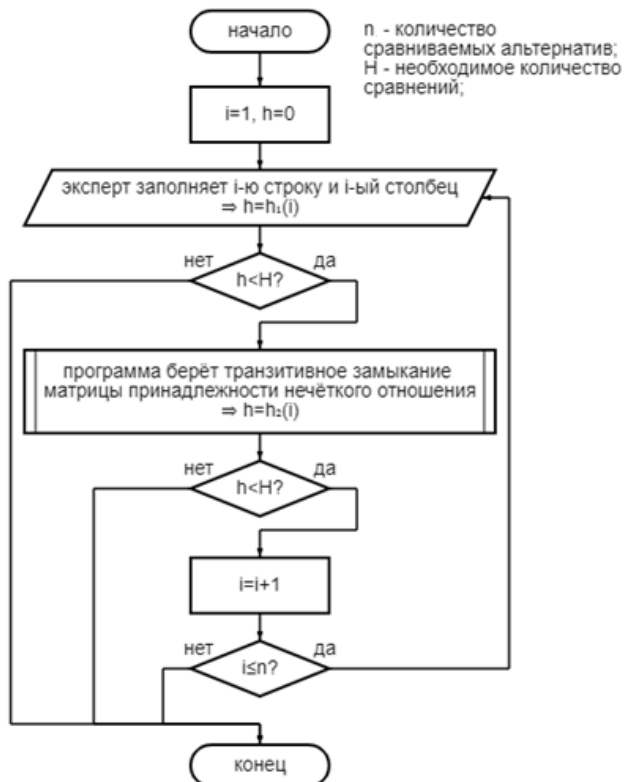


Рис. 1. Логическая схема алгоритма опроса

Для проведения опроса используется программная реализация алгоритма с визуализацией. Работа программы на примере, представленном выше, – на рисунках далее.

Эксперт заполняет первые столбец и строку. Например, на вопрос: «Какая степень уверенности в том, что альтернатива A лучше альтернативы D ?» эксперт отвечает «0.24 из 1.0». В соответствующей клетке матрицы пишется «0.24».

	A	B	C	D
A	0	0	0	0.24
B	0.4	0	0	0
C	0.12	0	0	0
D	0	0	0	0

Рис. 2. Ввод $n-1$ сравнения – заполнение первых строки и столбца

Необходимо после $n-1$ сравнения взять транзитивное замыкание, чтобы дополнить полученную информацию непротиворечивыми выводами.

	A	B	C	D
A	0	0	0	0.24
B	0.4	0	0	0.24
C	0.12	0	0	0.12
D	0	0	0	0

Рис. 3. Дополнение по транзитивности после $n-1$ сравнения

Далее заполняются незаполненные клетки во вторых столбце и строке, берётся транзитивное замыкание.

	A	B	C	D
A	0	0	0	0.24
B	0.4	0	0	0.24
C	0.12	0.8	0	0.12
D	0	0	0	0

	A	B	C	D
A	0	0	0	0.24
B	0.4	0	0	0.24
C	0.4	0.8	0	0.24
D	0	0	0	0

Рис. 4. Ввод оставшихся сравнений и транзитивное замыкание – получение итогового нечёткого отношения для одного эксперта



Таким образом с помощью программы достигается построение асимметричного транзитивного нечёткого отношения, соответствующего предпочтениям эксперта.

Программа позволяет такую же процедуру провести для нескольких экспертов, с последующим построением агрегированного отношения. Результат работы программы на примере, представленном выше – на рисунках далее.

Ранжирования, агрегированные по расстоянию, с разбиением контуров

Выбор расстояния
 Модуль разности Квадрат разности

Дополнять по транзитивности автоматически

Ввод матриц предпочтений экспертов

	A	B	C	D
▶ A	0	0	0	0.3
B	0.99	0	0.3	0.3
C	0.99	0	0	0.9
D	0	0	0	0

	A	B	C	D
▶ A	0	0.8	0.6	0
B	0	0	0.6	0
C	0	0	0	0
D	0.99	0.9	0.6	0

	A	B	C	D
▶ A	0	1	0.3	0.9
B	0	0	0	0
C	0	0.3	0	0.9
D	0	0.3	0	0

	Ранжиро-вание 1
▶ Место 1	C
Место 2	A
Место 3	D
Место 4	B
Стоимость	1.13
Сила	0.33
Сумм. расстояние модуль разности*	15.39
Сумм. расстояние квадрат разности*	12.8603
Вектор стоимостей по экспертам	1.29 0.9 1.2

Недоминируемые альтернативы: C

Рис. 5. Результат применения алгоритма для трёх экспертов

Агрегированное отношение R:

[0]	[0.6]	[0.3]	[0.4]
[0.33]	[0]	[0.3]	[0.1]
[0.33]	[0.1]	[0]	[0.6]
[0.33]	[0.4]	[0.2]	[0]

Отношение с разбитыми циклами $Asuc(R)$ агрегированного отношения R:

[0]	[0.6]	[0]	[0.4]
[0]	[0]	[0]	[0]
[0.33]	[0]	[0]	[0.6]
[0]	[0.4]	[0]	[0]

Транзитивное замыкание $Tr(Asuc(R))$ отношения с разбитыми циклами $Asuc(R)$ агрегированного отношения R:

[0]	[0.6]	[0]	[0.4]
[0]	[0]	[0]	[0]
[0.33]	[0.4]	[0]	[0.6]
[0]	[0.4]	[0]	[0]

Рис. 6. Матрица агрегированного отношения R, матрицы R с разрушенными контурами и со взятым после разрушения контуров транзитивным замыканием

В программе имеется возможность визуализации бинарных отношений в виде графов для отражения полной картины процесса построения группового решения.

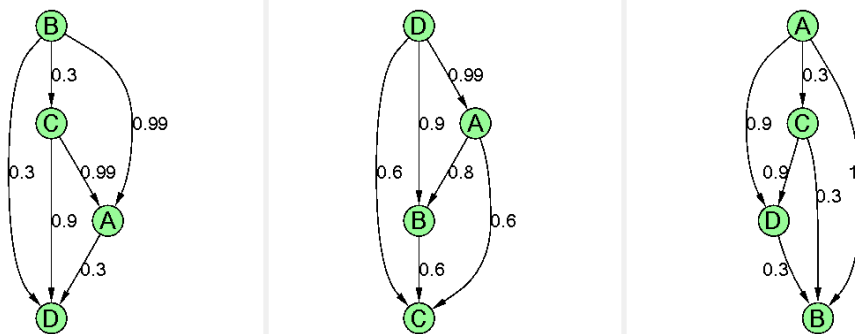


Рис. 7. Графы, соответствующие матрицам предпочтений экспертов

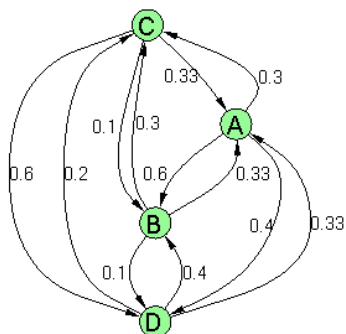


Рис. 8. Агрегированное отношение в виде графа

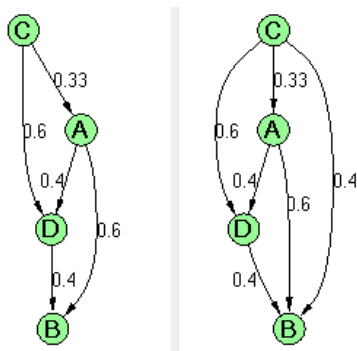


Рис. 9. Агрегированное отношение с разбитыми контурами (слева) и со взятым после этого транзитивным замыканием (справа)



7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В статье разработана методика получения непротиворечивой экспертной информации, в частности нечетких отношений строгого порядка. При этом программная система позволяет значительно сократить работу эксперта, а именно не задавать вопросов, ответы на которые следуют из транзитивности нечеткого предпочтения. Приводится пример задания экспертом нечеткого отношения строгого порядка и скриншоты программы.

Литература

1. *Вольский В.И.* Процедуры голосования в малых группах // Проблемы управления. – Москва: ООО «Сенсидат-Плюс». – 2016. – С. 2–40.
2. *Кристофидес Н.* Теория графов, Алгоритмический подход. / Перевод с англ. Э.В. Вершкова, И.В. Коновальцева; Под ред. Г.П. Гаврилова. – Москва: Мир, 1978. – 432 с.
3. *Миркин Б.Г.* Проблема группового выбора. – М.: Наука, 1974. – 256 с.
4. Непротиворечивое агрегирование отношений строгого порядка / В.Н. Нефёдов, В.А. Осипова, С.О. Смерчинская, Н.П. Яшина // Известия высших учебных заведений. Математика. – 2018. – № 5. – С. 71–85.
5. Непротиворечивое агрегирование отношений квазипорядка / В.Н. Нефёдов, С.О. Смерчинская, Н.П. Яшина // Прикладная дискретная математика. – Томск: Национальный исследовательский Томский государственный университет. – 2019. – № 45. – УДК 519.81. – С. 113–126. (Математические основы интеллектуальных систем) – DOI 10.17223/20710410/45/13
6. *Беллман Р., Заде Л.* Принятие решений в расплывчатых условиях / Беллман Р., Заде Л. [Текст] // Вопросы анализа и процедуры принятия решений. – Москва: «Мир», 1976. – С. 172–215.
7. *Орловский С.А.* Проблемы принятия решений при нечёткой информации [Текст] / С.А. Орловский – Москва: Наука, 1981–208 с.
8. *Кофман А.* Введение в теорию нечётких множеств [Текст] / Кофман А. – Москва: Радио и связь, 1982–432 с.
9. *Трухаев Р.И.* Модели принятия решений в условиях неопределённости [Текст] / Р.И. Трухаев – Москва: Наука, 1981–258 с.
10. *Губко М.В.* Лекции по принятию решений в условиях нечеткой информации [Текст] / Губко М.В. – Москва: ИПУ РАН, 2004. – 37 с. – Версия 1.

Expert Assignment of Fuzzy Strict Orders

Svetlana O. Smerchinskaya*

Moscow Aviation Institute (National Research University) (MAI), Moscow, Russia

ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-0614-1835>

e-mail: svetlana_os@mail.ru

Rimma R. Yamanaeva**

Moscow Aviation Institute (National Research University) (MAI), Moscow, Russia

ORCID: <https://orcid.org/0009-0000-2874-1466>

e-mail: m.e.dragon@mail.ru

The paper presents a method for interviewing experts for the case of aggregating fuzzy preferences specified through pairwise comparison of alternatives. The possibility of reducing the number of questions asked to experts during a interviewing is shown. Using an example, we analyze the use of a fuzzy transitive closure for a binary relation being created by an expert during a interviewing, and due to this, reducing the number of comparisons.

Keywords: group choice, expert, binary relation, interviewing, strict order, transitive relation.

For citation:

Smerchinskaya S.O., Yamamaeva R.R. Expert Assignment of Fuzzy Strict Orders. *Modelirovanie i analiz dannykh = Modelling and Data Analysis*, 2024. Vol. 14, no. 2, pp. 62–79.

DOI: <https://doi.org/10.17759/mda.2024140204> (In Russ., abstr. in Engl.).

References

1. Volsky V.I. Voting procedures in small groups // Management problems. – Moscow: Sensidat-Plus LLC. – 2016. – P. 2–40.
2. Christofides N. Graph theory, Algorithmic approach. / Translation from English E.V. Vershkova, I.V. Konovaltseva; Ed. G.P. Gavrilova. – Moscow: Mir, 1978. – 432 p.
3. Mirkin B.G. Group choice problem. – M.: Nauka, 1974. – 256 p.

****Svetlana O. Smerchinskaya***, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Department of Mathematical Cybernetics, Institute of Computer Science and Applied Mathematics, Moscow Aviation Institute (National Research University) (MAI), Moscow, Russia, ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-0614-1835>, e-mail: svetlana_os@mail.ru

*****Rimma R. Yamanaeva***, Student, Institute of Computer Science and Applied Mathematics, Moscow Aviation Institute (National Research University) (MAI), Moscow, Russia, ORCID: <https://orcid.org/0009-0000-2874-1466>, e-mail: m.e.dragon@mail.ru



4. Consistent aggregation of relations of strict order / V.N. Nefedov, V.A. Osipova, S.O. Smerchinskaya, N.P. Yashina // News of higher educational institutions. Mathematics. – 2018. – No. 5. P. 71
5. Nefedov V.N. Consistent aggregation of quasi-order relations / V.N. Nefedov, S.O. Smerchinskaya, N.P. Yashina // Applied mathematics. – Tomsk: National Research Tomsk State University. – 2019. – No. 45. – UDC 519.81. – pp. 113–126. (Mathematical foundations of intelligent systems) – DOI 10.17223/20710410/45/13
6. Bellman R., Zadeh L. Decision making in vague conditions / Bellman R., Zadeh L. [Text] // Questions of analysis and decision-making procedures. – Moscow: “Mir”, 1976. – P. 172–215.
7. Orlovsky, S.A. Problems of decision making with fuzzy information [Text] / S.A. Orlovsky – Moscow: Science, 1981–208 p.
8. Kofman A. Introduction to the influence of fuzzy sets [Text] / Kofman A. – Moscow: Radio and Communications, 1982–432 p.
9. Trukhaev, R.I. Models of decision making under conditions of uncertainty [Text] / R.I. Trukhaev – Moscow: Science, 1981–258 p.
10. Gubko M.V. Lectures on decision making under conditions of fuzzy information [Text] / Gubko M.V. – Moscow: IPU RAS, 2004. – 37 p. – Version 1.

Получена 13.05.2024

Принята в печать 27.05.2024

Received 13.05.2024

Accepted 27.05.2024

УДК 519.7

Разработка и применение многокритериального метода муравьиных колоний в задаче оптимизации инвестиционного портфеля

Пантелеев А.В.*

Московский авиационный институт
(национальный исследовательский университет) (МАИ)
г. Москва, Российская Федерация
ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-2493-3617>
e-mail: avpanteleev@inbox.ru

Попова Н.С.**

Московский авиационный институт
(национальный исследовательский университет) (МАИ)
г. Москва, Российская Федерация
ORCID: <https://orcid.org/0009-0000-7196-7786>
e-mail: popovanatalya472@gmail.com

Предложен численный метод многокритериальной оптимизации для приближенного решения задачи на основе генерации допустимых решений непрерывным методом муравьиных колоний, недоминируемой сортировки и метода эпсилон-ограничений. Под решением задачи понимается нахождение фронта Парето. Приведены решения типовых модельных примеров. Решена прикладная задача оптимизации инвестиционного портфеля, в которой исходными данными являются таблично заданные средние доходности и ковариации ценных бумаг.

Ключевые слова: многокритериальная оптимизация, метаэвристические методы, недоминируемая сортировка, метод ε -ограничений, метод муравьиных колоний, оптимальность по Парето, оптимизация инвестиционного портфеля.

Для цитаты:

Пантелеев А.В., Попова Н.С. Разработка и применение многокритериального метода муравьиных колоний в задаче оптимизации инвестиционного портфеля // Моделирование и анализ данных. 2024. Том 14. № 2. С. 80–97. DOI: <https://doi.org/10.17759/mda.2024140205>

***Пантелеев Андрей Владимирович**, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой математической кибернетики института «Компьютерные науки и прикладная математика» Московского авиационного института (Национального исследовательского



университета) (МАИ), г. Москва, Российская Федерация, ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-2493-3617>, e-mail: avpanteleev@inbox.ru

****Попова Наталья Сергеевна**, студент бакалавриата института «Компьютерные науки и прикладная математика» Московского авиационного института (Национального исследовательского университета) (МАИ), г. Москва, Российская Федерация, ORCID: <https://orcid.org/0009-0000-7196-7786>, e-mail: popovanatalya472@gmail.com

1. ВВЕДЕНИЕ

Сложность современных систем и множество противоречивых целей при их проектировании требуют разработки методов, способных учитывать несколько критериев в процессе принятия решений [1–7]. В работе представлен подход, основанный на аппроксимации границы Парето. Предлагается модификация непрерывной версии метода муравьиных колоний для решения задачи однокритериальной оптимизации [8–10]. Он относится к группе метаэвристических алгоритмов глобальной оптимизации, которые позволяют найти решения хорошего качества за приемлемое время [10]. В разработанном алгоритме предлагается использовать метод недоминируемой сортировки [6,7,11] с учетом возможного незначительного нарушения заданных ограничений типа равенств и неравенств [12–16]. Эффективность алгоритма продемонстрирована на типовых модельных примерах с разной структурой множества Парето. В результате сформированы рекомендации по выбору гиперпараметров алгоритма, что позволило поставить и решить задачу оптимизации инвестиционного портфеля [17–19].

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматривается задача многокритериальной конечномерной оптимизации с ограничениями. Определим множество допустимых решений

$$D = \{x \in \mathbb{R}^n \mid g_i(x) \leq 0, i = 1, \dots, s; h_j(x) = 0, j = 1, \dots, w\}. \quad (1)$$

При приближенном решении задачи в качестве множества допустимых решений, как правило, рассматривается пересечение множества D с множеством параллелепипедного типа, образованного ограничениями вида $a_i \leq x_i \leq b_i, i = 1, \dots, n$ (получаемое множество также будем обозначать через D для упрощения обозначений). Предполагается, что каждое решение x оценивается по t критериям ($t \geq 2$), имеющим одинаковую важность, причем уменьшение значения одного критерия при фиксированных значениях остальных критериев более предпочтительно. Целевая вектор-функция имеет вид

$$F(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_t(x))^T,$$

где $f_1(x), f_2(x), \dots, f_t(x)$ – заданные непрерывные функции, $x \in D$.



Тогда желаемым решением задачи является результат минимизации каждой из частных целевых функций с учетом заданных ограничений типа равенств и неравенств:

$$\min_{x \in D} F(x) = F(x^*) = F^*.$$

Однако, в общем случае невозможно обеспечить достижения минимума всех частных целевых функций на одном и том же решении x^* , поэтому решение проблемы понимается иначе. Приведем несколько используемых далее определений [6].

Определение 1. Вектор $F(x) \in \mathbb{R}^t : F(x) = (f_1(x), \dots, f_t(x))^T$ называется векторной оценкой решения $x \in D$.

Определение 2. Вектор оценок $F^1 = F(x^1)$, $x^1 \in D$ доминирует вектор $F^2 = F(x^2)$, $x^2 \in D : F^1 \prec F^2$, если $\forall i \in \{1, \dots, t\} : f_i^1 \leq f_i^2$ и $\exists j \in \{1, \dots, t\} : f_j^1 < f_j^2$.

Определение 3. Вектор решений $x^1 \in D$ доминирует вектор $x^2 \in D$, если $F^1 \prec F^2$.

Определение 4. Множество P является множеством решений, оптимальных по Парето, если $P = \{x \in D \mid \nexists x' \in D : F(x') \prec F(x)\}$.

Определение 5. Множество векторных оценок $F(P) = \{F(x) \mid x \in P\}$ называется фронтом Парето.

Требуется найти аппроксимации множества векторных оценок (фронта Парето) и множества решений, оптимальных по Парето.

3. СТРАТЕГИЯ ПОИСКА РЕШЕНИЯ

Для решения задачи предлагается модифицировать метод муравьиных колоний, применяемый в однокритериальных задачах оптимизации [8–10], дополнив его механизмами недоминируемой сортировки решений [6,7,11] и способом учета выполнения ограничений [12,13]. Базовый метод муравьиных колоний моделирует действия колонии муравьев при поиске оптимального маршрута в изменяющейся среде обитания. При прохождении по какому-либо участку пути муравей откладывает особое пахучее вещество, называемое феромоном. Чем сильнее концентрация феромонов на тропе, тем более привлекательна она для других муравьев. Таким образом, муравьи узнают, какие маршруты чаще всего используются колонией.

На каждой итерации на множестве D поиск решения производят m муравьев, образующих текущее поколение. Роль памяти муравьиной колонии играет архив решений – таблица, содержащая r наилучших найденных решений. Величина r называется размером архива решений.

На каждой k -й итерации муравей с номером j по данным из архива решений, должен получить новое решение $\tilde{x}^j = (\tilde{x}_1^j, \dots, \tilde{x}_n^j)^T$. При этом реализуется вероятностный выбор на основе известной плотности вероятности. Для i -й координаты произвольной точки x она имеет вид:

$$G(x_i) = \sum_{l=1}^r \omega_l g_l(x_i) = \sum_{l=1}^r \omega_l \frac{1}{\sigma_i^l \sqrt{2\pi}} \exp\left(\frac{-(x_i - \mu_i^l)^2}{2(\sigma_i^l)^2}\right)$$

где $a_i \leq x_i \leq b_i$, $i = 1, \dots, n$; ω_l , $l = 1, \dots, r$, – весовой коэффициент, $g_l(x_i)$ – гауссовская плотность вероятности, определяемая математическим ожиданием μ_i^l и среднеквадратическим отклонением σ_i^l .

Данные о текущем поколении муравьев заносятся в архив решений. Подсчитываются значения координат целевой вектор-функции, после чего по ним проводится недоминируемая сортировка – ранжирование решений на основе их векторных оценок с использованием метода ε -ограничений.

Рассмотрим недоминируемую сортировку подробнее: пусть $I = \{x^p \mid x^p \in D, p = 1, \dots, r\}$ – множество решений на текущей итерации, где $r \geq 1$. Результатом сортировки является разбиение множества I на n непересекающихся подмножеств A_i , $i = 1, \dots, n$, $1 \leq n \leq r$, n – номер последнего подмножества в разбиении:

$$\begin{aligned}
 I &= \bigcup_{i=1}^n A_i, \quad A_i \cap A_j = \emptyset, i \neq j, \\
 A_1 &= \left\{ x \in I \mid \nexists x' \in I : F(x') \prec F(x) \right\}, \\
 &\vdots \\
 A_i &= \left\{ x \in I \setminus \bigcup_{i=1}^{i-1} A_i \mid \nexists x' \in I \setminus \bigcup_{i=1}^{i-1} A_i : F(x') \prec F(x) \right\}, \\
 &\vdots \\
 A_n &= I \setminus \bigcup_{i=1}^{n-1} A_i.
 \end{aligned} \tag{2}$$

Другими словами, недоминируемая сортировка представляет собой повторяющуюся процедуру выделения предпочтительных решений. На первом шаге выбираются предпочтительные решения из множества I . Далее эти предпочтительные решения удаляются из I , и процедура повторяется к оставшейся части.

В недоминируемую сортировку включается метод ε -ограничений. Его основная идея заключается в том, что для всех решений $x_k \in I$, $k = 1, \dots, r$, вычисляется степень ошибки (Constraint Violation, CV):

$$CV(x_k) = \sum_{i=1}^s \frac{\max\{g_i(x_k) - \varepsilon, 0\}}{\max_{x \in I} \{g_i(x)\}} + \sum_{j=1}^w \frac{\max\{|h_j(x_k)| - \varepsilon, 0\}}{\max_{x \in I} |h_j(x_k)|}, \tag{3}$$

где $\varepsilon > 0$ – параметр, задающийся в алгоритме. Решения, у которых $CV(x) = 0$, считаются приоритетнее решений, у которых $CV(x) \neq 0$.

В архив решений записываются решения в том же порядке, что и во множествах A_1, A_2, \dots, A_n . После этого последние m точек из архива решений отбрасываются, таким образом, размер архива решений остается неизменным. Решения из архива используются для нахождения трех параметров: векторов ω , μ^j , σ^j , которые применяются для формирования плотностей $g_j(x_i)$, $i = 1, \dots, n$, определяющих движение муравьев (их возможные последующие координаты) в процессе поиска решения.



Для выбранной муравьем с номером j плотности вероятности $g_{j^*}(x_i)$ вектор математического ожидания μ^{j^*} принимается равным координатам точки с номером j^* :

$$\mu_i^{j^*} = x_i^{j^*}, \quad i = 1, \dots, n,$$

а среднее квадратическое отклонение вычисляется следующим образом:

$$\sigma_i^{j^*} = \xi \cdot \sum_{l=1}^r \frac{|x_i^l - x_i^{j^*}|}{r-1}, \quad i = 1, \dots, n,$$

где среднее расстояние от точки $x_i^{j^*}$ до значений соответствующих координат других решений умножается на параметр $\xi > 0$. Плохие решения забываются, а поиск перемещается к новым точкам множества D , отличным от хранящихся в архиве.

Каждой плотности вероятности $g_l(x_i)$, $l = 1, \dots, r$, ставится в соответствие весовой коэффициент

$$\omega_l = \frac{1}{qr\sqrt{2\pi}} \exp\left(\frac{-(l-1)^2}{2q^2r^2}\right),$$

где q – параметр алгоритма.

На практике генерирование новой координаты x_i происходит в два этапа. На первом выбирается случайным образом плотность вероятности $g_{j^*}(x_i)$ при помощи метода рулетки с вероятностью выбора

$$p_l = \frac{\omega_l}{\sum_{s=1}^r \omega_s}, \quad l = 1, \dots, r.$$

На втором этапе генерируется значение \tilde{x}_i^j в соответствии с выбранной гауссовской плотностью $g_{j^*}(x_i)$, определяемой параметрами $\mu_i^{j^*}$, $\sigma_i^{j^*}$. Здесь j^* – номер плотности вероятности, выбранной муравьем с номером j .

В результате получается множество решений $\{x^1, \dots, x^r, \tilde{x}^1, \dots, \tilde{x}^m\}$, после чего по ним реализуется недоминируемая сортировка. Среди непересекающихся множеств A_1, A_2, \dots, A_n выбираются решения, пока их количество не будет равно r . Если в каком-то подмножестве решений больше, чем необходимо выбрать, то необходимая часть решений отбирается случайным образом на основе расстояний до других решений в этом подмножестве.

4. АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ

Шаг 1. Генерация начальных позиций.

Шаг 1.1. Задать число муравьев m , размер архива r , максимальное число поколений K , параметры q , ξ и ε . Положить номер поколения $k = 0$.

Шаг 1.2. Сгенерировать r точек $I^k = \{x^1, \dots, x^r\}$ на множестве D , используя равномерное распределение.

Шаг 2. Расчет весов и вероятностей выбора решений.

Шаг 2.1. Для каждого решения x^l , $l = 1, \dots, r$, подсчитать вес ω_l :

$$\omega_l = \frac{1}{qr\sqrt{2\pi}} \exp\left(\frac{-(l-1)^2}{2q^2r^2}\right).$$

Шаг 2.2. Вычислить вероятность p_l выбора l -й гауссовской плотности вероятности:

$$p_l = \frac{\omega_l}{\sum_{s=1}^r \omega_s}, \quad l = 1, \dots, r.$$

Шаг 3. Выбор плотности вероятности.

Шаг 3.1. Положить $j = 1$.

Шаг 3.2. Методом рулетки выбрать номер муравья j^* .

Шаг 4. Генерация вектора \tilde{x}^j .

Шаг 4.1. Положить $i = 1$.

Шаг 4.2. Вычислить математическое ожидание $\mu_i^{j^*}$ и среднеквадратическое отклонение $\sigma_i^{j^*}$:

$$\mu_i^{j^*} = x_i^{j^*}, \quad i = 1, \dots, n$$

$$\sigma_i^{j^*} = \xi \cdot \sum_{l=1}^r \frac{|x_i^l - x_i^{j^*}|}{r-1}, \quad i = 1, \dots, n$$

Шаг 4.3. Генерировать случайную величину \tilde{x}_i^j на отрезке $[a_i, b_i]$ согласно плотности вероятности

$$g_{j^*}(x_i) = \frac{1}{\sigma_i^{j^*} \sqrt{2\pi}} \exp\left(\frac{-(x_i - \mu_i^{j^*})^2}{2(\sigma_i^{j^*})^2}\right)$$

Шаг 4.4. Если $i = n$, сформировать и добавить новое решение $\tilde{x}^j = (\tilde{x}_1^j, \dots, \tilde{x}_n^j)^T$ к текущему числу поколения $I^k : I^k = I^k \cup \{\tilde{x}^j\}$, и перейти к шагу 5. Если $i < n$, положить $i = i + 1$ и перейти к шагу 4.2.



Шаг 5. Если $j = m$, процесс поиска решения поколением муравьев завершить и перейти к шагу 6. Если $j < m$, положить $j = j + 1$ и перейти к шагу 3.2.

Шаг 6. Формирование нового поколения.

Шаг 6.1. Для каждого решения x^l , $l = 1, \dots, r + m$, из множества I^k вычислить степень ошибки по формуле (3):

$$CV(x_k) = \sum_{i=1}^s \frac{\max\{g_i(x_k) - \varepsilon, 0\}}{\max_{x \in I} \{g_i(x)\}} + \sum_{j=1}^w \frac{\max\{|h_j(x_k)| - \varepsilon, 0\}}{\max_{x \in I} |h_j(x_k)|},$$

где $g_i(x^l)$, $i = 1, \dots, s$ – функции, задающие ограничения типа неравенств, $h_j(x^l)$, $j = 1, \dots, w$ – функции, задающие ограничения типа равенств.

Шаг 6.2. Разделить множество I^k на два подмножества: I_0^k – решения, у которых $CV(x^l) = 0$, и I_1^k – решения, у которых $CV(x^l) \neq 0$.

Шаг 6.3. Реализовать процедуру недоминируемой сортировки согласно (2) $I_0^k : A_1, \dots, A_n$ и $I_1^k : A_{n+1}, \dots, A_a$, где n и a – номера последних подмножеств в разбиениях I_0^k и I_1^k соответственно. Увеличить счетчик числа итераций $k = k + 1$, $I^k = \emptyset$.

Шаг 6.4. Соединить два подмножества I_0^k и I_1^k в одно I^k .

Шаг 6.5. Найти u_{\min} :

$$u_{\min} = \min_{1 \leq u \leq s} \left\{ u : \left| \bigcup_{i=1}^u A_i \right| \geq r \right\}.$$

Если $\left| \bigcup_{i=1}^{u_{\min}} A_i \right| = r$, то $I^k = \bigcup_{i=1}^{u_{\min}} A_i$, $P = \emptyset$, иначе $I^k = \bigcup_{i=1}^{u_{\min}-1} A_i$, $P = A_{u_{\min}}$. Если

$u_{\min} = 1$ и $|A_{u_{\min}}| > r$, то $\bigcup_{i=1}^{u_{\min}-1} A_i = \emptyset$, все решения попадают в множество P .

Шаг 6.6. Для каждой точки $x^w \in P$ подсчитать $R(x^w)$ – сумму расстояний до остальных точек, $p(x^w)$ – вероятность выбора решения x^w .

$$R(x^w) = \sum_{x^s \in P} \rho(F(x^w), F(x^s)), \quad p(x^w) = \frac{R(x^w)}{\sum_{x^s \in P} R(x^s)}.$$

Шаг 6.7. Используя вероятность $p(x^w)$, случайным образом выбрать из множества P множество точек (решений) в количестве $r - |I^k|$ и добавить их в множество I^k .

Шаг 6.8. Если $k \leq K$, то положить $k = k + 1$ и перейти к шагу 2. Иначе в качестве приближенного решения принять I^k и $F(I^k)$.

5. МОДЕЛЬНЫЕ ПРИМЕРЫ

Для тестирования метода были взяты задачи с известным точным решением: $ZDT1$ (рис. 1), $ZDT2$ (рис. 2), $ZDT3$ (рис. 3). Чтобы оценить, насколько полученное решение близко к истинной границе Парето, были использованы метрики IGD (Inverted Generational Distance) и HV (HyperVolume, гиперобъем).

Идея IGD заключается в том, чтобы измерить среднее расстояние от всех точек Парето-оптимального фронта до ближайшей точки из набора решений, который возвращает программа. Чем меньше это расстояние, тем лучше качество приближения. Метрика рассчитывается следующим образом:

$$IGD = \frac{1}{|I|} \sum_{x \in I} \min_{\tilde{x} \in P} \rho(F(x), F(\tilde{x})),$$

где $\rho(\cdot, \cdot)$ – расстояние от одной точки до другой: $\rho(y, \tilde{y}) = \sqrt{\sum_{i=1}^{|I|} (y_i - \tilde{y}_i)^2}$.

Метрика HV основывается на концепции измерения объема пространства, ограниченного гиперплоскостью, которая определена оптимальным значением каждого критерия. Поскольку HV не учитывает распределение точек внутри этого пространства, она может быть несовершенной для сравнения множеств Парето, которые имеют различные распределения точек. Тем не менее, она остается важным инструментом для сравнения алгоритмов оптимизации и оценки их эффективности. Гиперобъем вычисляется следующим образом:

$$HV(L, r) = \mu \left(\bigcup_{x \in L} [r_1; f_1(x)] \times \dots \times [r_n; f_n(x)] \right),$$

где $\mu(\cdot)$ – мера Лебега, $r = (r_1, \dots, r_n)$ – опорная точка, $L \subseteq D$.

В процессе тестирования метода для каждого примера при определенных параметрах (табл. 1, 3, 5) были вычислены 10 решений при $n = 10$. В табл. 2, 4, 6 занесены следующие значения:

$$\begin{aligned} IGD_{\min} &= \min_{1 \leq i \leq 10} IGD_i, & HV_{\min} &= \min_{1 \leq i \leq 10} |HV_i - HV^P|, \\ IGD_{\max} &= \max_{1 \leq i \leq 10} IGD_i, & HV_{\max} &= \max_{1 \leq i \leq 10} |HV_i - HV^P|, \\ \overline{IGD} &= \frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} IGD_i, & \overline{HV} &= \frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} |HV_i - HV^P|, \end{aligned}$$

где HV^P – гиперобъем точной границы Парето.

Пример 1 ($ZDT1$). Частные целевые функции:

$$\begin{aligned} f_1(x) &= x_1, \\ f_2(x) &= g(x) \cdot \left(1 - \sqrt{\frac{x_1}{g(x)}} \right), \end{aligned}$$



где $g(x) = 1 + 9 \sum_{i=2}^n \frac{x_i}{n-1}$, $n \geq 2$, при этом $0 \leq x_i \leq 1$, $i = 1, \dots, n$.

Таблица 1

Параметры метода для ZDT1

№ теста	M	R	K	ξ	q
1	50	200	100	0,5	0,5
2	100	300	200	0,5	0,5
3	100	300	200	0,85	0,1
4	200	400	200	0,85	0,1
5	200	500	300	0,85	0,1

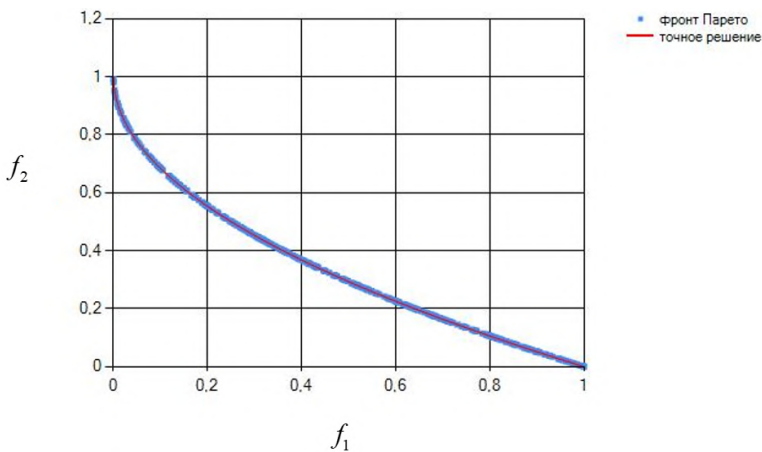


Рис. 1. Фронт Парето найденного решения для ZDT1 (тест № 5)

Таблица 2

Значения метрик для ZDT1

№ теста	IGD_{\min}	IGD_{\max}	\overline{IGD}	HV_{\min}	HV_{\max}	\overline{HV}
1	0,29530	0,79670	0,43320	0,37651	0,65736	0,46522
2	0,01438	0,17763	0,06773	0,01778	0,24343	0,09253
3	0,01134	0,01549	0,01286	0,01273	0,01928	0,01517
4	0,00436	0,00820	0,00597	0,00179	0,00767	0,00428
5	0,00274	0,00610	0,00417	0,00007	0,00465	0,00189

Пример 2 (ZDT2). Частные целевые функции:

$$f_1(x) = x_1,$$



$$f_2(x) = g(x) \cdot \left(1 - \left(\frac{x_1}{g(x)} \right)^2 \right),$$

где $g(x) = 1 + 9 \sum_{i=2}^n \frac{x_i}{n-1}$, $n \geq 2$, при этом $0 \leq x_i \leq 1$, $i = 1, \dots, n$.

Таблица 3

Параметры метода для ZDT2

№ теста	M	R	K	ξ	q
1	50	200	100	0,5	0,5
2	100	300	200	0,5	0,5
3	100	300	200	0,85	0,1
4	200	400	200	0,85	0,1
5	200	500	300	0,85	0,1

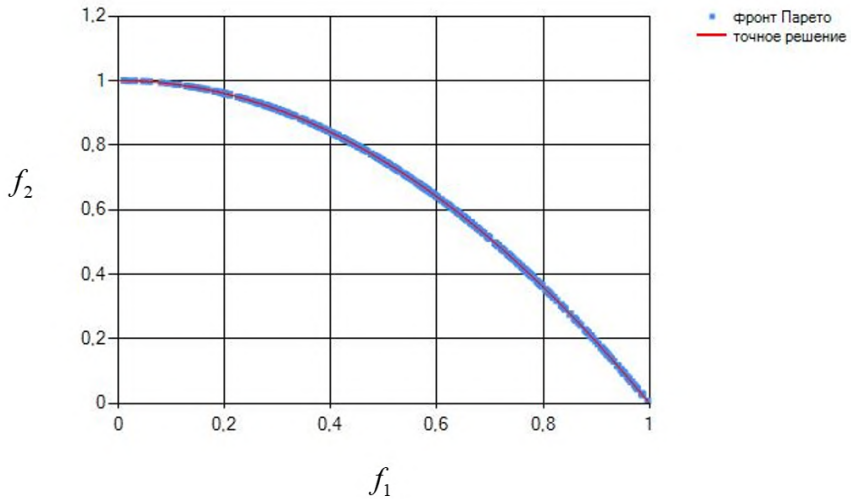


Рис. 2. Фронт Парето найденного решения для ZDT2 (тест № 5)

Таблица 4

Значения метрик для ZDT2

№ теста	IGD_{\min}	IGD_{\max}	\overline{IGD}	HV_{\min}	HV_{\max}	\overline{HV}
1	0,16477	0,46240	0,28424	0,17973	0,31477	0,24398
2	0,02469	0,09771	0,05939	0,03049	0,19172	0,07094
3	0,04961	0,06666	0,05722	0,01019	0,06985	0,03391
4	0,00652	0,01595	0,00997	0,00513	0,01943	0,01030
5	0,00286	0,00711	0,00347	0,00053	0,00781	0,00291



Пример 3 (ZDT3). Частные целевые функции:

$$f_1(x) = x_1,$$

$$f_2(x) = g(x) \cdot \left(1 - \sqrt{\frac{x_1}{g(x)}} - \frac{x_1}{g(x)} \sin(10\pi x_1) \right),$$

где $g(x) = 1 + 9 \sum_{i=2}^n \frac{x_i}{n-1}$, $n \geq 2$, при этом $0 \leq x_i \leq 1$, $i = 1, \dots, n$.

Таблица 5

Параметры метода для ZDT3

№ теста	M	R	K	ξ	q
1	50	200	100	0,5	0,5
2	100	300	200	0,5	0,5
3	100	300	200	0,85	0,1
4	200	400	200	0,85	0,1
5	200	500	300	0,85	0,1

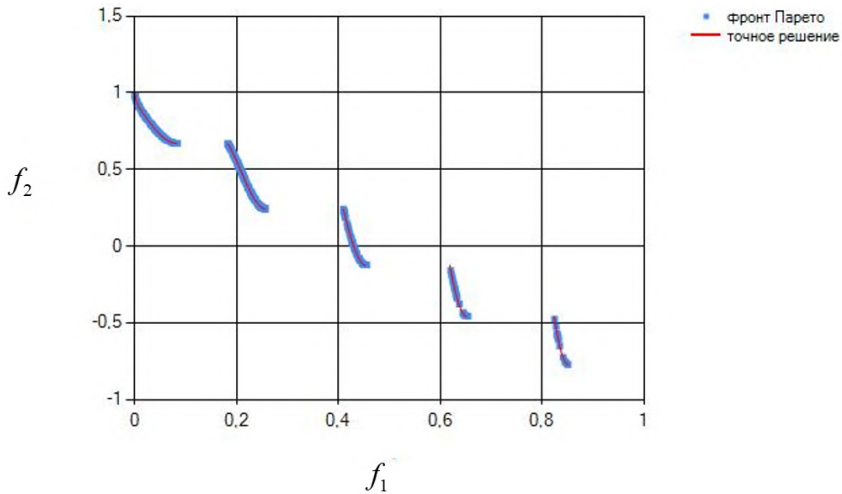


Рис. 3. Фронт Парето найденного решения для ZDT3 (тест № 5)

Таблица 6

Значения метрик для ZDT3

№ теста	IGD_{\min}	IGD_{\max}	\overline{IGD}	HV_{\min}	HV_{\max}	\overline{HV}
1	0,12370	0,33840	0,18056	0,24215	0,49522	0,32146
2	0,12253	0,27157	0,23666	0,23819	0,64079	0,53523



№ теста	IGD_{\min}	IGD_{\max}	\overline{IGD}	HV_{\min}	HV_{\max}	\overline{HV}
3	0,02940	0,26720	0,07840	0,07319	0,63168	0,18812
4	0,00764	0,01315	0,01035	0,02060	0,03533	0,02799
5	0,00632	0,00723	0,00664	0,01677	0,01997	0,01814

6. ЗАДАЧА ОПТИМИЗАЦИИ ИНВЕСТИЦИОННОГО ПОРТФЕЛЯ

Будем называть инвестиционным портфелем совокупность купленных инвестором активов. Он задается вектором относительных весов $x = (x_1, \dots, x_n)^T$. Каждый инвестор стремится собрать такой портфель ценных бумаг, который обеспечит наибольший доход $E(x) = \sum_{i=1}^n m_i x_i$ при минимальном риске $V(x) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij} x_i x_j$, где $m = (m_1, \dots, m_n)^T$ – вектор математических ожиданий (вектор средних доходностей),

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & \dots & c_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & \dots & c_{nn} \end{pmatrix} \text{ – ковариационная матрица доходностей.}$$

Тогда многокритериальную задачу оптимизации инвестиционного портфеля можно записать следующим образом:

$$\begin{aligned} E(x) &= \sum_{i=1}^n m_i x_i \rightarrow \max, \\ V(x) &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij} x_i x_j \rightarrow \min, \\ x_i &\geq 0, \quad i = 1, \dots, n, \\ e^T x &= 1, \end{aligned}$$

где $e = (1, \dots, 1)^T$.

В качестве примера рассматривается портфель ценных бумаг, состоящий из акций десяти ведущих российских компаний: ВТБ (VTBR), Газпром (GAZP), Лукойл (LKOH), Аэрофлот (AFLT), Сургутнефтегаз (SNGS), Мечел (MTLR), Алроса (ALRS), Яндекс (YNDX), Ютэйр (UTAR), Магнит (MGNT). Информация о средних доходностях (табл. 7) и ковариациях (табл. 8) акций представлена на момент закрытия за период с апреля 2023 года по апрель 2024 года.

Таблица 7

Средние доходности активов

Актив	Доходность
ВТБ (VTBR)	-0,00731
Газпром (GAZP)	0,02070



Актив	Доходность
Роснефть (ROSN)	0,03487
Аэрофлот (AFLT)	0,01402
Сургутнефтегаз (SNGS)	0,06578
Мечел (MTLR)	0,041187
Алроса (ALRS)	0,017306
Яндекс (YNDX)	0,065089
Ютэйр (UTAR)	0,078605
Магнит (MGNT)	0,051897

Таблица 8

Ковариации активов

	VTBR	GAZP	ROSN	AFLT	SNGS	MTLR	ALRS	YNDX	UTAR	MGNT
1	0,002305	0,000286	-0,00128	0,00159	0,00243	0,002187	0,003015	-0,0003	-0,00268	0,001998
2		0,00157	9,95E-05	0,000585	-0,00053	0,001445	0,001618	0,00122	-0,00077	0,000408
3			0,002899	-0,00104	-0,00126	0,000394	-0,00021	0,000238	0,003911	0,000349
4				0,005949	0,00227	-0,00059	0,004666	0,004885	0,003723	0,000895
5					0,012254	-0,00166	0,002244	-0,00216	0,001428	0,004201
6						0,015316	0,002534	-0,00044	-0,00112	0,002839
7							0,007566	0,003246	0,001021	0,003663
8								0,007368	0,004928	0,000278
9									0,054013	0,001045
10										0,006855

Результаты решения задачи представлены в табл. 10 и на рис. 4. Параметры, при которых было вычислено решение, приведены в табл. 9.

Таблица 9

Параметры метода

M	R	K	ξ	q	ε
600	800	1500	0,85	0,1	0,000153

Таблица 10

Веса ценных бумаг, значения дохода и риска

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}	E	V
0,09	0,05	0,05	0,08	0,31	0,06	0,06	0,2	0,08	0,02	0,04645	0,05502
0,01	0,13	0,03	0,09	0,49	0,05	0	0,13	0,02	0,05	0,04942	0,066
0,04	0,15	0,23	0,02	0,15	0,03	0,06	0,07	0,03	0,22	0,03018	0,03085
0,02	0	0,14	0,07	0,06	0,06	0,06	0,09	0,46	0,04	0,05571	0,12077
0,06	0,13	0,02	0,01	0,19	0,01	0,1	0,25	0,2	0,03	0,04987	0,06808
0,03	0,08	0,09	0,04	0,42	0,04	0,02	0,12	0,09	0,07	0,04899	0,0594



x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}	E	V
0,03	0,14	0,17	0,07	0,21	0,1	0,08	0,05	0,08	0,07	0,03872	0,04231
0,04	0,04	0,32	0,06	0,14	0,04	0,04	0,16	0,12	0,04	0,0435	0,04787
0,05	0,07	0,05	0,03	0,36	0,03	0,05	0,18	0,1	0,08	0,04827	0,05731
0	0,29	0,11	0,07	0,14	0,05	0,05	0,16	0,09	0,04	0,04018	0,04449
0,09	0,19	0,25	0,1	0,07	0,1	0,04	0,1	0,05	0,01	0,03313	0,03695
0,07	0,17	0,24	0,03	0,13	0,04	0,09	0,11	0,01	0,11	0,03124	0,03408
0,03	0,06	0,09	0,02	0,24	0,05	0,02	0,23	0,13	0,13	0,0477	0,05579
0,02	0,11	0,11	0,05	0,22	0,06	0,03	0,12	0,23	0,05	0,05009	0,06854
0,07	0,05	0,21	0,01	0,24	0,09	0,06	0,05	0,03	0,19	0,03392	0,03826
0,12	0,11	0,17	0,07	0,15	0,13	0,04	0,1	0,02	0,09	0,03264	0,03608
0,09	0,12	0,15	0	0,12	0,06	0,07	0,15	0,09	0,15	0,03587	0,04009
0	0,19	0,06	0,05	0,05	0,05	0,01	0,22	0,34	0,03	0,05332	0,09371
0,01	0,08	0,04	0,07	0,16	0,17	0,05	0,26	0,07	0,09	0,04505	0,05207
0	0,14	0,12	0,06	0,13	0,17	0,08	0,12	0,08	0,1	0,03875	0,04315
0,04	0,09	0,21	0,04	0,25	0,03	0,04	0,12	0,1	0,08	0,04348	0,04597
0,02	0,17	0,04	0	0,15	0,04	0,08	0,29	0,2	0,01	0,05216	0,06949
0,02	0,02	0,39	0,1	0,19	0,05	0,03	0,08	0,11	0,01	0,04444	0,04831
0,06	0,08	0,08	0,05	0,34	0,02	0,01	0,15	0,14	0,07	0,04921	0,06031
0,07	0,1	0,21	0,01	0,11	0,07	0,07	0,18	0,11	0,07	0,04053	0,0448
0,07	0,14	0,06	0,03	0,27	0,01	0,07	0,19	0,11	0,05	0,0454	0,05297
0,02	0,06	0,13	0,04	0,13	0,14	0,08	0,16	0,06	0,18	0,03679	0,04084
0,04	0,17	0,08	0,05	0,14	0,17	0,06	0,11	0,04	0,14	0,03419	0,03854
0,04	0,04	0,32	0,12	0,2	0,08	0,01	0,05	0,08	0,06	0,03995	0,04401
0,09	0,18	0,09	0,06	0,21	0,08	0,06	0,1	0,06	0,07	0,03621	0,04042
0,02	0,17	0,15	0,05	0,18	0,03	0,05	0,14	0,08	0,13	0,03862	0,041
0,07	0,1	0,11	0,07	0,22	0,12	0,07	0,11	0,08	0,05	0,04061	0,04487
0,07	0,12	0,05	0,05	0,2	0,11	0,01	0,2	0,13	0,06	0,04587	0,05379
0,03	0,04	0,02	0,05	0,26	0,1	0,11	0,25	0,07	0,07	0,04706	0,05566

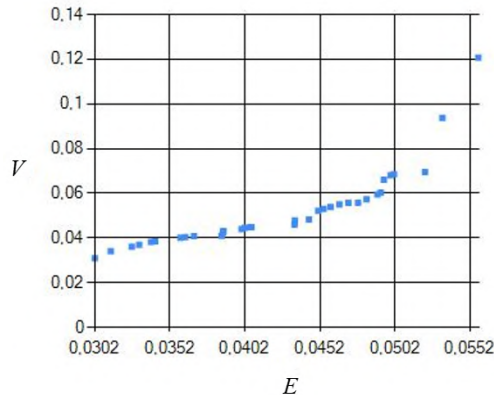


Рис. 4. График зависимости дохода и риска



Заметим, что представленный график является решением задачи, в которой одну из частных целевых функций (функцию дохода) нужно максимизировать, а другую (функцию риска) минимизировать, что отличается от общей постановки задачи, где у всех целевых функций необходимо найти минимум. Для решения задачи оптимизации инвестиционного портфеля была изменена функция дохода, путем умножения ее на -1 , чтобы свести задачу к общей постановке.

7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В статье предложен алгоритм решения многокритериальных задач оптимизации, основанный на методе муравьиных колоний в совокупности с процедурой недоминируемой сортировки. Приведены решения трех модельных примеров. Рассмотрена многокритериальная задача оптимизации инвестиционного портфеля. Показано, что предложенный алгоритм способен находить решения хорошего качества при приемлемых вычислительных затратах.

Литература

1. *Gunantara N.* A review of multi-objective optimization: Methods and its applications, *Cogent Engineering*. 2018. Vol. 5. No. 1, 1502242, DOI: 10.1080/23311916.2018.1502242
2. *Tian Y. et al.* An evolutionary algorithm for large-scale sparse multiobjective optimization problems // *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*. 2019. Vol. 24. No. 2. P. 380–393.
3. *Zuo M. et al.* A differential evolution algorithm with the guided movement for population and its application to interplanetary transfer trajectory design // *Engineering Applications of Artificial Intelligence*. 2022. Vol. 110. 104727.
4. *Liu Z.Z., Wang Y., Wang B.C.* Indicator-based constrained multiobjective evolutionary algorithms // *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems*. 2019. Vol. 51. No. 9. P. 5414–5426.
5. *Panichella A.* An improved Pareto front modeling algorithm for large-scale many-objective optimization // *Proceedings of the Genetic and Evolutionary Computation Conference*. 2022. P. 565–573.
6. *Пантелеев А.В., Крючков А.Ю.* Модификация метаэвристического метода фейерверков для задач многокритериальной оптимизации на основе недоминируемой сортировки // *Научный вестник Московского государственного университета гражданской авиации*. 2019. Т. 22. № 3. С. 67–78.
7. *Пантелеев А.В., Крючков А.Ю.* Разработка и применение многокритериального метода фейерверков в задаче стабилизации движения искусственного спутника по круговой орбите // *Моделирование и анализ данных*. 2019. № 3. С. 43–57.
8. *Dorigo M., Socha K.* Ant colony optimization for continuous domains // *Eur. J. of Operational Research*. 2008. Vol. 185. P. 1155–1173.
9. *Dorigo M., Stutzle T.* *Ant colony optimization*. MIT Press, 2004.
10. *Пантелеев А.В., Скавинская Д.В.* *Метаэвристические алгоритмы глобальной оптимизации*. М.: Вузовская книга, 2019.
11. *Ming F. et al.* A constraint-handling technique for decomposition-based constrained many-objective evolutionary algorithms // *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics Systems*. 2023. Vol. 53. P. 7783–7793.



12. Takahama T., Sakai S. Constrained optimization by the ε constrained differential evolution with gradient-based mutation and feasible elites / *Proc. IEEE Int. Conf. Evol. Comput.* 2006. P. 1–8.
13. Zuo M., Xue Y. Population feasibility state guided autonomous constrained multi-objective evolutionary optimization // *Mathematics.* 2024. Vol. 12. No. 6. 913.
14. Morovati V., Pourkarimi L. Extension of Zoutendijk method for solving constrained multi-objective optimization problems // *European Journal of Operational Research.* 2019. Vol. 273. No. 1. P. 44–57.
15. Zapotecas-Martínez S., Ponsich A. Constraint handling within MOEA/D through an additional scalarizing function // *Proceedings of the 2020 Genetic and Evolutionary Computation Conference.* 2020. P. 595–602.
16. Tian Y. et al. Balancing objective optimization and constraint satisfaction in constrained evolutionary multiobjective optimization // *IEEE Transactions on Cybernetics.* 2021. Vol. 52. No. 9. P. 9559–9572.
17. Бадалова А.Г., Пантелеев А.В. Промышленный риск-менеджмент. М.: Доброе слово, 2018.
18. Zanjirdar M. Overview of portfolio optimization models // *Advances in mathematical finance and applications.* 2020. Vol. 5. No. 4. P. 419–435.
19. Yang M. et al. A Synergistic multi-objective evolutionary algorithm with diffusion population generation for portfolio problems // *Mathematics.* 2024. Vol. 12. No. 9. 1368.



Development and Application of a Multi-Objective Ant Colony Optimization Method for Portfolio Problem

Andrei V. Pantelev*

Moscow Aviation Institute (National Research University) (MAI), Moscow, Russia

ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-2493-3617>

e-mail: avpantelev@inbox.ru

Natalya S. Popova**

Moscow Aviation Institute (National Research University) (MAI), Moscow, Russia

ORCID: <https://orcid.org/0009-0000-7196-7786>

e-mail: popovanatalya472@gmail.com

A numerical method of multi-objective optimization is proposed for an approximate solution of the problem based on the generation of feasible solutions using the continuous ant colony method, non-dominated sorting and the epsilon-constraint technique. Solving a problem means finding the Pareto front. Solutions of typical model examples are given. The applied problem of optimizing an investment portfolio has been solved, in which the initial data are the tabulated average returns and covariance of stocks.

Keywords: investment portfolio optimization, multi-objective optimization, metaheuristic methods, non-dominated sorting, ε -constraint technique, ant colony optimization, Pareto optimality.

For citation:

Pantelev A.V., Popova N.S. Development and Application of a Multi-Objective Ant Colony Optimization Method for Portfolio Problem. *Modelirovanie i analiz dannykh = Modelling and Data Analysis*, 2024. Vol. 14, no. 2, pp. 80–97. DOI: <https://doi.org/10.17759/mda.2024140205> (In Russ., abstr. in Engl.).

References

1. Gunantara N. A review of multi-objective optimization: Methods and its applications, *Cogent Engineering*. 2018. Vol. 5. No. 1, 1502242, DOI: 10.1080/23311916.2018.1502242
2. Tian Y. et al. An evolutionary algorithm for large-scale sparse multiobjective optimization problems // *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*. 2019. Vol. 24. No. 2. P. 380–393.

***Andrei V. Pantelev**, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Head of the Department of Mathematics and Cybernetics, Institute “Computer Science and Applied Mathematics”, Moscow Aviation Institute (National Research University) (MAI), Moscow, Russia, ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-2493-3617>, e-mail: avpantelev@inbox.ru

****Natalya S. Popova**, Bachelor’s Degree Student, Institute “Computer Science and Applied Mathematics”, Moscow Aviation Institute (National Research University) (MAI), Moscow, Russia, ORCID: <https://orcid.org/0009-0000-7196-7786>, e-mail: popovanatalya472@gmail.com



3. Zuo M. et al. A differential evolution algorithm with the guided movement for population and its application to interplanetary transfer trajectory design // *Engineering Applications of Artificial Intelligence*. 2022. Vol. 110. 104727.
4. Liu Z.Z., Wang Y., Wang B.C. Indicator-based constrained multiobjective evolutionary algorithms // *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems*. 2019. Vol. 51. No. 9. P. 5414–5426.
5. Panichella A. An improved Pareto front modeling algorithm for large-scale many-objective optimization // *Proceedings of the Genetic and Evolutionary Computation Conference*. 2022. P. 565–573.
6. Panteleev A.V., Kryuchkov A.Yu. Modifikaciya metaevristicheskogo metoda fejervertkov dlya zadach mnogokriterial'noj optimizacii na osnove nedominiruemoj sortirovki // *Nauchnyj vestnik Moskovskogo gosudarstvennogo universiteta grazhdanskoj aviacii*. 2019. Vol. 22. No. 3. P. 67–78. (In Russ.).
7. Panteleev A.V., Kryuchkov A.Yu. Razrabotka i primenenie mnogokriterial'nogo metoda fejervertkov v zadache stabilizacii dvizheniya iskusstvennogo sputnika po krugovoj orbite // *Modelirovanie i analiz dannyh*. 2019. No. 3. P. 43–57. (In Russ.).
8. Dorigo M., Socha K. Ant colony optimization for continuous domains // *Eur. J. of Operational Research*. 2008. Vol. 185. P. 1155–1173.
9. Dorigo M., Stutzle T. *Ant colony optimization*. MIT Press, 2004.
10. Panteleev A.V., Skavinskaya D.V. *Metaevristicheskie algoritmy global'noj optimizacii*. M.: Vuzovskaya kniga, 2019. (In Russ.).
11. Ming F. et al. A constraint-handling technique for decomposition-based constrained many-objective evolutionary algorithms // *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics Systems*. 2023. Vol. 53. P. 7783–7793.
12. Takahama T., Sakai S. Constrained optimization by the ϵ constrained differential evolution with gradient-based mutation and feasible elites / *Proc. IEEE Int. Conf. Evol. Comput.* 2006. P. 1–8.
13. Zuo M., Xue Y. Population feasibility state guided autonomous constrained multi-objective evolutionary optimization // *Mathematics*. 2024. Vol. 12. No. 6. 913.
14. Morovati V., Pourkarimi L. Extension of Zoutendijk method for solving constrained multi-objective optimization problems // *European Journal of Operational Research*. 2019. Vol. 273. No. 1. P. 44–57.
15. Zapotecas-Martínez S., Ponsich A. Constraint handling within MOEA/D through an additional scalarizing function // *Proceedings of the 2020 Genetic and Evolutionary Computation Conference*. 2020. P. 595–602.
16. Tian Y. et al. Balancing objective optimization and constraint satisfaction in constrained evolutionary multiobjective optimization // *IEEE Transactions on Cybernetics*. 2021. Vol. 52. No. 9. P. 9559–9572.
17. Badalova A.G., Panteleev A.V. *Promyshlennyj risk-menedzhment*. M.: Dobroe slovo, 2018. (In Russ.).
18. Zanjirdar M. Overview of portfolio optimization models // *Advances in mathematical finance and applications*. 2020. Vol. 5. No. 4. P. 419–435.
19. Yang M. et al. A Synergistic multi-objective evolutionary algorithm with diffusion population generation for portfolio problems // *Mathematics*. 2024. Vol. 12. No. 9. 1368.

УДК 543.068

Об опыте разработки адаптивного гибридного фильтра ЭЭГ сигнала с адаптивностью по расширенной информации

Юрьев Г.А.*

Московский государственный психолого-педагогический университет
(ФГБОУ ВО МГППУ), г. Москва, Российская Федерация
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-2960-6562>
e-mail: g.a.yuryev@gmail.com

В статье рассматривается опыт применения гибридного фильтра артефактов ЭЭГ сигнала, опирающегося на данные независимого компонентного анализа (ICA) и вейвлет-преобразования, для фильтрации и очистки ЭЭГ сигналов от артефактов, вызванных физиологическими процессами, для которых существуют синхронно зарегистрированные данные временных рядов. Дается описание алгоритма, обосновывается адекватность предложенного метода к поставленной задаче, приводятся эмпирические результаты использования системы фильтрации.

Ключевые слова: фильтрация сигналов, гибридные алгоритмы, кратномасштабный анализ, ЭЭГ, анализ независимых компонент.

Для цитаты:

Юрьев Г.А. Об опыте разработки адаптивного гибридного фильтра ЭЭГ сигнала с адаптивностью по расширенной информации // Моделирование и анализ данных. 2024. Том 14. № 2. С. 98–113. DOI: <https://doi.org/10.17759/mda.2024140206>

***Юрьев Григорий Александрович**, кандидат физико-математических наук, доцент, ведущий научный сотрудник молодежной лаборатории «Информационные технологии для психологической диагностики», Московский государственный психолого-педагогический университет (ФГБОУ ВО МГППУ), г. Москва, Российская Федерация, ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-2960-6562>, e-mail: g.a.yuryev@gmail.com

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ ФИЛЬТРАЦИИ ЭЭГ СИГНАЛА

На пути к повышению безопасности и эффективности авиационной деятельности, особое внимание уделяется точности и качеству регистрации физиологических

параметров пилотов. Использование электроэнцефалограммы (ЭЭГ) становится ключевым элементом в системах мониторинга, предназначенных для оценки функционального состояния летного состава. ЭЭГ позволяет с высокой степенью точности анализировать работу мозга, что критически важно для оперативного реагирования на потенциальные угрозы внимательности и концентрации пилотов.

В условиях, когда стандартные методы регистрации могут быть ограничены, применение сухих электродов в ЭЭГ становится альтернативой, которая обладает как преимуществами, так и определёнными недостатками. С одной стороны, такое оборудование более удобно в мобильных и экстремальных условиях, что обеспечивает возможность использования даже в полётах на военных истребителях. С другой стороны, сухие электроды более чувствительны к внешним помехам, что может существенно влиять на качество собираемых данных.

Для устранения этих помех и повышения точности данных необходимо применение сложных стратегий очистки сигнала. В нашем исследовании мы используем комбинацию независимого компонентного анализа (ICA) и вейвлет-преобразования для фильтрации и очистки ЭЭГ сигналов. Эти методы позволяют эффективно разделять истинные мозговые сигналы от артефактов, таких как движения глаз или сердечные сокращения, что особенно важно в условиях использования мобильных нейромониторинговых систем [1, 4].

Таким образом, разработка и внедрение эффективных стратегий очистки ЭЭГ сигналов является ключевым аспектом в создании надёжных систем оценки состояния пилотов. Это обеспечивает не только повышение безопасности полётов, но и способствует более глубокому пониманию физиологических процессов, происходящих в условиях высоких нагрузок и стресса.

Начальные условия

Данный раздел посвящён формальному описанию разработки и внедрения метода фильтрации и очистки ЭЭГ сигналов, позволяющего повышать точность и надёжность регистрации физиологических параметров пилотов. Это критически важно для поддержания безопасности полетов и повышения эффективности оценки функционального состояния летного состава.

Ограничения

1. **Использование сухих электродов:** Эти электроды более уязвимы к внешним помехам и движениям, что требует более сложных методов фильтрации [10, 11].
2. **Мобильность оборудования:** Оборудование должно быть адаптировано к использованию в динамичных условиях, включая потенциально реальные полеты.
3. **Время калибровки:** Необходимость предварительной калибровки оборудования перед каждым использованием в течение первых 5 минут, является неизбежной в силу специфики расчётов связанных с анализом variability сердечного ритма, что может задерживать начало непосредственного мониторинга, но даёт возможность интегрировать алгоритмы индивидуальной адаптации методов фильтрации под конкретного человека.



4. **Интеграция данных:** Сложности синхронизации и интеграции данных с разных источников (ЭЭГ, ЧСС, видеоокулограф), полностью компенсируются теми возможностями которые предоставляет нам наличие данных о таких сигналах в синхронизированном виде, именно доступность дополнительных показателей активности лежит в основе эффективности рассмотренного метода.

Входные данные

1. **ЭЭГ данные:** Сигналы, регистрируемые с помощью сухих электродов, расположенных на различных участках головы пилота.
2. **Интервалограммы ЧСС:** Данные о сердечном ритме в виде временных интервалов между последовательными сердечными сокращениями, которые предоставляют информацию о вариабельности сердечного ритма.
3. **Данные видеоокулографа:** Информация о моргании и движениях глаз, полученная с помощью видеоанализа, что помогает идентифицировать визуальные артефакты в ЭЭГ.
4. **Время для калибровки:** Предварительная калибровка системы перед началом сбора данных для адаптации под индивидуальные особенности каждого участника.

Использование данных и аналитические подходы

- **Применение ИСА:** Независимый компонентный анализ для идентификации и удаления артефактов, связанных с движением глаз и другими внешними источниками помех.
- **Вейвлет-преобразование:** Анализ частотно-временных характеристик каждого компонента ЭЭГ для более детальной очистки от шумов.

Эти подходы обеспечивают комплексный анализ и обработку физиологических данных, что способствует повышению точности оценки состояния пилотов и увеличивает безопасность полётов.

2. НЕЗАВИСИМЫЙ КОМПОНЕНТНЫЙ АНАЛИЗ

Независимый компонентный анализ (ИСА) – вычислительный метод, применяемый для разделения многомерного сигнала на аддитивные подкомпоненты, которые статистически независимы. Он часто используется для решения задачи слепого разделения сигналов [7]. Математически ИСА базируется на модели, в которой наблюдаемый многомерный вектор $x=[x_1, x_2, \dots, x_n]^T$ представляет собой линейную комбинацию независимых источников $s=[s_1, s_2, \dots, s_n]^T$ через матрицу смешивания A : $x=As$. Задача заключается в нахождении обратной матрицы $W=A^{-1}$, позволяющей восстановить независимые компоненты по наблюдаемым данным то есть $s=W_x \cdot x$.

Процесс ИСА начинается с центрирования данных, когда из наблюдаемого вектора x вычитается среднее значение. Затем следует белое преобразование, приводящее ковариационную матрицу данных к единичной форме, с помощью метода главных компонент. После этого осуществляется оптимизация для нахождения матрицы W , при которой выходы (компоненты s) являются статистически независимыми. Этот шаг достигается путем максимизации негауссовости компонентов через метрики



крутизны или негэнтропии. В случае fastICA итерационно ищется заданное количество ортогональных направлений, с применением функции контраста для максимизации негаусовости распределения.

Применение ICA весьма разнообразно. В обработке сигналов он используется для разделения аудио или видео-сигналов, удаления шумов в изображениях, в медицинских исследованиях ICA помогает анализировать ЭЭГ и МРТ данные, выделяя активность мозга и исключая артефакты. В финансовом анализе метод позволяет идентифицировать независимые факторы влияния на рынки, выделять полезные сигналы из шумовых смесей в отрасли телекоммуникаций.

Ограничениями ICA являются следующие требования:

- количество источников не должно превышать число наблюдений (что часто выполняется в прикладных задачах по анализу сигналов)
- хотя бы один источник обладает негауссовым распределением
- сами источники должны быть статистически независимы, иначе метод может давать ошибочные результаты.

Кроме того, ICA не позволяет определить масштаб или порядок извлеченных источников.

На вход ICA принимает многомерный наблюдаемый вектор данных, который может быть представлен временными рядами или сигналами. На выходе алгоритм возвращает набор независимых компонент и матрицу обратного преобразования. Эти данные могут затем использоваться для восстановления сигналов очищенных от следов взаимного влияния, точнее говоря являющихся статистически независимыми друг от друга.

3. ВЕЙВЛЕТ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

Вейвлет-преобразование представляет собой мощный математический инструмент, который анализирует данные, разлагая их на компоненты различного масштаба. Этот метод особенно ценен для анализа сигналов, характеристики которых изменяются во времени, поскольку он позволяет одновременно рассматривать временные и частотные характеристики.

Математическая основа вейвлет-преобразования заключается в использовании функций, которые сдвигаются и масштабируются на различных уровнях. Основной элемент – это так называемый «материнский вейвлет» $\psi(t)$, который изменяется для генерации серии «дочерних вейвлетов». Эти дочерние вейвлеты используются для создания вейвлет-преобразованных данных из исходного сигнала $f(t)$.

Непрерывное вейвлет-преобразование (НВП) задается формулой:

$$W_f(a, b) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \frac{1}{\sqrt{a}} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) dt$$

где a – параметр масштаба, b – параметр сдвига, и $f(t)$ – анализируемый сигнал. Здесь ψ должен удовлетворять условию нулевого среднего (адекватно быстро убывать к нулю на бесконечности и иметь компактный носитель для практического использования).



Дискретное вейвлет-преобразование (ДВП), в свою очередь, использует выборочные значения для масштаба и сдвига, что делает преобразование более управляемым и адаптируемым к компьютерной обработке:

$$W_f(a_k, b_{k,l}) = \sum_t f(t) \psi_{k,l}(t)$$

где $\psi_{k,l}(t) = \frac{1}{\sqrt{a_k}} \psi\left(\frac{t - b_{k,l}}{a_k}\right)$ – представляет собой вейвлет, масштабированный

и сдвинутый таким образом, чтобы соответствовать дискретным значениям масштаба a_k и сдвига $b_{k,l}$.

Применение вейвлет-преобразования охватывает множество сфер: от обработки изображений до анализа временных рядов в экономике и биомедицине. Например, в медицинских исследованиях вейвлеты используются для выявления необычных паттернов в ЭЭГ или ЭКГ, которые могут указывать на наличие патологических состояний.

Однако вейвлет-преобразование требует значительных вычислительных ресурсов, и выбор подходящего материнского вейвлета является критически важным, так как он напрямую влияет на качество анализа. Неправильный выбор вейвлета может привести к потере важной информации или неверной интерпретации данных.

3. ГИБРИДНЫЙ АЛГОРИТМ ФИЛЬТРАЦИИ СИГНАЛОВ ЭЭГ В ЗАДАЧАХ С РАСШИРЕННОЙ ИНФОРМАЦИЕЙ

Как было указано ранее, использование ICA подразумевает независимость (статистическую) извлекаемых компонент смеси сигналов, что обусловлено фундаментальными принципами сформулированными в центральной предельной теореме именно негаусовость распределения сигналов в случае ICA служит показателем их чистой природы. В задаче исключения артефактов записи ЭЭГ кажется ошибочным утверждение о независимости физиологических сигналов ввиду их единой природы, связанной, кроме того, с мозговой активностью. Но наличие дополнительных сведений о топологии размещения артефактов в записи, позволяет нам точно установить участки, содержащие смесь сигнала ЭЭГ и дополнительного шумового сигнала.

Процедура фильтрации начинается с применения полосового фильтра, исключающего из сигнала составляющие, находящиеся вне частотного диапазона который осмысленно можно проинтерпретировать в рамках изучения электрической активности мозга.

Далее обобщённая схема работы алгоритма представлена на рисунке 1.

ICA осуществляет разделение сигнала на компоненты, каждая из них оценивается на предмет связи с сердечной деятельностью или ГДА, на основе информации о временном интервале в котором происходили связанные события – закрытие глаз, появление пика R нового кардиоцикла. Поиск артефактов осуществляется скользящими окнами длины которых пропорциональны частотам искомым процессам. В окнах осуществляется дискретное вейвлет преобразование, которое позволяет не только упростить

структуру входных данных для алгоритмов автонастройки фильтрации, но и упрощают задачу удаления шумовых компонент, т.к. позволяют выполнить его обнулением коэффициентов ассоциированных с шумовой составляющей сигнала. Затем происходит обратное вейвлет преобразование и рекомпозиция сигнала из результатов ICA.

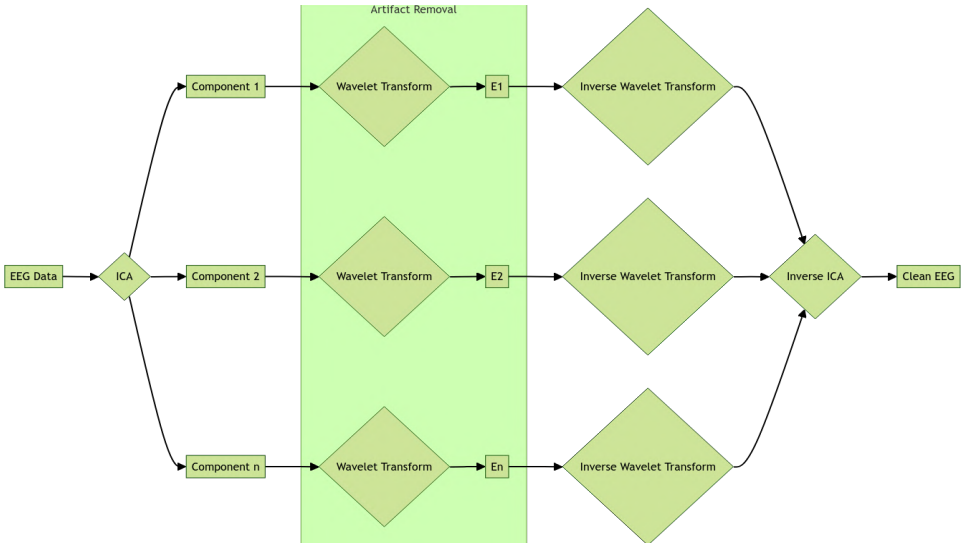


Рис. 1. Схема разделения сигнала на артефактные компоненты

Вычислительную эффективность предлагаемого метода авто калибровки фильтра можно улучшить за счёт внедрения гибридного подхода в поиску и устранению артефактов применяющего стратегию идентификации и фильтрации результатов комбинирующую пороговые методы с методами машинного обучения при поиске шумовых компонент, на данном этапе настройка метода фильтрации под каждого респондента осуществляется с использованием в качестве метода выявления шумовых сигналов случайного леса, относительно сравнительно дорогого в вычислительном плане (рис. 2).

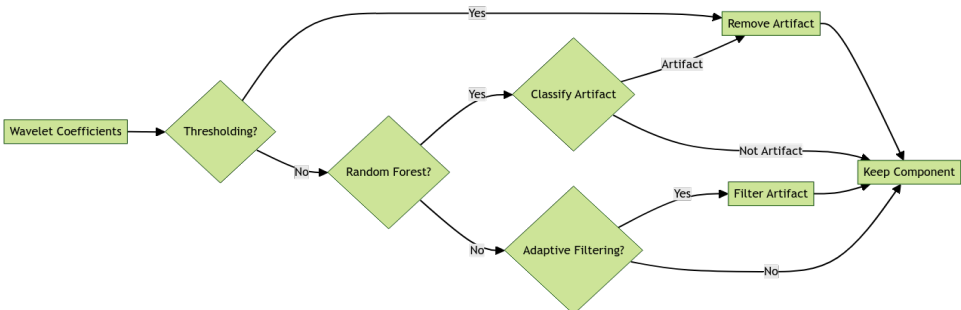


Рис. 2. Обобщённая схема фильтрации артефактных компонент на базе алгоритмов машинного обучения



4. ДЕТАЛЬНОЕ ОПИСАНИЕ ГИБРИДНОГО АЛГОРИТМА

Интеграция методов независимого компонентного анализа (ICA) и вейвлет-преобразования для создания гибридного алгоритма фильтрации артефактов с адаптивной настройкой на каждого респондента является мощным подходом в анализе сложных биомедицинских сигналов, таких как ЭЭГ. Эта интеграция обеспечивает устранение широкого спектра артефактов, учитывая как временные, так и частотные характеристики данных.

1. Предварительная обработка данных ЭЭГ

Первоначальная обработка данных ЭЭГ критически важна для обеспечения точности последующего анализа и фильтрации сигналов. Этапы предобработки включают полосовую фильтрацию, нормализацию, удаление артефактов и сегментацию. Каждый из этих этапов имеет свои особенности и необходимость, обусловленные характеристиками сигналов ЭЭГ.

1.1. Полосовая фильтрация

Полосовая фильтрация – это процесс удаления частот вне интересующего диапазона. ЭЭГ сигналы обычно содержат полезную информацию в диапазоне от 1 до 50 Гц, хотя этот диапазон может варьироваться в зависимости от исследовательских задач. Важно исключить высокочастотные шумы, такие как помехи от электрических сетей (обычно 50 или 60 Гц), а также низкочастотные колебания, такие как медленные артефакты движения. Фильтрация выполняется с использованием полосового фильтра, который пропускает только сигналы внутри заданного диапазона и значительно уменьшает влияние несущих помех.

2. Нормализация

Нормализация данных ЭЭГ необходима для уменьшения различий в амплитуде сигналов, которые могут возникать из-за индивидуальных анатомических различий между субъектами или различий в настройках электродов. Процесс нормализации включает корректировку данных таким образом, чтобы их среднее значение стремилось к нулю, и масштабирование амплитуды для достижения одинаковой вариативности. Это улучшает сравнимость данных между различными сеансами или субъектами.

3. Удаление грубых артефактов

Удаление артефактов, таких как электрические помехи от других устройств, движения головы или мигание, проводится на этапе предварительной обработки для уменьшения их влияния на анализ. Для этого используются различные методы, включая автоматическое обнаружение и отсечение аномальных значений, которые выходят за пределы установленных порогов. Также могут применяться алгоритмы, основанные на статистическом анализе изменений амплитуды и частоты сигнала.

4. Сегментация

Сегментация ЭЭГ данных важна для анализа определенных интервалов времени, что особенно актуально в исследованиях, где анализируется реакция на стимул. Сегментация позволяет изолировать определенные события или состояния, такие как реакция

на визуальный или аудиовизуальный стимул. Это упрощает анализ данных, позволяя фокусироваться на конкретных временных интервалах, которые представляют интерес.

Эти этапы предварительной обработки необходимы для устранения факторов, которые могут исказить результаты анализа ЭЭГ. Полосовая фильтрация и нормализация гарантируют, что анализ будет фокусироваться на релевантных сигналах и будет менее подвержен внешним и внутренним помехам. Удаление артефактов и сегментация данных обеспечивают чистоту анализа и точность интерпретации результатов. Все это вместе значительно повышает качество и надежность выводов, которые можно сделать на основе данных ЭЭГ. **Применение ИСА в обработке данных ЭЭГ**

Независимый компонентный анализ (ИСА) играет центральную роль в процессе обработки и анализа данных электроэнцефалографии (ЭЭГ). Применение ИСА позволяет разделять смешанные сигналы на статистически независимые компоненты. Этот метод особенно эффективен для выделения и устранения артефактов, таких как электромиографические шумы, моргания и другие внешние помехи, которые могут значительно исказить данные ЭЭГ.

Принцип работы ИСА

В контексте ЭЭГ ИСА используется для разложения смешанных сигналов, записанных с множества электродов, на отдельные источники. Каждый компонент, полученный с помощью ИСА, представляет собой линейную комбинацию исходных электродных сигналов, которые предполагаются статистически независимыми друг от друга. Это делает ИСА мощным инструментом для идентификации артефактов, поскольку они часто проявляются в данных независимо от нейронной активности.

Этапы применения ИСА к ЭЭГ данным

1. **Сбор данных и их предварительная обработка:** Прежде всего, данные ЭЭГ должны быть должным образом подготовлены, что включает фильтрацию, нормализацию и удаление явных артефактов.
2. **Выполнение ИСА:** Затем данные подвергаются процессу ИСА, который разделяет записи ЭЭГ на независимые компоненты. Это разделение позволяет локализовать источники сигналов, в том числе и те, что связаны с артефактами.
3. **Идентификация артефактных компонентов:** После применения ИСА анализируются полученные компоненты для определения тех, которые связаны с артефактами. Это может быть осуществлено на основе заранее известных характеристик шумов, таких как частотные диапазоны или характерные временные паттерны (далее описывается подход использующий вейвлет представления выделенных компонент для выполнения идентификации артефактов и их удаления).

Применение ИСА к данным ЭЭГ [13–15] позволяет улучшить чистоту и точность анализа за счёт тщательного устранения артефактов, которые могут существенно повлиять на диагностическую и исследовательскую ценность результатов. Это особенно важно в клинических исследованиях и при мониторинге состояний, где требуется высокая точность данных для корректной интерпретации нейронной активности. ИСА



способствует более точному распознаванию артефактов физиологической природы и как следствие получению более полной и точной картины мозговой активности [4].

Вейвлет-преобразование для дополнительной фильтрации

Вейвлет-преобразование – это метод, позволяющий изучать сигналы в различных масштабах, что особенно полезно для данных ЭЭГ, характеризующихся нестационарностью и наличием кратковременных событий. Применение этого метода в обработке данных ЭЭГ позволяет дополнительно фильтровать артефакты после выполнения независимого компонентного анализа (ICA).

Принцип работы вейвлет-преобразования

Вейвлет-преобразование разлагает сигнал на компоненты, представляющие его на разных масштабах (частотах), что обеспечивает детальный анализ в режиме «время-частота». Это разложение основано на сдвиге и масштабировании «материнского» вейвлета, который сравнивается с анализируемым сигналом на каждом уровне разложения. Коэффициенты преобразования отображают вклад определенного масштаба в анализируемый сигнал в данной временной точке.

Этапы применения вейвлет-преобразования к ЭЭГ

1. **Подготовка компонентов ЭЭГ:** Компоненты, выделенные с помощью ICA, обрабатываются вейвлет-преобразованием для дополнительного анализа. Каждый компонент представляется как временной ряд, подлежащий разложению на разные уровни масштабов.
2. **Выбор материнского вейвлета и разложение:** Исходя из характерных особенностей сигнала ЭЭГ, выбирается подходящий материнский вейвлет и задаются масштабы разложения. Например, для выделения артефактов моргания лучше всего подходят вейвлеты с коротким временным охватом, поскольку моргание представляет собой транзитный сигнал.
3. **Детектирование артефактов:** После разложения компонента на вейвлеты выполняется анализ коэффициентов преобразования. Артефакты идентифицируются по их характерным временным и частотным особенностям. Это позволяет эффективно обнаруживать и изолировать артефакты, которые сложно выявить с помощью стандартных фильтров или методов анализа временных рядов.
4. **Удаление или корректировка артефактов:** После идентификации артефактных коэффициентов они удаляются или корректируются с использованием пороговых методов или других алгоритмов. Затем выполняется обратное вейвлет-преобразование, чтобы восстановить скорректированный сигнал.

Вейвлет-преобразование обеспечивает высокую точность в идентификации и фильтрации артефактов благодаря возможности анализа временных и частотных характеристик сигналов. Это позволяет корректировать кратковременные и нестационарные артефакты, такие как движения глаз, мышечные сокращения или шумы окружающей среды. В сочетании с ICA вейвлет-преобразование обеспечивает комплексный подход к фильтрации данных ЭЭГ, повышая точность диагностики и анализа нейронной активности.

Реконструкция сигнала после фильтрации

Реконструкция сигнала является ключевым этапом в процессе обработки данных ЭЭГ, следующим за применением методов фильтрации, таких как независимый компонентный анализ (ICA) и вейвлет-преобразование. Этот процесс важен для восстановления чистого сигнала, очищенного от артефактов, для последующего анализа и клинического использования. Реконструкция сигнала позволяет восстановить данные ЭЭГ в их первоначальной форме, сохраняя всю релевантную информацию о мозговой активности, но без искажений, вызванных шумами и внешними воздействиями.

Процесс реконструкции сигнала

Реконструкция сигнала после фильтрации обычно включает несколько ключевых шагов:

1. **Инверсия фильтрации:** После идентификации и удаления артефактных компонентов, полученных с помощью ICA и вейвлет-преобразования [9], необходимо провести инверсию этих методов фильтрации для восстановления первоначальных данных ЭЭГ. Это включает обратное применение матрицы смешивания в ICA для восстановления исходных сигналов из независимых компонент. В случае вейвлет-преобразования [5], требуется выполнение обратного вейвлет-преобразования для синтеза сигнала из его вейвлет-коэффициентов.
2. **Синтез данных:** После обратной операции компоненты сигнала, очищенные от артефактов, собираются вместе для формирования единого, чистого сигнала ЭЭГ. Это требует точного выравнивания компонент во времени и амплитуде, чтобы обеспечить согласованность и непрерывность реконструированного сигнала.
3. **Проверка и корректировка:** Реконструированный сигнал подвергается проверке на предмет сохранения всех значимых мозговых сигналов и полного удаления артефактов. В этом процессе может потребоваться дополнительная корректировка, особенно если в процессе реконструкции были внесены искажения или пропущены значимые данные.

Процесс реконструкции необходим для обеспечения того, чтобы анализируемые данные ЭЭГ были как можно более точными и чистыми. Ошибки в реконструкции могут привести к неверной интерпретации нейронной активности, что критично в клинических условиях и научных исследованиях. Реконструкция позволяет ученым и врачам работать с данными, которые максимально приближены к истинному состоянию мозговой активности, что важно для диагностики, мониторинга и разработки медицинских вмешательств.

5. АДАПТИВНАЯ ФИЛЬТРАЦИЯ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ГИБРИДНОГО АЛГОРИТМА НА ОСНОВЕ ICA И ВЕЙВЛЕТ-ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

Общий принцип адаптивной фильтрации

Адаптивная фильтрация в контексте обработки данных ЭЭГ направлена на динамическую настройку алгоритмов фильтрации для оптимизации их эффективности



в реальном времени или в различных условиях эксплуатации. Цель состоит в том, чтобы алгоритм мог самостоятельно корректировать свои параметры в ответ на изменения во входных данных или в реакции системы. Это особенно важно в приложениях, где физиологические сигналы подвержены значительным изменениям из-за внешних условий, движения респондента или других динамических факторов.

Применение гибридного алгоритма в адаптивной фильтрации

Гибридный алгоритм, сочетающий ИСА и вейвлет-преобразование, обеспечивает мощный инструмент для адаптивной фильтрации, поскольку может точно извлекать и корректировать артефакты, адаптируясь к изменениям в сигнале. Процесс адаптивной фильтрации с применением этого алгоритма включает несколько ключевых аспектов:

1. **Детектирование изменений в сигнале:** Алгоритм постоянно анализирует входящие данные на предмет наличия новых или измененных артефактов, которые могут возникнуть из-за изменений в условиях записи, состоянии респондента или других факторов.
2. **Автоматическая настройка параметров фильтрации:** На основе обнаруженных изменений алгоритм адаптирует параметры ИСА и вейвлет-преобразования, такие как выбор вейвлет-функции, пороги для удаления артефактов, и другие ключевые настройки, чтобы оптимизировать процесс фильтрации для текущих условий.
3. **Повторное применение фильтрации:** После адаптации параметров, фильтрация повторяется с обновленными настройками, чтобы обеспечить максимальное удаление артефактов при минимальной потере полезной информации.
4. **Обратная связь и мониторинг эффективности:** Алгоритм постоянно оценивает качество фильтрации, используя оценку коэффициента сигнал/шум и анализ наблюдаемого сигнала на предмет соответствия ожидаемым показателям ЭЭГ. Это позволяет динамически корректировать процесс фильтрации в зависимости от его эффективности.

Применение адаптивной фильтрации в обработке ЭЭГ обеспечивает ряд преимуществ, особенно в условиях, где стандартные методы фильтрации могут быть неэффективны из-за высокой изменчивости сигналов или сложности условий записи. Это включает клинические испытания, мониторинг в реальном времени, исследования в условиях движения и другие приложения, где важна высокая точность и надежность данных.

Адаптивная фильтрация позволяет не только повысить качество данных, но и сократить время, необходимое для постобработки, улучшая тем самым эффективность всего процесса анализа данных.

Результаты работы алгоритма на разных этапах отражены на рисунке 3.

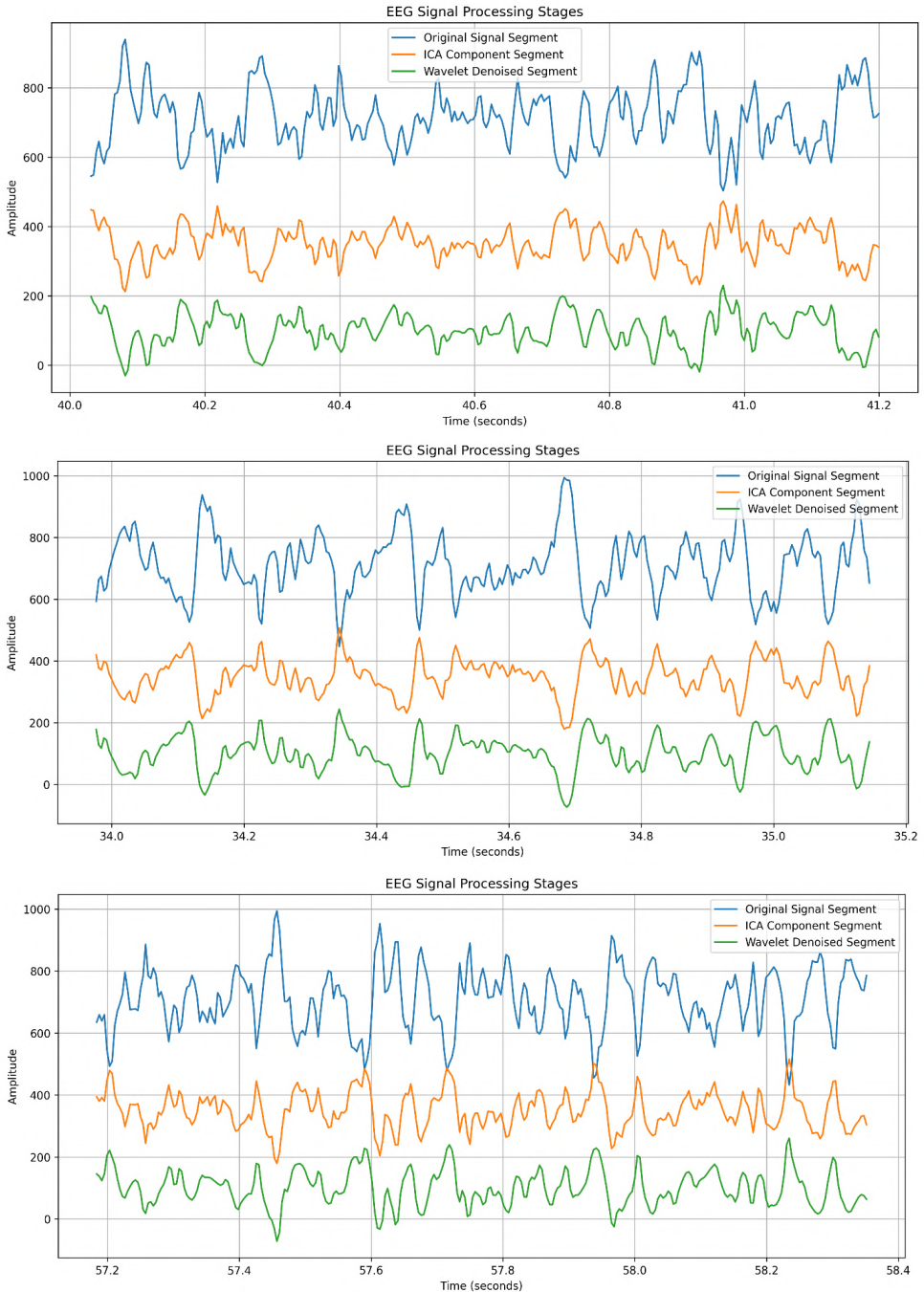


Рис. 3. Результаты работы алгоритма фильтрации сигнала на реальной записи



6. РЕЗУЛЬТАТЫ

В ходе проведенного исследования был разработан и апробирован гибридный алгоритм фильтрации артефактов ЭЭГ, который интегрирует методы независимого компонентного анализа (ICA) и вейвлет-преобразования. Этот подход позволил достичь значительного улучшения в чистоте сигналов ЭЭГ, что особенно важно в условиях использования сухих электродов и в мобильных нейромониторинговых системах.

Основные достижения

1. **Улучшение качества данных ЭЭГ:** Применение гибридного алгоритма позволило эффективно удалять артефакты, связанные с физиологическими процессами, такими как мигание глаз и сердечные сокращения. Это стало возможным благодаря точной идентификации и фильтрации артефактных компонентов.
2. **Адаптивность алгоритма:** Внедрение адаптивной фильтрации с автоматической калибровкой параметров позволило системе эффективно адаптироваться к индивидуальным особенностям каждого респондента и динамически меняющимся условиям эксплуатации.
3. **Вычислительная эффективность:** Использование гибридного подхода оказалось вычислительно эффективным за счёт оптимизации процессов идентификации и фильтрации шумовых компонентов, что способствовало сокращению времени обработки данных.

7. ВЫВОДЫ

Разработанный гибридный алгоритм фильтрации артефактов ЭЭГ демонстрирует высокую эффективность в задачах мониторинга состояния пилотов и может быть рекомендован для использования в клинических исследованиях и других приложениях, где требуется высокая точность регистрации электроэнцефалографических данных. Алгоритм обладает хорошей адаптивностью и может быть настроен под конкретные условия и требования пользователя. Будущие исследования могут сосредоточиться на дальнейшем улучшении алгоритмов машинного обучения для ещё более точной идентификации артефактов, а также на расширении функциональности системы с возможностью её использования в более широком спектре медицинских и промышленных приложений.

Литература

1. A robust adaptive denoising framework for real-time artifact removal in EEG. Houston Methodist Research Institute.
2. Allen JE, Cross K. Computational Models for Reducing Noise in EEG Data. *Neuroscience Letters*. 2022;760:136012. doi:10.1016/j.neulet.2021.136012.
3. Davis F, Swartz E. Evaluation of Dry Electrodes in Long-term EEG and Neural Monitoring Applications. *Journal of Neuroscience Methods*. 2021;345:108972. doi:10.1016/j.jneumeth.2020.108972.



4. *Garces Correa A, Laciari E, Patino HD, Valentinuzzi ME.* Artifact removal from EEG signals using adaptive filters in cascade. *J Phys Conf Ser.* 2007;90(1):012081. doi:10.1088/1742-6596/90/1/012081.
5. *Green D, Mason A, Tompkins W.* Adaptive Filtering Techniques for Noise Reduction and AC Interference Minimization in Electrocardiogram Signals. *IEEE Transactions on Biomedical Engineering.* 2018;65(9):2023–2032. doi:10.1109/TBME.2018.2813241.
6. *Hybrid Multi-Channel EEG Filtering Method for Ocular Artifact Removal.* Oxford Academic.
7. *James JR, O'Neil K.* Independent Component Analysis of EEG data. *Neuroscience Methods.* 2018;306:78–94. doi:10.1016/j.neumeth.2018.05.022.
8. *Jiang X, Bian GB, Tian Z.* Removal of Artifacts from EEG Signals: A Review. *Sensors.* 2019;19(5):987. doi:10.3390/s19050987.
9. *Lee T, Girolami M.* A Comprehensive Review of Wavelet Transform Techniques for Signal Processing in EEG-based Brain-Computer Interfaces. *Computational Intelligence and Neuroscience.* 2019;2019:6573281. doi:10.1155/2019/6573281.
10. *Morris K, Patel C.* Real-Time EEG Signal Monitoring Under Adaptive Filtering Framework. *Biomedical Signal Processing and Control.* 2020;59:101894. doi:10.1016/j.bspc.2020.101894.
11. *Patel S, Hughes R, Hester T.* The Development and Performance of Dry Electrodes for EEG Measurement. *IEEE Transactions on Biomedical Engineering.* 2018;65(6):1373–1380. doi:10.1109/TBME.2017.2769700.
12. *Removal of Artifacts from EEG Signals: A Review.* MDPI.
13. *Smith H, Brown M.* Advanced Signal Processing Techniques for Artifact Removal in EEG. *Journal of Neural Engineering.* 2020;17(4):046014. doi:10.1088/1741-2552/ab8d52.
14. *Thompson M, Smith I.* Neural Networks for Signal Processing in EEG: An Overview of Applications and Challenges. *Journal of Neural Engineering.* 2021;18(2):021001. doi:10.1088/1741-2552/abc8fe.
15. *Wang Y, Zhou L.* Signal Enhancement Techniques for EEG Monitoring: Applications and Challenges. *Applied Neurobiology.* 2020;46(4):402–417. doi:10.1007/s12035-020-01934-7.



The Experience of Developing an Adaptive Hybrid EEG Signal Filter with Extended Information Adaptability

Grigory A. Yuryev*

Moscow State University of Psychology and Education (MSUPE), Moscow, Russia

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-2960-6562>

e-mail: g.a.yuryev@gmail.com

This article discusses the development of a hybrid EEG signal filter based on independent component analysis (ICA) and wavelet transform. The purpose of the filter is to remove artifacts from EEG signals caused by physiological processes that can be identified by synchronous time series data. The article describes the algorithm and justifies the suitability of the method for the task. Empirical results from real experimental studies are also presented.

Keywords: signal filtering, adaptive algorithms, multi-scale analysis, electroencephalography (EEG), independent component analysis.

For citation:

Yuryev G.A. The Experience of Developing an Adaptive Hybrid EEG Signal Filter with Extended Information Adaptability. *Modelirovanie i analiz dannykh = Modelling and Data Analysis*, 2024. Vol. 14, no. 2, pp. 98–113. DOI: <https://doi.org/10.17759/mda.2024140206> (In Russ., abstr. in Engl.).

References

1. A robust adaptive denoising framework for real-time artifact removal in EEG. Houston Methodist Research Institute.
2. Allen JE, Cross K. Computational Models for Reducing Noise in EEG Data. *Neuroscience Letters*. 2022;760:136012. doi:10.1016/j.neulet.2021.136012.
3. Davis F, Swartz E. Evaluation of Dry Electrodes in Long-term EEG and Neural Monitoring Applications. *Journal of Neuroscience Methods*. 2021;345:108972. doi:10.1016/j.jneumeth.2020.108972.
4. Garces Correa A, Laciari E, Patino HD, Valentinuzzi ME. Artifact removal from EEG signals using adaptive filters in cascade. *J Phys Conf Ser*. 2007;90(1):012081. doi:10.1088/1742-6596/90/1/012081.
5. Green D, Mason A, Tompkins W. Adaptive Filtering Techniques for Noise Reduction and AC Interference Minimization in Electrocardiogram Signals. *IEEE Transactions on Biomedical Engineering*. 2018;65(9):2023–2032. doi:10.1109/TBME.2018.2813241.

***Grigory A. Yuryev**, PhD (Physics and Mathematics), Associate Professor, Leading Researcher, Youth Laboratory Information Technologies for Psychological Diagnostics, Moscow State University of Psychology and Education (MSUPE), Moscow, Russia, ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-2960-6562>, e-mail: g.a.yuryev@gmail.com



6. Hybrid Multi-Channel EEG Filtering Method for Ocular Artifact Removal. Oxford Academic.
7. James JR, O'Neil K. Independent Component Analysis of EEG data. *Neuroscience Methods*. 2018;306:78–94. doi:10.1016/j.neumeth.2018.05.022.
8. Jiang X, Bian GB, Tian Z. Removal of Artifacts from EEG Signals: A Review. *Sensors*. 2019;19(5):987. doi:10.3390/s19050987.
9. Lee T, Girolami M. A Comprehensive Review of Wavelet Transform Techniques for Signal Processing in EEG-based Brain-Computer Interfaces. *Computational Intelligence and Neuroscience*. 2019;2019:6573281. doi:10.1155/2019/6573281.
10. Morris K, Patel C. Real-Time EEG Signal Monitoring Under Adaptive Filtering Framework. *Biomedical Signal Processing and Control*. 2020;59:101894. doi:10.1016/j.bspc.2020.101894.
11. Patel S, Hughes R, Hester T. The Development and Performance of Dry Electrodes for EEG Measurement. *IEEE Transactions on Biomedical Engineering*. 2018;65(6):1373–1380. doi:10.1109/TBME.2017.2769700.
12. Removal of Artifacts from EEG Signals: A Review. MDPI.
13. Smith H, Brown M. Advanced Signal Processing Techniques for Artifact Removal in EEG. *Journal of Neural Engineering*. 2020;17(4):046014. doi:10.1088/1741-2552/ab8d52.
14. Thompson M, Smith I. Neural Networks for Signal Processing in EEG: An Overview of Applications and Challenges. *Journal of Neural Engineering*. 2021;18(2):021001. doi:10.1088/1741-2552/abc8fe.
15. Wang Y, Zhou L. Signal Enhancement Techniques for EEG Monitoring: Applications and Challenges. *Applied Neurobiology*. 2020;46(4):402–417. doi:10.1007/s12035-020-01934-7.

Получена 13.05.2024

Принята в печать 27.05.2024

Received 13.05.2024

Accepted 27.05.2024

УДК 371.3

Оценка влияния психологических параметров на результаты анкетирования студентов

Червен-Водали Е.Б.*

Московский государственный психолого-педагогический университет
(ФГБОУ ВО МГППУ), г. Москва, Российская Федерация
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-6871-9105>
e-mail: cervenvodali@mgppu.ru

Сидорова В.Б.**

Московский государственный психолого-педагогический университет
(ФГБОУ ВО МГППУ), г. Москва, Российская Федерация
ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-6391-5361>
e-mail: sidorovavb@mgppu.ru

Антипова С.Н.***

Московский государственный психолого-педагогический университет
(ФГБОУ ВО МГППУ), г. Москва, Российская Федерация
ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-6642-7953>
e-mail: antipovasn@mgppu.ru

В статье описаны процесс анкетирования с целью собрать в обобщенном виде студенческие оценки преподавания учебных курсов, влияние фактора возраста на качество преподавания дисциплин на основании построенной математической модели по выбранным критериям и ее анализ.

Ключевые слова: математическая модель, анкетирование.

Для цитаты:

Червен-Водали Е.Б., Сидорова В.Б., Антипова С.Н. Оценка влияния психологических параметров на результаты анкетирования студентов // Моделирование и анализ данных. 2024. Том 14. № 2. С. 114–123. DOI: <https://doi.org/10.17759/mda.2024140207>

***Червен-Водали Елена Борисовна**, преподаватель кафедры прикладной информатики и мультимедийных технологий, Московский государственный психолого-педагогический университет (ФГБОУ ВО МГППУ), г. Москва, Российская Федерация, ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-6871-9105>, cervenvodali@mgppu.ru

****Сидорова Валерия Борисовна**, преподаватель кафедры прикладной информатики и мультимедийных технологий, Московский государственный психолого-педагогический университет (ФГБОУ ВО МГППУ), г. Москва, Российская Федерация, ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-6391-5361>, e-mail: sidorovavb@mgppu.ru



****Антипова Светлана Николаевна*, заместитель декана по внеучебной работе факультета информационных технологий, Московский государственный психолого-педагогический университет (ФГБОУ ВО МГППУ), г. Москва, Российская Федерация, ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-6642-7953>, e-mail: antipovasn@mgppu.ru

1. ВВЕДЕНИЕ

Вопрос о качестве образования всегда является актуальным. Мир движется и развивается, образование не только должно отвечать меняющимся запросам, но и опережать его развитие. В Федеральном законе от 29.12.2012 № 273-ФЗ «Об образовании в Российской Федерации» в части 29 статьи 2 качество образования трактуется как комплексная характеристика образовательной деятельности и подготовка обучающегося, которая выражает степень соответствия федеральным государственным образовательным стандартам и потребностям физического или юридического лица, в интересах которого осуществляется образовательная деятельность, в том числе степень достижения планируемых результатов образовательной программы.

Современное образование сейчас решает важнейшую задачу формирования академических знаний обучающихся, учит адаптироваться в быстро меняющемся мире. И качественное образование должно гарантировать успешность, востребованность и конкурентоспособность.

Роль преподавателя сегодня очень велика, независимо от развития образовательных и информационных технологий, и оценка качества его работы является важной составляющей системы оценки деятельности всего образовательного процесса и носит системный характер. Для контроля качества образования и ее участников постоянно проводятся различные независимые системы оценки, это тестирования, анкетирования, срезы и т.д., но все ли результаты таких независимых оценок качества образования мы должны принимать и внедрять в наше образование, всегда ли это дает стопроцентное попадание в нужный результат. Независимые оценки призваны оценивать такие составляющие, как педагогическую, научно-методическую, воспитательную, организационно-управленческую и общественную деятельность не только в системе, но и во времени. При оценке деятельности работы преподавателя (руководством, коллегами, студентами, экспертами) одной из основных проблем является субъективизм.

2. СТУДЕНЧЕСКАЯ ОЦЕНКА ПРЕПОДАВАНИЯ ДИСЦИПЛИН НА ФАКУЛЬТЕТЕ ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ МГППУ

В конце каждого семестра в МГППУ на факультете информационных технологий проходит очередной этап студенческой оценки преподавания учебных курсов. По методологии опроса в анкетировании принимают участие студенты очной формы обучения, обучающиеся по учебным программам бакалавриата, специалитета и магистратуры. Студентам предлагается оценить преподавание учебных дисциплин,



которые они изучали в предыдущем семестре по ряду критериев, среди которых «ясность, логичность и доступность изложения материала», «умение вызвать и поддержать интерес к предмету», «использование примеров из профессиональной деятельности, иллюстрирующих связь изучаемого материала с будущей специальностью», «четкость формулирования критериев оценки знаний и требований к студентам», «объективность в оценках знаний студентов» и т.д.. После завершения анкетирования проводится обработка полученных результатов, в ходе которой отбираются только те анкеты, которые удовлетворяют двум условиям: посещение студентами не менее 25% занятий с оцениваемым преподавателем и достижение необходимого порогового количества заполненных анкет на одного преподавателя. Для всех преподавателей рассчитываются средние оценки по всем изучаемым критериям преподавания, каждая из которых, в свою очередь, проверяется на однородность мнений с помощью коэффициента вариации, показывающего, насколько солидарны студенты при оценке качеств преподавателя. Для анализа рассчитываются интегральные показатели в целом по университету, в целом по каждому учебному подразделению и персонально по каждому преподавателю. Кроме того, в отношении преподавателя, учебного процесса студенты могли оставить свои комментарии или замечания в свободной форме. Все комментарии и замечания студентов передаются, с соблюдением принципа анонимности, руководству университета и факультета.

Всем сотрудникам, участвующим в разработке или администрировании системы опроса, специально выпущенным приказом запрещается разглашать детальную информацию об оценках, которые дали студенты. В анкете есть «дополнительный блок вопросов». Эти вопросы меняются от исследования к исследованию и касаются тем, по которым руководство Университета планирует принимать управленческие решения. Какими они будут, зависит от ответов студентов. Результаты оценивания предоставляются руководству Университета и факультетов только в обобщенном виде. Анализируя ответы студентов на анкеты, руководство может принимать решения о поощрении, о необходимости повышения квалификации, переподготовки преподавателей и т.п.

А, система повышения квалификации ППС, в свою очередь, должна предусматривать организационно-методическую поддержку педагогическим новациям и ответственность развития профессиональных качеств педагогических кадров.

С одной стороны, учитывая результаты анкетирования, преподаватели также могут проанализировать свою работу, например, подкорректировать программу, пересмотреть в целом свое отношение к учебному и воспитательному процессу, пройти курсы повышения квалификации в своей области и т.д. С другой же стороны, на многолетнем опыте проведения анкетирования мы видим, что не всегда преподаватели, имеющие высокие звания, степени и большой опыт работы, могут иметь высокие оценки студентов. Очень сложно получить объективную оценку реальной картины проведения учебных занятий. Никакие открытые занятия или простые посещения администрацией учебных занятий, анкетирования не дадут объективную оценку отношений главных участников образовательного процесса – преподавателей и студентов. И здесь встает вполне уместный вопрос: а судьи кто? Среди студентов есть те,



кто не обладает необходимым уровнем знаний и опыта, чтобы иметь право давать оценку преподавателям с высшим образованием, званием или ученой степенью. При примитивном отношении студентов к анкете ответы будут зависеть только от того, «добрый» или «злой» преподаватель. Часто вопросы в анкетах предполагают субъективный подход: не задумываясь над содержанием вопроса, студент по инерции ставит оценку, только исходя из общего впечатления, которое оставил преподаватель, учитывая сложность дисциплины или полученную оценку на экзамене.

Более объективная оценка может быть получена при условии проведения систематического мониторинга деятельности преподавателя, учитывая при этом мнение коллег, экспертов, неформальное общение с родителями и студентами и отзывы выпускников.

В последнее время на повестке в вузах все чаще встает вопрос о возрастных критериях профессорско-преподавательского состава. Старение ППС называют одной из главных проблем высшего образования. Процент возрастных преподавателей сейчас выше, чем в советские годы, но искусственная замена «стариков» на «молодежь» может привести к обрушению качества образования.

Попробуем разобраться в этом вопросе, разберем на примере результатов анкетирования студентов факультета информационных технологий, как влияет фактор возраста на качество преподавания дисциплин.

В соответствии с методикой исследования для оценивания студентами преподавания учебных курсов в опрос были включены не все преподаватели учебного подразделения, а только те, которые проводили учебные занятия в учебных группах студентов в соответствии с приказом № 06–14/684 от 30.05.2023 г. «О проведении оценки преподавания учебных курсов». Студенты должны были оценить 24 преподавателя учебного подразделения по следующим критериям:

- 1 – ясность, логичность и доступность излагаемого учебного материала;
- 2 – использование на занятиях примеров из профессиональной деятельности;
- 3 – использование в преподавании современных научных знаний/данных современных эмпирических исследований;
- 4 – умение вызывать и поддерживать интерес к предмету;
- 5 – эффективность использования времени на учебных занятиях;
- 6 – умение общаться с аудиторией;
- 7 – четкость формулирования критериев оценки знаний и требований к студентам;
- 8 – объективность в оценках знаний студентов.

3. ПОСТРОЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ПО ВЫБРАННЫМ КРИТЕРИЯМ И ЕЕ АНАЛИЗ

Для оценки уровня статистической значимости исследуемого фактора возраста был применен метод моделирования структурными уравнениями. Факторная модель представлена в виде путевой диаграммы на рисунке 1. В качестве наблюдаемых параметров используются три указанных выше критерия для двух групп наблюдаемых, («1» и «2»). Рассматриваемые оценки опираются на результаты исследования студентов



по преподаванию учебных курсов. В анкетировании всего приняли участие 24 преподавателя, возьмем результаты по 3 критериям: ясность, логичность и доступность излагаемого учебного материала; умение вызывать и поддержать интерес к предмету; умение общаться с аудиторией. «Ясность, логичность и доступность излагаемого учебного материала» зададим переменной А, «Умение вызывать и поддержать интерес к предмету» – переменной Q, «Умение общаться с аудиторией»- переменной В. Группы наблюдаемых были распределены по возрасту – категория до 50 лет и больше 50 лет. Разберемся, как фактор возраста влияет на наблюдаемые критерии.

В нашей модели латентные переменные P1 и P2 представляют факторы, отвечающие за успеваемость и посещаемость студентов, отношение к преподавателю, умение коммуницировать в коллективе, не зависящие от фактора возраста, для показателей «Ясность, логичность и доступность излагаемого учебного материала» и «Умение общаться с аудиторией», соответственно. Латентная переменная M представляет фактор возраста. Латентные переменные S1 и S2 представляют собой объединенные факторы, сочетающие указанные выше факторы, а латентные переменные E1, E2 и E3 представляют собой ошибки измерения соответствующих наблюдаемых переменных. Факторные нагрузки a, b, q1, q2, m, p1, p2, e1, e2, e3 и корреляция γ являются свободными параметрами модели, которые необходимо идентифицировать.

Матрица выборочных ковариаций наблюдаемых переменных для группы 1 рассчитывается с использованием фактора возраста. Соответственно, аналогичная матрица для группы 2 получена испытуемых без использования фактора возраста.

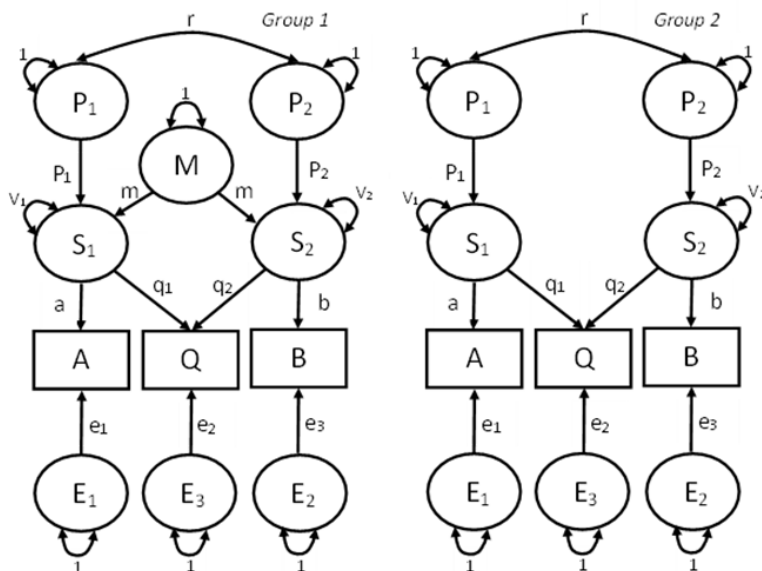


Рис. 1. Путьевые диаграммы: две группы, представляющие факторные модели с фактором возраста M и без него

Свободные параметры данной факторной модели идентифицируются методом максимального правдоподобия, при этом следующие статистики применяются в качестве критериев согласия, минимизируемых для обеих групп:

$$F = F_+ + F_-,$$

$$F_+ = [\ln|\Sigma_+| - \ln|C_+| + \text{tr}(S_+ \Sigma_+^{-1}) - n] (N_+ - 1),$$

$$F_- = [\ln|\Sigma_-| - \ln|C_-| + \text{tr}(S_- \Sigma_-^{-1}) - n] (N_- - 1),$$

где F – критерий максимального правдоподобия, при этом F_+ и F_- являются его групповыми компонентами; C_+ и C_- – выборочные матрицы ковариаций наблюдаемых переменных для группы 1 и группы 2, соответственно; Σ_+ и Σ_- – соответствующие прогнозируемые матрицы ковариаций наблюдаемых переменных; $|\Sigma_+|$, $|\Sigma_-|$, $|C_+|$ и $|C_-|$ являются детерминантами соответствующих матриц; tr – след соответствующей матрицы; N_+ и N_- – объёмы выборок, используемые для расчета матриц C_+ и C_- соответственно; n – количество наблюдаемых переменных в группе ($n=3$). Элементы прогнозируемых матриц ковариаций для рассматриваемых групп представляются аналитическими выражениями, составленными из свободных параметров, и имеют следующий вид (наблюдаемые параметры приведены в следующем порядке: A, B, Q):

$$\Sigma_+ = \begin{pmatrix} a^2(p_1^2 + m^2) + e_1^2 & & & \text{symmetrically} \\ abr p_1 p_2 + abm^2 & & b^2(p_2^2 + m^2) + e_3^2 & \\ ap_1(p_1 q_1 + rp_2 q_2) + am^2(q_1 + q_2) & bp_2(p_2 q_2 + rp_1 q_1) + bm^2(q_1 + q_2) & q_1^2 p_1^2 + q_2^2 p_2^2 + 2rp_1 p_1 q_2 p_2 + m^2(q_1 + q_2)^2 + e_2^2 & \end{pmatrix}$$

$$\Sigma_- = \begin{pmatrix} a^2 p_1^2 + e_1^2 & & & \text{symmetrically} \\ abrp_1 p_2 & & b^2 p_2^2 + e_3^2 & \\ ap_1(p_1 q_1 + rp_2 q_2) & bp_2(p_2 q_2 + rp_1 q_1) & q_1^2 p_1^2 + q_2^2 p_2^2 + 2rp_1 p_1 q_2 p_2 + e_2^2 & \end{pmatrix}$$

При условии многомерного нормального распределения наблюдаемых переменных, значения статистики F описываются распределением χ^2 .

Для определения свободных параметров модели выполняется численное решение задачи многомерной оптимизации.

Исходная полная модель имеет 3 наблюдаемые переменные, 12 независимых наблюдаемых статистик, 11 свободных параметров и, соответственно, одну степень свободы для распределения χ^2 статистики F . Оптимизация модели за счет уменьшения количества свободных параметров приводит к $e_j = 0$ с незначительными изменениями критерия максимального правдоподобия F и тремя степенями свободы в полученной полной модели.

Для оценки статистической значимости фактора возраста, полную модель, представленную на рисунке 1, следует сравнить с упрощённым вариантом без латентной переменной M . Разница F -статистик между полной и упрощённой моделями асимптотически распределена как χ^2 с числом степеней свободы, равной разности в их числах степеней свободы [1].

Идентификация оптимизированной полной модели дает приемлемое соответствие наблюдаемых и прогнозируемых матриц ковариаций ($F=4,88$, $df=3$, $p<0,18$)



с ненулевыми значениями для факторной нагрузки m . Сравнение F-статистик, полученных в результате идентификации полной и упрощённой моделей, не показывает статистически значимые различия, обусловленные влиянием фактора возраста M ($\Delta F=0$, $df=4$, $p=1$). Таким образом, следует сделать вывод о том, что не существует статистически значимого влияния фактора возраста на наблюдаемые показатели.

Далее рассмотрим связь возраста со следующими критериями: эффективность использования времени на учебных занятиях; четкость формулирования критериев оценки знаний и требований к студентам; объективность в оценках знаний студентов;

Зададим «Эффективность использования времени на учебных занятиях» – переменной A ; «Четкость формулирования критериев оценки знаний и требований к студентам» – переменной Q ; «Объективность в оценках знаний студентов» – переменной B .

Латентные переменные $P1$ и $P2$ представляют факторы, отвечающие за способность студента организовать свое время, знание современных тенденций по изучаемому направлению, личностные характеристики студента, например, такие, как чувство справедливости. Аналогично, проводим расчеты и видим, что идентификация оптимизированной полной модели дает близкое к допустимому соответствие наблюдаемых и прогнозируемых матриц ковариаций ($F=9,43$, $df=4$, $p<0,05$) с ненулевыми значениями для факторной нагрузки m . Сравнение F-статистик, полученных в результате идентификации полной и упрощённой моделей, не показывает статистически значимые различия, обусловленные влиянием фактора возраста M ($\Delta F=0$, $df=5$, $p=1$). Таким образом, следует сделать вывод о том, что здесь также не существует статистически значимого влияния фактора возраста на наблюдаемые показатели.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Результаты опроса показали, что в целом по факультету наиболее высоко студенты оценили в преподавателях объективность в оценке знаний студентов, использование в преподавании примеров из профессиональной деятельности. Преподаватели, имеющие большой стаж, как правило, компетентны и информированы в своей области, что положительно влияет на их способность передавать знания студентам. Большой педагогический опыт позволяет преподавателям создавать более благоприятную обучающую среду, работать с разными категориями студентов, находить оптимальную и эффективную траекторию для каждого студента. Однако стоит отметить, что фактор возраста не является единственным или основным фактором, определяющим качество преподавания. Другие факторы, такие как полученное образование, профессиональное развитие, актуальность знаний и способность к адаптации к новым методам преподавания, также имеют свое значение. В каждой возрастной группе есть талантливые люди, важно создавать условия для развития их талантов. Без опыта, который передается из поколения в поколение, невозможно развитие научных школ.



Литература

1. *Курваский Л.С., Юрьев Г.А., Юрьева Н.Е., Николаев И.А., Несимова А.О., Поляков Б.Ю., Козырев А.Д.* Построение систем психологической диагностики на основе новых математических представлений // Экспериментальная психология. 2023. Том 16. № 2. С. 178–202. DOI: 10.17759/exppsy.2023160211.
2. *Нуркаева И.М., Коморина К.А.* Информационная система диагностики профессионального выгорания педагогов // Моделирование и анализ данных. – М.: ФГБОУ ВО МГППУ, 2017. – Т. 1 – № 1. – С. 95–103.
3. *Нуркаева И.М., Зайцев А.Н., Оглоблин А.А.* Информационная система для мониторинга учебных достижений студентов МГППУ // Моделирование и анализ данных. – М.: ФГБОУ ВО МГППУ, 2019. – № 1. – С. 30–41.
4. *Нуркаева И.М., Артемова А.А.* Информационная система диагностики стрессоустойчивости педагогов // Моделирование и анализ данных. – 2021. – Т. 11. – № 4. – С. 59–71.
5. *Червен-Водали Е.Б., Антипова С.Н., Сидорова В.Б.* Особенности обучения студентов с ОВЗ по зрению дисциплинам математического и компьютерного циклов на факультете «Информационные технологии» с применением дистанционных технологий // Моделирование и анализ данных. 2022. Том 12. № 1. – С. 60–78.



Assessment of the Influence of Psychological Parameters on Results Student Survey

Elena B. Cherven-Vodali *

Moscow state University of Psychology & Education (MSUPE), Moscow, Russia

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-6871-9105>

e-mail: cervenvodali@mgppu.ru

Valeriya B. Sidorova **

Moscow state University of Psychology & Education (MSUPE), Moscow, Russia

ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-6391-5361>

e-mail: sidorovavb@mgppu.ru

Svetlana N. Antipova ***

Moscow state University of Psychology & Education (MSUPE), Moscow, Russia

ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-6642-7953>

e-mail: antipovasn@mgppu.ru

The article describes the process of questioning in order to collect in a generalized form the student assessment of teaching courses, the influence of the age factor on the quality of teaching disciplines based on the constructed mathematical model according to the selected criteria and its analysis.

Keywords: mathematical model, questionnaire.

For citation:

Cherven-Vodali E.B., Sidorova V.B., Antipova S.N. Assessment of the Influence of Psychological Parameters on Results Student Survey. *Modelirovanie i analiz dannykh = Modeling and Data Analysis*, 2024. Vol. 14, no. 2, pp. 114–123. DOI: <https://doi.org/10.17759/mda.2024140207> (In Russ., abstr. in Engl.).

****Elena B. Cherven-Vodali***, Lecturer of the Department of Applied Informatics and Multimedia Technologies, Moscow State University of Psychology & Education (MSUPE), Moscow, Russia, ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-6871-9105>, e-mail: cervenvodali@mgppu.ru

*****Valeriya B. Sidorova***, Lecturer of the Department of Applied Informatics and Multimedia Technologies, Moscow State University of Psychology & Education (MSUPE), Moscow, Russia, ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-6391-5361>, e-mail: sidorovavb@mgppu.ru

******Svetlana N. Antipova***, Deputy Dean for Extracurricular Activities of the Faculty of Information Technology, Moscow State University of Psychology & Education (MSUPE), Moscow, Russia, ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-6642-7953>, e-mail: antipovasn@mgppu.ru



References

1. Kuravsky L.S., Yuryev G.A., Yuryeva N.E., Nikolaev I.A., Nesimova A.O., Polyakov B.Y., Kozyrev A.D. Development of Psychological Diagnostics Systems Basing on New Mathematical Representations. *Eksperimental'naâ psihologiâ = Experimental Psychology (Russia)*, 2023. Vol. 16, no. 2, pp. 178–202. DOI: 10.17759/exppsy.2023160211. (In Russ., abstr. in Engl.)
2. Nurkaeva I.M., Komorina K.A. Informatsionnaya sistema diagnostiki professional'nogo vygoraniya pedagogov. *Modelirovanie i analiz dannikh = Modelling and Data Analysis*. 2017. Vol. 1 no. 1, pp. 95–103.
3. Nurkaeva I.M., Zaitsev A.N., Ogloblin A.A. Informatsionnaya sistema dlya monitoringa uchebnykh dostizhenii studentov MGPPU. *Modelirovanie i analiz dannikh = Modelling and Data Analysis*. 2019, no 1. pp. 30–41.
4. Nurkaeva I.M., Artemova A.A. Information System for Diagnostics of Stress Resistance of Teachers. *Modelirovanie i analiz dannikh = Modelling and Data Analysis*, 2021. Vol. 11, no. 4, pp. 59–71. DOI: 10.17759/mda.2021110405. (In Russ., abstr. in Engl.)
5. Cherven-Wadali E.B., Antipova S.N., Sidorova V.B. Features of Teaching Students with Visual Disabilities in the Disciplines of Mathematical and Computer Cycles at the Faculty of Information Technology with The Use of Remote Technologies. *Modelirovanie i analiz dannikh = Modelling and Data Analysis*, 2022. Vol. 12, no. 1, pp. 60–78. DOI: 10.17759/mda.2022120105. (In Russ., abstr. in Engl.)

Получена 13.05.2024

Принята в печать 27.05.2024

Received 13.05.2024

Accepted 27.05.2024

◇◇◇◇◇◇◇◇ **МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ** ◇◇◇◇◇◇◇◇

УДК 519.711.3

**Интеллектуальная поддержка экипажа
при выводе гражданского воздушного судна
из сложного пространственного положения**

Куравский Л.С. *

Московский государственный психолого-педагогический университет
(ФГБОУ ВО МГППУ), г. Москва, Российская Федерация
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-3375-8446>
e-mail: l.s.kuravsky@gmail.com

Грешников И.И. **

Государственный научно-исследовательский институт авиационных систем
(ФАУ ГосНИИАС), г. Москва, Российская Федерация
Московский государственный психолого-педагогический университет
(ФГБОУ ВО МГППУ), г. Москва, Российская Федерация
ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-5474-3094>
e-mail: iigreshnikov@gosniias.ru

Махортов И.А. ***

Государственный научно-исследовательский институт авиационных систем
(ФАУ ГосНИИАС), г. Москва, Российская Федерация
Московский государственный психолого-педагогический университет
(ФГБОУ ВО МГППУ), г. Москва, Российская Федерация
e-mail: inok546@yandex.ru

Бондаренко Н.В. ****

Государственный научно-исследовательский институт авиационных систем
(ФАУ ГосНИИАС),
г. Москва, Российская Федерация
Московский государственный психолого-педагогический университет
(ФГБОУ ВО МГППУ), г. Москва, Российская Федерация
e-mail: end8line@gmail.com

Представлен новый подход к созданию математических и программных средств для синтеза управляющих команд, выводящих воздушное судно из сложного пространственного положения, используя накопленные в достаточном объеме



эмпирические данные. При вычислении управляющих команд используется паттерн поведения воздушного судна, релевантный возникшей лётной ситуации и содержащий информацию о пилотировании квалифицированным экипажем. Синтезированные команды могут быть использованы для обеспечения работы автопилотов нового поколения при выполнении сложных режимов полёта или для коррекции управления, реализуемого пилотом средней или низкой квалификации, в реальном времени.

Ключевые слова: человеческий фактор, сложное пространственное положение, виртуальный второй пилот, синтез управления.

Для цитаты:

Куравский Л.С., Грешиников И.И., Махортов И.А., Бондаренко Н.В. Интеллектуальная поддержка экипажа при выводе гражданского воздушного судна из сложного пространственного положения // Моделирование и анализ данных. 2024. Том 14. № 2. С. 124–139. DOI: <https://doi.org/10.17759/mda.2024140208>

***Куравский Лев Семнеович**, доктор технических наук, профессор, декан факультета информационных технологий, Московский государственный психолого-педагогический университет (ФГБОУ ВО МГППУ), г. Москва, Российская Федерация, ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-3375-8446>, e-mail: l.s.kuravsky@gmail.com

****Грешиников Иван Игоревич**, кандидат технических наук, начальник сектора, Государственный научно-исследовательский институт авиационных систем (ФАУ ГосНИИАС), г. Москва, Российская Федерация; аспирант, Московский государственный психолого-педагогический университет (ФГБОУ ВО МГППУ), г. Москва, Российская Федерация, ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-5474-3094>, e-mail: iigreshnikov@gosniias.ru

*****Махортов Иннокентий Александрович**, аспирант, Московский государственный психолого-педагогический университет (ФГБОУ ВО МГППУ), г. Москва, Российская Федерация; младший научный сотрудник, Государственный научно-исследовательский институт авиационных систем (ФАУ ГосНИИАС), г. Москва, Российская Федерация, e-mail: inok546@yandex.ru

******Бондаренко Николай Владимирович**, студент-бакалавр, Московский государственный психолого-педагогический университет (ФГБОУ ВО МГППУ), г. Москва, Российская Федерация; техник, Государственный научно-исследовательский институт авиационных систем (ФАУ ГосНИИАС), г. Москва, Российская Федерация, e-mail: end8line@gmail.com

1. ВВЕДЕНИЕ

По данным специалистов Международной организации гражданской авиации (*International Civil Aviation Organization – ICAO*), более 80% всех авиационных происшествий в течение трёх последних десятилетий были вызваны ошибками экипажа. Больше всего людей погибло в ситуациях, связанных с попаданием воздушного судна (ВС) в *сложные пространственные положения (СПП) и сваливания* – эта группа авиационных происшествий составляет 40% от всех возможных вариантов. В связи с этим, интеллектуальная поддержка экипажа при выводе гражданского ВС из СПП и сваливания стала одной из наиболее актуальных тем в современном авиастроении.



Под СПП самолета понимается его нежелательное состояние, характеризующееся непреднамеренными отклонениями от параметров, которые обычно встречаются в эксплуатации. Под сваливанием – самопроизвольное аperiodическое или колебательное движение самолета на больших углах атаки, которое не может быть прекращено никакими действиями лётчика без уменьшения угла атаки, а также неуправляемый режим полета, в котором характер движения самолета не адекватен отклонению органов управления и резко изменяется по сравнению с ожидаемым.

Учитывая, что в настоящее время исследуются возможности перехода к компоновке кабины с одним пилотом, а должностные обязанности второго пилота современного гражданского ВС, в частности, предусматривают:

- выполнение обязанностей командира воздушного судна (КВС) в полете в случае, когда КВС не способен их выполнять и не способен безопасно завершить полёт;
- владение техникой пилотирования и управления автоматическими системами ВС в такой степени, чтобы обеспечить безопасный исход полёта в случае потери КВС работоспособности;
- выполнение полёта как в качестве пилотирующего пилота с соблюдением нормативов техники пилотирования и управления ВС, так и непилотирующего пилота, отслеживая выполнение КВС полета согласно рабочему плану полета;
- выполнение, в случае угрозы, маневра по выводу ВС в безопасное положение;
- контроль непилотирующим членом экипажа всех действий пилотирующего члена экипажа по управлению самолетом, то технологии, применяемые в кабине с одним пилотом, должны обеспечивать автоматическое пилотирование при выполнении сложных режимов полёта, включая выход из СПП и сваливания, а также коррекцию управления, реализуемого пилотом средней или низкой квалификации, в реальном времени.

Важно отметить, что в руководствах по лётной эксплуатации гражданских самолётов прописано, что в случае возникновения опасности сваливания при больших углах атаки или другой ситуации, связанной с выходом из сложного пространственного положения, следует отключить автопилот и выводить ВС из опасного состояния вручную. Автопилот препятствует переходу в подобные состояния, но практика показывает, что пилоты в них по разным причинам всё-таки попадают. Детали управления в таких ситуациях в руководствах по лётной эксплуатации не прописаны. Таким образом, выход из опасных положений полностью находится в зоне ответственности пилотов, а его выполнение в автоматическом режиме требует разработки новых подходов к управлению ВС, а также математического и программного обеспечения, опирающегося на имеющиеся перспективы решения.

В настоящее время оценка уровня и контроль подготовки пилотов осуществляется инструкторами, имеющими большой практический опыт. Для формирования навыков предупреждения попадания и безопасного вывода из СПП и сваливания таких инструкторов недостаточно. Как показывает практика, большой опыт в этой области имеют лётчики-испытатели, которые в силу своих профессиональных обязанностей достаточно часто летают на таких режимах. Однако их недостаточно для того, чтобы



непосредственно обучить необходимое количество пилотов, требующихся современной авиации. Поэтому, учитывая известную ограниченную адекватность заложенных в тренажёры математических моделей, представляющих опасные ситуации (особенно в случае движения при больших углах атаки), представляется актуальным накопление и систематизация эмпирических данных, аккумулирующих опыт квалифицированного управления ВС опытными пилотами при выводе из критических режимов, и разработка, опираясь на эти материалы, программно-аппаратных средств, обеспечивающих безопасные манёвры в автоматическом режиме.

В рамках решения этой задачи, далее представлен новый подход к созданию математических и программных средств формирования управляющих команд для вывода из СПП в составе комплексного демонстратора технологий интеллектуального «виртуального второго пилота», опирающийся на методы обеспечения интеллектуальной поддержки и оценки уровня подготовки экипажа, представленные в работах [2, 8, 10–11]. Выход из сваливания рассматривается как последующий этап развития технологии, поскольку выполнение этого сложного лётного манёвра требует проведения дополнительных экспериментов и отработки технических решений на полученных данных.

2. ФОРМИРОВАНИЕ УПРАВЛЯЮЩИХ КОМАНД ДЛЯ ВЫВОДА ИЗ СПП В СОСТАВЕ КОМПЛЕКСНОГО ДЕМОНСТРАТОРА ТЕХНОЛОГИЙ ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНОГО «ВИРТУАЛЬНОГО ВТОРОГО ПИЛОТА»

Синтез управляющих команд, обеспечивающих вывод ВС из СПП, выполняется по образцу, представленному заданным релевантным паттерном поведения ВС, и обеспечивается программно-аппаратным комплексом (ПАК), входящим в настоящее время в состав комплексного демонстратора технологий интеллектуального «виртуального второго пилота» (рис. 1). *Цель синтеза управляющих команд – обеспечение поведения ВС согласно заданным лётным нормативам, используя информацию о пилотировании квалифицированным экипажем.* Используя накопленные в достаточном объёме эмпирические данные, синтез управляющих команд обеспечивает в реальном полёте компенсацию случайных внешних воздействий на ВС, так, чтобы обеспечить выполнение лётных маневров на уровне квалифицированного экипажа (в предположении, что внешние воздействия значимо не изменяют поведение ВС). Синтезированные управляющие команды могут быть использованы для обеспечения работы автопилотов нового поколения при выполнении сложных режимов полёта, включая выход из СПП, или для коррекции управления, реализуемого пилотом средней квалификации.

В рамках применяемой технологии, для выбора реализуемых вариантов управления ВС используется инструментальное средство «The Intelligent System for Flight Analysis» (ISFA) [4, 7, 9]. С помощью этого средства при выполнении лётного манёвра

распознаётся его тип, после чего из специализированной БД извлекается паттерн, который обеспечивает корректный выход из создавшейся лётной ситуации и является наиболее близким к выполняемому манёвру в заданной метрике. Этот паттерн обеспечивает вычисление в реальном времени последовательности векторов параметров управления по желаемому изменению последовательности состояний ВС. При этом на параметры управления накладываются технические ограничения, обусловленные особенностями эксплуатации ВС.



Рис. 1. Комплексный демонстратор технологий интеллектуального «виртуального второго пилота»

Для вывода из СПП, ПАК формирования управляющих команд вычисляет в реальном времени последовательности управляющих воздействий как реакцию на реализуемое в полёте поведение ВС с заданным временным интервалом, обеспечивая заданное опытными пилотами движение ВС и выдавая необходимые для этого управляющие воздействия как элементы временных рядов.

Учитывая, что поведение ВС и управляющие воздействия на органы управления представляются многомерными временными рядами значений соответствующих параметров, для представления управляемого поведения ВС применяется каноническая *многомерная нестационарная матричная модель движения и управления ВС с дискретным временем, идентифицируемая по эмпирическим данным* [1, 3, 5–6]:

$$x(k+1) = \mathbf{A}(k)x(k) + \mathbf{B}(k)g(k),$$
$$k = k_0, k_0 + 1, \dots, x(k_0) = x_0,$$



где k есть дискретное время; $x(k)$ – M -мерный вектор состояния ВС в момент времени k ; $g(k)$ – S -мерный вектор параметров управления ВС в момент времени k ; $\mathbf{A}(k)$ – зависящая от времени матрица преобразования состояния ВС размера $(M \times M)$; $\mathbf{B}(k)$ – зависящая от времени матрица преобразования управления ВС размера $(M \times S)$; k – начальный момент времени.

Последовательности матриц $\{\mathbf{A}(k)\}_k$ и $\{\mathbf{B}(k)\}_k$ определяют результаты выполнения заданного типа лётного манёвра. Эти матрицы полагаются квазистационарными на заданных временных интервалах и идентифицируются по переопределённым экспериментальным данным, описывающим поведение ВС при управлении опытными экипажами. Линеаризация на интервалах квазистационарности позволяет заменить нелинейную модель управления последовательностью линейных моделей, локально линеаризованные матричные коэффициенты которых привязаны к этим интервалам. Характер изменения матриц $\{\mathbf{A}(k)\}_k$ и $\{\mathbf{B}(k)\}_k$ обусловлен типом лётного манёвра.

Математические методы, применяемые для идентификации многомерных нестационарных моделей движения и управления с дискретным временем, представляющих лётные манёвры и обеспечивающих формирование управляющих команд, передаваемых в систему управления самолётом, рассмотрены в работах [2, 8, 10]. Эта идентификация выполняется по эмпирическим данным, представляющим поведение ВС в различных лётных ситуациях, воспроизведённых в результате экспериментов на стенде или лётном тренажёре.

Для вывода из СПП ставится задача синтеза управляющих команд по образцу, представленному заданным паттерном поведения ВС, а именно: найти такую последовательность скорректированных векторов параметров управления $\{\tilde{g}(k)\}_k$, которая из заданного «возмущённого» состояния ВС $\tilde{x}(k)$, наблюдаемого в момент времени k , обеспечивает переход (восстановление) в определённое указанным паттерном поведения состояние ВС $x(k+1)$ в момент времени $k+1$. Наблюдаемые состояния ВС всегда в той или иной степени уникальны, что обусловлено случайными воздействиями внешней среды и индивидуальными особенностями пилотирования, включая ошибки экипажа, далее называемыми «возмущениями».

Компоненты процедуры формирования управляющих команд для вывода из СПП в составе комплексного демонстратора технологий интеллектуального «виртуального второго пилота» по образцу, представленному заданным паттерном поведения ВС, и его реализация с помощью инструментальных средств ISFA и ISFS («The Intelligent System for Flight Synthesis») представлены на рис. 2.

Разработанный ПАК позволяет использовать компоненты процедуры формирования управляющих команд в двух режимах:

- в режиме «технического тестирования», когда автономная работа компонентов и их согласованность проверяются вне стенда;
- в основном режиме, когда компоненты работают вместе со стендом.

С целью обеспечения согласованности во времени, очерёдность операций по обмену данными (а именно: считывания данных о наблюдаемом («возмущённом») фрагменте полёта – с одной стороны – и передачи паттерна заданного манёвра при управлении ВС опытным экипажем и «возмущённого» паттерна, включающего наблюдаемый фрагмент полёта в подходящем локусе – с другой стороны) регулируется *семафором*.



Инструментальное средство ISFA, используя результаты применения метода главных компонент, многомерного шкалирования и кластерного анализа параметров полёта, формирует кластеры фрагментов полетов различных типов и качества исполнения, которые используются для их классификации в пространстве шкалирования. «Интеллект» этого средства содержится в паттернах эмпирических данных, включающих комбинированную информацию о динамике полёта и управлении воздушным судном, и может гибко изменяться по мере их накопления. Выполняемые ISFA оценки опираются на евклидову метрику в пространстве вейвлет-коэффициентов, обеспечивающие значимую дискриминацию результатов выполнения лётных упражнений. При достаточной скорости вычислений обеспечиваемые ISFA оценки могут быть получены в реальном времени.

При отсутствии управления, свободное движение ВС из начального состояния, заданного лётным манёвром, определяется матричными уравнениями

$$x(k+1) = \mathbf{A}(k)x(k)$$

и позволяет идентифицировать матрицы $\mathbf{A}(k)$ по переопределённым экспериментальным данным [2, 8, 10].

Матрицы преобразования управления $\mathbf{B}(k)$ определяются для заданного манёвра по переопределённым экспериментальным данным, известным оценкам матриц $\mathbf{A}(k)$ и известным векторам параметров управления $g(k)$, используя матричные уравнения управляемого движения [2, 8, 10]:

$$h(k+1) = \mathbf{B}(k)g(k),$$

где $h(k+1) = x(k+1) - \mathbf{A}(k)x(k)$.

Скорректированные вектора параметров управления $\tilde{g}(k)$ в каждый рассматриваемый момент времени k определяются из условий

$$\Delta x(k+1) = \tilde{x}(k+1) - x(k+1) = 0.$$

где $\tilde{x}(k+1)$ – «возмущённый» M -мерный вектор состояния ВС в момент времени $k+1$.

Эти условия позволяют, зная заданные паттерном вектора управления $g(k)$, матрицы преобразования состояния $\mathbf{A}(k)$ и матрицы преобразования управления $\mathbf{B}(k)$, вычислять скорректированные вектора параметров управления $\tilde{g}(k)$, используя псевдорешения переопределённых уравнений

$$\mathbf{A}(k)(\tilde{x}(k) - x(k)) + \mathbf{B}(k)(\tilde{g}(k) - g(k)) = 0,$$

предварительно преобразовывая эти матричные уравнения в обычные системы линейных алгебраических уравнений:

$$\mathbf{B}^T(k)\mathbf{B}(k)(\tilde{g}(k) - g(k)) = b, \text{ где } b = -\mathbf{B}^T(k)\mathbf{A}(k)(\tilde{x}(k) - x(k)),$$



и вычисляя затем искомые вектора $\tilde{g}(k) - g(k)$, позволяющие определять $\tilde{g}(k)$ по заданным векторам управления $g(k)$, используемым паттерном поведения ВС.

На синтезированные параметры управления далее накладываются известные технические ограничения, обусловленные особенностями эксплуатации ВС.

Инструментальное средство ISFS обеспечивает:

- идентификацию математической модели целевой деятельности экипажа, обеспечивающую вычисление по экспериментальным данным последовательностей матриц $\{\mathbf{A}(k)\}_k$ и $\{\mathbf{B}(k)\}_k$ на интервалах квазистационарности, и
- синтез управляющих команд, которые обеспечивают переход от наблюдаемого «возмущённого» фрагмента полёта в состояния, предусмотренные заданным паттерном поведения ВС.

Заданный паттерн поведения ВС определяется инструментальным средством ISFA как наиболее близкий к наблюдаемому манёвру в заданной метрике из хранящихся в специализированной БД образцов полёта, обеспечивающих корректный выход из создавшейся лётной ситуации.

Учитывая, что переход от наблюдаемого «возмущённого» фрагмента полёта к заданному образцу пилотирования, выполненному квалифицированным экипажем, требует определённого времени, *инструментальное средство ISFS вычисляет последовательность управляющих воздействий как реакцию на реализуемое в полёте «возмущение» для всего заданного лётного фрагмента в целом, последовательно выдавая с заданным временным шагом необходимые воздействия на органы управления.* Как показывают вычислительные эксперименты, время вычисления управляющего воздействия в заданный момент времени примерно в 5–10 раз меньше временного шага, используемого при наблюдениях за состоянием ВС, что позволяет проводить вычисления на стенде или лётном тренажёре в реальном времени.

Для оценки степени соответствия синтезированных параметров состояния и управления ВС и паттерна экспериментальных данных используется *метрика согласования* $L = \frac{1}{NG} \sum_{i=1}^G \sum_{j=1}^N |p_{ij} - p_{ij}^o|$, где p_{ij} – значения параметров состояния или управления ВС, вычисленные с помощью идентифицируемой модели, p_{ij}^o – соответствующие им значения параметров состояния или управления используемого паттерна ($G=M$ в случае параметров состояния ВС, $G=S$ в случае параметров управления ВС), N – количество рассматриваемых дискретных моментов времени.

Приведённая метрика может быть использована для количественной оценки того, насколько корректно определены матрицы $\{\mathbf{A}(k)\}_k$ и $\{\mathbf{B}(k)\}_k$: для этого следует, используя указанные матрицы, вычислить последовательности состояний ВС $\{x(k)\}_k$ и параметров управления $\{g(k)\}_k$ и сравнить их, применяя метрику согласования L , с соответствующими экспериментальными данными. Интерпретация значений данной метрики опирается на применяемые условия нормировки: как правило, параметры нормируются на диапазон от $-1/2$ до $1/2$. Значения метрики L , не превышающие 0.2, могут считаться приемлемыми при решении практических задач.

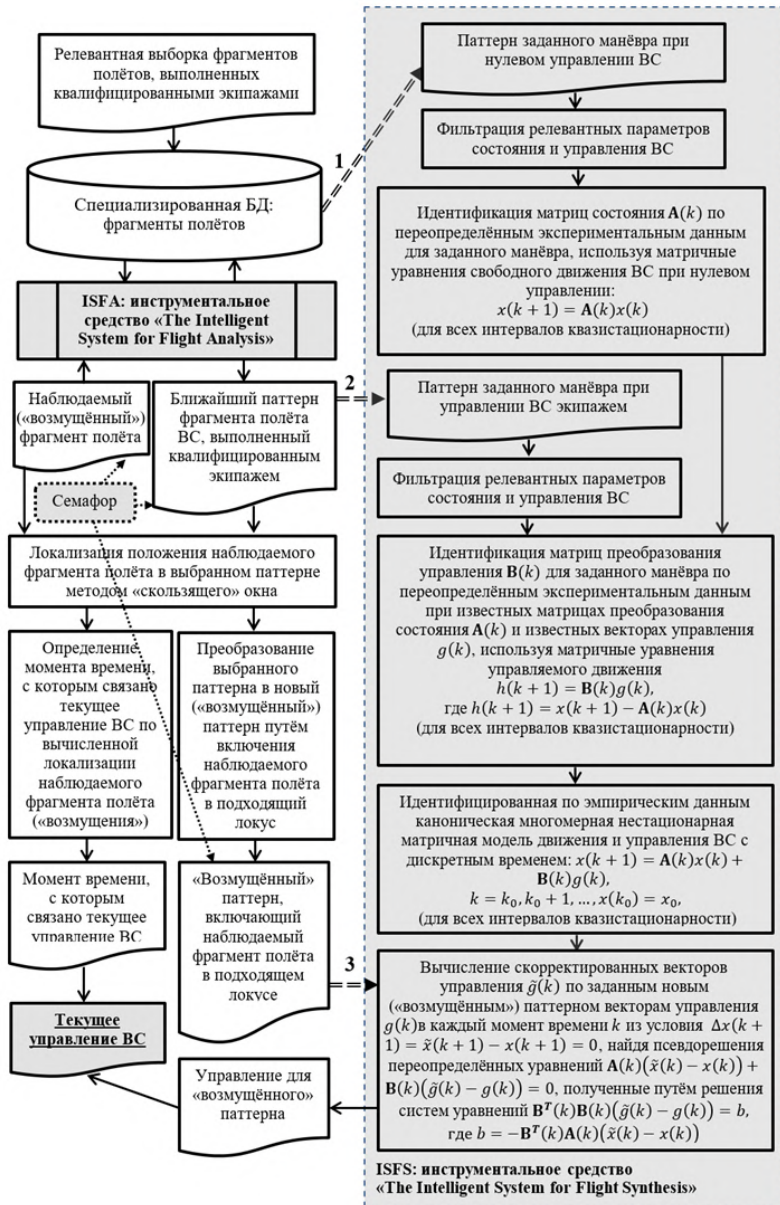


Рис. 2. Детализированная схема синтеза управляющих команд по образцу, представленному заданным паттерном поведения ВС, и взаимодействия ISFA и ISFS (1 – паттерн заданного манёвра при нулевом управлении, 2 – паттерн заданного манёвра при управлении ВС опытным экипажем, 3 – «возмущённый» паттерн, включающий наблюдаемый фрагмент полёта в подходящем локусе)



3. ПРИМЕР ПРАКТИЧЕСКОГО ПРИМЕНЕНИЯ

На универсальном стенде прототипирования ГосНИИАС были проведены эксперименты по выходу из СПП, к которым привлекались лётчики, имевшие опыт полётов на критических режимах при отказах бортовых систем и силовой установки самолета, неблагоприятных внешних условиях, включая обледенение, сдвигах ветра, в условиях высоких и низких температур, сильном боковом ветре и т.д.

Условия на момент попадания в СПП приведены в таблице 1. Условием завершения экспериментальной ситуации (выхода из СПП) являлся прямолинейный горизонтальный полет со следующими условиями: крен $\in [-10^\circ \dots 10^\circ]$, тангаж $\in [0^\circ \dots 5^\circ]$, вертикальная скорость менее 600 ft/min, скорость: $\in [Vls, Vmo]$, – который соблюдался в течение 20 секунд.

Таблица 1

Условия на момент попадания в СПП

Обозначение СПП	Начальные условия СПП
СПП-1	крен=60°; тангаж=35°; V=230 kt
СПП-2	крен= -135°; тангаж= -35°; V=230 kt
СПП-3	крен= -55°; тангаж= -25°; V=270 kt
СПП-4	крен= 120°; тангаж= -20°; V=270 kt

В последующем описании результатов расчётов в качестве наблюдаемых параметров поведения ВС использовались:

- (1) скорость рыскания,
- (2) скорость по тангажу,
- (3) скорость по крену,
- (4) отклонение руля высоты,
- (5) отклонение руля направления,
- (6) отклонение левого элерона,
- (7) отклонение правого элерона,
- (8) угол атаки,
- (9) угол крена,
- (10) угол тангажа.

В качестве расчётных параметров управления ВС использовались:

- (1) положение рычага управления канала тангажа,
- (2) положение рычага управления канала крена,
- (3) положение педалей,
- (4) положение левого рычага управления двигателем (РУД),
- (5) положение правого РУД.

Последние два параметра исключались из расчётов, если не изменялись в процессе выполнения лётного маневра.

Фрагменты полётов, представляющие различные реализации выхода из СПП, которые относятся к четырём указанным к Таблице 1 типам, представлены в виде точек в пространстве шкалирования на диаграмме рассеяния на рис. 3 вместе с фрагментами крейсерских полётов. Матрица взаимных евклидовых расстояний между этими фрагментами полётов в пространстве вейвлет-коэффициентов показана на рис. 4.

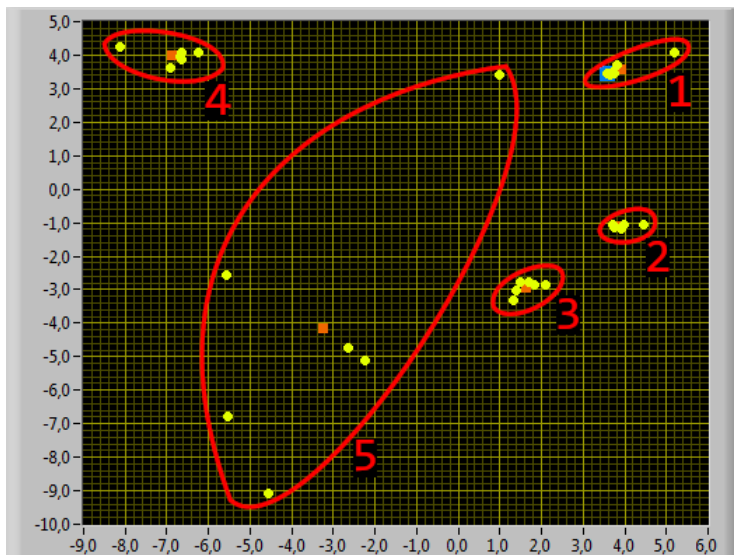


Рис. 3. Фрагменты полётов, представляющие различные реализации выхода из СПП (кластеры 1, 2, 3, 4), и фрагменты крейсерских полётов (кластер 5) в виде точек в пространстве шкалирования

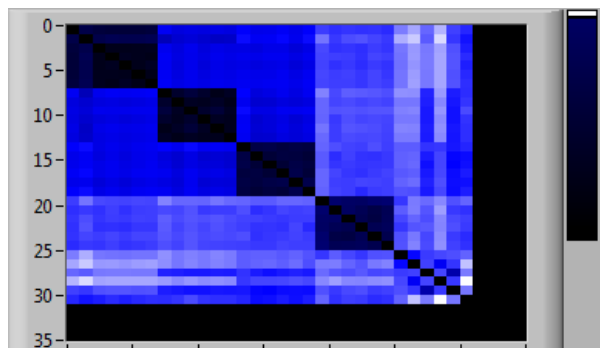


Рис. 4. Матрица взаимных евклидовых расстояний между фрагментами полётов в пространстве вейвлет-коэффициентов

На рис. 5 в качестве иллюстрации показаны полученные в режиме «технического тестирования»:

- «возмущённый» фрагмент полёта (*Flight Pars TRUE*),
- фрагмент выбранного посредством ISFA паттерна (*Flight Pars with Control*) и
- синтезированный посредством ISFS «восстанавливающий» фрагмент полёта (*Flight Pars SYNTHESIS*),
- продолжительностью 32 с для 10 указанных выше параметров поведения ВС.

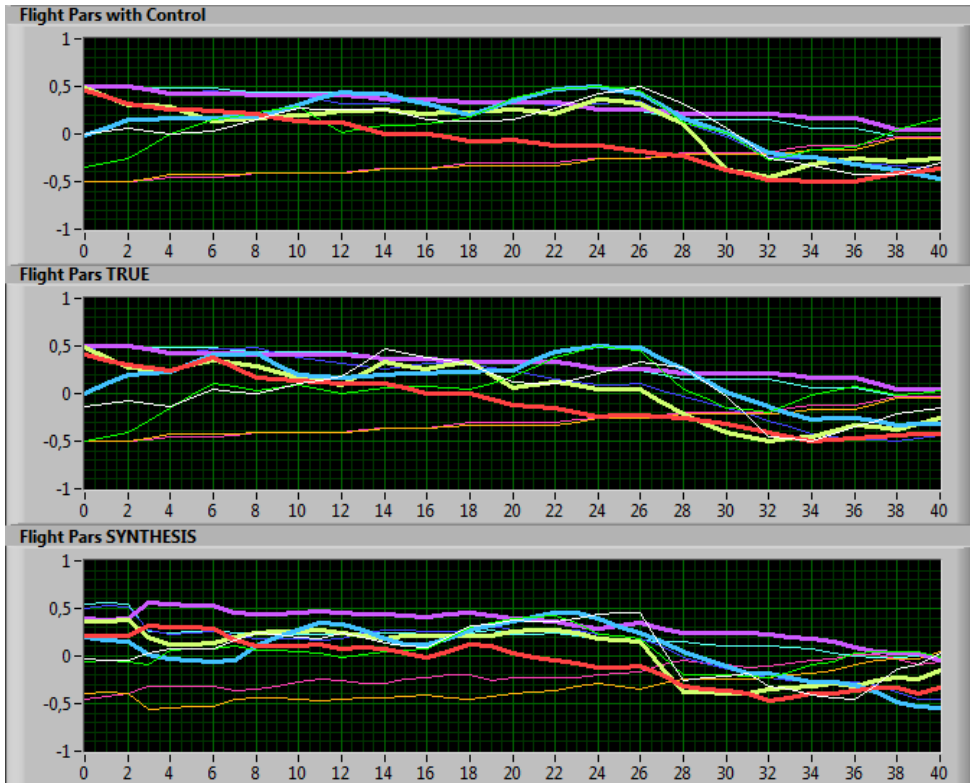


Рис. 5. «Возмущённый» фрагмент полёта (*Flight Pars TRUE*), фрагмент выбранного посредством ISFA паттерна (*Flight Pars with Control*) и синтезированный посредством ISFS фрагмент полёта (*Flight Pars SYNTHESIS*) продолжительностью 32 с (указанные фрагменты располагаются с 4-й по 35-ю секунду, 10 параметров поведения ВС)

На рис. 6 в качестве иллюстрации показаны:

- фрагмент управления ВС в выбранном посредством ISFA паттерне (*Control Pars TRUE*) и
- синтезированный посредством ISFS «восстанавливающий» фрагмент управления ВС (*Control Pars SYNTHESIS*),
- продолжительностью 32 с.



Рис. 6. Фрагмент управления ВС в выбранном посредством ISFA паттерне (Control Pars TRUE) и синтезированный посредством ISFS «восстанавливающий» фрагмент управления ВС (Control Pars SYNTHESIS) продолжительностью 32 с (указанные фрагменты располагаются с 4-й по 35-ю секунду, 4 параметра управления ВС)

Значения метрики согласования ($L < 0,15$ в случае параметров состояния; $L < 0,05$ в случае параметров управления) свидетельствуют о приемлемом качестве синтеза управляющих команд.

4. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ И ВЫВОДЫ

1. Разработано математическое и программно-аппаратное обеспечение синтеза управляющих команд, выводящих ВС из СПП, используя накопленные в достаточном объеме эмпирические данные.
2. При вычислении управляющих команд используется паттерн поведения ВС, релевантный возникшей лётной ситуации и содержащий информацию о пилотируемой квалифицированным экипажем.
3. В предположении, что внешние воздействия значимо не изменяют поведение ВС, синтез управляющих команд позволяет компенсировать случайные внешние воздействия на ВС в реальном полёте, обеспечивая выполнение лётных маневров на уровне квалифицированного экипажа.
4. Учитывая, что переход от наблюдаемого «возмущённого» фрагмента полёта к заданному образцу пилотирования, выполненному квалифицированным экипажем, требует определённого времени, последовательность управляющих воздействий вычисляется как реакция на реализуемое в полёте «возмущение» для всего

заданного лётного фрагмента в целом, с последовательной выдачей с заданным временным шагом необходимых воздействий на органы управления.

5. Синтезированные управляющие команды могут быть использованы для обеспечения работы автопилотов нового поколения при выполнении сложных режимов полёта, включая выход из СПП, или для коррекции управления, реализуемого пилотом средней или низкой квалификации, в реальном времени.

Литература

1. *Афанасьев В.Н., Колмановский В.Б., Носов В.Р.* Математическая теория систем управления. – М.: Высшая школа, 2003.
2. *Грешников И.И., Куравский Л.С., Юрьев Г.А.* Принципы построения программно-аппаратного комплекса для интеллектуальной поддержки экипажа и оценки уровня его подготовки // Моделирование и анализ данных. 2021. Том 11. № 2. с. 5–30. DOI: <https://doi.org/10.17759/mda.2021110201>
3. Динамика полета: Учебник для студентов высших учебных заведений / А.В. Ефремов, В.Ф. Захарченко, В.Н. Овчаренко и др.; под ред. Г.С. Бюшгенса. – М.: Машиностроение, 2011. 776 с.
4. *Куравский Л.С., Юрьева Н.Е., Юрьев Г.А., Порохин В.А., Грешников И.И., Златомрежев В.И.* «THE INTELLIGENT SYSTEM FOR FLIGHT ANALYSIS V. 3.3» (ISFA V. 3.3). Свидетельство о регистрации программы для ЭВМ 2021668683, 18.11.2021. Заявка № 2021668197 от 17.11.2021.
5. *Пантелеев А.В., Бортаковский А.С.* Теория управления в примерах и задачах. – М.: Высшая школа, 2003. – 583 с.
6. *Тихонов В.И., Шахтарин Б.И., Сизых В.В.* Случайные процессы. Примеры и задачи. Том 3 / Под ред. Сизых В.В. – 2-е изд. – М.: Горячая линия – Телеком, 2014. – 408 с.
7. *Kuravsky L.S. and Yuryev G.A.* A novel approach for recognizing abnormal activities of operators of complex technical systems: three non-standard metrics for comparing performance patterns, *International Journal of Advanced Research in Engineering and Technology (IJARET)*, 11(4), 2020, pp. 119–136. <http://www.iaeme.com/IJARET/issues.asp?JType=IJARET&VType=11&IType=4>
8. *Kuravsky L.S., Greshnikov I.I., Yuryev G.A., and Zlatomrezhev V.I.* “Synthesis of Civil Aircraft Control Using Empirical Data and Quantum Filtering,” *Lobachevskii J. Math.*, 44 (6), 2077–2098 (2023).
9. *Kuravsky L.S., Yuryev G.A.* Detecting Abnormal Activities of Operators of Complex Technical Systems and their Causes Basing on Wavelet Representations, *International Journal of Civil Engineering and Technology (IJCIET)* 10(2), 2019, pp. 724–742. <http://www.iaeme.com/IJCIET/issues.asp?JType=IJCIET&VType=10&IType=2>.
10. *Kuravsky L.S., Yuryev G.A., Zlatomrezhev V.I.* New approaches for assessing the activities of operators of complex technical systems. *Eksperimental'naya psikhologiya = Experimental psychology (Russia)*, 2019, vol. 12, no. 4, pp. 27–49. doi:10.17759/exppsy.2019120403.
11. *Kuravsky L.S., Yuryev G.A., Zlatomrezhev V.I., Yuryeva N.E.* Assessing the Aircraft Crew Actions with the Aid of a Human Factor Risk Model. *Eksperimental'naya psikhologiya = Experimental Psychology (Russia)*, 2020. Vol. 13, no. 2, pp. 153–181. DOI: <https://doi.org/10.17759/exppsy.2020130211>.



Intelligent Crew Support when Recovering a Civil Aircraft from a Difficult Spatial Position

Lev S. Kuravsky*

Moscow State University of Psychology and Education (MSUPE), Moscow, Russia

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-3375-8446>

e-mail: l.s.kuravsky@gmail.com

Ivan I. Greshnikov **

State Research Institute of Aviation Systems (GosNIIAS), Moscow, Russia

Moscow State University of Psychology and Education (MSUPE), Moscow, Russia

ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-5474-3094>

e-mail: iigreshnikov@gosniias.ru

Innokenty A. Makhortov ***

State Research Institute of Aviation Systems (GosNIIAS), Moscow, Russia

Moscow State University of Psychology and Education (MSUPE), Moscow, Russia

e-mail: inok546@yandex.ru

Nikolay V. Bondarenko ****

State Research Institute of Aviation Systems (GosNIIAS), Moscow, Russia

Moscow State University of Psychology and Education (MSUPE), Moscow, Russia

e-mail: end8line@gmail.com

A new approach to development of the mathematical and software tools for synthesis of the control actions recovering an aircraft from a difficult spatial position is presented, using the sufficient accumulated empirical data. When calculating control actions, an aircraft behavior pattern, which is relevant to the flight situation arisen and containing information about piloting by a qualified crew, is in use. Synthesized actions can be employed within newly created autopilots when performing difficult flight modes or used to correct control influences performed by an average or low-skilled pilot in real time.

Keywords: human factor, difficult spatial position, virtual co-pilot, control synthesis.

For citation:

Kuravsky L.S., Greshnikov I.I., Makhortov I.A., Bondarenko N.V. Intelligent Crew Support when Recovering a Civil Aircraft from a Difficult Spatial Position. *Modelirovanie i analiz dannykh = Modelling and Data Analysis*, 2024. Vol. 14, no. 2, pp. 124–139. DOI: 10.17759/mda.2024140208 (In Russ., àbstr. in Engl.).

***Lev S. Kuravsky**, Doctor of Technical Sciences, Professor, Dean of the Faculty of Information Technology, Moscow State University of Psychology and Education (MSUPE), Moscow, Russia, ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-3375-8446>, e-mail: l.s.kuravsky@gmail.com.

****Ivan I. Greshnikov**, PhD (Technical Sciences), Head of Sector, State Research Institute of Aviation Systems (GosNIIAS), Moscow, Russia; Graduate Student, Moscow State University of Psychology



and Education (MSUPE), Moscow, Russia, ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-5474-3094>, e-mail: iigreshnikov@gosniias.ru

*****Innokenty A. Makhortov**, Graduate Student, Moscow State University of Psychology and Education (MSUPE), Moscow, Russia; Junior Researcher, State Research Institute of Aviation Systems (GosNIIAS), Moscow, Russia; e-mail: inok546@yandex.ru

**** **Nikolay V. Bondarenko**, Bachelor Student, Moscow State University of Psychology and Education (MSUPE), Moscow, Russia; technician, State Research Institute of Aviation Systems (GosNIIAS), Moscow, Russia, e-mail: end8line@gmail.com

References

1. Afanasyev V.N., Kolmanovsky V.B., Nosov V.R. Mathematical theory of control systems. – M.: Higher School, 2003.
2. Greshnikov I.I., Kuravsky L.S., Yuryev G.A. Principles of building a software and hardware complex for intellectual support of the crew and assessment of its level of training // Data modeling and analysis. 2021. Volume 11. No. 2. pp. 5–30. DOI: <https://doi.org/10.17759/mda.2021110201>
3. Flight dynamics: A textbook for students of higher educational institutions / A.V. Efremov, V.F. Zakharchenko, V.N. Ovcharenko, etc.; edited by G.S. Byushgens. – M.: Mashinostroenie, 2011. 776 p.
4. Kuravsky L.S., Yurieva N.E., Yuriev G.A., Porokhin V.A., Greshnikov I.I., Zlatomrezhev V.I. “THE INTELLIGENT SYSTEM FOR FLIGHT ANALYSIS V. 3.3” (ISFA V. 3.3). Certificate of registration of the computer program 2021668683, 11/18/2021. Application No. 2021668197 dated 11/17/2021.
5. Panteleev A.V., Bortakovskiy A.S. Theory of management in examples and tasks. – M.: Higher School, 2003. – 583 p.
6. Tikhonov V.I., Shakhtarin B.I., Sizykh V.V. Random processes. Examples and tasks. Volume 3 / Ed. Sizykh V.V. – 2nd ed. – M.: Hotline – Telecom, 2014. – 408 p.
7. Kuravsky L.S. and Yuryev G.A. A novel approach for recognizing abnormal activities of operators of complex technical systems: three non-standard metrics for comparing performance patterns, International Journal of Advanced Research in Engineering and Technology (IJARET), 11(4), 2020, pp. 119–136. <http://www.iaeme.com/IJARET/issues.asp?JType=IJARET&VType=11&IType=4>
8. Kuravsky L.S., Greshnikov I.I., Yuryev G.A., and Zlatomrezhev V.I. “Synthesis of Civil Aircraft Control Using Empirical Data and Quantum Filtering,” Lobachevskii J. Math., 44 (6), 2077–2098 (2023).
9. Kuravsky L.S., Yuryev G.A. Detecting Abnormal Activities of Operators of Complex Technical Systems and their Causes Basing on Wavelet Representations, International Journal of Civil Engineering and Technology (IJCIET) 10(2), 2019, pp. 724–742. <http://www.iaeme.com/IJCIET/issues.asp?JType=IJCIET&VType=10&IType=2>.
10. Kuravsky L.S., Yuryev G.A., Zlatomrezhev V.I. New approaches for assessing the activities of operators of complex technical systems. Eksperimental'naya psikhologiya = Experimental psychology (Russia), 2019, vol. 12, no. 4, pp. 27–49. doi:10.17759/exppsy.2019120403.
11. Kuravsky L.S., Yuryev G.A., Zlatomrezhev V.I., Yuryeva N.E. Assessing the Aircraft Crew Actions with the Aid of a Human Factor Risk Model. Eksperimental'naya psikhologiya = Experimental Psychology (Russia), 2020. Vol. 13, no. 2, pp. 153–181. DOI: <https://doi.org/10.17759/exppsy.2020130211>.

Получена 13.05.2024

Принята в печать 21.05.2024

Received 13.05.2024

Accepted 21.05.2024

◆◆◆◆◆ КОМПЛЕКСЫ ПРОГРАММ ◆◆◆◆◆

УДК 004.42

Анализ и документирование требований для программного комплекса по проведению вычислительных экспериментов и численному исследованию системы «расходомерная трубка – жидкость» кориолисова расходомера

Гудкова Е.А.*

Пензенский государственный технологический университет

(ФГБОУ ВО ПензГТУ), г. Пенза, Российская Федерация

ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-2197-6419>

e-mail: gudkova-penza@yandex.ru

Предмет. Работа описывает этапы разработки программного комплекса, предназначенного для проведения серий вычислительных экспериментов по численному моделированию системы «расходомерная трубка – жидкость» кориолисова расходомера и автоматизации алгоритмов последующей обработки и визуализации данных. *Методы.* Структура требований для программного комплекса разработана на основе шаблона *Software Requirements Specification*, принятого в методологии разработки программного обеспечения *Rational Unified Process*, в соответствии с классификацией требований к программным системам *FURPS+*. Для разработки подпрограмм комплекса использованы язык *Python 3* и интерпретируемый язык программирования среды *MATLAB*. *Результаты.* Разработана структура требований для программного комплекса, включая функциональные и нефункциональные требования. Разработан программный комплекс, состоящий из трех подпрограмм, описаны его структура, основные компоненты и возможности, продемонстрированы примеры использования. *Выводы.* Программный комплекс решает задачи автоматизации алгоритмов моделирования, обработки и визуализации данных, полученных в результате экспериментов. Он может быть использован в инженерных и научных исследованиях, связанных с анализом работы кориолисовых расходомеров.

Ключевые слова: программный комплекс, система «расходомерная трубка – жидкость», кориолисов расходомер, численное моделирование.

Для цитаты:

Гудкова Е.А. Анализ и документирование требований для программного комплекса по проведению вычислительных экспериментов и численному исследованию системы



«расходомерная трубка – жидкость» кориолисова расходомера // Моделирование и анализ данных. 2024. Том 14. № 2. С. 140–151. DOI: <https://doi.org/10.17759/mda.2024140209>

**Гудкова Екатерина Александровна*, аспирант, старший преподаватель кафедры «Информационные технологии и системы», Пензенский государственный технологический университет (ФГБОУ ВО ПензГТУ), г. Пенза, Российская Федерация, ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-2197-6419>, e-mail: gudkova-penza@yandex.ru

1. ВВЕДЕНИЕ

Современные технологические процессы требуют высокой точности и эффективности в измерениях физических параметров, таких как расход жидкости. В этом контексте, кориолисовы расходомеры представляют собой приборы, обеспечивающие точные измерения массового расхода жидкости [1,2]. Однако проектирование и оптимизация параметров кориолисовых расходомеров представляют собой сложные задачи, требующие учета множества факторов, подробно рассмотренных в работах [2–4]. В работе [5] обосновано применение эффективных численных методов при моделировании элементов кориолисовых расходомеров. В этой связи разработка программного комплекса, предназначенного для проведения серий вычислительных экспериментов по численному моделированию системы «расходомерная трубка – жидкость» кориолисова расходомера [5] и автоматизации алгоритмов последующей обработки и визуализации данных, представляет собой актуальное прикладное направление. Цель данной статьи заключается в формировании и документировании требований к программному комплексу, и его проектированию на основе современных подходов к разработке программных продуктов.

2. МАТЕРИАЛЫ И МЕТОДЫ

Эволюция теории разработки программного обеспечения (ПО) привела к возникновению трех основных моделей, описывающих структуру этого процесса – каскадная, итерационная и спиральная. Эти модели по-разному рассматривают процесс разработки, но так или иначе они опираются на следующий базис: формирование требований, проектирование, конструирование, тестирование, внедрение, сопровождение [6]. Разработка требований является ключевым процессом в жизненном цикле разработки программного обеспечения [7–9]. С точки зрения работы ПО требования можно разделить на функциональные и нефункциональные. Функциональные требования [7–9] определяют конкретные операции, действия, которые должен выполнять программный продукт. Нефункциональные требования [7–9] определяют его характеристики, такие как безопасность, производительность или надежность. Таким образом, функциональные требования отвечают на вопрос – «что программный продукт должен делать», а нефункциональные требования – «насколько хорошо». Для разрабатываемого программного комплекса были сформированы требования в соответствии с классификацией требований к программным системам – FURPS+ [10],



отвечающей за функциональность, удобство использования, надежность, производительность и возможность поддержки. Знак «+» в аббревиатуре FURPS+ позволяет указывать ограничения, включая дизайн, реализацию, интерфейс, атрибуты качества.

Одним из широко применяемых стандартов спецификации требований является документ SRS (Software Requirements Specification), принятый в методологии разработки ПО Rational Unified Process (RUP) [7–9]. Структура требований в SRS адаптирована из Международного стандарта IEEE STD 830 и является его упрощенной версией, описывающей функциональные требования в виде списка вариантов использования и их интерпретации [5, 9].

3. ДОКУМЕНТИРОВАНИЕ ТРЕБОВАНИЙ

Была разработана структура требований для программного комплекса на основе шаблона SRS, включающая следующие пункты:

1) Определения, акронимы и сокращения.

Кориолисов расходомер – это массовый расходомер, предназначенный для прямого и непрерывного измерения массы жидкости [1,2].

Система «расходомерная трубка – жидкость» состоит из вибрирующей трубки кориолисова расходомера, зажатой с обоих концов, и протекающей по ней измеряемой жидкости [4].

Датчики кориолисова расходомера расположены равноудалено от центра в левой и правой половинах расходомерной трубки. Они измеряют амплитуду колебаний трубки с течением времени. Под действием силы Кориолиса, возникающей из-за движения жидкости в вибрирующей трубке, возникает временная (фазовая) задержка сигналов [1–5].

COMSOL Multiphysics – это пакет программного обеспечения для анализа методом конечных элементов, моделирования физических и мультифизических явлений [11].

Расчетная модель – это информация о моделируемой системе «расходомерная трубка – жидкость» (геометрия, свойства, состояние, внешние воздействия), о способе моделирования (математическая модель, параметры математической модели, используемые методы решения задачи, расчетная сетка), представленная в определенном формате (текстовом или бинарном) и передаваемая решателю в качестве входных данных [12].

Радиус кривизны расходомерной трубки – параметр изгиба, выраженный в градусах и позволяющий изменять геометрию трубки от прямотрубной до U-образных конструкций.

MATLAB – пакет прикладных программ для решения задач технических вычислений [13].

2) Описание требований.

Функциональные требования к программному комплексу, а также задачи направленные на их выполнение, включают:

а) Выполнение вычислительных экспериментов:

- Реализовать управление расчетной моделью, разработанной в среде COMSOL для численного моделирования «системы расходомерная трубка – жидкость».



- Разработать пользовательский интерфейс управления расчетной моделью.
 - Обеспечить варьирование параметров моделирования: радиуса кривизны расходомерной трубки, количества периодов ее колебаний.
 - Формировать таблицы данных о расходе жидкости, частоте колебаний расходомерной трубки, временных сигналах с датчиков расходомерной трубки.
- б) Ввод данных:
- Реализовать ввод параметров исследования (радиус кривизны расходомерной трубки, количество периодов ее колебаний) с клавиатуры.
 - Настроить визуальное отображение геометрии расходомерной трубки с введенным радиусом кривизны.
- в) Автоматизация алгоритмов обработки данных:
- Реализовать алгоритмы обработки данных вычислительного эксперимента.
 - Обеспечить возможность фильтрации, интерполяции данных временных сигналов датчиков для возможности расчета временной задержки.
 - Вычислять временную и фазовую задержки сигналов датчиков.
- г) Просмотр и документирование результатов:
- Предоставить графический интерфейс для визуализации данных.
 - Реализовать функции построения 2D и 3D-графиков, диаграмм и других наглядных средств для анализа и визуализации результатов экспериментов.
 - Генерировать отчет о проведении вычислительного эксперимента в Microsoft Word.

Нефункциональные требования к программному комплексу включают.

- а) Удобство использования:
- Интерфейс пользователя должен быть интуитивно понятным и удобным для использования.
 - Поддержка различных числовых форматов данных для ввода и вывода.
- б) Масштабируемость и гибкость:
- Возможно внесения изменений в текст подпрограмм и их интерфейс.
- в) Надежность и производительность:
- Обеспечение стабильной работы программного комплекса при обработке вычислительных экспериментов с большим количеством периодов колебаний и различными параметрами потоков.
 - Оптимизация алгоритмов для ускорения вычислений и повышения их эффективности.

4. РАЗРАБОТКА ПРОГРАММНОГО КОМПЛЕКСА.

Подпрограмма 1 создана на базе расчетной модели в пакете мультифизического моделирования COMSOL Multiphysics [11] в среде разработки приложений Application Builder. Данная среда позволила создать интерфейс, управляющий моделью COMSOL и представляющий результаты пользователю. При запуске модели



на расчет отсутствует необходимость контролировать процесс вычислений и вручную запускать последовательность исследований. Реализованы возможности автоматического сохранения результатов после завершения расчетов и генерации отчетов.

Перечисленные выше функции реализованы путем создания набора форм, которые связывают входные данные пользователя с входными данными в имитационной модели. Также самое относится и к отображению результатов (как в виде таблиц модели, так и в виде диаграмм и графиков), составлению отчетов и генерации данных. В интерфейс приложения (рис. 1) добавлены необходимые параметры из расчетной модели, задана последовательность вычислений, что позволило быстрее и удобнее управлять расчетной моделью.

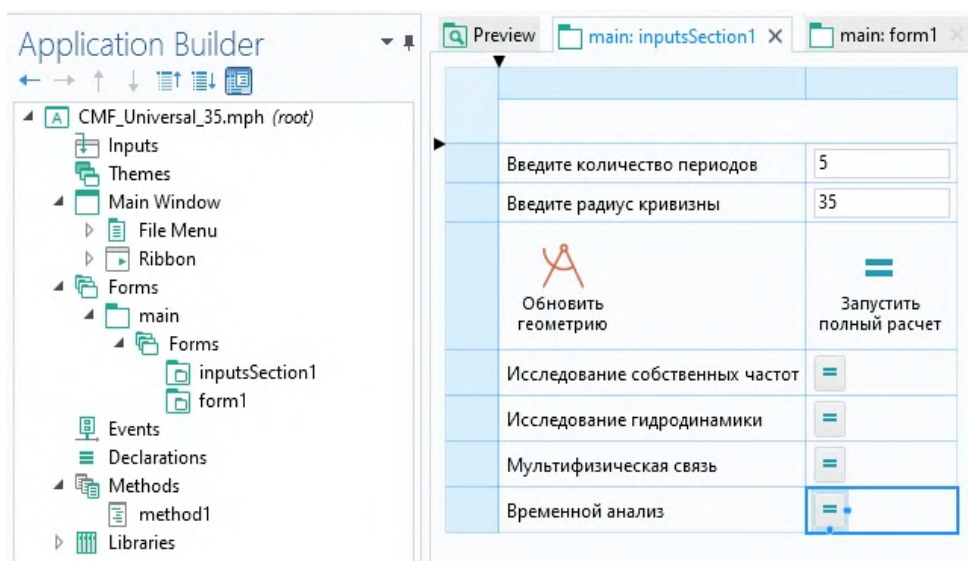


Рис. 1. Разработка интерфейса и функционала подпрограммы 1

Как показано на рис. 1 и 2 разработанный интерфейс подпрограммы 1 содержит поля ввода данных (радиус кривизны расходомерной трубки, количество периодов ее колебаний), и кнопки, при нажатии на которые выполняется соответствующее действие. Подпрограмма 1 использует расчетную модель кориолисова расходомера с универсальной геометрией, в поле можно вводить радиус кривизны расходомерной трубки и при нажатии кнопки «обновить геометрию» выполняется визуализация полученной формы расходомерной трубки (рис. 2).

Реализованы возможности запуска полного расчета заданной последовательности исследований или расчета конкретного исследования. Из подпрограммы 1 временные сигналы датчиков в виде табличных значений передаются в подпрограмму 2 (разработанную на языке Python 3) для их интерполяции и вычисления временной и фазовой задержек (рис. 3). Подпрограмма 1 автоматизирует процесс формирования

и загрузки необходимых данных в заданном формате. Дополнительно подпрограмма 2 генерирует отчеты для документации результатов в Microsoft Excel.

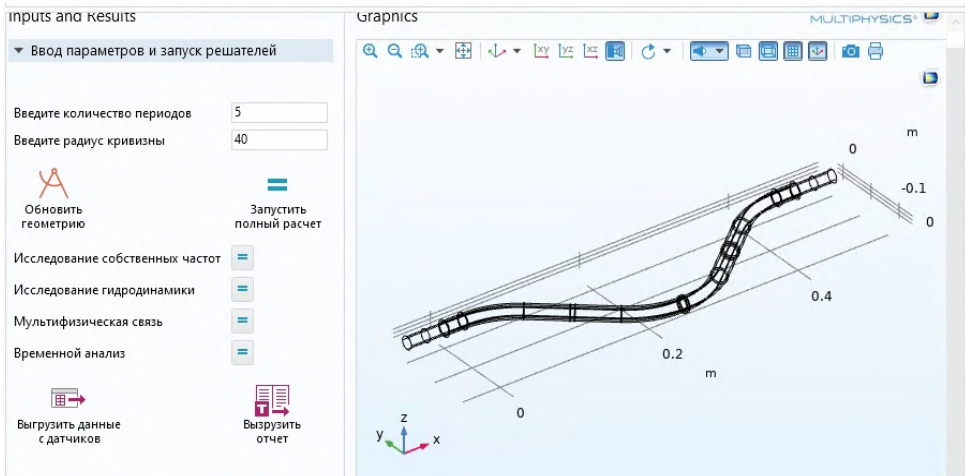


Рис. 2. Пример ввода параметров и обновления геометрии расходомерной трубки

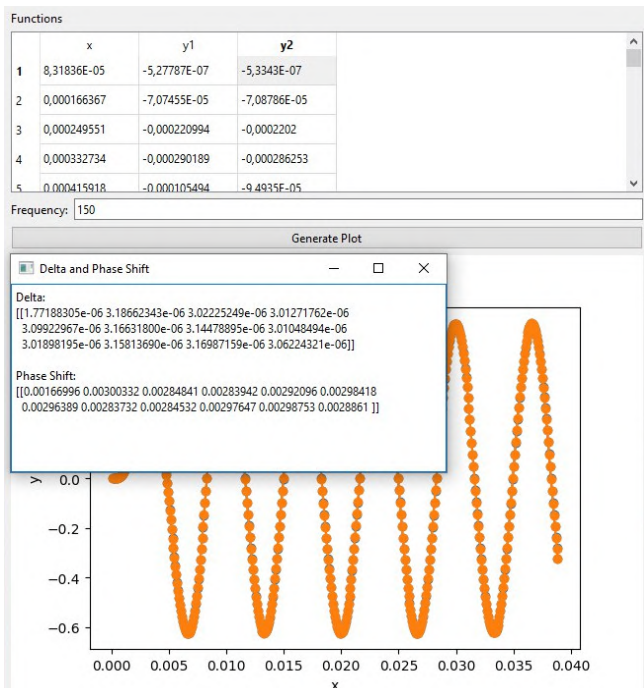
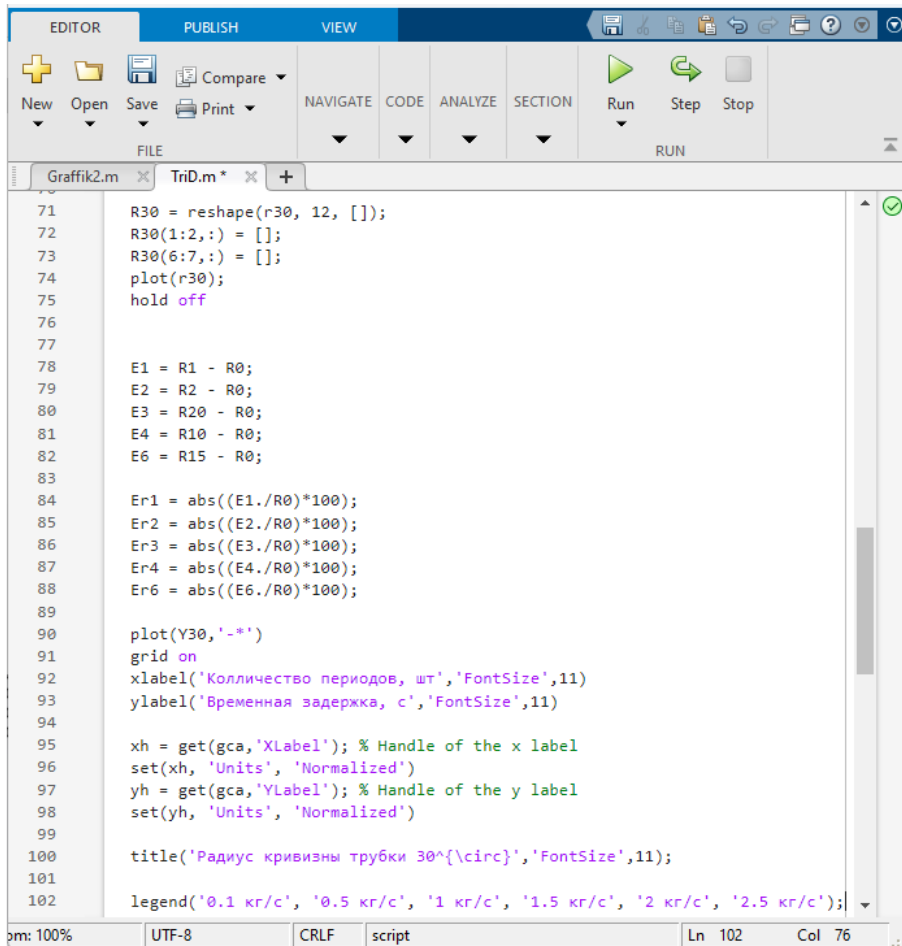


Рис. 3. Пример расчета фазовой и временной задержек сигналов

Подпрограмма 2 выполняет построение первоначального графика колебаний системы «расходомерная трубка – жидкость» для проверки результативности и адекватности вычислений. Программа обладает графическим интерфейсом пользователя, который позволяет удобно осуществлять ввод результатов моделирования как вручную, так и из файла, и выгрузку расчетных данных. Подпрограмма 3 разработана на языке MATLAB, пример кода программы представлен на рис. 4.



```

71 R30 = reshape(r30, 12, []);
72 R30(1:2,:) = [];
73 R30(6:7,:) = [];
74 plot(r30);
75 hold off
76
77
78 E1 = R1 - R0;
79 E2 = R2 - R0;
80 E3 = R20 - R0;
81 E4 = R10 - R0;
82 E6 = R15 - R0;
83
84 Er1 = abs((E1./R0)*100);
85 Er2 = abs((E2./R0)*100);
86 Er3 = abs((E3./R0)*100);
87 Er4 = abs((E4./R0)*100);
88 Er6 = abs((E6./R0)*100);
89
90 plot(Y30,'-.*')
91 grid on
92 xlabel('Количество периодов, шт','FontSize',11)
93 ylabel('Временная задержка, с','FontSize',11)
94
95 xh = get(gca,'XLabel'); % Handle of the x label
96 set(xh, 'Units', 'Normalized')
97 yh = get(gca,'YLabel'); % Handle of the y label
98 set(yh, 'Units', 'Normalized')
99
100 title('Радиус кривизны трубки 30°\{circ}','FontSize',11);
101
102 legend('0.1 кг/с', '0.5 кг/с', '1 кг/с', '1.5 кг/с', '2 кг/с', '2.5 кг/с');

```

Рис. 4. Код программы в среде MATLAB

Подпрограмма 3 на основе данных расхода жидкости, временной задержки и прочих результатов вычислительного эксперимента позволяет рассчитать необходимые параметры относительной и абсолютной погрешностей, и визуализировать полученные результаты в виде 2D и 3D-графиков (примеры показаны на рис. 5).

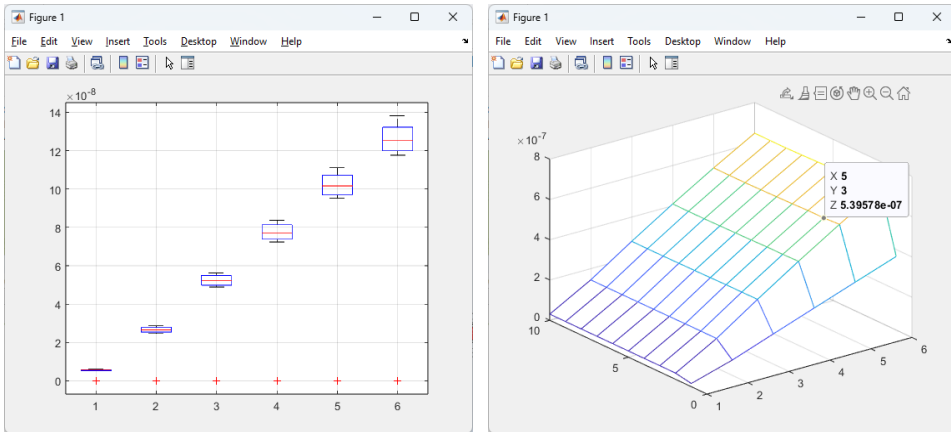


Рис. 5. Примеры визуализации результатов моделирования системы «расходомерная трубка – жидкость» для 6-ти массовых расходов

Результаты работы программного комплекса позволяют численно оценить внешние изменения в расчетную модель при проведении вычислительного эксперимента, рассчитать отклонения от данных базовой модели. Также программный комплекс предоставляет пользователю возможности вычислить и визуализировать различия измерений между экспериментами, выявить разброс результатов, проанализировать их повторяемость.

5. ОБСУЖДЕНИЕ

В рамках проведенного исследования были получены следующие результаты:

- Разработана структура требований для программного комплекса на основе шаблона SRS, принятого в методологии разработки ПО RUP. Анализ и документирование требований позволили создать четкий план разработки, определить базовые параметры, функциональные и нефункциональные возможности комплекса, что в свою очередь повысило эффективность его дальнейшей реализации.
- На основе разработанных требований определена оптимальная структура комплекса, состоящая из трех подпрограмм. Подпрограмма 1 управляет расчетной моделью COMSOL, позволяет изменять выбранные параметры моделирования и запускать модель на расчет. По окончании расчетов подпрограмма формирует файл-отчет с графиками, таблицами, выгружает данные о временных сигналах датчиков кориолисова расходомера для их интерполяции в подпрограмме 2. Подпрограмма 2 вычисляет временную и фазовую задержки сигналов для каждого массового расхода. Подпрограмма 3 на основе расчетных данных вычисляет параметры ошибок, погрешностей и формирует пользовательские графики.
- Использование разработанного программного комплекса позволило упростить взаимодействие с расчетной моделью в процессе анализа и исследования динамики



потоков жидкости в расходомерной трубке, а также автоматизировать алгоритмы обработки и визуализации данных. Применение программного комплекса при проведении серий вычислительных экспериментов снижает временные затраты на обработку полученных результатов.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Разработан программный комплекс, позволяющий проводить вычислительные эксперименты в области численного моделирования системы «расходомерная трубка-жидкость» кориолисова расходомера. Программный комплекс обеспечил автоматизацию алгоритмов обработки и визуализации данных, что значительно упростило процесс анализа результатов численного моделирования и позволило сосредоточиться на интерпретации данных и выявлении закономерностей.

Согласно разработанной структуре требований были реализованы основные функциональные требования в виде подпрограмм комплекса. Программный комплекс обладает простым и понятным интерфейсом, что относится к нефункциональному требованию «удобство использования». Разработанная архитектура программного комплекса позволяет вносить быстрые изменения в его компоненты для улучшения работы и добавления новых функций и дальнейшего развития, что соответствует требованиям масштабируемости и гибкости. Требование «Надежность и производительность» реализовано на основе эффективных численных методов и алгоритмов проведения вычислительных экспериментов.

Разработанный программный комплекс предоставляет полезный инструмент для различных групп пользователей и организаций, связанных с анализом работы кориолисовых расходомеров и оптимизацией их параметров. Он может быть использован как для научных исследований, так и в промышленных и образовательных целях. Планируемое усовершенствование программного комплекса будет направлено на реализацию новых алгоритмов интерполяции данных с использованием полиномиальных функций, а также на добавление средств обработки данных для работы с зашумленными сигналами.

Литература

1. Wang T., Baker R. Coriolis flowmeters: a review of developments over the past 20 years, and an assessment of the state of the art and likely future directions // Flow Measurement and Instrumentation. 2014. Vol. 40. P. 99–123. DOI: 10.1016/j.flowmeasinst.2014.08.015
2. ISO 10790:2015. Measurement of fluid flow in closed conduits – Guidance to the selection, installation and use of Coriolis flowmeters (mass flow, density and volume flow measurements).
3. Юрманов В.А., Гудков К.В. Анализ некоторых погрешностей кориолисовых расходомеров // Современные информационные технологии. 2006. № 4. С. 48–50.
4. Гудкова Е.А. Таранцева К.Р., Михеев М.Ю. Анализ критериев, влияющих на точность измерения массового расхода жидкости // XXI век: итоги прошлого и проблемы настоящего плюс. 2022. Т. 11. № 2(58). С. 49–54. DOI: 10.46548/21vek-2022-1158-0008
5. Гудкова Е.А. Таранцева К.Р., Михеев М.Ю. Сравнительный анализ численных и аналитических методов моделирования системы «расходомерная трубка – жидкость» в кориолисовых



- расходомерах // XXI век: итоги прошлого и проблемы настоящего плюс. 2022. Т. 11. № 3(59). С. 57–63. DOI: 10.46548/21vek-2022-1159-0009
6. *Брежнев Р.В.* Методы и средства проектирования информационных систем и технологий: учебное пособие, 2021. 216 с. – Текст: непосредственный: электронный.
 7. *Бубнов А.А., Бубнов С.А., Майков К.А.* Разработка и анализ требований к программному обеспечению: учебник / Бубнов А.А., Бубнов С.А., Майков К.А. – М: КУРС, 2022. – 176 с.
 8. *Коберн А.* Современные методы описания функциональных требований. – М.: Изд-во «Лори», 2002. – 264 с.
 9. *Patton J., Economy P.* User story mapping: discover the whole story, build the right product. – O'Reilly Media, Inc., 2014. – 200 с.
 10. Documenting non-functional requirements using FURPS+ [Электронный ресурс] // URL: https://www.marcinziemek.com/blog/content/articles/8/article_en.html (дата обращения 10.11.2023).
 11. COMSOL – Software for Multiphysics Simulation [Электронный ресурс] // URL: <https://www.comsol.com> (дата обращения 10.11.2023).
 12. *Федорова Н.Н.* Основы работы в ANSYS 17 [Электронный ресурс] / Н.Н. Федорова, С.А. Вальгер, М.Н. Данилов, Ю.В. Захарова. – Москва: ДМК Пресс, 2017. – 210 с. – ISBN 978-5-97060-425-0. URL: <https://ibooks.ru/bookshelf/364374/reading> (дата обращения: 10.11.2023).
 13. MATLAB [Электронный ресурс]. URL: <https://ww2.mathworks.cn/en/products/matlab.html> (дата обращения 10.11.2023).



Analysis and Documentation of Requirements for the Software Package for Conducting Computational Experiments and Numerical Investigation “Flow Tube – Liquid” System of a Coriolis Flow Meter

Ekaterina A. Gudkova *

Penza State Technological University (PSTU), Penza, Russia

ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-2197-6419>

e-mail: gudkova-penza@yandex.ru

Item. This article describes the stages of development of a software package designed to conduct a series of computational experiments on numerical modeling of the “flow tube – liquid” system of a Coriolis flow meter and automation of algorithms for subsequent data processing and visualization. Methods. The structure of requirements for the software package was developed based on the Software Requirements Specification template adopted in the Rational Unified Process software development methodology, in accordance with the classification of requirements for FURPS+ software systems. Python 3 and the interpreted programming language of the MATLAB environment were used to develop the complex routines. Results. A structure of requirements for the software package has been developed, including functional and non-functional requirements. A software package consisting of three subprograms has been developed, its structure, main components and capabilities are described, and examples of use are demonstrated. Conclusions. The software package solves the problems of automating modeling algorithms, processing and visualizing data obtained as a result of experiments. It can be used in engineering and scientific research related to the analysis of the performance of Coriolis flow meters.

Keywords: software package, flow tube-liquid system, Coriolis flow meter, numerical modeling.

For citation:

Gudkova E.A. Analysis and Documentation of Requirements for the Software Package for Conducting Computational Experiments and Numerical Investigation “Flow Tube – Liquid” System of a Coriolis Flow Meter. *Modelirovanie i analiz dannykh = Modelling and Data Analysis*, 2024. Vol. 14, no. 2, pp. 140–151. DOI: <https://doi.org/10.17759/mda.2024140209> (In Russ., abstr. in Engl.).

***Ekaterina A. Gudkova**, postgraduate student, Senior lecturer of the Department of Information Technologies and Systems, Penza State Technological University (PSTU), Penza, Russia, ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-2197-6419>, e-mail: gudkova-penza@yandex.ru

References

1. Wang T., Baker R. Coriolis flowmeters: a review of developments over the past 20 years, and an assessment of the state of the art and likely future directions // *Flow Measurement and Instrumentation*. 2014. Vol. 40. P. 99–123. DOI: 10.1016/j.flowmeasinst.2014.08.015
2. ISO 10790:2015. Measurement of fluid flow in closed conduits – Guidance to the selection, installation and use of Coriolis flowmeters (mass flow, density and volume flow measurements).
3. Yurmanov V. A., Gudkov K.V. Analysis of some errors of Coriolis flow meters // *Modern information technologies*, 2006, no. 4, pp. 48–50. (In Russ.).
4. Gudkova E.A. Tarantseva K.R., Mikheev M.Yu. Analysis of criteria affecting the accuracy of measuring liquid mass flow // *XXI century: results of the past and problems of the present plus*, 2022. Vol. 11, no. 2(58), pp. 49–54. DOI: 10.46548/21vek-2022-1158-0008. (In Russ.).
5. Gudkova E.A. Tarantseva K.R., Mikheev M.Yu. Comparative analysis of numerical and analytical methods for modeling the “flow tube – liquid” system in Coriolis flow meters // *XXI century: results of the past and problems of the present plus*, 2022. Vol. 11, no. 3(59), pp. 57–63. DOI: 10.46548/21vek-2022-1159-0009. (In Russ.).
6. Brezhnev R.V. Methods and means of designing information systems and technologies: textbook, 2021. 216 p. – Text: direct: electronic. (In Russ.).
7. Bubnov A.A., Bubnov S.A., Maikov K.A. Development and analysis of software requirements: textbook / Bubnov A.A., Bubnov S.A., Maykov K.A. – M: KURS, 2022. – 176 p. (In Russ.).
8. Coburn A. Modern methods for describing functional requirements. – M.: Publishing house “Lori”, 2002. – 264 p. (In Russ.).
9. Patton J., Economy P. User story mapping: discover the whole story, build the right product. – O’Reilly Media, Inc., 2014. – 200 p.
10. Documenting non-functional requirements using FURPS+ // Available at: https://www.marcinziemek.com/blog/content/articles/8/article_en.html (Accessed 10.11.2023).
11. COMSOL – Software for Multiphysics Simulation // Available at: <https://www.comsol.com> (Accessed 10.11.2023).
12. Fedorova N.N. Osnovy raboty v ANSYS 17 [Basics of work in ANSYS 17]/N.N. Fedorova, S.A. Valger, M.N. Danilov, Yu.V. Zakharova. – Moscow: DMK Press, 2017. – 210 p. – ISBN 978-5-97060-425-0. Available at: <https://ibooks.ru/bookshelf/364374/reading> (Accessed 10.11.2023). (In Russ.).
13. MATLAB. Available at: <https://ww2.mathworks.cn/en/products/matlab.html> (Accessed 10.11.2023).

Получена 14.03.2024

Принята в печать 29.03.2024

Received 14.03.2024

Accepted 29.03.2024

Адаптивная интеллектуальная обучающая система

Ксемидов Б.С. *

Научно-исследовательский институт точных приборов
АО «НИИ ТП», г. Москва, Российская Федерация
e-mail: stalker.anonim@mail.ru

Абгарян К.К. **

Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление»
Российской академии наук, г. Москва, Российская Федерация
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-0059-0712>
e-mail: kristal83@mail.ru

Цель работы – создание современной адаптивной интеллектуальной системы с использованием новейших технологий машинного обучения для автоматизации значительной части работы преподавателя. Существующие интеллектуальные системы, целью которых является подготовка слушателей для работы в разных предметных областях, на текущий момент имеют целый ряд недостатков, например, это необходимость подготовки учебного материала заданного формата, часто весьма трудоемкого по временным затратам. Помимо этого, подобные системы ориентированы на оценку знаний для корректировки плана обучения слушателей, что обуславливает необходимость разработки различных практических заданий для их формального представления. При этом практические задания должны составляться автором курса, что также может оказаться достаточно трудоемким. Новизна представленной в работе адаптивной интеллектуальной системы заключается в попытке усовершенствования подходов к обучению с помощью новейших методов машинного обучения. В помощь преподавателю для подготовки учебных курсов предлагается создавать видеоматериал в автоматическом режиме. Этот подход дает возможность слушателям получать материал не только в текстовом виде, но и в формате видео, без увеличения объема подготовительной работы преподавателя. Кроме того, преподавателю будут представлены возможность редактирования учебных материалов в соответствии со статистикой успеваемости обучающихся, которая содержится в системе.

Ключевые слова: машинное обучение, интеллектуальная обучающая система, база знаний, синтез речи, анализ данных.



Для цитаты:

Ксемидов Б.С., Абгарян К.К. Адаптивная интеллектуальная обучающая система // Моделирование и анализ данных. 2024. Том 14. № 2. С. 152–165. DOI: <https://doi.org/10.17759/mda.2024140210>

***Ксемидов Борис Сергеевич**, инженер, АО «НИИ ТП», г. Москва, Российская Федерация, e-mail: stalker.anonim@mail.ru

****Абгарян Каринэ Карленовна**, доктор физико-математических наук, главный научный сотрудник, руководитель отдела, Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» Российской академии наук, г. Москва, Российская Федерация, ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-0059-0712>, e-mail: kristal83@mail.ru

1. ВВЕДЕНИЕ

Развитие информационных технологий привело к значительным изменениям в образовательной сфере, в том числе к появлению всё большего числа интеллектуальных обучающих систем (ИОС), то есть систем электронного обучения, содержащих в себе элементы искусственного интеллекта, благодаря которым достигается эффект адаптивности в обучении студентов [8]. Популярность интеллектуальных обучающих систем объясняется доступностью такого рода обучения, преимуществами которого являются: возможность дистанционного взаимодействия, то есть обучения из любой точки мира при наличии оперативной обратной связи с преподавателем, а также гибкость, позволяющая обучать учащихся, ориентируясь на их индивидуальные особенности. Это говорит об особой значимости современных интеллектуальных обучающих систем.

Цель проводимого исследования заключается в разработке адаптивной интеллектуальной обучающей системы с использованием современных технологий машинного обучения для автоматизации значимой части работы преподавателя за счет использования следующих функций:

- автоматизированная подготовка учебного материала;
- предоставление учебного материала;
- предоставление ответов на вопросы;
- составление индивидуальных планов обучения в соответствии с успеваемостью обучающихся;
- анализ статистики по успеваемости обучающихся и оценка учебных материалов (например, степени сложности учебного курса, а также соотнесенности практических заданий и теоретического материала) для информирования преподавателя;
- оповещение других преподавателей учебного курса об обновлении тематического учебного материала наработками из других курсов;
- подготовка обновленных учебных материалов с помощью систем контроля версий.

Предполагается, что данная адаптивная интеллектуальная обучающая система будет внедрена в состав курса по программированию, анализу данных и машинному обучению. Для реализации системы предполагается составление баз знаний

на основе указанных дисциплин, интеграция их в разработанную адаптивную интеллектуальную обучающую систему и внедрение её в образовательный процесс. Отличие данной системы от других заключается в помощи преподавателю в подготовке учебного материала.

2. ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНЫЕ ОБУЧАЮЩИЕ СИСТЕМЫ

Интеллектуальные обучающие системы (ИОС) – это компьютерные программы и технологии, которые помогают людям получать новые знания и приобретать умения [5]. Они могут использоваться в образовательных учреждениях, в системе корпоративного обучения, в онлайн-курсах и многих других сферах.

Такие системы часто основываются на методах машинного обучения, с тем чтобы адаптироваться к потребностям и запросам конкретного пользователя и помочь ему расширить свои знания и навыки. Интеллектуальные обучающие системы могут предоставлять персонализированные материалы, задания, тесты и диагностические инструменты, которые помогают пользователям учиться с большей эффективностью и быстрее достигать своих целей.

Определение обучающим программам дал в своих работах В.А. Петрушин, в частности он придерживается следующего подхода: «В общем случае обучающие программы считаются интеллектуальными, если они обладают способностью: генерировать учебные задачи; решать задачи, предъявляемые обучаемому, используя методы представления знаний об изучаемой дисциплине; определять стратегию и тактику ведения диалога; моделировать состояние знаний обучаемого; самообучаться на основе анализа результатов взаимодействия с обучаемыми. Однако на практике многие обучающие программы, называемые интеллектуальными, обладают только некоторыми из приведенных выше способностей» [4].

ИОС состоит из четырех компонентов [2, 6]:

- модель обучаемого (содержит информацию о выбранной стратегии обучения студента и совершаемых им ошибках);
- модель наставника (контролирует процесс обучения студента, установление ряда тестовых испытаний и оценку студента);
- модель предметной области;
- модель интерфейса.

В целом ИОС основываются на следующих принципах [2]:

1. принцип прагматичной диагностики (создание каркаса учебного плана и структуры подчинения системы диагностики ошибок студента курсу системе менеджмента обучения);
2. принцип сопоставления текущей модели студента с моделью идеального (сопоставление учебного плана, который представлен набором заданий и/или вопросов, с перечнем уже выполненных студентом заданий);
3. принцип «порождающих интерфейсов» (подбор и корректировка разных по содержанию элементов учебного процесса в зависимости от конкретных потребностей обучающегося и его знаний на момент подбора);



4. принцип неэквивалентности обучения (включает различные подходы к представлению обучающего процесса на основе уровня знаний студента определенного курса);
5. принцип необходимого разнообразия обучающих воздействий (подразумевает, что преподаватель должен иметь глубокие знания о возможных вариантах воздействия на обучающегося).

Модель обучаемого является инструментом для измерения его характеристик, необходимых для управления процессом обучения.

В качестве модели обучаемого зачастую используют оверлейные модели [2]. Рассмотрим некоторый набор знаний, который представляет собой совокупность понятий (терминов, определений и т.п.), либо умений (например, решать задачи машинного обучения), соответствующих данному курсу. Такой набор знаний представляет собой иерархическую структуру, дерево, где выше расположены некоторые элементарные знания, а ниже – более сложные, требующие тех знаний, что расположены выше. Оверлейная модель представляет собой подмножество таких иерархических структур, элементы которого требуется изучить для овладения какой-либо специальностью. Таким образом, ее смысл заключается в том, чтобы оценить, насколько знания конкретного пользователя перекрываются рассматриваемыми моделями предметной области. При этом для понимания уровня пользователя используется разность между моделью предметной области и моделью пользователя [3]. Ядро оверлейной модели математически выражается следующим образом:

$$P(k) = (P_1(k), P_2(k), \dots, P_j(k), P_n(k))$$

где $P_j(k)$ – вероятность правильного применения операции j -го типа, вычисляемая по результатам решения учебной задачи на k -м шаге обучения. Выдача обучаемому релевантного учебного материала по результатам решения учебной задачи обеспечивается установлением взаимосвязи между операциями и концептами [1].

Организация учебного процесса при помощи ИОС заключается в последовательном выполнении следующих шагов:

- создание учебного материала (теоретический материал, задания, тесты);
- настройка интерактивной поддержки процесса решения практических задач (например, привлечение интерактивного помощника, который предлагает небольшие подсказки, дает ссылки на теоретический материал по задаче, выдает мотивирующие сообщения).

3. МОДЕЛЬ ПРЕДМЕТНОЙ ОБЛАСТИ

Модель предметной области представляет собой набор знаний, которые необходимо усвоить студенту. Модель предметной области можно представить в виде иерархической структуры – дерева, в котором родители-узлы являются элементами набора знаний, необходимыми для усвоения элементов детей-узлов дерева. Такая система представления знаний имеет следующие преимущества:



- предметная область декомпозируется на отдельные элементы научного знания, благодаря чему с ней становится проще работать как преподавателю, так и студенту;
- программа обучения (совокупность курсов для освоения какой-либо профессии) представляет собой совокупность моделей предметных областей, благодаря этому упрощается взаимодействие преподавателей связанных курсов обучения – при обновлении учебного материала одного курса автор другого связанного курса может получить уведомление об этом;
- данное представление предметной области позволяет оценить сложность каждого элемента набора знаний как сумму входящих ответвлений, то есть сложность в данном случае определяется как количество элементов, требуемых для усвоения указанного узла дерева.

4. АНАЛИЗ СУЩЕСТВУЮЩИХ РЕШЕНИЙ

В ходе исследования уже существующих решений были проанализированы следующие ИОС на соответствие вышеуказанному функционалу (рассматривались системы для обучения техническим наукам).

ZOSMAT представляет собой ИОС, в первую очередь предназначенную для обучения математике, однако ее можно адаптировать под технические науки. ZOSMAT не полностью отвечает вышеуказанному функционалу [9] ввиду того что:

- отсутствует автоматизированная подготовка учебного материала;
- отсутствует модуль представления ответов на вопросы, присутствует лишь так называемый «банк вопросов», предназначенный только для оценки знаний студента;
- отсутствует система контроля версий материала;
- статистика по успеваемости студентов присутствует, однако нет общей статистики для конкретного элемента учебных материалов модели предметной области, и помимо этого, отсутствует оценка сложности учебного материала;
- отсутствует оповещение об обновлении связанного учебного материала для преподавателей.

Также большим недостатком является недоступность данной системы – ее исходный код не является открытым, кроме того, большая часть подобных разработок является проприетарной.

OATutor и Thesis-ITS – проекты с открытыми исходными кодами адаптивных обучающих систем, построенных на принципах ИОС [11]. Оба проекта не соответствуют необходимому функционалу, однако, в отличие от OATutor, Thesis-ITS имеет интерфейс для редактирования учебного материала – в OATutor его нет, для этого необходимо редактировать отдельные текстовые файлы любым текстовым редактором.

Все перечисленные выше разработки – наиболее подходящие по функционалу из множества существующих систем ИОС, но не вполне отвечающие установленным требованиям, что говорит о возможной актуальности реализации ПО с указанным функционалом.

5. АРХИТЕКТУРА ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНОЙ ОБУЧАЮЩЕЙ СИСТЕМЫ

Архитектура разрабатываемой системы (рис. 1) состоит из следующих основных компонентов [2, 6]:

- модель предметной области (хранение элементов учебного материала курса);
- модель ученика (представление и хранение информации об отдельном учащемся, включая его знания, навыки, предпочтения в обучении, неправильные представления и другие соответствующие характеристики);
- модель наставника (управление взаимодействием между системой и учеником);
- модель пользовательского интерфейса (коммуникация системы с учеником).

Помимо основных компонентов можно также выделить новые дополнительные компоненты, предоставляющие различные функции:

- модуль работы с учебным материалом (предоставление инструментов для автоматизированной подготовки учебного материала).

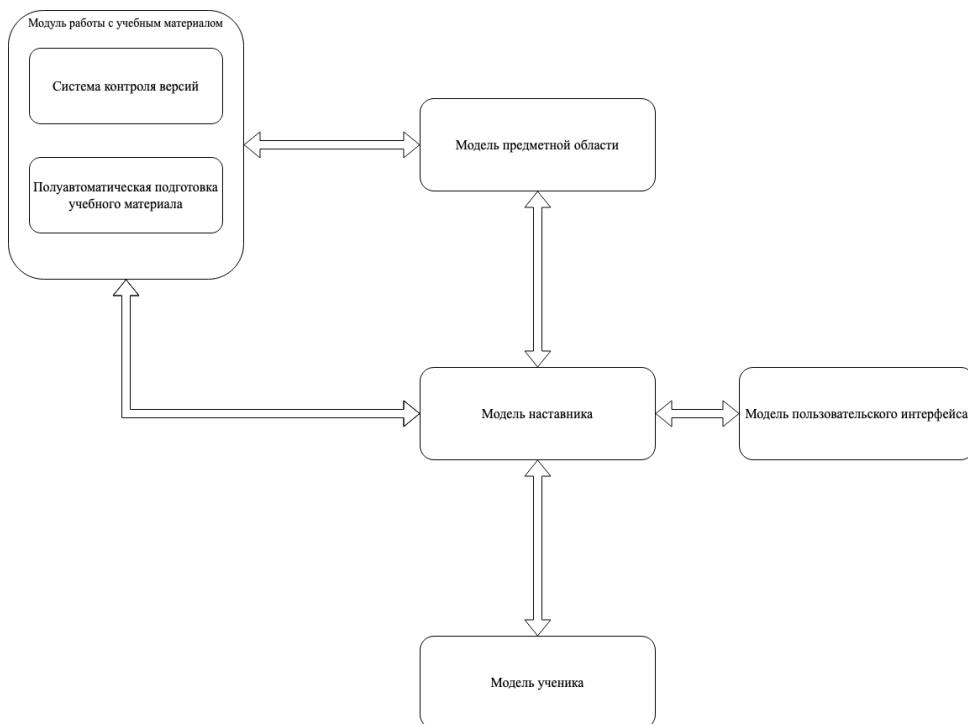


Рис. 1. Архитектура ИОС

6. АВТОМАТИЗИРОВАННАЯ ПОДГОТОВКА УЧЕБНОГО МАТЕРИАЛА

Автоматизированная подготовка учебного материала позволяет автоматически генерировать видеолекции по заданному текстовому материалу и входит в компонент модуля работы с учебным материалом, указанным на рис. 1.

На данный момент для подготовки текстового материала предлагается язык разметки Markdown [10]. С помощью данного языка описываются слайды презентации, которые затем будут автоматически озвучены с помощью нейросетевой модели.

Для программной реализации данного компонента были использованы следующие инструменты:

- язык программирования Python версии 3.8 для реализации CLI-утилиты генерации видеолекций;
- открытая нейросетевая модель Silero TTS для генерации озвучки;
- CLI-утилита Magr для генерации изображений слайдов презентации;
- CLI-утилита ffmpeg для накладывания озвучки на слайды презентации.

7. АРХИТЕКТУРА НЕЙРОСЕТЕВОЙ МОДЕЛИ SILERO TTS

В качестве основы архитектуры нейросетевой модели Silero TTS используется архитектура Tacotron 2.

Tacotron2 – это архитектура sequence to sequence (см. рис. 2) [13]. Она состоит из:

- кодировщика, который создает некоторое внутреннее представление о входных данных (символьных токенах);
- декодировщика, который преобразует это представление в мел-спектрограмму;
- PostNet, который призван улучшить спектрограмму, сгенерированную декодировщиком.

Рассмотрим подробнее архитектуру кодировщика. Кодировщик состоит из следующих элементов:

- embedding слой, который на основании последовательности натуральных чисел, представляющих символы, создает многомерные векторы;
- три одномерных сверточных слоя, за каждым из которых следует нормализация по мини-батчам и активационная функция ReLU;
- двунаправленные LSTM-слои, которые в качестве входных данных получают тензоры из сверточного блока.

Декодировщик в Tacotron2 имеет рекуррентную архитектуру: декодировщик в качестве входных данных использует свои выходные данные, но с предыдущего шага, причем в виде одного фрейма спектрограммы [13]. Помимо этого декодировщик использует механизм обучаемого внимания.

Декодировщик на каждом своем шаге формирует контекстный вектор и обновляет веса внимания согласно следующим правилам:

$$c_i = \sum_{j=1}^{T_x} a_{ij} h_j$$

где a_{ij} – веса внимания, вычисляемые по формуле:

$$a_{ij} = \exp \frac{(e_{ij})}{\sum_{k=1}^{T_x} \exp(e_{ik})}$$

где e_{ij} – так называемая «энергия», формула вычисления которой зависит от используемого типа механизма внимания.

Сравнение архитектуры с другими подходами представлена в таблице 1 [13].

Сама архитектура Tacotron 2, используемая в Silero TTS, модифицирована с помощью подхода Assentor, который решает проблему расстановки ударений с помощью ручного управления расстановки ударения пользователем [7].

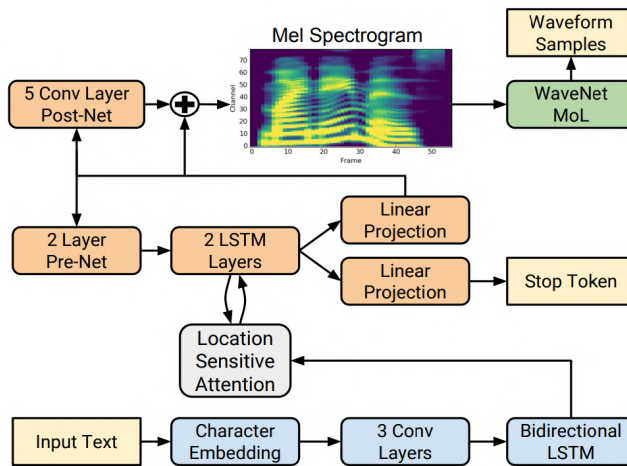


Рис. 2. Архитектура Tacotron2

Таблица 1

MOS (Mean Opinion Score) оценки с 95% доверительными интервалами, рассчитанными на основе t-распределения для различных систем

Система	MOS
Parametric	3.492 ± 0.096
Tacotron (Griffin-Lim)	4.001 ± 0.087
Concatenative	4.166 ± 0.091
WaveNet (Linguistic)	4.341 ± 0.051
Ground truth	4.582 ± 0.053
Tacotron 2	4.526 ± 0.066

8. ПРОГРАММНАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ АВТОМАТИЗИРОВАННОЙ ПОДГОТОВКИ УЧЕБНОГО МАТЕРИАЛА

Этапы генерации видеолекции (см. рис. 3):

1. Описание автором курса слайдов презентации с помощью модифицированного Markdown.
2. Генерация слайдов в виде изображений, исходя из их описания.
3. Озвучивание каждого слайда с помощью нейросетевой модели.
4. Склеивание слайдов и речи.



Рис. 3. Этапы генерации видеолекции

Процесс подготовки учебного материала происходит следующим образом: автор курса подготавливает учебный материал в письменном виде, задает структуру презентации, а затем описывают свою презентацию с помощью небольшого диалекта языка разметки Markdown, который был специально разработан для данного ПО. Данный вариант языка немного отличается от стандартного Markdown. Рассмотрим некоторые отличия:

- каждый заголовок описывает свой слайд, слайды отделяются друг от друга с помощью тройных дефисов;
- для каждого слайда доступны специальные управляющие инструкции, на момент написания данной статьи доступна только одна инструкция:
 - «/speech» – данная управляющая инструкция позволяет задавать для конкретного слайда речь для его озвучки.

Примером разметки презентации может служить листинг 1.

```
# Python
...
print('Привет, мир')
...
```

```
/speech{На этом слайде представлена простейшая программа,  
написанная на языке программирования Пайтон. Эта программа  
просто выводит указанные слова в терминал.}
```

```
---
```

```
# Python
```

```
---
```

```
a = 2  
b = 4  
print(a * b)  
---
```

```
/speech{А здесь представлена другая программа,  
которая умножается число два на число четыре.}
```

Листинг 1. Пример Markdown

Для озвучивания слайдов рассматривались различные подходы:

- Coque TTS – библиотека Python для генерации речи по заданному тексту (в частности в тестировании участвовала нейросетевая модель xtts_v2);
- Google Speech-To-Text – интернет-сервис Google для генерации речи;
- Silero TTS – предобученная нейросетевая модель для генерации речи [12], представленная Silero.

Для сравнения подходов проводилось тестирование на восприятие речи обучающимися. В результате был выбран Silero TTS как менее роботизированный голос по сравнению с другими и одна из небольшого количества моделей, которая была обучена для синтеза речи на русском языке.

Реализованное ПО предоставляет два типа интерфейса для автоматической генерации видеолекций:

- CLI;
- Web-интерфейс.

Примеры работы с Web-интерфейсом представлены на рис. 4 и 5.

Lecture Automator

Текст генерируемой лекции:

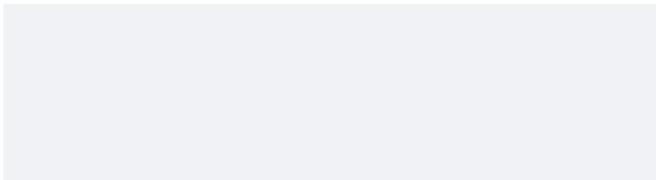


Рис. 4. Скриншот веб-интерфейса

Lecture Automator

Текст генерируемой лекции:

```
# Python
....
print('Привет, мир')
....

/speech(На этом слайде представлена простейшая программа, написанная на языке
программирования Пайтон. Эта программа просто выводит указанные слова в терминал.)

---

# Python
....
a = 2
b = 4
print(a * b)
....

/speech(А здесь представлена другая программа, которая умножает число два на число
четыре.)
|
```

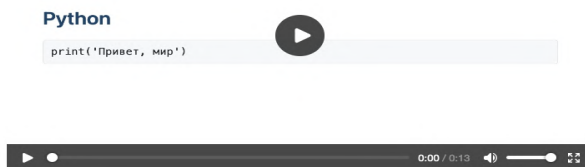


Рис. 5. Скриншот генерации видео в веб-интерфейсе

9. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе был сделан анализ существующих ИОС на предмет соответствия заданной функциональности, который показал отсутствие необходимых для этого разработок и тем самым подтвердил актуальность данного исследования. Далее была разработана архитектура системы, а также был разработан один из ее компонентов. Планируется дальнейшее расширение функционала разработанного компонента, в частности добавление новых управляющих инструкций. Помимо этого, планируется исследование подходов к автоматизированному составлению практических заданий и дальнейшая разработка компонентов адаптивной интеллектуальной обучающей системы.

Литература

1. Аванский С.М., Затылкин А.В., Юрков Н.К. Представление модели пользователя и предметной среды обучения // Труды Международного симпозиума «Надежность и качество». – 2007. – Т. 1. – С. 66–67.
2. Алешева Л.Н. Интеллектуальные обучающие системы // Вестник университета. – 2018. – № 1. – С. 149–155.
3. Интеллектуальное управление процессом обучения. Анализ и проектирование систем [Электронный ресурс] // URL: <https://habrahabr.ru/post/194240/> (дата обращения: 20.11.2023).



4. *Петрушин В.А.* Экспертно-обучающие системы // К.: Наук. Думка. – 1992.
5. *Юрков Н.К.* Интеллектуальные компьютерные обучающие системы // Пенза: Изд-во ПГУ. – 2010.
6. *Alkhatlan A., Kalita J.* Intelligent tutoring systems: A comprehensive historical survey with recent developments // arXiv preprint arXiv:1812.09628. – 2018.
7. *Geneva D. et al.* Accentor: An Explicit Lexical Stress Model for TTS Systems.
8. How intelligent tutoring systems are changing education [Электронный ресурс] // URL: <https://medium.com/@roybirobot/how-intelligent-tutoring-systems-are-changing-education-d60327e54dfb> (дата обращения: 10.06.2023).
9. *Keleş A. et al.* ZOSMAT: Web-based intelligent tutoring system for teaching–learning process // Expert Systems with Applications. – 2009. – Т. 36. – № . 2. – pp. 1229–1239.
10. Lecture Automator [Электронный ресурс] // URL: <https://github.com/CapBlood/lecture-automator> (дата обращения: 30.05.2023).
11. *Pardos Z. A. et al.* Oatutor: An open-source adaptive tutoring system and curated content library for learning sciences research // Proceedings of the 2023 chi conference on human factors in computing systems. – 2023. – pp. 1–17.
12. Silero Models [Электронный ресурс] // URL: <https://github.com/snakers4/silero-models> (дата обращения: 10.06.2023).
13. *Shen J. et al.* Natural tts synthesis by conditioning wavenet on mel spectrogram predictions // 2018 IEEE international conference on acoustics, speech and signal processing (ICASSP). – IEEE, 2018. – pp. 4779–4783.
14. Thesis-ITS [Электронный ресурс] // URL: <https://github.com/robertoguazon/Thesis-ITS/wiki> (дата обращения: 10.06.2023).

Adaptive Intelligent Tutoring System

Boris S. Ksemidov*

SC «SRI PI», Moscow, Russia
e-mail: stalker.anonim@mail.ru

Karine K. Abgaryan**

Federal Research Center “Computer Science and Control”
of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-0059-0712>
e-mail: kristal83@mail.ru

The goal of the work is to create a modern adaptive intelligent system using current machine learning technologies to automate a significant part of the teacher’s work. Existing intelligent systems, the purpose of which is to train students to work in various subject areas, currently have a set of various disadvantages, for example, the need to prepare educational material in a given format, which is sometimes a very labor-intensive task. In addition, in such systems there is a need to assess knowledge to correct the training plan for students, which requires various practical tasks for their formal presentation. In this case, practical assignments must be compiled by the course author, which can also be very labor-intensive. The novelty of the adaptive intelligent system presented in the work lies in the improvement of learning approaches using the latest machine learning methods. To help the teacher prepare educational material provides the ability to create video material automatically. This approach provides an opportunity for students to receive material not only in text form, but also in video format, without increasing the labor intensity on the part of the teacher. In addition, the teacher will be given the opportunity to manipulate versions of educational materials in accordance with the statistics provided by the system on student performance.

Keywords: machine learning, intelligent tutoring system, knowledge base, speech synthesis, data analysis.

For citation:

Ksemidov B.S., Abgaryan K.K. Adaptive Intelligent Tutoring System. *Modelirovanie i analiz dannykh = Modelling and Data Analysis*, 2024. Vol. 14, no. 2, pp. 152–165. DOI: <https://doi.org/10.17759/mda.2024140210> (In Russ., abstr. in Engl.).

***Boris S. Ksemidov**, engineer, SC «SRI PI», Moscow, Russian Federation, e-mail: stalker.anonim@mail.ru

****Karine K. Abgaryan**, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Chief Researcher, Head of Department, Federal Research Center “Computer Science and Control” of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia, ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-0059-0712>, e-mail: kristal83@mail.ru



References

1. Avanskij S. M., Zatylnkin A. V., Jurkov N. K. Predstavlenie modeli pol'zovatelja i predmetnoj srede obuchenija // Trudy Mezhdunarodnogo simpoziuma «Nadezhnost' i kachestvo», 2007. Vol. 1, pp. 66–67.
2. Alesheva L.N. Intellektual'nye obuchajushhie sistemy. Vestnik universiteta, 2018. No. 1, pp. 149–155.
3. Intellektual'noe upravlenie processom obuchenija. Analiz i proektirovanie sistem. Available at: <https://habrahabr.ru/post/194240/> (Accessed: 20.11.2023).
4. Petrushin V. A. Jekspertno-obuchajushhie sistemy. K.: Nauk. Dumka, 1992.
5. Jurkov N. K. Intellektual'nye komp'yuternye obuchajushhie sistemy //Penza: Publ. PGU, 2010.
6. Alkhatlan A., Kalita J. Intelligent tutoring systems: A comprehensive historical survey with recent developments. arXiv preprint arXiv:1812.09628, 2018.
7. Geneva D. et al. Accentor: An Explicit Lexical Stress Model for TTS Systems.
8. How intelligent tutoring systems are changing education. Available at: <https://medium.com/@roybirobot/how-intelligent-tutoring-systems-are-changing-education-d60327e54dfb> (Accessed: 10.06.2023).
9. Keleş A. et al. ZOSMAT: Web-based intelligent tutoring system for teaching–learning process. Expert Systems with Applications, 2009. Vol. 36, no. 2, pp. 1229–1239.
10. Lecture Automator. Available at: <https://github.com/CapBlood/lecture-automator> (Accessed: 30.05.2023).
11. Pardos Z. A. et al. Oatutor: An open-source adaptive tutoring system and curated content library for learning sciences research //Proceedings of the 2023 chi conference on human factors in computing systems, 2023. pp. 1–17.
12. Silero Models. Available at: <https://github.com/snakers4/silero-models> (Accessed: 10.06.2023).
13. Shen J. et al. Natural tts synthesis by conditioning wavenet on mel spectrogram predictions // 2018 IEEE international conference on acoustics, speech and signal processing (ICASSP). IEEE, 2018. pp. 4779–4783.
14. Thesis-ITS. Available at: <https://github.com/robertoguazon/Thesis-ITS/wiki> (Accessed: 10.06.2023).

Получена 02.05.2024

Принята в печать 18.05.2024

Received 02.05.2024

Accepted 18.05.2024

◆◆◆◆◆ МЕТОДИКА ПРЕПОДАВАНИЯ ◆◆◆◆◆

УДК 372.851

Воспитание в высшей школе

Куланин Е.Д.*

Московский государственный психолого-педагогический университет
(ФГБОУ ВО МГППУ), г. Москва, Российская Федерация
ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-6093-7012>
e-mail: lucas03@mail.ru

Степанов М.Е.**

Московский государственный психолого-педагогический университет
(ФГБОУ ВО МГППУ), г. Москва, Российская Федерация
ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-4803-8211>
e-mail: mestepanov@yandex.ru

Статья продолжает цикл методических разработок авторов [1] – [17]. В ней рассматриваются актуальные проблемы современного образования, связанные с необходимостью формирования не просто специалиста, но и личности в целом, прежде всего, её гражданской позиции. Авторы опираются на личный опыт работы на факультете информационных технологий МГППУ.

Ключевые слова: философия, природа человека, трансгуманизм, прогресс, свобода и необходимость, уровень развития личности, творчество, педагогика, воспитание, обучение, высшее образование, методика преподавания, математика, информатика, спорт, культура, стиль общения.

Для цитаты:

Куланин Е.Д., Степанов М.Е. Воспитание в высшей школе // Моделирование и анализ данных. 2024. Том 14. № 2. С. 166–191. DOI: <https://doi.org/10.17759/mda.2024140211>

***Куланин Евгений Дмитриевич**, кандидат физико-математических наук, профессор, Московский государственный психолого-педагогический университет (ФГБОУ ВО МГППУ), г. Москва, Российская Федерация, ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-6093-7012>, e-mail: lucas03@mail.ru

****Степанов Михаил Евграфович**, кандидат педагогических наук, доцент, Московский государственный психолого-педагогический университет (ФГБОУ ВО МГППУ), г. Москва, Российская Федерация, ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-4803-8211>, e-mail: mestepanov@yandex.ru



1. ВВЕДЕНИЕ

Современное человечество, несомненно, находится в кризисном состоянии. Сейчас речь идёт даже о возможности самоуничтожения. Такая тяжёлая ситуация вызвана множеством разнообразных причин. В частности, современное общество, как витязь на распутье, должно выбрать направление развития, заключённое между крайними линиями традиции и трансгуманизма, как крайней формы либерализма.

Многовековое поклонение прогрессу, как абсолютному благу, привело к тому, что люди готовы отказаться от своей человеческой сущности и превратиться в подобие роботов. Наука вообще и математика в частности упорно ищут и находят аргументы в пользу концепции человека-машины. Возможно, именно потеря ощущения исключительности людей вызывает неменяемое поведение так называемых элит современных государств, основанное на потере страха перед гибелью человечества от оружия массового уничтожения, возникновение которого основано на «успехах» физики, химии, биологии и т. д.

Сейчас, когда крайняя враждебность Запада к России привела к прямому военному столкновению, стало ясно, что во всех сферах общественной жизни принято много неверных решений, принесших целый ряд тяжёлых последствий для страны и её населения. Образование не является исключением. В частности, одной из ошибок было ослабление внимания к воспитанию в учебном процессе. Теперь его нужно усиливать. Авторы статьи полагают, что каждому преподавателю высшей школы необходимо обдумать вопрос о том, в какой степени возможно воспитывающее влияние на студентов в наше нелёгкое время.

2. ЦЕЛИ ПЕДАГОГИКИ

Педагогическая наука традиционно концентрирует своё внимание на воспитании и обучении детей и подростков. Причины этого обстоятельства вполне понятны. Именно в раннем возрасте происходит формирование личности. После достижения зрелого возраста человек выпадает из целенаправленного воспитательного процесса, поскольку начинает рассматриваться как личность вполне определившаяся. В значительной степени это можно отнести и к студентам высших учебных заведений.

На самом же деле человек меняется всю жизнь. Он постоянно сталкивается с проблемами, а, значит, фактически должен постоянно учиться. Тем более, это относится к студентам, которые осваивают комплекс знаний, связанных с их будущей профессией. При этом параллельно они входят во взрослую жизнь, что связано с постоянным решением сложных проблем.

Януш Корчак говорил: *«Одной из наиболее злостных ошибок является суждение, что педагогика – это наука о ребенке, а не о человеке. Нет детей – есть люди, но с другим масштабом понятий, другими источниками опыта, другими стремлениями, другой игрой чувств. Сто детей – сто людей, которое не когда-то там завтра, но уже теперь, сегодня уже люди»*. Это высказывание направлено на ранний



возраст, но, в конечном счёте, его следует понимать в том смысле, что педагогика – наука о человеке как таковом, независимо от его возраста и других конкретных особенностей, присущих каждой личности.

Если, исходя из этого, посмотреть на общественную жизнь, то можно прийти к выводу, что она в значительной степени состоит в формировании всех членов человеческого общества, то есть носит педагогический характер. При этом частично общество осознано решает соответствующие задачи, например, с помощью института семьи, системы образования, СМИ, искусства и литературы и т. д., а частично процессы формирования личности протекают стихийно.

Мы, по понятным причинам, можем говорить только о целенаправленной педагогической деятельности, которая имеет вполне определённую цель – **формирование личности молодого человека в соответствии с официальными, а также с пока несформулированными, но действенными, идеологическими установками общества**. Таким образом, вопрос об идеологии общества является центральным как для всего общества в целом, так и для работников системы образования.

3. ОБРАЗОВАНИЕ КАК ОБЩЕНИЕ

Образование можно рассматривать с различных позиций, которые определяются идеологическими установками той группы лиц, которые продвигают соответствующую точку зрения. С момента появления информатики возник подход, основанный на идеях, связанных с понятием информации. Любое общение при этом рассматривается как передача информации от учителя-ретранслятора к ученику-приёмнику.

В работе [20] показана неадекватность подобного подхода к проблемам обучения. Попытка так интерпретировать обучение отрывает педагогический процесс от его реального содержания. Но зато открывает перспективы максимально интенсивного использования компьютерных технологий, что в наше время и происходит.

В рамках тотальной коммерциализации общества была выдвинута концепция, рассматривающая образование как предоставление образовательных услуг. Эта точка зрения была принята в нашей стране официально и, именно это обстоятельство привело к ослаблению воспитания в процессе обучения. К счастью, теперь ситуация начала меняться, в частности термин «государственная и муниципальная услуга в сфере образования» исключен из статей закона об образовании, регулирующих вопросы финансирования образования [21].

Можно утверждать, что представления о сущности образования, которые возникают на основе новых естественнонаучных и социально-экономических теорий без учёта традиционных взглядов, в целом ошибочны. Хотя, не исключено, что ряд важных особенностей системы образования они описывают. Для достаточно объективного рассмотрения вопроса о глубинной сущности образования необходимо целостное восприятие проблемы, а оно возможно только при истолковании образования, как одной из форм общения людей.



Конечно, определяющая роль общения в формировании личности проявляется, прежде всего, в раннем возрасте. Также как развитие от эмбриона до новорожденного пока происходит естественным путём, начальное становление личности происходит во многом стихийно. По этой причине роль общения в определённом смысле оказывается скрытой.

Чтобы понять истинную роль общения, необходимо вспомнить об одичавших детях, ставших прототипами героя сказки Киплинга Маугли. Именно по этой причине используется термин «эффект маугли». Процитируем источник [22]: «Те, кто жил в обществе животных первые 3,5–6 лет жизни, практически не могут освоить человеческий язык, ходить прямо, осмысленно общаться с другими людьми, несмотря даже на годы, проведенные в последующем в обществе людей, где они получали достаточно заботы. Это лишний раз показывает, насколько важными для развития ребенка являются первые годы его жизни и опыт социального поведения и общения».

На уровень развития «волчьих детей» ссылался уже Я.А. Коменский в своей «Великой дидактике» [23]. В итоге он делает вывод: «Если человек должен стать человеком, то его следует обучать».

В ряде неблагоприятных детских судеб возникает сходный эффект, вызванный депривацией. «Психическая депривация является психическим состоянием, возникшим в результате таких жизненных ситуаций, где субъекту не предоставляется возможности для удовлетворения некоторых его основных (жизненных) психических потребностей в достаточной мере и в течение достаточно длительного времени» [24]. Особенно ярко депривация проявляется в случаях крайней социальной изоляции.

Можно утверждать, что, несмотря на то, что с возрастом человек приобретает определённую автономию в своих действиях, общение остаётся важнейшим психосоциальным процессом. Человек обретает смысл жизни только в рамках сообщества, в котором он сформировался. Например, Робинзон Крузо жил, прежде всего, для того, чтобы вернуться в свою страну.

Общение между людьми можно трактовать как обмен жизненными смыслами. Одним из важных видов такого обмена как раз и является обучение. Но, конечно, истолковывать образование в этом ключе можно по-разному. Начнём с того, что западные теории общества, основанные на принципе «война каждого с каждым», направлены против образования-общения. Одним из способов этой борьбы является внедрение в общественное сознание представлений о так называемой «свободе» как вседозволенности. Так на ранних этапах развития ребёнка делается попытка максимально ограничить влияние родителей на ребёнка под твидом борьбы с семейным насилием. Но при этом параллельно, позабыв про свободу, родителей принуждают принять самые разнузданные формы сексуального воспитания детей. Что касается целенаправленного воздействия на человека более зрелого возраста, ультралиберальные силы стремятся к разрушению всех традиций и подчинению личности низменным страстям, главной из которых должна стать алчность – деньги решают всё.

Вернёмся к трём исторически насаивающихся и дополняющих друг друга мировоззрениях нашего отечества, то есть к **ощущению единства с Природой, пониманию**



Добра и Зла в христианском смысле и признанию необходимости социальной справедливости в общественном устройстве. Приведём примеры связанных с ними точек зрения на обучение и воспитание.

Первую точку зрения (**жизни общества в единстве с природой**) выразил известный писатель Василий Иванович Белов в книге «Лад» [25]. Приведём ряд фрагментов из этой книги, посвящённой традиционному укладу народной жизни.

«Мир для человека был единое целое. Столетия гранили и шлифовали жизненный уклад, сформированный еще в пору язычества. Все, что было лишним, или громоздким, или не подходящим здравому смыслу, национальному характеру, климатическим условиям, – все это отсеивалось временем. А то, чего недоставало в этом всегда стремившемся к совершенству укладе, частью постепенно рождалось в глубинах народной жизни, частью заимствовалось у других народов и довольно быстро утверждалось по всему государству. Подобную упорядоченность и устойчивость легко назвать статичностью, неподвижностью, что и делается некоторыми «исследователями» народного быта. При этом они намеренно игнорируют ритм и цикличность, исключая бытовую статичность и неподвижность.

Ритм – одно из условий жизни. ... Ритм проявлялся во всем, формируя цикличность. Можно говорить о дневном цикле и о недельном, для отдельного человека и для целой семьи, о летнем или о весеннем цикле, о годовом, наконец, о всей жизни: от зачатия до могильной травы... Все было взаимосвязано, и ничто не могло жить отдельно или друг без друга, всему предназначалось свое место и время. Ничто не могло существовать вне целого или появиться вне очереди.

Меня могут спросить: а для чего оно нужно, такое пристальное внимание к давнему, во многом исчезнувшему укладу народной жизни? По моему глубокому убеждению, знание того, что было до нас, не только желательно, но и необходимо.

Молодежь во все времена несет на своих плечах главную тяжесть социального развития общества. Современные юноши и девушки не исключение из этого правила. Но где бы ни тратили они свою неумную энергию: на таежной ли стройке, в полях ли Нечерноземья, в заводских ли цехах – повсюду молодому человеку необходимо, прежде всего, высокие нравственные критерии... Физическая закалка, уровень академических знаний и высокое профессиональное мастерство сами по себе, без этих нравственных критериев, еще ничего не значат.

Но нельзя воспитать в себе эти высокие нравственные начала, не зная того, что было до нас. Ведь даже современные технические достижения не появились из ничего, а многие трудовые процессы ничуть не изменились по своей сути.

Культура и народный быт также обладают глубокой преемственностью. Шагнуть вперед можно лишь тогда, когда нога отталкивается от чего-то, движение от ничего или из ничего невозможно. Именно поэтому так велик интерес у нашей молодежи к тому, что волновало дедов и прадедов.

Так же точь-в-точь и будущие поколения не смогут обойтись без ныне живущих, то есть без нас с вами. Им так же будет необходим наш нравственный и культурный опыт, как нам необходим сейчас опыт людей, которые жили до нас...

Всему было свое время и свой срок. Разрыв в цепи естественных и потому необходимых в своей последовательности житейских событий или же перестановка их во времени лихорадили всю человеческую судьбу. ...

Степень тяжести физических работ (как, впрочем, и психологических нагрузок) нарастала в крестьянском быту незаметно, последовательно, что закаливало человека, но не надрывало. Так же последовательно нарастала и мера ответственности перед сверстником, перед братом или сестрой, перед родителями, перед всей семьей, деревней, волостью, перед государством и, наконец, перед всем белым светом.

В этом была основа воспитания. Ведь тот, кто обманул сверстника в детской игре, легко может обмануть отца и мать, а обманувшему отца и мать после нескольких повторений ничего не стоит пренебречь мнением и всей деревни, и всех людей. Отсюда прямая дорога к эгоизму и отщепенству».

Христианскую точку зрения на воспитание можно найти в трудах великого русского педагога Константина Дмитриевича Ушинского [26].

«Из внимательных психических анализов мы вывели, что труд свободный, излюбленный, душевный есть единственное, доступное человеку счастье и что только на этом пути душа остается в своем нормальном положении, не извращаясь и не увлекаясь частностями. Наслаждение и страдание – цветы и тернии жизни, но не сама жизнь; жизнь же есть процесс деятельности, прогрессивной, свободной и вытекающей из самой души, – дело, выполнение которого значит для нас более самой жизни, так что в этом отношении психология блистательно подтверждает глубокие евангельские слова, что, ища сберечь жизнь, мы ее губим, а тратя жизнь для дела, мы находим самую жизнь...»

Идея счастья как покоя и идея покоя как излюбленной свободной деятельности принадлежит, по нашему мнению, к самым глубоким и влиятельным идеям христианской психологии».

Наконец, точка зрения, связанная с **идеями марксизма**, высказана в уже упомянутой выше работе [20]. Несомненно, основную роль в её выработке сыграл выдающийся советский учёный Василий Васильевич Давыдов.

«Конкретизация внимания педагога только на предмете преподавания оставляет за бортом духовно-практическую сферу формирования воспитуемого...»

Таким образом, можно сказать, что общий мотив учебной деятельности (в том числе развитие теоретического мышления) надо искать не в научно-теоретической области, а в духовно-практической, этим задаётся ориентировка и направление поиска.

Нужно сделать целью развитие самого субъекта как личности.

Воспитание ... осуществляется как развитие деятельного общения, в процессе которого человек присваивает свою сущность, раскрывает свою общественную природу».

Очевидно, что все высказанные выше мнения сходятся в том, что главной задачей общества, направленной на формирование человека, является не узко понятое обучение специальности, а **воспитание глубоко мыслящего человека-деятеля**. Авторы статьи полагают, что именно такими соображениями должен руководствоваться педагог. При этом уместно вспомнить слова из работы «О сопротивлении злу силой»



крупного философа двадцатого века Ивана Александровича Ильина: «Действие человека есть его выявленное бытие» [27]. И это в равной степени относится и к ученику, и к учителю.

В связи со всем вышесказанным авторы могут ожидать ряда критических замечаний. Одно из них состоит в том, что одному человеку или небольшой группе единомышленников не под силу преодолеть инерцию и искажения в системе образования. Человек слишком мало может сделать в одиночку. Нужны совместные усилия. И при том на уровне государства.

А если смотреть достаточно реалистично на ожидаемую реакцию, то она может быть выражена словами: «Не вашего ума дело». Смысл здесь таков: результат индивидуальных усилий незначителен, а поэтому каждый должен знать своё место.

Но дело в том, что совместные усилия на любом уровне требуют общего понимания общественных целей. Значит, для достижения значимых результатов даже на государственном уровне необходима выработка общей идеологии. И это предполагает личную заинтересованность большинства членов общества в проблематике самого высокого уровня.

Вспомним по этому поводу известную притчу о Шартрском соборе. Трое строителей Шартрского собора ответили на вопрос, чем они заняты. Первый сказал: «Вожу тяжелую тачку». Второй ответил: «Зарабатываю хлеб семье». А третий гордо произнес: «Строю Шартрский собор». Смысл этой притчи в том, что человеку необходим широкий духовный горизонт.

Между прочим, добавим, что про тачки есть ещё одна история. Охранник на стройке наблюдал, как один рабочий после смены вывозил на свалку тачку с мусором. Охранник был уверен, что тот ворует, но не мог понять что. Через много лет он встретил подозреваемого и напрямую спросил, что тот воровал. Ответ был весьма прост: «Тачки». Таким образом, первый строитель Шартрского собора заслуживает не осуждения, а определённого уважения. Особенно в наше время.

Кроме того, результаты работы педагога всё же можно обнаружить невооружённым глазом. Например, тот факт, что один из авторов этой статьи, Михаил Степанов, смог окончить механико-математический факультет МГУ, не в последнюю очередь связан с тем, что математику в большевизёмской средней школе преподавал Александр Иванович Митюгов.

Перейдём, наконец, к рассмотрению более конкретных вопросов, связанных с воспитанием в высшей школе.

4. ПРОБЛЕМЫ ПРЕПОДАВАНИЯ В СОВРЕМЕННОЙ ВЫСШЕЙ ШКОЛЕ

Преподавательский труд всегда был нелёгким, но каждая эпоха заставляет преподавателя столкнуться со своей особой проблематикой. Распад Советского Союза по словам Владимира Владимировича Путина стал крупнейшей катастрофой двадцатого века. Последствия этой трагедии ощутили все слои российского общества.



Работники сферы образования, естественно, не стали исключением. Долгое время стоял вопрос о том, сохранится ли эта сфера как жизнеспособная система. Постепенно ситуация начала улучшаться, но негативные последствия разрушительной перестройки оказывают влияние на образование до сих пор.

Перечислим некоторые проблемы, которые затрудняют преподавание в высшей школе. Прежде всего, речь идёт о **понижении уровня подготовки абитуриентов**. Более того, налицо изменение менталитета молодых людей в целом. Одной из причин этого стала **тотальная коммерциализация общества**. Не вдаваясь в подробности, ограничимся упоминанием о разрушительной роли спортивной индустрии, основанной на навязчивой работе СМИ. Современный футбольный матч сейчас характеризуют как игру, где по полю бегают два десятка миллионеров, а за ними наблюдают миллионы нищих. Такая ситуация в корне меняет жизненные установки молодых людей по всему миру. Зачем постигать сложные и многочисленные науки, если, играя, можно достичь и славы и богатства? И то соображение, что успешных спортсменов всего несколько сотен на земном шаре, молодёжь не образумит. Ведь была же когда-то массовой мечта стать космонавтом.

Само собой, что коммерциализация **понижает уровень престижа профессий**, связанных с производительным трудом, как умственным, так и физическим. Очень сильным разрушительным эффектом обладает навязываемая через СМИ реклама. Кроме всего прочего она разрушает единство эстетического восприятия при демонстрации фильмов и спектаклей. В рекламе используются навязчивые примитивные мелодии, в результате чего у ребёнка и молодого человека формируется **клиповое сознание**. Даже высоколобые ток шоу подчинены рекламному ритму. Можно выразить это обстоятельство в стихотворной форме: «Мы ищем истину упрямо, но выше истины реклама».

Общеизвестно и то обстоятельство, что значительное **негативное влияние на общество оказывает взрывообразное повсеместное внедрение новых информационных технологий**. Оно приводит к формированию у молодого поколения неадекватное представление об окружающем мире. Человек ощущает себя частью виртуального, а не реального мироздания. Часто он уходит туда, чтобы уйти от проблем, связанных со сложным комплексом человеческих взаимоотношений. Более того, даже у тех молодых людей, которые связывают себя с реальностью, ухудшаются многие необходимые личности навыки, относящиеся к памяти и с такими навыками самостоятельной работы с информацией, как чтение и счёт.

Вообще можно констатировать **целенаправленное разрушение человеческой психики** западными элитами. В частности, европейская культурная среда, которая веками являлась оплотом рационализма, становится похожей на психиатрическую клинику, где врачи превосходят безумием пациентов. При этом Запад продолжает успешно навязывать свои разрушительные идеи всему миру, в частности нашему молодому поколению.

Кроме проблем, причины которых носят глобальный характер, имеется достаточное количество проблем, связанных преимущественно с отечественной системой



образования. Хотя и эта проблематика имеет связь с глобальными процессами. Речь идёт о многолетней **ориентации на западную структуру образования без учёта отечественных традиций**. Можно сказать, что **активно проводились инновации ради инноваций**. Не делалось глубокой проработки и оценки результатов производимых изменений. Наиболее ярким примером является переход со специалитета и аспирантуры на бакалавриат и магистратуру. И общеизвестно, число подобных преобразований весьма велико.

Ещё одним важным фактором, затрудняющим работу педагогов, является **бюрократизация процессов управления образованием**. В качестве примера можно привести постоянно меняющиеся требования по оформлению и переоформлению учебных программ. При этом содержательная часть остаётся неизменной. Меняется только форма многостраничных опусов.

Особую роль играет **повышение обязательных требований к преподавателю, далеко выходящих за пределы его непосредственной преподавательской деятельности**. Речь идёт, в частности о **характеристике научного уровня преподавателя с помощью индекса Хирша**. Конечно, очень хорошо, если преподаватель сочетает в себе способности педагога и плодovitого учёного. Однако крупные учёные часто плохо преподают, а хорошие учителя ещё чаще не являются продуктивными исследователями. При этом труд преподавателя сам по себе очень сложен и, как уже говорилось, важен. Таким образом, тот факт, что преподавателям предъявляются непомерные требования, приводит к тому, что в разных формах начинается массовая фальсификация научной продукции. Один из вариантов такой псевдонаучной деятельности создатель московской топологической школы Павел Сергеевич Александров называл мафией цитирующих друг друга.

Ряд проблем связан с вопросами финансирования системы образования. Впрочем, эта проблематика является вечной и повсеместной. В частности, долгие годы имело место постоянное увеличение учебной нагрузки, что, в конечном счёте, привело к понижению уровня преподавания из-за фактической перегрузки преподавательского состава. Перегруженные преподаватели лишаются возможности размышлять о своей работе, что необходимо для повышения качества преподавания. На этом можно прервать перечисление проблем, но не потому, что их больше нет. Просто нужно когда-то остановиться.

5. РОЛЬ ПЕДАГОГИЧЕСКОГО КОЛЛЕКТИВА

Успешная деятельность педагогического коллектива, кроме всего прочего, предполагает совместное обсуждение научной и учебной проблематики, а также выработку общей точки зрения на особенно важные аспекты воспитательного процесса. Наконец, в соответствии с отечественной традицией общения, для слаженного коллектива является нормой обсуждение широкого спектра идеологических вопросов, включая философскую проблематику, проявление интереса к культурной жизни, совместное проведение досуга и посильное участие в спортивных мероприятиях. Но, конечно, основное внимание коллектива должно быть направлено на учебную работу.



Перечисление проблем, стоящих перед преподавателем, позволяет понять то обстоятельство, что для создания нормальных условий полноценной педагогической работы нужны усилия как государства в целом, так и образовательных структур всех уровней. Особую роль играет педагогический коллектив, включая администрацию.

Именно администрация должна создавать нормальную атмосферу в учебном коллективе. Её задача состоит в **обеспечении выполнения обязательных требований, которые должны выполнять как студенты**, так и преподаватели. Любое общение неизбежно порождает конфликтные ситуации. Их разрешение требует беспристрастного и справедливого разбора ситуации. К сожалению, **конфликты между педагогами и студентами**, часто оцениваются в пользу одной из сторон. В советское время преимущество заведомо имел преподаватель. Сейчас ситуация противоположная.

Дело в том, что одной из навязываемых нашему обществу тенденций является пропаганда неправильно понимаемой личной свободы и приоритета личных интересов над интересами общественными. При этом свобода личности рассматривается не как возможность духовного развития, а, грубо говоря, как возможность беспрепятственно маяться дурью. Естественно, что борьба за личную свободу ведётся именно студентами. Она связана, например, с правом одеваться по собственному усмотрению или с правом выражаться без цензурных ограничений. Любое замечание преподавателя может быть встречено в штыки.

Несомненно, что причины отклонений от следования нормам дисциплины и от требований, связанных с обязательным уровнем успеваемости каждого студента, определяются общими тенденциями в системе образования. Администрация в этой связи находится в сложном положении. В настоящее время появилась надежда на нормализацию ситуации. Это должно повысить уровень преподавания, поскольку такие изменения сами по себе несут значительный воспитательный эффект.

Важную роль в работе педагога играет общение с коллегами. Идеальную среду для такого общения принято называть «коллективом единомышленников». При этом, конечно, следует иметь в виду, что любой по-настоящему мыслящий человек является инакомыслящим. В педагогических коллективах повсеместно наблюдается различие мировоззренческих позиций и научных интересов. А поскольку любому педагогу ничто человеческое не чуждо значительное влияние на характер общения в коллективе определяется также наличием амбиций, индивидуальных пристрастий, симпатий и антипатий.

Однако, несмотря на это, педагогический коллектив должен быть единым организмом. А для любого организма необходимо единство воли. Из всего сказанного следует, что создание работоспособного педагогического сообщества является сложнейшей задачей, которую, как уже говорилось, требует подвижнической работы всех уровней системы образования.

Место, которое в этой деятельности занимает отдельный преподаватель, выглядит достаточно скромно. Что собственно он может сделать? Одним из вариантов активного участия в сплочении педагогов в коллективы являются размышления на эту



тому, и, как итог, написание статей на соответствующую тематику. При этом надежда на то, что их прочитают, умирает последней.

Вывод таков: общение преподавателя и студента в рамках учебного процесса является главной из зависящих, прежде всего, от самого преподавателя, возможностей оказывать воспитательное влияние.

6. ЛИЧНОЕ ОБЩЕНИЕ СО СТУДЕНТАМИ В ПРОЦЕССЕ ПРЕПОДАВАНИЯ

Итак, можно принять как аксиому, что все воспитательные воздействия преподавателя на студентов, зависящие именно от него, возможны только в рамках непосредственного общения. Это может быть в частности общение в рамках дистанционного обучения, но, конечно, прежде всего, речь идёт о прямом общении, как на занятиях, так и за пределами учебного времени.

Общение между людьми – это важнейшая часть жизни любого человека. При этом эта форма социальной деятельности на любом уровне, глубине и близости общения постоянно ставит перед всеми участниками проблемы. Естественно, что решение этих проблем требует творческих усилий и значительных эмоциональных затрат. Особенно это относится к педагогической деятельности, когда преподаватель должен научить, а, значит, в некотором смысле, заставить студента освоить определённый круг идей, образов, навыков и т. д.

Как известно, не ошибается только тот, кто ничего не делает. Более того, выбор любого решения может быть оспорен. По этому поводу уместно вспомнить слова Сократа, сказанные озадаченному личными проблемами ученику. Когда ученик спросил Сократа, жениться ему или остаться холостяком, тот ответил, что и в том, и в другом случае ему придётся раскаяться. Именно в такой ситуации постоянно находится преподаватель.

Главная цель работы преподавателя, в конечном счёте, состоит в том, чтобы научить студентов преподаваемому предмету. И уже здесь возникает множество проблем, связанных с выбором определённых альтернатив. При этом любой вариант выбора приводит к результату, предсказанному Сократом.

Перечислим несколько из этих проблем, отметив при этом тот факт, что их решение в значительной степени определяет характер общения преподавателя со студентами. Следует отметить, что, во-первых, решения соответствующих задач желательнее добиваться при участии педагогического коллектива, хотя это далеко не всегда возможно. А, во-вторых, невозможно с этими проблемами разбираться поочерёдно и по-отдельности. Решение может быть только комплексным. И это значительно усложняет их решение. Кроме того, на принятие решений накладывает ограничения особенности личности самого педагога.

Итак, перед педагогом стоят следующие вопросы.

1. Осознание и чёткая формулировка педагогом учебных задач применительно к конкретной учебной ситуации.

2. Осознание педагогом своих возможностей, основанных на уровне подготовки студентов.
3. Выбор направления основных педагогических усилий с преимущественной ориентацией на сильных студентов, или на слабых и середняков.
4. Определение содержания преподаваемого курса.
5. Уровень требований, предъявляемых к студентам.
6. Выбор уровня строгости при оценке учебных усилий студента.

Видимо, простое перечисление некоторых из этих пунктов может у кого-то вызвать возражения или даже возмущение: «Как можно ориентироваться на слабых студентов? Как можно оценивать работу студентов с низкой требовательностью?» Ответ тут такой: «Мы живём и работаем в трудные времена в далеко не идеальном мире, который ставит нас перед сложным выбором». Впрочем, эти проблемы, так или иначе, возникают в любые времена.

В любом случае целью педагога является работа не с избранными талантами, а со студентами различного уровня подготовки, усердия и способностей. Необходимые усилия, связанные с особым стилем работы как с наиболее слабыми, так и с наиболее сильными студентами определяется словами **индивидуальная работа**. Эти же слова позволяют понять, что преподаватель, работающий с высокой ответственностью, в определённом смысле должен являться подвижником. Хотелось бы, чтобы этот факт учитывался на всех уровнях системы образования.

Подготовка специалиста связана с чётким пониманием того, чем он будет заниматься после окончания вуза. В компьютерную эпоху речь должна идти об инженерной направленности, то есть о том, что **будущий специалист должен решать широкий круг задач вычислительной математики с использованием компьютерных технологий**. Это указывает на то, что преподавание высшей математики должно носить преимущественно практический характер. Студенты, обладающие особыми способностями к математике, должны получать более сложные задания. В первую очередь это задача научного руководителя, но и преподаватели-предметники должны внести в развитие способного студента свой вклад.

К слабым студентам, особенно в тех случаях, когда у них есть проблемы со здоровьем, тоже нужен особый подход. Основная задача при работе с ними состоит в повышении уровня их знаний.

Индивидуальная работа преподавателя со студентами является важнейшей частью их общения, происходящего в рамках учебного процесса. И, естественно, она **заключает в себе важнейший воспитательный момент**. Приведём пример. У одного из авторов статьи был следующий учебный эпизод. К нему обратился студент с просьбой руководить его дипломной работой. Две курсовые он ранее защищал у двух других преподавателей и уходил от них по причине их недовольства его работой. Темы курсовых работ были мало связаны с математикой, ориентировались на программирование, но результаты были на низком уровне.

Работа над дипломом началась с поиска посильной темы и длилась достаточно долго. Однажды дипломник пришёл к руководителю в не назначенное время и стал



благодарить за проявленное к его возможностям доверие. После выбора темы он самостоятельно провёл всю работу и на защите получил отличную оценку.

Важной воспитательной частью учебной работы является методический поиск, результаты которого оказывают воздействие на большое количество студентов. Авторы статьи постоянно работают в этом направлении. Главными направлениями их разработок помимо **конкретных математических вопросов** являются **тифлопедагогика, использование образов в учебном процессе и использование компьютерных технологий при изучении математики**.

В современной математике делается упор на достижение максимальной строгости, а это в свою очередь оказывает влияние на построение учебных курсов. Очень часто в них начинает доминировать формальный подход. С точки зрения авторов статьи целью обучения является **понимание осваиваемого материала**. Одним из путей к достижению понимания как раз и является **использование образов, развивающее интуицию учащихся**.

Таким образом, **достижении целей обучения – основа воспитательного процесса в высшей школе**. Но, конечно, воспитательные аспекты педагогической деятельности значительно более обширны.

Поскольку работа педагога, так или иначе, представляет собой его общение либо с учебной группой, либо с отдельным студентом. Естественно, что это обстоятельство требует от педагога **понимания психологии студентов, по крайней мере, на практическом уровне**. При этом большое количество людей, обладающих индивидуальными особенностями, порой делает это общение достаточно сложным и напряжённым. У одного из авторов статьи в давнее время возник конфликт с одним из студентов. Тот постоянно опаздывал на лекции, шумел, словом, вёл себя неадекватно. Совладать с ним не удавалось. Напряжение всё время нарастало. И у преподавателя возникала мысль о том, что его педагогические возможности весьма ограничены, поскольку и с одного студента не удаётся приструнить. В сердцах он сказал об этом одному из коллег. На это тот удивлённо ответил, что непослушный студент заведомо психически не здоров. «Открылись вещие зеницы...» Проблема исчезла, поскольку отпало подозрение в преднамеренном создании слишком беспокойным студентом конфликтных ситуаций. Это был полезный урок.

В этой связи можно сказать, что педагогу приходится работать над собой для повышения уровня своей личности. Кому-то такое утверждение может показаться обидным, мол, преподаватель и так вполне сформировавшаяся личность. Мы, однако, полагаем, что каждому человеку есть, над чем поработать.

Установление доброжелательных отношений между преподавателем и студентами – нелёгкая задача. При этом здесь абсолютно недопустима даже самая малая степень фамильярности. Так что преподавателю есть о чём подумать и над чем поработать. Конечно, иногда возникают трудно разрешимые конфликты, когда необходимо вмешательство администрации. Но, как правило, возможно установление доброжелательных отношений именно по инициативе преподавателя. Более того, иногда вмешательство преподавателя существенно может повлиять на судьбу студента.

Иногда студенты по разным причинам, в том числе и по собственной вине, оказываются в весьма сложной ситуации. При этом студент испытывает значительные психологические нагрузки, и ему нужна чья-то поддержка. Один из авторов данной статьи узнал, несколько студентов не смогли защитить свои дипломные работы. Их научные руководители посчитали произошедшие с их подопечными неудачи естественным результатом недостаточно целеустремлённой работы выпускников. Автор обзвонил всех неудачников и предложил вернуться на факультет, чтобы работать под его научным руководством над новыми вариантами дипломных работ. В результате все эти студенты защитились и получили дипломы.

Так или иначе, именно преподавание как таковое определяет силу воспитательного воздействия преподавателя на студента. Но общение неизбежно выходит и за рамки обучения.

7. ОБЩЕНИЕ ЗА РАМКАМИ УЧЕБНОЙ ПРОГРАММЫ

За рамки предмета преподаватель может выходить и излагая этот предмет. Если предоставляется повод, то уместным бывает упоминание об истории предмета, особенно о достижениях отечественной науки. Возможны и экскурсии в более широкие области мировой культуры. Начнём, однако, с обращения к истории науки.

Сведения по истории различных разделов математики делают абстрактные знания более живыми и эмоционально приближают студента к математике, как одной из сфер, которую развивают такие же, как и он люди. Одной из форм приобщения студентов к историко-математическим сведениям является краткое упоминание о соответствующих фактах на занятиях и высылка на групповую почту электронных материалов по данной теме. Большой интерес представляет знакомство с такими выдающимися и яркими личностями как древние греки Фалес, Пифагор, Евклид, Аполлоний Пергский, Архимед и Диофант. Яркие личности встречались и среди математиков средневекового Востока, например, Омар Хайям, Аль-Каши, Аль-Хорезми. Желательно упомянуть индийских и китайских математиков. Среди индийцев речь идёт об Ариабхате и Бхаскаре с его образным подходом к математическим фактам – Смотри. Китайскую математику может представить математик Цзу Чун-Чжи, который получил приближение числа π , относящееся к классу наилучших для дробей с соответствующими знаменателями – $\frac{355}{113}$. Ранний период европейской математики связан с именами Фибоначчи, Луки Пачоли, Николо Тартальи, Кардано, Виетта. Математиков Нового времени, начиная с Кеплера и Декарта, мы перечислять не будем, но многие из них заслуживают упоминания в соответствующих курсах математики. Полезно предоставить студентам также и материалы с их портретами и краткими биографиями.

Что касается отечественной математики, то необходимо довести до сведения учащихся, что она достигла высочайшего уровня. В частности, советская математика входила в тройку крупнейших национальных математических школ. Необходимо дать студентам сведения о ряде отечественных математиков и об истории возникновения и развития математических знаний в нашей стране. Прежде всего, необходимо рассказать о деятельности Леонарда Эйлера. Был период, когда у нас его называли



великим русским математиком. Конечно, Эйлер был и остаётся швейцарцем, но его роль в развитии отечественной математики огромна. Кроме того, нужно упомянуть и о той поддержке, которую Эйлер оказывал Михаилу Васильевичу Ломоносову.

Должны быть упомянуты Михаил Васильевич Остроградский, Николай Иванович Лобачевский, Пафнутий Львович Чебышев, его ученики Александр Михайлович Ляпунов и Андрей Андреевич Марков. Конечно, желательно сообщить и о первой женщин-математиков Софье Васильевне Ковалевской. Из математиков двадцатого века следует дать сведения о Николае Николаевиче Лузине, Иване Михайловиче Виноградове, Виталии Леонидовиче Канторовиче, Андрее Николаевиче Колмогорове, его ученике Владимире Игоревиче Арнольде.

Но, пожалуй, самым **интересным и полезным вариантом приобщения к истории математики является решение исторических задач** в тех случаях, когда эти задачи тесно связаны с текущим учебным материалом. В частности, примером такой исторической задачи, решаемой различными методами при изучении различных разделов математического анализа и геометрии, является приближённое вычисление числа π самими студентами. Одно дело пользоваться значением этого числа, вычисленным ранее другими людьми, и совсем другое – получить это значение самостоятельно.

Конечно, жёсткие границы учебного времени не позволяют совершать пространственные исторические экскурсии, однако, в плане расширения кругозора учащихся такие, пусть и краткие, **отступления в область истории** крайне полезны. Несомненно, что они **несут определённый воспитательный эффект**.

Следует также на таких предметах как аналитическая геометрия, математический анализ, дифференциальные уравнения, уравнения математической физики всячески подчёркивать **связь математики с проблемами естествознания**, подчёркивая её практическое значение.

Если выйти за пределы не только преподаваемых предметов, но и за рамки математической тематики в целом, то, конечно, у преподавателя и студентов найдутся темы для обсуждения и здесь. При этом иногда диалог может быть очень кратким, но небезразличным для студента. Примером является разговор об однофамильцах студента. Так студенту с распространённой фамилией Фёдоров можно сообщить или напомнить о выдающихся людях, также носивших эту фамилию. Это и первопечатник Иван Фёдоров, и философ-космист Николай Фёдорович Фёдоров, и кристаллограф и математик Евграф Степанович Фёдоров. Ещё один пример связан со студентом по фамилии Качалин. Он как-то выразил недовольство своей фамилией. Пришлось сообщить ему, что наиболее успешный тренер сборной СССР по футболу носил ту же фамилию. Гавриил Дмитриевич Качалин как тренер выиграл олимпийский турнир 1956 года и первый Кубок Европы 1960 года, в дальнейшем преобразованный в чемпионат Европы.

Раз уж речь пошла о спорте, следует затронуть тему **совместного участия преподавателей и студентов в спортивной жизни высшего учебного заведения**. Римскую поговорку о том, что в здоровом теле здоровый дух, никто не отменял. Студенты – молодые люди, которые охотно занимаются спортом. Преподаватели часто тоже имеют интересное спортивное прошлое, а порой и настоящее.

Одной из форм интереса к спорту является обсуждение результатов спортивных соревнований высокого уровня, но значительно более важно участие в соревнованиях и совместные игры. Если физические возможности позволяют, то преподаватель может установить хорошие отношения со студентами на спортивных площадках. Перейдём к личному спортивному опыту авторов статьи.

В частности, они участвовали в чемпионате МГППУ по настольному теннису. Оба дошли до четвертьфинала и выбыли только на этой стадии. При этом одному из них было тогда за 50 лет, а второму – за 60. Естественно, что по мере возможности авторы статьи играли со студентами в настольный теннис и просто в свободное время, вне соревнований.

Степанов участвовал и в одном из чемпионатов МГППУ по мини футболу в студенческой команде, правда, без особого успеха. В своё время авторы статьи работали в МГОУ имени Н.К. Крупской. Там выработалась многолетняя традиция игры в футбол коллектива преподавателей, студентов и местных жителей. Игры проходили на стадионе Сокол, который находится в Елизаветинском переулке ЦАО города Москвы. Целый ряд преподавателей, игравших там в футбол, **в дальнейшем преподавали на факультете ИТ МГППУ**. Речь идёт о докторах физ.-мат. наук **Валерии Ивановиче Алхимове, Викторе Ивановиче Буслаеве, Евгении Витальевиче Щепине**.

Из игроков, которые присоединились к студентам и преподавателям МГОУ можно назвать несколько известных людей, в том числе заслуженного артиста России Александра Анатольевича Мохова, драматурга Александра Михайловича Галина, журналиста, писателя и постоянного участника ток-шоу на телеканале «Звезда» Виталия Леонидовича Волкова. Виталий Волков, кстати, написал рассказ о футбольном коллективе, первым из персонажей которого стал один из авторов данной статьи, Михаил Степанов [28]. Литературный портрет, конечно, оказался довольно неточным.

В футбольном коллективе сложились дружеские отношения между преподавателями и студентами. Это было очень важно в трудные девяностые годы. Футбол в эти времена приобретал особое значение и помогал сохранить ощущение того, что между людьми в нашей стране ещё сохранилось единение.

Совместные занятия спортом преподавателей и студентов, конечно, важны, но вся атмосфера учебного заведения делает главным видом общения между ними **обсуждение проблем интеллектуального характера**. Именно здесь возможно наиболее значительное воздействие преподавателя на студента. Однако одна из проблем такого общения состоит в том, что оно неизбежно носит достаточно случайный характер. Тем большее значение имеют те случаи, когда возникает диалог, инициированный теми или иными замечаниями преподавателя и заинтересовавший студента.

Обсуждать приходится самый широкий круг вопросов. В частности, речь может идти **о главных вопросах бытия**. Примером таких вопросов являются четыре вопроса Иммануила Канта:

- Что я могу знать?
- Что я должен делать?
- На что я смею надеяться?
- Что такое «Человек?»



Отвечать на эти вопросы приходится всю жизнь, но **чёткая постановка этих вопросов должна быть доведена до каждого образованного человека**. Кроме того, следует иметь в виду, что сердцевиной любой глубокой философской системы являются именно вопросы о смысле бытия человеческого.

В этой связи **следует обозначить проблемы, связанные со взаимоотношением религии и науки**. Порой служители церкви и учёные безоговорочно отрицают правоту оппонентов. Это, конечно, неправильный подход к сложному и важному вопросу. И здесь обсуждая проблемы, следует **не давать окончательные ответы, а ставить вопросы**.

Все вопросы к религии давно поставлены как самими богословами, так и воинствующими атеистами. Проблема теодицеи (оправдания Бога за создание столь несовершенного мира) не может быть решена.

Но и наука может быть подвергнута аргументированной критике. Наука направлена на познание мира мыслящими существами. При этом она утверждает, что мир можно изучить экспериментальным путём. На основе экспериментальных данных строятся научные теории. Как правило, при их построении имеет место редукционизм, который сводит сложные явления к более простым. В частности, итогом такого подхода является отрицание Бога и души. Таким образом, душа является результатом природных процессов. Их сущность объясняется наукой в зависимости от её развития на соответствующий момент. Тут и «мозг выделяет мысль, как печень выделяет желчь», и «человек – это сложный конечный автомат», и «бифуркация». Но отрицание сознания в известном смысле отрицает науку, которая основана на принципах рационализма.

Даже если наука права, то нужно помнить слова Ф.М. Достоевского: «Если б кто мне доказал, что Христос вне истины, и действительно было бы, что истина вне Христа, то мне лучше хотелось бы оставаться со Христом, нежели с истиной». К тому же истинность и безгрешность науки можно поставить под сомнение и по той причине, что все её достижения неизбежно ставят мир на грань уничтожения. Это относится даже к пластмассовой таре уже засорившей не только сушу, но и мировой океан.

Может показаться, что подобные темы абсолютно неуместны при изучении математики и информатики. Однако есть предметы, на которых упоминание о перечисленных проблемах даже необходимы. Такой предмет как «Математическая теория принятия решений» посвящён изучению математических моделей различных процессов, встречающихся в реальной жизни. Соответствующие модели позволяют выработать алгоритмы решения ряда важных проблем. При этом эти алгоритмы с математической точки зрения являются оптимальными. Преподаватель обязан разъяснить студентам о том, что оптимальность этих алгоритмов является безусловной только с чисто математических позиций. В контексте сложных и многообразных жизненных обстоятельств математически выверенные алгоритмы имеют только рекомендательный характер, поскольку могут принести значительный вред отдельным людям и обществу в целом. Примером является слепое стремление к достижению максимальной прибыли в сфере экономики.

Исключительно важным мировоззренческим вопросом является редукция человеческой психики к алгоритмам, изучаемым в математической логике и дискретной математике. Акцентировать внимание студентов на этом вопросе можно на занятиях по соответствующим предметам.

Следует отметить, что философия техники является одной из недостаточно разработанных областей философии в целом. В том числе вопросы, связанные с сущностью компьютерной техники пока в целом не сформулированы. Таким образом, размышления на эту тему, как и на тему о различии и сходстве человека и компьютера, порой являются важной частью духовной жизни преподавателей математики. Некоторые соображения на эту тему высказаны в статье [29].

Следует отметить, что осмысление особенностей математики как науки тоже естественным образом приводит к философским раздумьям. В частности, о платоновской концепции сущности математических знаний, как и о её критике, студентам желательно сообщить.

Кто-то может выразить сомнение в необходимости обсуждения философских вопросов за пределами предмета, специально для этого предназначенного. Дело, однако, в том, что **заинтересованное отношение к вопросам, связанным со смыслом человеческого бытия, должно быть главным стержнем человеческой личности.** И именно это обстоятельство указывает на важность диалогов с философской тематикой.

Конечно, иногда преподавателю приходится обсуждать со студентами также социальные и политические вопросы. При этом такая беседа вполне может быть инициирована студентом. От преподавателя в таких беседах требуется умение ясно и тактично выразить свою позицию.

Ещё одной важной сферой, которую порой приходится обсуждать со студентами является искусство. Современное общество, прежде всего, под воздействием информационных технологий меняется чрезвычайно быстро. По этой причине студенты и преподаватели иногда оказываются в разных культурных мирах. При этом сохранение традиций требует, чтобы студенты всё-таки приобщались к выдающимся достижениям предшествующих поколений. Конечно, и здесь возможности преподавателя весьма ограничены. Однако хотя бы **рекомендовать книги и фильмы, называть имена художников и композиторов** преподаватель вполне может.

Что касается рекомендаций по поводу просмотра фильмов, то, порой здесь опять определённую роль могут сыграть фамилии. Например, студентке с фамилией Никитина следует порекомендовать фильм Григория Васильевича Александрова «Весна».

Некоторые виды искусства могут быть упомянуты и даже рассмотрены в их взаимосвязи с изучением ряда вопросов математики и информатики. Например, развитие живописи исторически тесно связано с некоторыми вопросами геометрии. Для таких художников как Леонардо да Винчи, Альбрехт Дюрер и Мориц Эшер математика является родной стихией. Именно в рамках живописи была разработана теория перспективы, которая в дальнейшем стала одним из истоков проективной геометрии. Здесь можно упомянуть о том, как академик Борис Викторович Раушенбах пришёл от решения технических задач в области космонавтики к изучению теории перспективы в живописи.



Связь современной живописи с компьютерной графикой очевидна. Более того, математика позволила прийти к совершенно новой системе образов. Например, создание впечатляющих картин стало возможным на основе компьютерного построения фракталов. Умелое использование компьютерной графики открывает пути к разработке анимационных проектов с математическим содержанием.

При преподавании пользовательского курса информатики один из авторов данной статьи широко использовал направленные на освоение текстового редактора задания, посвящённые великим художникам, скульпторам и архитекторам. Эти задания были богато иллюстрированы репродукциями картин и фотографиями скульптур и зданий. Таким образом, помимо освоения компьютерной программы происходило **расширение культурного горизонта**.

Что касается музыки, то **современная техника позволяет на перемене громко проиграть небольшую классическую пьесу**. Беспроигрышным вариантом является воспроизведение «Шутки» Иоганна Себастьяна Баха. Может музыка помочь и в разработке новых методик преподавания. Примером является работа над звуковым моделированием функций в сфере тифлопедагогики [13].

Важнейшим из искусств для авторов данной статьи, несомненно, является литература. Авторы всю жизнь были активными книголюбями и по мере своих возможностей формировали личные библиотеки. Но кроме того они и сами **писали книги, прежде всего научно-популярного характера** [30, 31]. В этих книгах большое внимание уделено не только вопросам математики, но и проблемам философии, религии и искусства. Искусству были посвящены и статьи [32, 33].

Е.Д. Куланин особый интерес проявлял к творчеству Александра Сергеевича Пушкина. Им написана статья довольно неожиданного содержания [34]. М.Е. Степанов внимательно изучал творчество Фёдора Михайловича Достоевского. Им тоже была написана статья, в которой математическое, по сути, понятие симметрии используется при анализе романа «Братья Карамазовы». Статья «Симметрия в архитектонике романа Ф.М. Достоевского «Братья Карамазовы» однако не была опубликована. Тем не менее, постоянная погруженность в литературную тематику позволяла авторам свободно обсуждать со студентами сложные для литературоведческого анализа произведения. Так Е.Д. Куланин, беседуя с одним из студентов, подробно проанализировал поэму Николая Алексеевича Заболоцкого «Торжество земледелия».

Вообще отечественная поэзия является богатным источником цитат, комментирующих самые разнообразные ситуации. Замечательные строки наших поэтов, начиная от Михаила Васильевича Ломоносова до поэтов современных, могут прозвучать на занятиях по любому предмету.

Важной составляющей, и в чём-то **необходимой, частью общения со студентами является юмор**, который порой помогает разрядить по каким-то причинам возникшую напряженность и восстановить нормальную атмосферу. Один из авторов статьи в своё время проводил занятия в группе, целиком состоящей из девушек. Стояла тёплая летняя погода, окна в аудитории были открыты. Вдруг раздался невероятный шум, который очень напугал девочек. Раздавались восклицания: «Произошло что-то



страшное!» Успокоительные слова преподавателя не воспринимались. В итоге ему пришлось повысить голос и сказать: «Тишина! Придётся рассказать вам, что произошло на самом деле...» Все студентки замерли. Преподаватель продолжил: «Дело в том, что это моя лягушонка в коробчонке проехала». Раздался общий смех, и напряжение как рукой сняло.

Иногда шутка позволяет удачно ответить на бестактное замечание студента. Авторы статьи являются кандидатами наук. Одного из них развязная студентка спросила: «А почему Вы не доктор?» Тут же она получила исчерпывающий ответ: «Я крови боюсь!»

Приведённые выше примеры связаны с шуткой-импровизацией. Пошутить подобным образом удаётся далеко не всегда. По этой причине преподавателю желательно свободно владеть определённым запасом смешных и забавных историй, поговорок, загадок и анекдотов. Здесь снова может помочь кладёзь мировой литературы. Но, конечно, особое значение имеет математический фольклор.

Эрнст Теодор Амадей Гофман называл юмор «редким, чудесным настроением души, которое порождается знанием жизни и всех ее причинных связей». В этом определении прослеживается определённая связь с математикой, претендующей на роль единственной науки способной умозрительно познавать мир и его причинные связи, превосходя в мощи познания науки опытные.

В математике много занимательного, и его нужно активно использовать в преподавательской практике. Об этом, говорил Блез Паскаль: «Предмет математики настолько серьёзен, что его не мешало бы сделать хоть сколько-нибудь занимательным».

В математике много смешного. И в этом нетрудно убедиться, взяв в руки книгу В. Литцмана «Веселое и занимательное о числах и фигурах» и сборники научных юморесок «Физики шутят» и «Физики продолжают шутить», в которых уделено место не только физикам, но и математикам. Позже были изданы сборники шуток учёных различных специальностей, в том числе и математиков как таковых [35]. Наука, дающая повод посмеяться, хотя бы теоретически, не должна вызывать отторжения у школьника и студента. Даже математик-профессионал может взглянуть на свой предмет с разных точек зрения, в том числе и с юмористической.

Не будем вдаваться в подробности и ограничимся упоминанием нескольких забавных математических шуток.

- Методику древнеиндийских доказательств, основанных на принципе «Смотри», можно дополнить эмоциональной кавказской логикой: «Мамой клянусь!»
- По книге Литцмана: «Учитель написал на доске уравнение

$$\frac{2}{3} \left(3 \cdot \left(\frac{15}{x} + \frac{1}{2} \right) - 8 \right) - 1 = 5$$

и предлагает одному из самых слабых учеников: «Ты должен отыскать x ». Тот выходит к доске, долго смотрит туда и наконец, приложив указательный палец к букве x в уравнении, восклицает: «Вот он!»

Еще одна история, связанная с решением уравнений. Учащемуся нужно решить простейшее тригонометрическое уравнение $\sin x = 1$. Он немедленно пишет ответ: $x = \frac{1}{\sin}$.



Анекдот о бизнесменах-математиках. Один из них спрашивает другого: «Сколько будет семью восемь?» – «А мы продаем или покупаем?»

История про Давида Гильберта. На одной из своих лекций он сказал: «Каждый человек имеет некоторый определенный горизонт. Когда он сужается и становится бесконечно малым, то превращается в точку. Тогда человек говорит: «Это моя точка зрения».

Парадокс математической символики: «Эм большое очень мало».

Конечно, всем изложенным выше разговор о воспитательном воздействии преподавателя на студентов не может быть ограничен. Тема неисчерпаема. В частности, очень многое можно сказать о воспитательной стороне работы со студентами, имеющими проблемы со здоровьем. Однако это может оказаться темой для нового обсуждения и новой статьи.

8. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Общий смысл данной статьи состоит в том, что преподаватели высшей школы не просто берут свою тачку, но и размышляют о том, что они при этом строят. Как бы незначительны ни были результаты их усилий, они необходимы при построении того здания, которое можно характеризовать словом «Соборность». При этом нужны и полезны усилия даже тех лиц, которым больше тридцати девяти лет. Кстати выбор такого возраста для принудительного омоложения преподавательского состава, наводит на мысль о древнегреческой традиционной точке зрения на возраст, когда личность человека достигает своего максимального развития и обретает наивысший творческий потенциал. Речь идёт о так называемом «акме», которое достигается в возрасте сорока лет. В этой связи хотелось бы увидеть продуманные усилия по совершенствованию системы образования на всех уровнях. Тем более, что целью этой системы, в конце концов, всегда является обновление общества. Но следует иметь в виду, что это то обновление, которое основано на сохранении традиций.

Литература

1. *Степанов М.Е.* Образ силового поля как эвристическая модель в математике. Моделирование и анализ данных. Труды факультета информационных технологий МГППУ. – Вып. 3., 2007.
2. *Степанов М.Е.* Эрлангенская программа Клейна и геометрия треугольника. Моделирование и анализ данных. Труды факультета информационных технологий МГППУ. – 2015. № 1. С. 100–135.
3. *Степанов М.Е.* Эрлангенская программа Клейна и геометрия треугольника (часть вторая). Моделирование и анализ данных. Труды факультета информационных технологий МГППУ. – 2016. № 1. С. 60–115.
4. *Степанов М.Е.* Эрлангенская программа Клейна и геометрия треугольника Моделирование и анализ данных. Математическое образование. 2017. № 3(83). С. 28–42.
5. *Степанов М.Е.* Компьютерные технологии как средство приобщения учащегося к математической реальности. Моделирование и анализ данных. Научный журнал. – Вып. 1, 2018.
6. *Куланин Е.Д., Нуркаева И.М.* О двух геометрических задачах на экстремум. Математика в школе. 2019. № 4. С. 35–40.

7. Куланин Е.Д., Нуркаева И.М. Еще раз о задаче Мавло. Математика в школе. 2020. № 2. С. 76–79.
8. Куланин Е.Д., Степанов М.Е., Нуркаева И.М. Пропедевтика решения экстремальных задач в школьном курсе математики. Моделирование и анализ данных. 2019. № 4. С. 127–144.
9. Куланин Е.Д., Нгуен Ву Куанг, Степанов М.Е. Осязаемая предметность с компьютерной поддержкой. Моделирование и анализ данных. Научный журнал. 2019. № 4. С. 145–156.
10. Куланин Е.Д., Степанов М.Е., Нуркаева И.М. Роль образного мышления в научном мышлении. Моделирование и анализ данных. 2020. Т. 10. № 2 С. 110–128.
11. Куланин Е.Д., Степанов М.Е., Нуркаева И.М. О различных подходах к решению экстремальных задач. Моделирование и анализ данных. 2020. Т. 11. № 1. С. 40–60.
12. Лунгу К.Н., Норин В.П., Письменный Д.Т., Шевченко Ю.А., Куланин Е.Д. Сборник задач по высшей математике с контрольными работами. Москва, 2013. Том 2 (8-е издание).
13. Степанов М.Е. Из опыта работы в области тифлопедагогике. Моделирование и анализ данных. 2017. № 1. С. 42–53.
14. Степанов М.Е. Некоторые вопросы методики преподавания высшей математики. Моделирование и анализ данных. 2017. № 1. С. 54–94.
15. Куланин Е.Д., Степанов М.Е. Из опыта работы в режиме дистанционного обучения Моделирование и анализ данных. 2022. Т. 12. № 3. С. 58–70.
16. Куланин Е.Д., Степанов М.Е. Всестороннее рассмотрение математических понятий как методический прием. Моделирование и анализ данных. 2022. Т. 12. № 4. С. 67–84.
17. Куланин Е.Д., Степанов М.Е. О визуализации решений некоторых экстремальных задач. Моделирование и анализ данных. 2022. Т. 12. № 4. С. 94–104.
18. Большой энциклопедический словарь. М., Советская энциклопедия; 2002.
19. Конституция Российской Федерации.
20. Арсеньев А.С., Безчеревных Э.В., Давыдов В.В. и др. Философско-педагогические проблемы развития образования. – М., Педагогика, 1981.
21. Федеральный закон от 14.07.2022 N 295-ФЗ «О внесении изменений в Федеральный закон «Об образовании в Российской Федерации».<https://studfile.net/preview/3602580/page:5/>
22. https://stavkvantorium.ru/3ee7ad5129%D0%9E%D0%B4%D0%B8%D1%87%D0%B0%D0%B2%D1%88%D0%B8%D0%B5_%D0%B4%D0%B5%D1%82%D0%B8
23. Коменский Я.А. Великая дидактика. М.: Педагогика, 1989.
24. Лангмейер Й., Матейчек З. Психическая депривация в детском возрасте. АВИЦЕНУМ–Медицинское издательство, Прага, 1984, ЧССР.
25. Белов В.И. Лад. Очерки народной эстетики. М.: Институт русской цивилизации, 2013.
26. Ушинский К.Д. Собрание сочинений. Том 9. Человек как предмет воспитания: Опыт педагогической антропологии. М., Издательство академии педагогических наук, 1950.
27. Ильин И.А. Путь к очевидности. Серия «Мыслители XX века». М., Республика, 1993.
28. Волков В.Л. Герой симметричного века. М., Белый берег, 1999.
29. Степанов М.Е. Метафора «Космос как компьютер» в науке, философии, религии и культуре (статья). Математика и практика: Математика и культура. (сборник статей). – М.: Редакция журнала «Самообразование» и МФ «Семигор», 2001.
30. Первая из наук. Геометрия от эпохи пирамид до эры компьютеров. Часть 1 (учебное пособие). М.: Валент, 1996.
31. Первая из наук. Геометрия от эпохи пирамид до эры компьютеров. Часть 2 (учебное пособие). М.: Изд. обучающего учреждения «Рекорд», 1996.
32. Степанов М.Е. Математика и искусство (статья). Математика и практика: Математика и культура. (сборник статей). – М.: Редакция журнала «Самообразование» и МФ «Семигор», 2000.



33. *Степанов М.Е.* Математика и мифология (статья). Математика в школе, 2001, № 3, с. 12–13.
34. *Куланин Е.Д.* Пушкин и математика. Математика для школьников, 2011, № 1.
35. *Федин С.Н.* Математики тоже шутят. – 7-е изд. – Москва: URSS, 2017. – 272 с.



Education in High School

Yevgeny D. Kulanin*

Moscow State University of Psychology & Education (MSUPE), Moscow, Russia

ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-6093-7012>

e-mail: lucas03@mail.ru

Mikhail E. Stepanov**

Moscow State University of Psychology & Education (MSUPE), Moscow, Russia

ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-4803-8211>

e-mail: mestepanov@yandex.ru

The article continues the cycle of methodological developments of authors [1] – [17]. It examines the current problems of modern education related to the need to form not just a specialist, but also a person as a whole, first of all, her civic position. The authors are based on personal experience of working at the Faculty of Information Technology of the Moscow State Pedagogical University.

Keywords: philosophy, human nature, transhumanism, progress, freedom and necessity, level of personal development, creativity, pedagogy, education, training, higher education, teaching methods, mathematics, computer science, sports, culture, communication style.

For citation:

Kulanin Y.D., Stepanov M.E. Education in High School. *Modelirovanie i analiz dannykh = Modelling and Data Analysis*, 2024. Vol. 14, no. 2, pp. 166–191. DOI: <https://doi.org/10.17759/mda.2024140211> (In Russ., abstr. in Engl.).

References

1. Stepanov M.E. The image of a force field as a heuristic model in mathematics. Modeling and data analysis. Proceedings of the Faculty of Information Technologies of MGPPU. – Issue 3., 2007.
2. Stepanov M.E. The Erlangen Klein program and the geometry of a triangle. Modeling and data analysis. Proceedings of the Faculty of Information Technologies of MGPPU. – 2015. No. 1. pp.100–135.
3. Stepanov M.E. Klein’s Erlangen program and the geometry of triangles (Part two). Modeling and data analysis. Proceedings of the Faculty of Information Technologies of MGPPU. – 2016. No. 1. pp.60–115.

****Yevgeny D. Kulanin***, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Moscow State University of Psychology & Education (MSUPE), Moscow, Russia, ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-6093-7012>, e-mail: lucas03@mail.ru

*****Mikhail E. Stepanov***, Candidate of Pedagogical Sciences, Associate Professor, Moscow State University of Psychology & Education (MSUPE), Moscow, Russia, ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-4803-8211>, e-mail: mestepanov@yandex.ru



4. Stepanov M.E. Erlangen Klein program and triangle geometry Modeling and Data analysis. *Mathematical education*. 2017. No.3(83). pp.28–42.
5. Stepanov M.E. Computer technologies as a means of introducing the student to mathematical reality. *Modeling and data analysis. Scientific journal*. – Issue 1, 2018. 6. Kulanin E.D., Nurkaeva I.M. On two geometric problems on the extremum. *Math at school*. 2019. No. 4. p. 3
7. Kulanin E.D., Nurkaeva I.M. Once again about the Mavlo problem. *Mathematics in school*. 2020. No. 2. pp. 76–79.
8. Kulanin E.D., Stepanov M.E., Nurkaeva I.M. Propaedeutics of solving extreme problems in the school course of mathematics. *Modeling and analysis of data*. 2019. No. 4. pp.127–144.
9. Kulanin E.D., Nguyen Wu Quang, Stepanov M.E. Tangible objectivity with computer support. *Modeling and data analysis. Scientific Journal* nal. 2019. No. 4. pp.145–156.
10. Kulanin E.D., Stepanov M.E., Nurkaeva I.M. The role of imaginative thinking in scientific thinking. *Modeling and data analysis*. 2020. Vol.10. No.2 pp.110–128.
11. Kulanin E.D., Stepanov M.E., Nurkaeva I.M. On various approaches to solving extreme problems. *Modeling and data analysis*. 2020. Vol.11. No.1. pp.40–60.
12. Lungu K.N., Norin V.P., Written D.T., Shevchenko Yu.A., Kulanin E.D. *Collection of problems in higher mathematics with control papers*. Moscow, 2013. Volume 2 (8th edition).
13. Stepanov M.E. From experience in the field of typhlopedagogics. *Modeling and data analysis*. 2017. No. 1. pp.42–53.
14. Stepanov M.E. Some questions of the methodology of teaching higher mathematics. *Modeling and data analysis*. 2017. No. 1. pp.54–94.
15. Kulanin E.D., Stepanov M.E. From the experience of working in the remote mode Learning Modeling and data analysis. 2022. Vol.12. No.3. pp.58–70.
16. Kulanin E.D., Stepanov M.E. Comprehensive consideration of mathematical concepts as a methodological technique. *Modeling and data analysis*. 2022. Vol.12. No.4. pp.67–84.
17. Kulanin E.D., Stepanov M.E. On visualization of solutions to some extreme problems. *Modeling and data analysis*. 2022. Vol.12. No. 4. pp.94–104.
18. *Great Encyclopedic Dictionary. M., Soviet Encyclopedia; 2002.*
19. *Constitution of the Russian Federation.*
20. Arsenyev A.S., Bezcherevnykh E.V., Davydov V. V., etc. *Philosophical and pedagogical problems of education development*. – M., Pedagogy, 1981.
21. Federal Law No. 295-FZ of 14.07.2022 “On Amendments to the Federal Law “On Education in the Russian Federation”.
22. https://stavkvantorium.ru/3ee7ad5129/%D0%9E%D0%B4%D0%B8%D1%87%D0%B0%D0%B2%D1%88%D0%B8%D0%B5_%D0%B4%D0%B5%D1%82%D0%B8
23. Komensky Ya. A. *Great didactics*. M.: Pedagogy, 1989.
24. Langmeyer Y., Mateychek Z. *Mental deprivation in childhood*. AVICENUM–Medical Publishing House, Prague, 1984, Czechoslovakia.
25. Belov V.I. *Lad. Essays on Folk Aesthetics*. Moscow: Institute of Russian Civilization, 2013.
26. Ushinsky K.D. *Collected works. Volume 9. Man as a subject of education: The experience of pedagogical anthropology*. M., Publishing House of the Academy of Pedagogical Sciences, 1950.
27. Ilyin I.A. *The path to evidence. Series “Thinkers of the twentieth century”*. Moscow, Republic, 1993.
27. Ilyin I.A. *The path to evidence. Series “Thinkers of the twentieth century”*. Moscow, Republic, 1993.
28. V.L. Volkov. *Hero of the Symmetrical Century*. M., Bely Bereg, 1999.
29. Stepanov M.E. The metaphor of “Space as a computer” in science, philosophy, religion and culture (article). *Mathematics and Practice: Mathematics and Culture*. (collection of articles). – M.: Editorial board of the journal “Self-education” and MF “Semigor”, 2001.



30. The first of the sciences. Geometry from the era of pyramids to the era of computers. Part 1 (text-book). M.: Valent, 1996.
31. The first of the sciences. Geometry from the era of pyramids to the era of computers. Part 2 (text-book). Moscow: Publishing house of the educational institution "Record", 1996.
32. Stepanov M.E. Mathematics and art (article). Mathematics and Practice: Mathematics and culture. (collection of articles). – M.: Editorial board of the journal "Self-education" and MF "Sem-igor", 2000.
33. Stepanov M.E. Mathematics and mythology (article). Mathematics at school, 2001, No. 3, pp. 12–13.
34. Kulanin E.D. Pushkin and Mathematics. Mathematics for Schoolchildren, 2011, No. 1.
35. Fedin S.N. Mathematicians are also joking. – 7th ed. – Moscow: URSS, 2017. – 272 p.

Получена 22.01.2024
Принята в печать 06.03.2024

Received 22.01.2024
Accepted 06.03.2024

Использование образов в преподавании высшей математики

Куланин Е.Д.*

Московский государственный психолого-педагогический университет
(ФГБОУ ВО МГППУ), г. Москва, Российская Федерация
ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-6093-7012>
e-mail: lucas03@mail.ru

Степанов М.Е.**

Московский государственный психолого-педагогический университет
(ФГБОУ ВО МГППУ), г. Москва, Российская Федерация
ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-4803-8211>
e-mail: mestepanov@yandex.ru

Статья продолжает цикл методических разработок авторов [1] – [17]. В ней обсуждаются некоторые проблемы, связанные с путями повышения культуры математического мышления студентов-математиков. Авторы опираются на опыт работы на факультете информационных технологий МГППУ.

Ключевые слова: высшее образование, методика преподавания математики, аналитическая геометрия, аффинная геометрия, проективная геометрия, геометрические преобразования, линейная алгебра, общая алгебра, теория чисел, математический анализ, комплексный анализ, дифференциальные уравнения, уравнения математической физики, математическая логика, дискретная математика.

Для цитаты:

Куланин Е.Д., Степанов М.Е. Использование образов в преподавании высшей математики // Моделирование и анализ данных. 2024. Том 14. № 2. С. 192–225. DOI: <https://doi.org/10.17759/mda.2024140212>

***Куланин Евгений Дмитриевич**, кандидат физико-математических наук, профессор, Московский государственный психолого-педагогический университет (ФГБОУ ВО МГППУ), г. Москва, Российская Федерация, ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-6093-7012>, e-mail: lucas03@mail.ru

****Степанов Михаил Евграфович**, кандидат педагогических наук, доцент, Московский государственный психолого-педагогический университет (ФГБОУ ВО МГППУ), г. Москва, Российская Федерация, ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-4803-8211>, e-mail: mestepanov@yandex.ru



1. ВВЕДЕНИЕ

Любая область человеческой деятельности в той или иной мере становится полем противоборства, как отдельных специалистов, так и коллективов, работающих в данной сфере. Наука вообще и математика в частности не являются исключениями.

Причин для этого очень много. В частности, значительную роль играют меркантильные интересы, связанные со стремлением к материальному благополучию, славе и так далее. Обсуждать подобные мотивы внутренней нестабильности в науке мы, естественно, не будем. Напомним только слова Томаса Гоббса из «Левиафана», переиначенные потом В.И. Лениным: «Я не сомневаюсь, что если истина, что сумма углов треугольника равна сумме двух углов квадрата, противоречила бы чьему-либо праву на власть или интересам тех, кто уже обладает властью, то, поскольку это было бы во власти тех, чьи интересы задеты этой истиной, учение геометрии было бы если не оспариваемо, то путем сожжения книг по геометрии было бы вытеснено».

Несомненно, существуют и иные, в известном смысле объективные, причины жарких научных споров. Они проистекают из того обстоятельства, что наука постоянно развивается и развивается непредсказуемо. Само собой, что разные учёные и различные научные школы неизбежно имеют различные точки зрения на протекающие в научной сфере процессы. Ну, а разные парадигмы по-разному формируют представление о выборе подходов к развитию научного направления. Упомянем о споре между В.И. Арнольдом и Ю.И. Маниным.

Выдающийся математик В.И. Арнольд неоднократно подчеркивал, что в мировой науке существует так называемая «мафия левополушарных математиков», включающих из образования развитие пространственно-математического мышления. Напомним, что левое полушарие мозга отвечает за речь и формальную логику, а правое – за образное мышление и интуицию. Вся содержательная сущность математики левополушарными математиками подменяется манипуляциями, которые нет смысла применять ни в какой другой науке из-за полной их бесполезности. Другой выдающийся математик Ю.И. Манин в дискуссии с В.И. Арнольдом откровенно признался, для чего это делается: основная задача постмодернистской математики вовсе «не в том, чтобы, как думают некоторые, ускорять прогресс человечества, а в том, чтобы этот прогресс всемерно тормозить».

Иначе говоря, интеллектуальные силы лучших математиков преднамеренно бросаются на бесцельные «игры разума». Причем это делается сознательно, на высшем уровне управления человеческой цивилизацией, чтобы математику не использовали для осмысления окружающей действительности и тех рукотворных кризисов, с помощью которых удастся «цивилизованно» поработать целые народы.

Пока речь шла о тонкой прослойке математиков-исследователей, но левополушарные математики сумели активно повлиять на изучение математики. Им удалось затронуть не только высшую школу, но они добрались и до школьного образования. Вместо освоения счёта в начальной школе стали изучать формулировки абстрактных алгебраических законов, описывающих коммутативность, ассоциативность, дистрибутивность. Для тех, кто не умеет считать, знание этих законов не только бесполезно, но и вредно.



Одним из экстремистов левополушарного толка был Жан Дьедонне, один из основателей группы «Бурбаки». Введение к его учебнику [18] можно рассматривать как воинствующий манифест, направленный на изгнание геометрических образов из математического образования и замену их крайне абстрактными логическими схемами. Точка зрения Дьедонне в целом понятна и обоснована достаточно подробно. Он утверждает, что каждый исторический выход математики на новый уровень развития заставляет переосмыслить даже известные с древнейших времён математические понятия по-новому. В частности, это относится к геометрическим объектам, испокон веков изучаемым в рамках евклидовой геометрии. Для Дьедонне эта форма геометрического знания не только архаична, но и вредна.

Дьедонне отрицает необходимость изучения целого ряда традиционных разделов как элементарной, так и высшей математики, в том числе тригонометрию, аналитическую, проективную, неевклидову геометрии и даже теорию комплексных чисел. Впрочем, он признаёт, что специалистам в некоторых областях науки и техники тригонометрия нужна. Речь идёт об астрономах, геодезистах и авторах учебников по тригонометрии.

Вот что он пишет о том, чем следует заменить традиционные дисциплины: «Отправляясь от очень простых аксиом – в отличие от сложных аксиом Евклида – Гильберта, – можно при помощи тривиальных вычислений непосредственно и в несколько строчек получить всё то, для чего раньше нужно было возводить леса искусственных и сложных систем треугольников, чтобы во чтобы во чтобы ни стало свести задачу к священным случаям «равенства» и «подобия» треугольников – к единственной основе всей традиционной технике Евклида». Таким образом, Дьедонне предполагает, что преподавание математики может производиться по аналогии с изложением той или иной математической дисциплины на основе логического вывода теорем из аксиом и доказанных ранее теорем. Такой подход является в высшей степени формальным.

Прежде всего, здесь можно отметить полный отрыв от реалий окружающего мира, то есть от **численных отношений и пространственных форм окружающего нас мира** (А.Н. Колмогоров). Допущение о возможности обучения чисто логическим путём является абсолютно неверным. Хотя вряд ли это обстоятельство могло обеспокоить Дьедонне. Достаточно обратиться к одному из его замечаний по поводу построения школьного курса математики: «... могу высказать только некоторые «вольные мысли» ввиду моей полной некомпетентности в вопросах реакций детей возраста 11–14 лет». Этого признания вполне достаточно, чтобы не вмешиваться в решение педагогических вопросов, однако, Дьедонне агрессивно навязывает свою «методу». При этом он подчёркивает, что она должна быть введена при обучении всех детей поголовно и во все средние школы.

Обсуждение взглядов французского математика может показаться не слишком актуальным, но дело в том, что во всём мире были подвергнуты реформированию программы, направленные на изучение математики не только в средней, но и начальной школе. С первого класса, были навязаны термины теории множеств и изгнаны счётные палочки и счёты. Цель – воспитание абстрактно мыслящих людей.



Результат – понижение интеллектуального уровня выпускников школы, а, в конечном счёте, и всего человечества.

Человек осваивает логику стихийно, опираясь на всю полноту взаимодействий с окружающим миром. В своей книге «Наука логики» [19] великий немецкий философ Георг Вильгельм Фридрих Гегель писал, что логика сама по себе не учит мыслить. Мыслит человек, поскольку это является его сущностью. Точно так же он прекрасно может переваривать пищу, не зная анатомии и физиологии. Из этого следует, что логика является всего лишь одним из инструментов познания. Она, конечно, очень важна, но, в конечном счёте, она может работать только в сочетании с образным мышлением. Вообще же левое и правое полушария мозга должны сотрудничать, а не противоборствовать.

Кроме того, полезно вспомнить то, что Алексей Фёдорович Лосев говорит в своей работе [20] о **восприятии бытия в его перспективности и рельефности**. По его мнению, **именно такое восприятие создаёт полноту личности**. А, по мнению авторов статьи, **перспективное и рельефное восприятие мира связано именно с образным мышлением**. По мере сил они пытаются разрабатывать методические приёмы, относящиеся к преподаванию сложных математических вопросов из самых разных областей математики.

Авторы статьи – рядовые преподаватели, а Жан Дьедонне был крупным математиком. Имеют ли авторы право критиковать столь заметную персону? Ответ прост. Специалист любого уровня имеет право на своё мнение. К тому же быть видным математиком, не значит хоть что-то понимать в педагогике.

Кроме того, одним из результатов педагогических усилий группы Бурбаки стал упадок математики. Этот факт ярко комментирован В.И. Арнольдом [21]. Приведём соответствующую цитату.

«Абстрактное» гладкое многообразие – это гладкое подмногообразие какого-либо евклидова пространства, рассматриваемое с точностью до диффеоморфизма. Никаких «более абстрактных» конечномерных гладких многообразий в природе не существует (теорема Уитни). Зачем же мы до сих пор мучаем студентов абстрактным определением? Не лучше ли доказать им теорему о явной классификации двумерных замкнутых многообразий (поверхностей)?

Именно эта замечательная теорема (утверждающая, например, что всякая компактная связная ориентируемая поверхность – это сфера с некоторым числом ручек) даёт правильное представление о том, что такое современная математика, а вовсе не сверхабстрактные обобщения наивных подмногообразий евклидова пространства, не дающие на самом деле ничего нового и выдаваемые аксиоматизаторами за достижения».

Это мнение достаточно весомо и указывает на крайнюю ущербность педагогических установок Дьедонне. Тем не менее, определённая группа математиков может быть убеждена в правильности соответствующего подхода. Тем более, что основным обоснованием здесь является необходимость обновления математического образования. И, конечно, обновление необходимо. Вопрос только в том, в какой форме его проводить.



Естественно, что путей обновления может быть предложено достаточно много. В результате возможно активное противоборство между сторонниками различных подходов. Это противоборство может перерасти в войну. И победит сильнейший. Так, например, и произошло с победой установок Дьедонне. Сила аксиоматизаторов в поддержке, которую оказывают им сильные мира сего. Причины этой поддержки в стремлении мировых элит понизить интеллектуальный уровень населения земного шара.

Правильный путь обновления системы образования состоит не в том, чтобы огульно внедрить чьи-то прожекты, а в проведении долговременных педагогических экспериментов, позволяющих сравнить традиционные и инновационные методики. И в первую очередь проверяться должны те планы обновления образования, которые требуют обновлять всё без изъятия и повсеместно. Скрупулёзная проверка – это долгий путь, но наиболее безопасный для общества.

Что касается методических разработок частного характера, которые делают рядовые преподаватели для своих нужд, то они не затрагивают систему образования в целом, а, значит, не могут принести особого вреда даже в тех случаях, когда они заведомо неудачны. В этом случае их просто можно подвергнуть аргументированной критике. Те соображения, которые высказывают авторы данной статьи, как раз и относятся к этому виду методических разработок.

Однако в ряде случаев преподавателям удаётся прийти к удачным идеям, которые могут стать эффективными инструментами в преподавании математики. В любой работе, тем более сложной, нужны различные инструменты. Ими можно пользоваться не всегда, а именно тогда, когда это целесообразно.

В данной статье авторы предлагают несколько скромных методических разработок, основанных на использовании образов математического характера. Авторы хотят ими поделиться, чтобы по мере надобности их могли использовать преподаватели, а в ряде случаев и студенты.

Итак, далее будет описана совокупность различных методических приёмов, объединённых интуитивно-образным подходом. Авторы ни в коем случае не претендуют на новизну. Некоторые из этих приёмов имеют многовековую историю, но их нельзя забывать, особенно после целенаправленной атаки на них со стороны формалистов-реформаторов. Всё, что позволяет студенту **понять** математику, должно быть включено в рабочий инструментарий каждого преподавателя.

2. ПОНЯТИЕ ФУНКЦИИ

Возникновение новой математики, во многом начатое Рене Декартом, было направлено на разработку математических понятий, связанных с описанием механического движения. По этой причине многие понятия математического анализа, которые постепенно были формализованы, например, с помощью эпсилон-дельта языка, становятся понятными только при динамической интерпретации. Например, **понятие предела глубинно связано с представлением о затухающем маятнике. Смысл**



затухания колебаний в том, что с некоторого момента времени отклонение маятника от положения равновесия становится сколь угодно малым.

Центральным понятием математического анализа является функция, рассматриваемая как взаимосвязь значений двух переменных. Что касается переменных, то их можно интерпретировать как свойства различных объектов и явлений, выражаемые с помощью чисел. Физический смысл переменных может быть весьма разнообразным, но при изучении функций наиболее важными являются два.

1. Аргумент функции интерпретируется как время, а значения функции – как пройденный путь.
2. Аргументы и значения функции интерпретируются как координаты декартовой плоскости.

В качестве числовых значений переменных величин в классическом анализе рассматриваются действительные числа. Они могут на выбор рассматриваться как сечения в поле рациональных чисел, как десятичные дроби и как точки евклидовой прямой. Связь этих точек зрения устанавливается с помощью процедуры измерения отрезков.

Множество действительных чисел в целом следует представлять себе как геометрический или точнее топологический образ – континуум. Именно по этой причине в математическом анализе неразрывны аналитический и геометрический подходы.

Таким образом, идеи математического анализа изначально пронизаны как геометрическими и кинематическими образами, так и представлениями, связанными с числами и вычислительными процедурами, достигающими своего максимального развития в исчислениях различного вида. **Образ непрерывной линии** (континуума, прямой, кривой, нити, стержня и т. д.) является исходным образом для уяснения геометрического и кинематического истолкования понятия функции. С физической же точки зрения функцию следует рассматривать как теоретическую модель процесса. Не менее важный путь к аналитическому истолкованию понятия функции связан с арифметическим и алгебраическим **понятием последовательности**. Все эти представления, видимо, можно считать архетипическими для человеческой психики. Именно отправляясь от них, следует формировать научное представление о функции.

Сделаем два замечания. Прежде всего, кому-то может показаться, что определение функции как отображения вполне достаточно для дальнейшего свободного использования этого понятия. Авторы считают, что **необходимо всестороннее и детальное рассмотрение понятия функции**. К этому вопросу мы вернёмся далее.

Второе замечание связано с тем, что исходные архетипические образы человеческой психики являются базой для освоения научных понятий. Но процесс обучения как раз и состоит в том, что по его ходу осуществляется **развитие исходного образа** (или образов), его усложнение и логическое освоение.

Перейдём к вопросу о всестороннем рассмотрении понятия функции на младших курсах в высшей школе. Прежде всего, отметим, что простейшие виды функций рассматриваются уже в школьном курсе математики. Это, однако, не гарантирует того, что студент, приступая к изучению математического анализа, достаточно ясно представляет себе, чем является функция как таковая.



Чтобы достичь достаточно глубокого понимания, необходимо выйти за рамки абстрактного теоретико-множественного описания функции и соединить воедино кинематическое истолкование этого понятия, геометрический образ функции (график) и аналитическое её описание, часто восходящее к рассмотрению числовой последовательности определённого вида. Связь функций и числовых последовательностей, кстати, проявляется в важнейшем для инженерных приложений табличном представлении функций. При этом с табулированием функций связаны и важные теоретические проблемы математики [22].

В статье [14] рассматриваются некоторые вопросы, связанные с образным описанием переменных и функций. Приведём несколько цитат, в которых кратко формулируются некоторые положения, позволяющие прийти к образам переменных и функций с акцентом на физические и геометрические аспекты соответствующих понятий.

Цитата 1: «Определение понятия переменной величины как свойства объекта, выраженного действительным числом. Спиртовой термометр как модель переменной величины. Геометрическая модель переменной величины – числовая прямая, по которой движется точка-указатель. Функция $y = f(x)$ как зависимость между двумя переменными. *Примечание:* обычно понятие переменной сводится к процедуре произвольного выбора значений из определённого множества. При этом, хотя бы отчасти, теряется физический смысл понятия «переменная». Этот смысл состоит в том, что переменная даёт числовое выражение некоторых свойств объектов окружающего мира. Именно для этого переменные и нужны. В рамках классической математики переменные также выражают свойства объектов, например, в геометрии речь идёт о длинах, площадях, объёмах и т. д. В свою очередь, признав, что переменная является выразителем свойств, следует беспорядочный «выбор значений» заменить «изменением», то есть движением указателя вдоль числовой прямой. Именно такое интуитивное представление соответствует физическому смыслу термина «переменная». Хотя с точки зрения логики и возможности обобщений именно «выбору значений» может быть отдано предпочтение».

Цитата 2: «Пластический образ континуума. Целью данного пункта является наглядное объяснение причин, по которым график функции является кривой. Само объяснение таково. Представим себе, что на оси абсцисс в декартовой плоскости расположен пластичный, легко деформируемый стержень. Ординаты всех его точек равны нулю. Стержень можно параллельно оси абсцисс переместить вверх или вниз на некоторую величину c . При этом ординаты всех его точек примут одинаковые значения c , уже неравные нулю. С помощью этой процедуры построен график функции $y = c$. Пусть далее нам дана функция $y = f(x)$. Теперь мы будем перемещать по вертикали не весь стержень целиком, а каждую его точку x сдвинем на своё особое расстояние $y = f(x)$. При этом стержень деформируется. Он даже может разорваться, но если для близких значений абсцисс, значения ординат тоже близки, то разрывов не будет, а график функции предстанет в виде кривой».

Цитата 3: «Пластический образ поверхности как аналога графика функции двух переменных. Представим себе, что на декартовой плоскости расположен

пластичный, легко деформируемый ковёр. Каждая точка ковра определяется парой координат $(x; y)$. Если же нам дана функция от двух переменных $z = f(x, y)$, мы каждую точку ковра $(x; y)$ сдвинем по вертикали (уже в трёхмерном пространстве) на своё особое расстояние $z = f(x, y)$. При этом ковёр деформируется и превратится в аналог графика функции от двух переменных, а именно в некоторую поверхность».

Итак, смысл понятия «переменная» связан с изменением. **Функция, как описание взаимосвязи двух изменяющихся переменных, представляет собой абстрактную модель какого-либо процесса.** Геометрический образ функции связан с представлением о пластичном стержне. После его преобразования в график функции, он становится обозримым образом соответствующего процесса, демонстрируя интервалы возрастания и убывания, а также точки, в которых достигаются экстремальные значения.

Напомним также, что с представлением о пластичном стержне связан такой важный и полезный объект прикладной математики как сплайн. Кроме того, используя соответствующий образ, можно с высокой степенью ясности объяснить, как графики функций от одной (рисунок 1) и двух (рисунок 2) переменных строятся компьютерными программами.

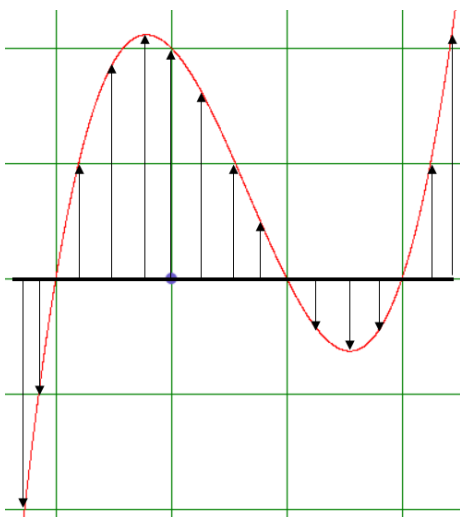


Рис. 1

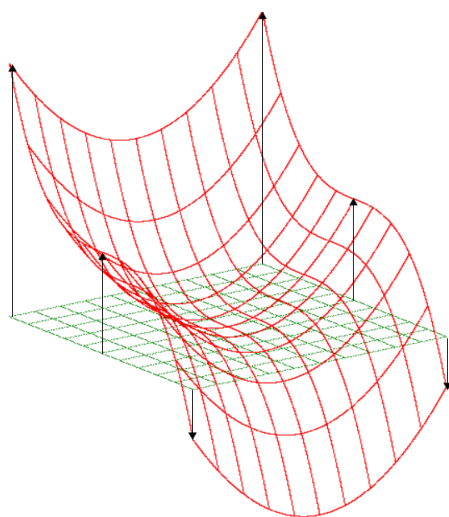


Рис. 2

Пластичный стержень, превращаясь в график функции, изгибается в соответствии с формулой, которая задаёт эту функцию аналитически. Однако итоговая форма графика обычно предъявляется студенту как само собой разумеющаяся. Для некоторых элементарных функций полезно более подробно пояснить, почему данная функция имеет график именно такой формы. И здесь важную роль играют числовые последовательности.



Числовые последовательности в некотором смысле обозримы не хуже, чем графики функций. Пусть рассматривается последовательность $\{a_i\}$. Размещение на декартовой плоскости точек с координатами $(i; a_i)$ часто позволяет увидеть связь данной последовательности с некоторой элементарной функцией. Так арифметическая прогрессия, очевидно, связана с линейной функцией (рисунок 3), а геометрическая – с показательной (рисунок 4).

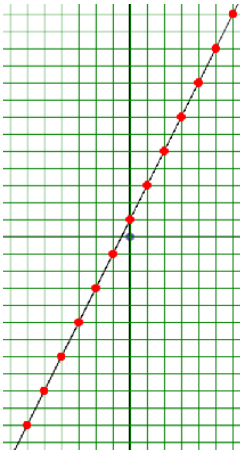


Рис. 3

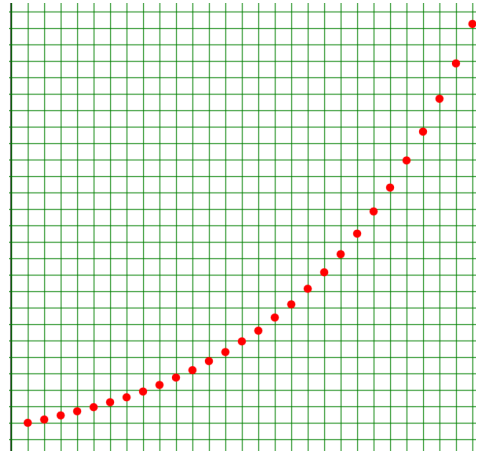


Рис. 4

Более того, арифметическую прогрессию можно уплотнить до непрерывной линии (прямой), последовательно вставляя между её членами новые, которые являются средними арифметическими соседних членов. Геометрическая прогрессия до графика показательной функции уплотняется с помощью вычисления среднего геометрического соседних членов [23].

Рассмотрим операцию уплотнения более подробно.

Задание 1. Пусть на концах отрезка $[0;1]$ заданы значения функции 1 и a . Проведём уплотнение функции следующим образом. Сначала в аргументу $\frac{1}{2}$ поставим в соответствие значение функции, равное среднему геометрическому концевых значений. Далее аналогичные уплотнения проведём для отрезков $\left[0; \frac{1}{2}\right]$ и $\left[\frac{1}{2}; 1\right]$. Продолжим уплотнение для системы всё новых отрезков, убывающих по длине. Написать компьютерную программу уплотнения функции по этому алгоритму и построения соответствующего графика.

Решение. Программа, используя описанный алгоритм, заполняет два массива – массив абсцисс и массив ординат. Каждый из массивов содержит 2^m элементов. Первоначально задаются только значения первого и последнего элементов каждого массива. Затем происходит постепенное заполнение массивов, сопровождающее деление очередных отрезков пополам. Для большей узнаваемости показательной функции $y = 2^x$ уплотнение проводится на отрезке $[-1; 1]$.



```
GraphicsWindow.Width = 620
GraphicsWindow.Height = 620
xb0 = 310
yb0 = 610
GraphicsWindow.DrawLine(xb0,0, xb0,620)
GraphicsWindow.DrawLine(0, yb0,620, yb0)
GraphicsWindow.FillEllipse(xb0-5, yb0-5,10,10)
ed = 300
GraphicsWindow.FillEllipse(xb0-5, yb0-ed-5,10,10)
m = 12
n = Math.Power(2, m)
x[0] = -1
x[n] = 1
y[0] = 1/2
y[n] = 2
For i = 0 To m-1
s = n / Math.Power(2, i)
For j = 0 To n - s Step s
x[j + s/2] = (x[j] + x[j+s])/2
y[j + s/2] = Math.Sqrt(y[j]*y[j+s])
EndFor
EndFor
For k = 0 To n
xe = xb0 + x[k]*ed
ye = yb0 - y[k]*ed
GraphicsWindow.SetPixel(xe, ye,»»)
EndFor
```

Результат работы программы показан на рисунке 5.

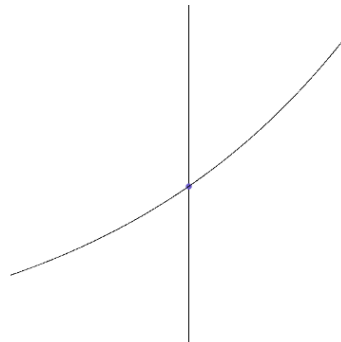


Рис. 5

Задание 2. Рассмотрим показательную функцию $y = a^x$ и выберем на оси абсцисс произвольный отрезок $[x_1; x_2]$. Доказать, что построенные по предыдущему алгоритму



уплотнения точки образуют геометрическую прогрессию и лежат на графике показательной функции.

Решение. Значение функции на концах отрезка равны $y_1 = a^{x_1}$ и $y_2 = a^{x_2}$. Среднее геометрическое этих значений соответствует середине отрезка, то есть аргументу $\frac{x_1 + x_2}{2}$. Кроме того, оно равно $y = \sqrt{y_1 \cdot y_2} = \sqrt{a^{x_1} \cdot a^{x_2}} = a^{\frac{x_1 + x_2}{2}}$. Таким образом, уплотняющая точка лежит на графике показательной функции $y = a^x$. Это рассуждение сохраняет свою силу при всех последующих уплотнениях. Поскольку уплотняющие аргументы отстоят друг от друга на равные расстояния, значения показательной функции, соответствующие им, образуют геометрическую прогрессию.

Задание 3. Пусть на концах отрезка $[x_1; x_2]$ заданы значения функции a и b . Написать компьютерную программу уплотнения функции на отрезке с помощью среднего гармонического. Определить вид, возникающей функции.

Решение. Среднее гармоническое величин a и b является обратной величиной к среднему арифметическому обратных величин $\frac{1}{a}$ и $\frac{1}{b}$. Вычисляется среднее гармоническое по формуле $s = \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} = \frac{2ab}{a+b}$. Соответствующую программу можно

получить из предыдущей заменой строки, в которой вычисляется среднее геометрическое, на строку, производящую вычисление среднего гармонического.

Чтобы установить вид функции, получаемой после уплотнения, отметим тот факт, что при уплотнении аргументы функции не используются. Таким образом, отрезок $[x_1; x_2]$ можно задавать произвольно. Это означает, что при уплотнении строится класс функций, получаемых сдвигами и растяжениями оси абсцисс.

Что касается вида функции, возникающей при уплотнении, догадаться о нём можно, исходя из того, что среднее гармоническое является обратной величиной к среднему арифметическому обратных величин. Можно предположить, что $y = \frac{1}{x}$. Тогда

при заданных значениях функции a и b аргументы принимают значения $x_1 = \frac{1}{a}$ и $x_2 = \frac{1}{b}$. При уплотнении будет получено значение функции, равное $\frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} = \frac{2}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}} = \frac{2}{\frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2}}$, то есть предположение является верным.

Задание 4. Придумать способ уплотнения последовательности для получения функции $y = x^2$ с использованием стандартных средних величин – среднего арифметического и среднего геометрического.

Решение. Как уже было сказано, процедура уплотнения связана с вычислением значения функции в середине отрезка $[x_1; x_2]$. Рассмотрим, что получится в случае функции $y = x^2$. Отметим, что её значения на концах отрезка $[x_1; x_2]$ равны $y_1 = x_1^2$ и $y_2 = x_2^2$.

$$y\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) = \left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)^2 = \frac{x_1^2+x_2^2}{4} + \frac{x_1 \cdot x_2}{2} = \frac{\frac{y_1+y_2}{2} + \sqrt{y_1 \cdot y_2}}{2}$$

Таким образом, для получения функции $y = x^2$ уплотнением следует использовать среднее арифметическое среднего арифметического и среднего геометрического конечных значений.

При изучении процедуры получения функций уплотнением последовательностей может возникнуть вопросы, которые можно сформулировать в виде заданий. Одна группа заданий аналогична заданию 4 и связана с поиском формулы уплотнения. Вторая группа заданий наоборот предполагает выяснение вида функций, получаемых при помощи заданной формулы уплотнения, например, следующее задание: «Можно ли выяснить, какая функция возникнет при уплотнении, основанном на вычислении среднего геометрического среднего арифметического и среднего геометрического конечных значений».

Что касается формы графиков синуса и косинуса, то в старых учебниках тригонометрии столь нелюбимых и осмеиваемых Дьедонне, давались наглядные изображения возникновения соответствующих волн при вращении радиуса-вектора. В наше время их можно получить на экране компьютера (рисунок 6).

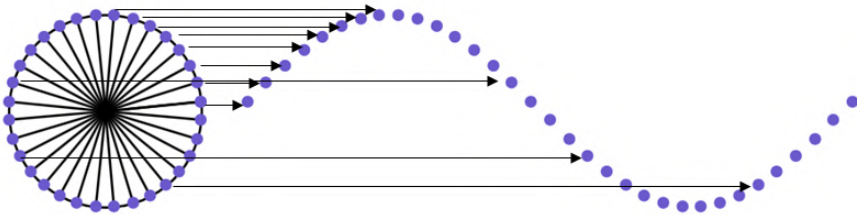


Рис. 6

Таким образом, существует несколько образных истолкований понятия функции, которые могут применяться при изучении математического анализа. Повторим, что обращение к этим представлениям возможно, но, конечно, необязательно. Преподаватель может обращаться к ним по мере надобности, особенно в индивидуальной работе, в частности, со студентами, имеющими проблемы со зрением.

Вопрос о форме графиков функций связан с исследованием возрастания и убывания функций, а также с поиском экстремумов функции, то есть изучается непосредственно в стандартном курсе математического анализа. Но есть ещё целый ряд подходов к этому вопросу, в частности рассмотрение **задач на создание функций, графики которых имеют заданную форму, а сами функции заданы аналитически**. Соответствующую деятельность можно назвать **конструированием функций**. В принципе именно конструирование функций используется в рамках такого предмета как «Вычислительная математика» при решении задач об интерполяции



и аппроксимации функций. В качестве примеров можно привести получение формул для интерполяционного многочлена Лагранжа и кубических сплайнов.

Однако ряд задач на конструирование функций можно предложить студентам первого курса. Такие задачи позволяют уловить связь между аналитическим заданием функций и их пластическими образами (графиками). Конечно основным видом функций, используемых при конструировании, являются многочлены и дробно--рациональные функции. Приведём несколько примеров. Некоторые задания в силу их простоты будут приведены без решения.

Задание 5. Придумать функцию с заданными корнями.

Задание 6. Придумать функцию с заданными корнями и заданными вертикальными асимптотами.

Решение. Искомая функция является отношением двух многочленов. Корни числителя одновременно являются корнями функции, а корни знаменателя определяют местоположение вертикальных асимптот. Приведём программу построения графика подобной функции с тремя корнями и тремя вертикальными асимптотами. Результат её работы показан на рисунке 7.

```
x0 = 320
y0 = 220
ed = 50
GraphicsWindow.FillEllipse(x0-5, y0-5, 10, 10)
GraphicsWindow.DrawLine(0, y0, 640, y0)
GraphicsWindow.DrawLine(x0, 0, x0, 440)
'Корни функции
x1 = -2
x2 = 0
x3 = 1
'Асимптоты
a1 = -2.5
a2 = -1
a3 = 1.9
GraphicsWindow.DrawLine(x0+a1*ed, 0, x0+a1*ed, 440)
GraphicsWindow.DrawLine(x0+a2*ed, 0, x0+a2*ed, 440)
GraphicsWindow.DrawLine(x0+a3*ed, 0, x0+a3*ed, 440)
For x = -6 To 6 Step 0.001
p = (x - x1)*(x - x2)*(x - x3)
q = (x - a1)*(x - a2)*(x - a3)
If Math.Abs(q)>0.01 Then
y = p/q
xe = x0 + x*ed
ye = y0 - y*ed
GraphicsWindow.SetPixel(xe, ye, "")
EndIf
EndFor
```

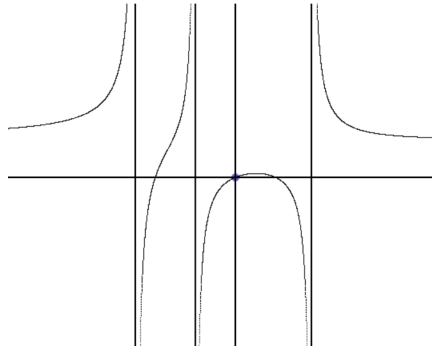


Рис. 7

Задание 7. Придумать функцию, график которой похож на бугор на равнине.

Решение. Если бы конструировалась функция, которая могла уходить в бесконечность, то можно было бы использовать функции из предыдущего задания, например, функцию $\frac{1}{x^2}$. Однако функция должна быть ограничена, следовательно, знаменатель не может обращаться в ноль. Чтобы добиться этого, достаточно прибавить к знаменателю небольшое положительное число. Результат работы программы, строящей график такой функции, показан на рисунке 8.

```
x0 = 320
y0 = 410
ed = 50
GraphicsWindow.FillEllipse(x0-5, y0-5,10,10)
GraphicsWindow.DrawLine(0, y0,640, y0)
GraphicsWindow.DrawLine(x0,0, x0,440)
For x = -6 To 6 Step 0.001
p = 1
q = x*x + 1/8
y = p/q
xe = x0 + x*ed
ye = y0 - y*ed
GraphicsWindow.SetPixel(xe, ye,"")
EndFor
```

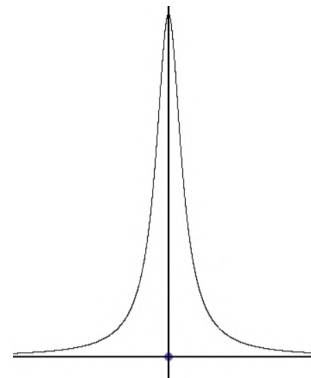


Рис. 8

Задание 8. Придумать функцию, график которой даёт очертание вершин и впадин.

Решение. Впадина создаётся функцией, аналогичной бугру, но со знаком минус. Конструируемая функция является суммой бугров и впадин (рисунок 9).

```
x0 = 320
y0 = 220
ed = 50
```



```
GraphicsWindow.FillEllipse(x0-5, y0-5,10,10)
GraphicsWindow.DrawLine(0, y0,640, y0)
GraphicsWindow.DrawLine(x0,0, x0,440)
For x = -6 To 6 Step 0.001
p = 1
q1 = x*x + 1/4
q2 = -(x-2)*(x-2) - 1/3
q3 = -(x+2)*(x+2) - 1/2
y = p/q1 + p/q2 + p/q3
xe = x0 + x*ed
ye = y0 - y*ed
GraphicsWindow.SetPixel(xe, ye,"")
EndFor
```

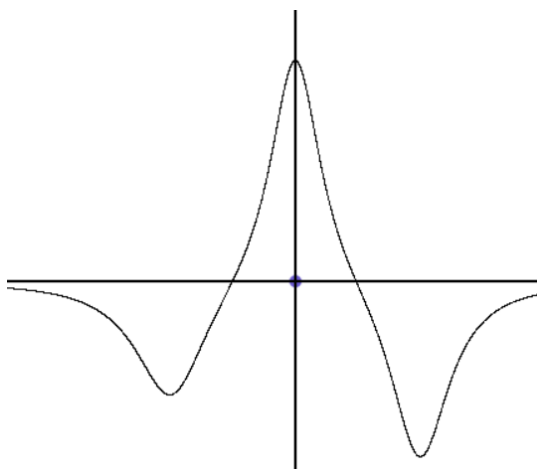


Рис. 9

В задании 8 был использован сдвиг функций вдоль оси абсцисс. Это обстоятельство показывает, что при конструировании функций могут использоваться различные преобразования. Изучение преобразований и само по себе является важной сферой, которая позволяет понять, взаимосвязь некоторых видов функций между собой. При этом естественным образом в рассмотрение вводятся различные семейства функций.

Уже в школьном курсе рассматриваются преобразования, задаваемые формулами вида $y = a \cdot f(\omega \cdot (x - b)) + c$. Однако часто требуется более подробное знакомство с результатами их применения.

Задание 9. Построить гармонику высокой частоты, значения которой колеблются в пределах от нуля до единицы.

Задание 10. Построить семейство функций, графики которых деформируются, отправляясь от графика функции $y = f_1(x)$, в график функции $y = f_2(x)$.



Решение. Рассмотрим семейство вертикальных отрезков, соединяющих точки на соответствующих графиках. Множества точек, делящих каждый из таких отрезков в постоянном отношении. Как раз и образуют искомое семейство. Результат работы программы показан на рисунке 10.

```
x0 = 320
y0 = 220
ed = 50
GraphicsWindow.FillEllipse(x0-5, y0-5,10,10)
GraphicsWindow.DrawLine(0, y0,640, y0)
GraphicsWindow.DrawLine(x0,0, x0,440)
For x = -6 To 6 Step 0.001
y1 = -4/(x*x + 1)
xe = x0 + x*ed
ye1 = y0 - y1*ed
GraphicsWindow.FillEllipse(xe-1, ye1-1,2,2)
y2 = x*x/6
ye2 = y0 - y2*ed
GraphicsWindow.FillEllipse(xe-1, ye2-1,2,2)
EndFor
For t = 0 To 1 Step .1
For x = -6 To 6 Step 0.001
y1 = -4/(x*x + 1)
y2 = x*x/6
y = y1*t + y2*(1 - t)
xe = x0 + x*ed
ye = y0 - y*ed
GraphicsWindow.SetPixel(xe, ye)
EndFor
EndFor
```

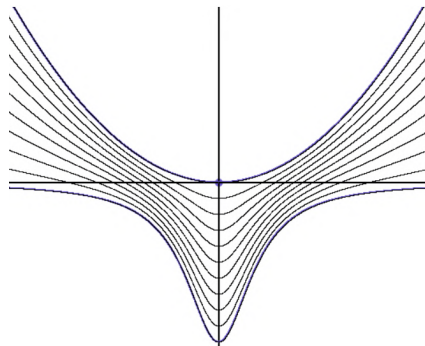


Рис. 10

Задание 11. Сконструировать функцию, график которой колеблется с определённой частотой между двумя функциями $y = f_1(x)$ и $y = f_2(x)$.



Решение. Рассмотрим гармонику из задания 9 и будем использовать её значения для деления вертикальных отрезков, как это делается в задании 10 (рисунок 11).

```
x0 = 320
y0 = 220
ed = 50
GraphicsWindow.FillEllipse(x0-5, y0-5,10,10)
GraphicsWindow.DrawLine(0, y0,640, y0)
GraphicsWindow.DrawLine(x0,0, x0,440)
For x = -6 To 6 Step 0.001
y1 = -4/(x*x + 1)
xe = x0 + x*ed
ye1 = y0 - y1*ed
GraphicsWindow.FillEllipse(xe-1, ye1-1,2,2)
y2 = x*x/6
ye2 = y0 - y2*ed
GraphicsWindow.FillEllipse(xe-1, ye2-1,2,2)
EndFor
For x = -6 To 6 Step 0.0001
y1 = -4/(x*x + 1)
y2 = x*x/6
t = (Math.Sin(10*x) + 1)/2
y = y1*t + y2*(1 - t)
xe = x0 + x*ed
ye = y0 - y*ed
GraphicsWindow.SetPixel(xe, ye)
EndFor
```

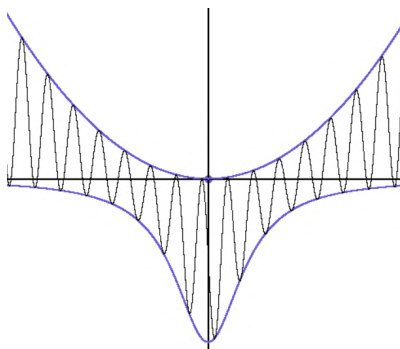


Рис. 11

Ещё раз повторим, что соответствующие задания кому-то могут показаться неуместными, поскольку студент должен свободно владеть понятием функции и без них. Если это действительно так, то, конечно, подобные задачи не нужны. Однако опыт преподавания показывает, что иногда нужно углублять понимание студентами



такого базового понятия математического анализа, как функция. Кроме того, задания, имеющие характер рассмотренных выше, помогают ощутить функции как осязаемые и доступные для манипулирования с ними объекты. Важность такого восприятия функций можно подчеркнуть, процитировав слова Шарля Эрмита: «Я убежден в том, что числа и функции анализа не являются произвольным продуктом нашего духа. Я верю, что они лежат вне нас с той же необходимостью, как предметы объективной реальности, а мы обнаруживаем или открываем и исследуем их так же, как это делают физики, химики и зоологи» [24].

3. РАСШИРЕНИЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ О ФУНКЦИЯХ

Тот факт, что понятие функции является центральным в математике, указывает на его сложность. И по этой причине приходится касаться большого числа вопросов, развивающих это понятие. Прежде всего, образный подход к понятию функции ни в коей мере не отменяет необходимости знать теоретико-множественное определение отображения.

Пусть заданы множества X и Y . Бинарное отношение между ними называется отображением f с областью определения X и областью значений Y , если оно сопоставляет каждому элементу $x \in X$ единственный элемент $f(x) \in Y$. Это весьма общее определение резко расширяет представления о функциях.

Желательно дать студентам примеры функций, выходящие за пределы математического анализа функций одного действительного переменного. Речь может идти, например, о функциях комплексного переменного. Кроме того, следует упомянуть логические функции. Желательно при этом продемонстрировать их связь с функциями математического анализа, в том числе и от нескольких переменных.

Скажем об этом несколько подробнее. Логическая функция от одного переменного связана с некоторыми функциями математического анализа, отображающими на отрезок $[0; 1]$ в отрезок $[0; 1]$. Такие функции должны на концах отрезка $[0; 1]$ принимать значения либо 0, либо 1 (рисунок 12).

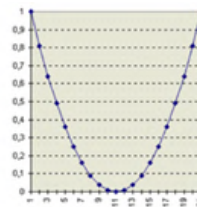


Рис. 12

Аналогичное сопоставление можно продемонстрировать и для функций двух переменных (рисунок 13).

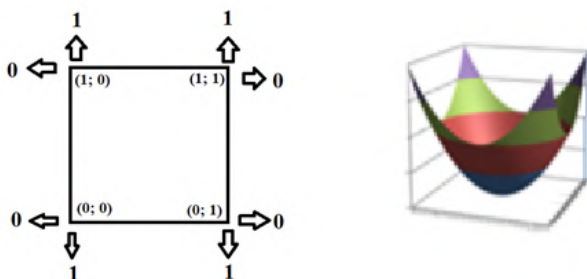


Рис. 13

Наконец, можно продемонстрировать и схему построения логических функций трёх переменных, но уже без соответствующего аналога (рисунок 14).

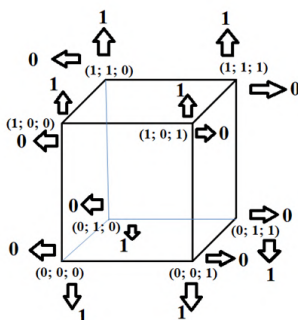


Рис. 14

Следующей темой может послужить вопрос о том, что **описание кривых** даже в рамках математического анализа **выходит за пределы понятия функции**. Это обстоятельство связано с единственностью элемента $f(x)$. Об этом будущие студенты узнают уже в школе при рассмотрении описания окружности с помощью неявного уравнения $x^2 + y^2 = r^2$. Чтобы в данном случае использовать понятие функции, окружность нужно разрезать на две ветви $y = \pm\sqrt{r^2 - x^2}$. Однако в рамках школьной программы этот пример фактически является единственным.

В высшей школе количество таких примеров резко возрастает. Речь, в частности, идёт о кривых второго порядка и об описании различных кривых параметрическими уравнениями. Следует иметь в виду, что **рассмотрение соответствующих вопросов приводит к освоению таких сложных понятий современной математики, как дифференцируемые многообразия**.

Приведём пример задания на эту тему.

Задание 12. Дать параметрическое описание кривой, изображённой на рисунке 15.

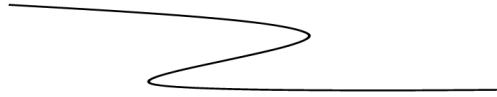


Рис. 15

Решение. Выясним, как меняются абсцисса и ордината точки, движущейся по данной кривой. Ордината убывает, пробегая значения из некоторого отрезка. Изменение абсциссы характерно для кубического многочлена с тремя корнями. Исходя из сказанного, опишем кривую уравнениями:

$$x = t \cdot (t^2 - 4),$$
$$y = -\frac{t}{\sqrt{t^2 + 1}}.$$

Следующая программа подтверждает правильность проведённых рассуждений.

```
x0 = 320
y0 = 220
ed = 50
For t = -6 To 6 Step .001
x = t*(t-2)*(t+2)
y = -t/ Math.SquareRoot(t*t+1)
xe = x0 + x*ed
ye = y0 - y*ed
GraphicsWindow.SetPixel(xe, ye,»»)
EndFor
```

Важным обстоятельством, связанным с изучением функций одного действительного переменного, является тот факт, что их описание в неявном виде требует использования функций двух переменных. Если задано неявное уравнение некоторой функциональной зависимости $F(x, y) = c$, то график соответствующей функции может быть построен как сечение поверхности $z = F(x, y)$ горизонтальной плоскостью $z = c$. В рамках этой геометрической картины может быть проведено и рассмотрение неравенства вида $F(x, y) < c$.

Задание 13. Написать программу для построения сечения некоторой поверхности горизонтальной плоскостью. Изобразить область, координаты точек которой являются решением неравенства $F(x, y) < c$, а её граница является графиком функциональной зависимости $F(x, y) = c$.

Решение. В программе используется функция двух переменных $z = x^4 + y^4$ и функциональная зависимость $x^4 + y^4 = 1$. Результат работы программы показан на рисунке 16.



```
pi = Math.Pi
GraphicsWindow.Width = 600
GraphicsWindow.Height = 600
'Система аксонометрических координат
ed = 80
x0 = 300
y0 = 500
k = 1/3
ug = pi/5
x1 = x0 + ed* Math.Cos(ug)
y1 = y0 - ed* Math.Sin(ug)*k
x2 = x0 + ed* Math.Cos(ug+pi/2)
y2 = y0 - ed* Math.Sin(ug+pi/2)*k
x3 = x0
y3 = y0 - ed/2
'Декартова плоскость
For t1 = -1.5 To 1.5 Step .02
For t2 = -1.5 To 1.5 Step .2
t3 = 0
x = x0 + t1*(x1 - x0) + t2*(x2 - x0) + t3*(x3 - x0)
y = y0 + t1*(y1 - y0) + t2*(y2 - y0) + t3*(y3 - y0)
GraphicsWindow.SetPixel(x, y, "green")
EndFor
EndFor
For t1 = -1.5 To 1.5 Step .2
For t2 = -1.5 To 1.5 Step .02
t3 = 0
x = x0 + t1*(x1 - x0) + t2*(x2 - x0) + t3*(x3 - x0)
y = y0 + t1*(y1 - y0) + t2*(y2 - y0) + t3*(y3 - y0)
GraphicsWindow.SetPixel(x, y, "green")
EndFor
EndFor
'Область
For t1 = -1.5 To 1.5 Step .01
For t2 = -1.5 To 1.5 Step .01
t3 = t1*t1*t1*t1 + t2*t2*t2*t2
If t3 < 1 Then
x = x0 + t1*(x1 - x0) + t2*(x2 - x0)
y = y0 + t1*(y1 - y0) + t2*(y2 - y0)
GraphicsWindow.SetPixel(x, y, "red")
EndIf
EndFor
EndFor
'Поверхность
For t1 = -1.5 To 1.5 Step .001
For t2 = -1.5 To 1.5 Step .3
t3 = t1*t1*t1*t1 + t2*t2*t2*t2
```

```

x = x0 + t1*(x1 - x0) + t2*(x2 - x0) + t3*(x3 - x0)
y = y0 + t1*(y1 - y0) + t2*(y2 - y0) + t3*(y3 - y0)
GraphicsWindow.SetPixel(x, y, "")
EndFor
EndFor
For t1 = -1.5 To 1.5 Step .3
For t2 = -1.5 To 1.5 Step .001
t3 = t1*t1*t1*t1 + t2*t2*t2*t2
x = x0 + t1*(x1 - x0) + t2*(x2 - x0) + t3*(x3 - x0)
y = y0 + t1*(y1 - y0) + t2*(y2 - y0) + t3*(y3 - y0)
GraphicsWindow.SetPixel(x, y, "")
EndFor
EndFor
    
```

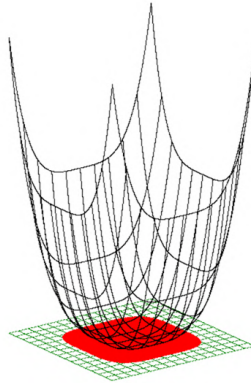


Рис. 16

Естественным продолжением заданий, связанных с конструированием функций, являются задачи, направленные на конструирование поверхностей.

Задание 13. Сконструировать поверхность, моделирующую гору «Сахарная голова» в Рио-де-Жанейро (рисунки 17).



Рис. 17

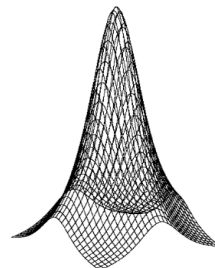


Рис. 18

Решение. Используем в программе модифицированную функцию из задания 7. Результат работы программы показан на рисунке 18.

4. ВЫЧИСЛЕНИЯ И ОБРАЗЫ

До настоящего момента статья была посвящена развитию образа функции без рассмотрения более глубокой проблематики. Речь идёт об образном восприятии методов исследования функций. Общеизвестно насколько дифференцирование и интегрирование связаны с идеями геометрии и механики. Однако более или менее подробное рассмотрение этих вопросов в рамках данной статьи невозможно.

Ограничимся решением нескольких задач, чтобы показать сколь широким являются возможности образного подхода в рамках математического анализа. Начнём с двух простых задач, решения которых может быть получено без вычислений, но предполагают осмысления характера встречающихся в них функциональных зависимостей.

Задание 14. В треугольник вписать прямоугольник наибольшей площади (рисунок 19).

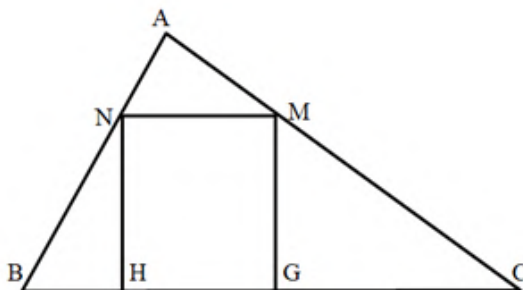


Рис. 19

Решение. Поиск экстремума будет проведён без вычисления производной, а исходя из характера некоторых функции. Прямоугольник получается из треугольника ABC после отсечения от него треугольников AMN , NBH , MGC . При этом из двух последних треугольников можно сложить треугольник, подобный треугольнику AMN .

Площадь треугольника AMN пропорциональна квадрату длины отрезка AN , то есть её график можно рассматривать как параболу на отрезке AB . Площадь подобного треугольника пропорциональна квадрату длины отрезка BN , то есть её график можно рассматривать как отражённую параболу на отрезке AB . Сумма симметричных функций имеет минимум в середине отрезка (рисунок 20). Значения этой функции равны площади треугольника ABC минус площадь прямоугольника. Таким образом, прямоугольник имеет максимальное значение, когда отрезок NM является средней линией треугольника ABC .

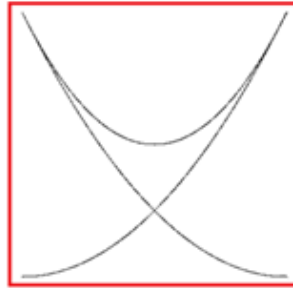


Рис. 20

Задание 15. Задана функция двух переменных $z = x^2 + y^2$. Найти её максимум и минимум в области $(x - a)^2 + (y - b)^2 \leq r^2$.

Решение. Рассмотрим точку $(x; y)$ на декартовой плоскости. Тогда значение функции $z = x^2 + y^2$ в этой точке равно квадрату расстояния этой точки до начала координат. Из этого следует, что максимальное значение функции z в области, которая является кругом, достигается в самой далёкой от начала координат точке круга. Лежит эта точка на луче, проходящем через начало координат и центр круга $(a; b)$ и находится соответствующей окружности. С минимумом дело обстоит аналогично, но только в том случае, когда начало координат не попадает в круг. Если же попадает, то минимум достигается как раз в начале координат.

Рассмотрим одно задание, при решении которого всё же придётся искать экстремум с помощью производной, однако, и здесь все рассуждения и вычисления можно провести устно.

Задание 16. Среди треугольников с постоянным периметром найти тот, который обладает максимальной площадью.

Решение. Проведём решение в несколько этапов. Прежде всего, рассмотрим множество треугольников ABC с постоянным периметром и стороной BC фиксированной длины (рисунок 21). Найдём среди них треугольник наибольшей площади. Поскольку сумма сторон AB и BC постоянна, можно считать точки B и C фокусами эллипса, по которому перемещается точка A . Площадь треугольника ABC максимальна, когда максимальную длину имеет его высота. Из этого следует, что среди треугольников ABC с постоянным периметром и фиксированной стороной BC наибольшую площадь имеет равнобедренный треугольник.

На втором этапе вычислим квадрат площади равнобедренного треугольника с постоянным периметром (рисунок 22). Пусть полупериметр $AB + BH$ такого треугольника равен a , а половина его основания BH равна x . Тогда по теореме Пифагора $AH^2 = AB^2 - BH^2 = (a-x)^2 - x^2 = a^2 - 2ax$.

В итоге квадрат площади равнобедренного треугольника ABC равен $S^2 = x^2 \cdot (a^2 - 2ax) = x^2 \cdot a^2 - 2ax^3$.

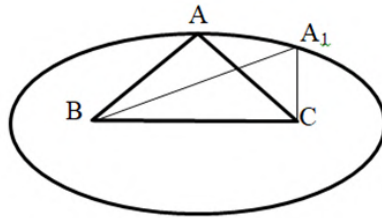


Рис. 21

Наконец, находим производную данной функции, что без труда делается устно, приравниваем её к нулю и получаем, что максимум достигается при $x = \frac{a}{3}$. Таким образом, установлено, что среди треугольников с постоянным периметром максимальной площадью обладает правильный треугольник.

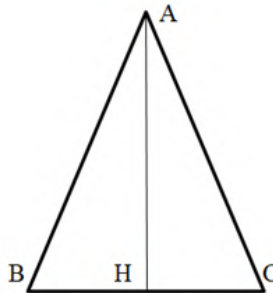


Рис. 22

Задание 17. Провести исследование функции вида $y = ax^2$ геометрическими методами.

Решение. Начнём с того, что отметим следующий простой факт. Если два прямоугольных треугольника ACB и $A_1C_1B_1$ подобны и, кроме того, $AC = \frac{1}{4a}$, а $BC = A_1C_1 = \frac{x}{2}$, то $B_1C_1 = ax^2$ (рисунок 23).

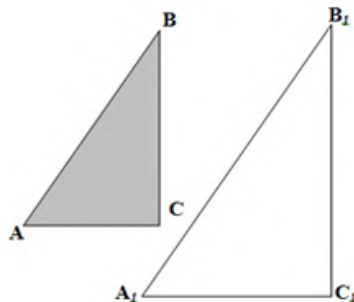


Рис. 23

Далее рассмотрим геометрическую конструкцию, изображённую на рисунке 24, позволяющую строить любую точку параболы без вычислений

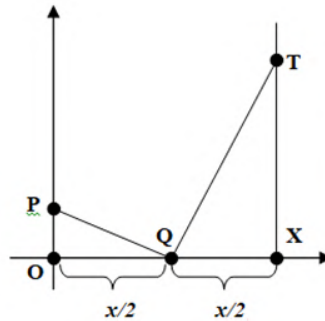


Рис. 24

Поясним, как это осуществляется. Зафиксируем на координатной плоскости точку $P(0; \frac{1}{4a})$. Затем, выбрав произвольное значение x , зададим точки $Q(\frac{x}{2}; 0)$ и $X(x; 0)$ и построим треугольник POQ . Далее через точку X проведем вертикальную прямую, а через точку Q до пересечения с этой вертикалью в точке T прямую QT , перпендикулярную к прямой PQ . Прямоугольные треугольники POQ и QXT подобны, поскольку $\angle PQO = \angle QTX$.

Теперь можно использовать отмеченный выше факт, согласно которому длина отрезка XT равна ax^2 , и, следовательно, точка T лежит на параболе $y = ax^2$.

Теперь можно доказать, что любая точка, лежащая на параболе $y = ax^2$, равноудалена от точки $P(0; \frac{1}{4a})$, называемой **фокусом** параболы, и прямой $y = -\frac{1}{4a}$, называемой **директрисой** параболы.

Упростим построение точки T на параболе. На координатной плоскости выделим фокус P и проведем директрису (рисунок 25). Выберем на оси абсцисс произвольную точку X и проведем через нее вертикальную прямую до пересечения с директрисой в точке D .

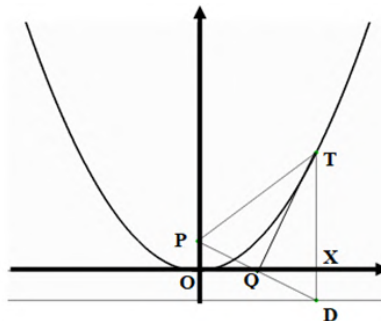


Рис. 25



Соединим точки **P** и **D** отрезком. Он пересечет ось абсцисс в точке **Q**, являющейся серединой отрезка **OX**. Действительно, прямоугольные треугольники **PQO** и **DQX** равны, поскольку **PO = XD**, способу построения фокуса и директрисы) и $\angle PQO = \angle DQX$ (как вертикальные углы). Очевидно, что **OQ = QX** и **PQ = QD**. Далее через точку **Q** проведем перпендикуляр к отрезку **PD** до пересечения с вертикалью **XD** в точке **T**. Эта точка, как доказано выше, лежит на параболе. Треугольники **PQT** и **DQT** являются прямоугольными. Катет **QT** у них общий и **PQ = QD**. Значит, треугольники равны, и, кроме того равны их гипотенузы **PT** и **TD**. Но длина отрезка **PT** равна расстоянию от точки **T**, лежащей на параболе, до фокуса **P**, а **TD** – перпендикуляр, опущенный на директрису, и его длина равна расстоянию от **P** до директрисы. Итак, доказано, что парабола является геометрическим местом точек, равноудаленных от точки и прямой.

Отметим, что в аналитической геометрии параболу определяют именно, как такое геометрическое место точек. На его основании выводят уравнение параболы. Но наше исследование было проведено в обратном порядке – от уравнения $y = ax^2$ к геометрической характеристике параболы.

Задание 18. Доказать, что в предыдущем задании прямая **QT** является касательной к параболе $y = ax^2$.

Решение. Написать уравнение прямой **QT**. Далее следует показать, что система из двух уравнений, описывающих параболу и прямую **QT** имеет единственное решение.

Задание 19. Дать геометрическое истолкование предела $e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.

Решение. В дальнейших рассуждениях используем статью [14]. С показательной функцией связано число **e**. Это число в учебниках математического анализа обычно **определяется как предел последовательности**: $e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$. При этом не ясно, откуда эта последовательность возникла, и какова связь между этим определением числа **e** и определением числа **e** как основания степенной функции, имеющей в нуле производную равную единице.

В курсах математического анализа доказывается, что последовательность $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ является монотонно возрастающей и ограниченной. Из этого следует, что указанный предел, названный в честь Эйлера числом **e**, действительно существует. Доказательство ведётся с использованием биннома Ньютона. При этом выкладки студенту могут показаться довольно сложными, как и вообще любые вычисления, основанные исключительно на загадочной для новичка технике преобразований. Ему неясно, почему делается именно так, и как можно было именно это преобразование придумать.

Далее в курсе анализа устанавливается, что показательная функция, с основанием равным **e**, обладает замечательным свойством. Её производная равна самой этой функции, т. е. $(e^x)' = e^x$. Однако не совсем понятна причина этого обстоятельства: сначала вводится какой-то замысловатый предел, а его введение почему-то даёт такой удачный результат.



Дадим геометрическую интерпретацию соответствующего предела, позволяющую понять, откуда он появился. Начнём с перечисления очевидных фактов.

Графики всех показательных функций $y = a^x$ ($a > 1$) проходят через точку $(0; 1)$. Если $a > b$, то значения функции $y = a^x$ при всех положительных значениях аргумента x больше значений функции $y = b^x$. Итак, показательная функция растёт тем быстрее, чем больше основание. Значит, при $a > b$ функция $y = a^x$ в точке $x = 0$ имеет производную большую, чем функция $y = b^x$ в той же точке.

Если менять основание a показательной функции $y = a^x$ в интервале от нуля до плюс бесконечности, то тангенс угла наклона касательных в точке $x = 0$ будет изменяться также в интервале от нуля до бесконечности. Это даёт нам основание назвать **числом e такое основание показательной функции, для которого тангенс угла наклона касательной при $x = 0$ равен 1**. Это второе определение числа e . Из всего сказанного следует, что такое число существует, поскольку, непрерывно меняясь в интервале от нуля до бесконечности, тангенс обязательно примет значение 1.

По известному определению касательная является предельным положением секущих в момент слияния двух точек пересечения в одну. Обычно это определение используется в отношении фиксированной функции.

Мы же поступим несколько иначе и будем искать одно за другим новые основания a_n показательных функций. При этом меняться будут функции, а секущая для всех графиков будет одна и та же: прямая с уравнением $y = x + 1$. Последовательность точек с координатами $(\frac{1}{n}; 1 + \frac{1}{n})$ при n , стремящемся к бесконечности ($n = 1, 2, 3, \dots$) сходится к точке $(0; 1)$. Основания же показательных функций a_n найдём, исходя из того, что функция $y = a_n^x$ должна проходить через точку $(\frac{1}{n}; 1 + \frac{1}{n})$.

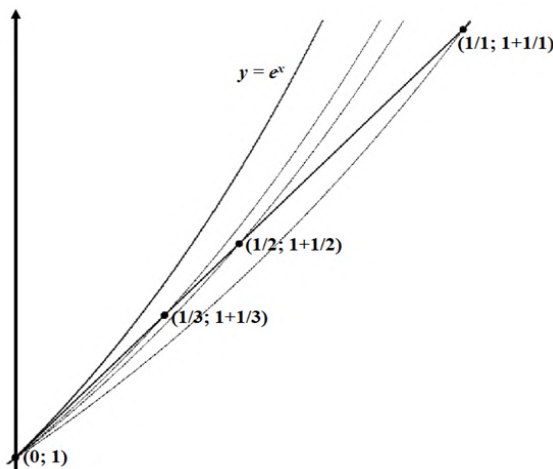


Рис. 26



Итак, совпадающие, секущие наклонены под углом 45° . Их вторая точка пересечения соответствует $x = \frac{1}{n}$, а первой всегда является $x = 0$. Таким образом, при изменении функций фиксированная секущая превращается в касательную итоговой функции.

Покажем, что последовательность a_n является монотонно возрастающей. Все точки графика функции $y = a_n^x$ на отрезке $[0; \frac{1}{n}]$ лежат ниже секущей (рисунок 26). В том числе и в точке $x = \frac{1}{n+1}$. Значит, чтобы функция $y = a_{n+1}^x$ проходила через эту точку необходимо, чтобы выполнялось неравенство $a_{n+1} > a_n$.

Теперь выясним, каким должно быть значение числа a_n . Точка с координатами $(\frac{1}{n}; (a_n)^{\frac{1}{n}})$ должна лежать на графике функции $y = a_n^x$. Далее, она должна обеспечить нужный наклон секущей, то есть $(a_n)^{\frac{1}{n}} = 1 + \frac{1}{n}$. Следовательно, $a_n = (1 + \frac{1}{n})^n$. Итак, $e = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n})^n$ как раз по второму определению числа e .

Теперь связь между двумя определениями числа e становится понятной.

В заключение статьи вспомним слова знаменитого английского физика Уильяма Томсона (лорда Кельвина): «**Математик – это тот, для кого равенство $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$ очевидно, как « $2 \times 2 = 4$ ».**

Эта цитата не безобидна. Она как минимум приводит начинающего математика в состояние недоумения: «Разве такое глубокое понимание математики возможно? Я не смогу достичь такого уровня». Конечно, можно назвать слова Кельвина преувеличением, но всё же хочется понять, в какой степени они истинны. Попробуем это сделать.

Слово «очевидно» в математике считается опасным. Когда математик занимается определённым вопросом и свободно ориентируется во всех взаимосвязях проблемы, он может считать что-то очевидным и написать об этом в статье. Через несколько лет, читая свою же статью, он полностью теряет ощущение очевидности. Тем не менее, некоторые вопросы для преподавателя очевидны, а для студента непонятны. Нужно полагать, что у преподавателя **сформировано определённое образное пространства, в котором он может видеть (очевидеть, так сказать) внутренние связи математических идей и понятий**. Студенту соответствующие представления нужно формировать.

Рассмотрим вопрос о вычислении интеграла $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx$, не вдаваясь в детали, а пытаясь создать общую картину. При этом будут использованы более сложные чем в предыдущей части статьи математические понятия, такие как двойные и повторные интегралы, замена переменных, якобиан и т. д. При проведении рассуждений мы будем ориентироваться на книгу [25].

Сделаем ещё одно предварительное замечание. Ниже будет перечислено несколько положений, которые в совокупности позволяют увидеть, причину, по которой $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$. Следует, однако, иметь в виду, что порядок перечисления может быть изменён. Таким образом, **мы не проводим последовательное логическое рассуждение, а рисуем общую картину смыслового пространства, в котором путь к результату становится обозримым**.

1. Интеграл $\int e^{-x^2} dx$ не берётся.



2. Интеграл $\iint e^{-(x^2+y^2)} dx dy$ можно взять после перехода к полярной системе координат: $x = \rho \cdot \cos \theta$ и $y = \rho \cdot \sin \theta$.
3. Замена переменных в двойном интеграле кроме замены переменных сопровождается умножением на соответствующий якобиан, то есть определитель матрицы из частных производных x и y по ρ и θ .
4. Якобиан, связанный с переходом от декартовой системы координат к полярной равен ρ .
5. Таким образом, если задана область G на декартовой плоскости, то

$$\iint_G e^{-(x^2+y^2)} dx dy = \iint_G \rho e^{-\rho^2} d\rho d\theta$$

6. Рассмотрим круговую область $B_r = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq r^2\}$. В ней выполняется равенство

$$\iint_{B_r} e^{-(x^2+y^2)} dx dy = \int_0^r \int_0^{2\pi} \rho e^{-\rho^2} d\theta d\rho = \pi \cdot (1 - e^{-r^2})$$

7. Рассмотрим квадратную область $C_r = [-r, r] \times [-r, r]$. В ней выполняется равенство

$$\iint_{C_r} e^{-(x^2+y^2)} dx dy = \left(\int_{-r}^r e^{-x^2} dx \right)^2$$

8. Если переходить от двойного интеграла по области к несобственному интегралу по всей декартовой плоскости, не имеет значения, как растёт область интегрирования – оставаясь квадратом или оставаясь кругом. Значит,

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \iint_{C_r} e^{-(x^2+y^2)} dx dy = \lim_{r \rightarrow \infty} \iint_{B_r} e^{-(x^2+y^2)} dx dy$$

9. Рассмотрим эти пределы по отдельности. Первый равен по пункту 7

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \iint_{C_r} e^{-(x^2+y^2)} dx dy = \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx \right)^2$$

10. Второй равен по пункту 6

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \iint_{B_r} e^{-(x^2+y^2)} dx dy = \pi$$

11. Получена формула $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$.

Собрав всё изложенное в единый образ, можно почувствовать очевидность соответствующей формулы.



5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Авторы статьи рассмотрели вопросы использования образов применительно к освоению понятия функции. При этом основное внимание было уделено развитию образа функции без рассмотрения более глубокой проблематики, связанной с дифференцированием, интегрированием, разложением функций в ряды и т. д. И это только те вопросы, которые связаны с математическим анализом. Естественно, что круг математической тематики за пределами анализа, требующей обращения к образам, значительно шире. Речь может идти о различных геометрических теориях – аналитической, проективной и неевклидовой геометрии, о линейной алгебре, теории дифференциальных уравнений, комплексном анализе и т. д. В дальнейшем авторы надеются рассмотреть соответствующий круг вопросов в новых статьях, сохранив главный принцип данной статьи: «Размышления и вычисления не должны противоборствовать. Они должны помогать друг другу».

Литература

1. *Степанов М.Е.* Образ силового поля как эвристическая модель в математике. Моделирование и анализ данных. Труды факультета информационных технологий МГППУ. – Вып. 3., 2007.
2. *Степанов М.Е.* Эрлангенская программа Клейна и геометрия треугольника. Моделирование и анализ данных. Труды факультета информационных технологий МГППУ. – 2015. № 1. С. 100–135.
3. *Степанов М.Е.* Эрлангенская программа Клейна и геометрия треугольника (часть вторая). Моделирование и анализ данных. Труды факультета информационных технологий МГППУ. – 2016. № 1. С. 60–115.
4. *Степанов М.Е.* Эрлангенская программа Клейна и геометрия треугольника Моделирование и анализ данных. Математическое образование. 2017. № 3(83). С. 28–42.
5. *Степанов М.Е.* Компьютерные технологии как средство приобщения учащегося к математической реальности. Моделирование и анализ данных. Научный журнал. – Вып. 1, 2018.
6. *Куланин Е.Д., Нуркаева И.М.* О двух геометрических задачах на экстремум. Математика в школе. 2019. № 4. С. 35–40.
7. *Куланин Е.Д., Нуркаева И.М.* Еще раз о задаче Мавло. Математика в школе. 2020. № 2. С. 76–79.
8. *Куланин Е.Д., Степанов М.Е., Нуркаева И.М.* Пропедевтика решения экстремальных задач в школьном курсе математики. Моделирование и анализ данных. 2019. № 4. С. 127–144.
9. *Куланин Е.Д., Нгуен Ву Куанг, Степанов М.Е.* Осязаемая предметность с компьютерной поддержкой. Моделирование и анализ данных. Научный журнал. 2019. № 4. С. 145–156.
10. *Куланин Е.Д., Степанов М.Е., Нуркаева И.М.* Роль образного мышления в научном мышлении. Моделирование и анализ данных. 2020. Т. 10. № 2 С. 110–128.
11. *Куланин Е.Д., Степанов М.Е., Нуркаева И.М.* О различных подходах к решению экстремальных задач. Моделирование и анализ данных. 2020. Т. 11. № 1. С.40–60.
12. *Лунгу К.Н., Норин В.П., Письменный Д.Т., Шевченко Ю.А., Куланин Е.Д.* Сборник задач по высшей математике с контрольными работами. Москва, 2013. Том 2 (8-е издание).
13. *Степанов М.Е.* Из опыта работы в области тифлопедагогике. Моделирование и анализ данных. 2017. № 1. С. 42–53.
14. *Степанов М.Е.* Некоторые вопросы методики преподавания высшей математики. Моделирование и анализ данных. 2017. № 1. С. 54–94.



15. Куланин Е.Д., Степанов М.Е. Из опыта работы в режиме дистанционного обучения Моделирование и анализ данных. 2022. Т. 12. № 3. С. 58–70.
16. Куланин Е.Д., Степанов М.Е. Всестороннее рассмотрение математических понятий как методический прием. Моделирование и анализ данных. 2022. Т. 12. № 4. С. 67–84.
17. Куланин Е.Д., Степанов М.Е. О визуализации решений некоторых экстремальных задач. Моделирование и анализ данных. 2022. Т. 12. № 4. С. 94–104.
18. Дьедонне Ж. Линейная алгебра и элементарная геометрия. М., Наука, 1972.
19. Гегель Г.В.Ф. Наука логики. Том 1. М., Мысль, 1970.
20. Лосев А.Ф. Диалектика мифа. М., Аст, 2021.
21. Арнольд В.И. О преподавании математики. Успехи математических наук. т. 53, вып.1 (319), 1998.
22. Витушкин А.Г. Оценка сложности задачи табулирования. М., Гос. изд. физ.-мат. лит., 1959.
23. Степанов М.Е. Об одном классе непрерывных функций. Моделирование и анализ данных. Труды факультета информационных технологий МГППУ. – Вып. 4, 2009.
24. Клайн М. Математика. Утрата определённости. М., Мир, 1984, с. 372.
25. Спивак М. Математический анализ на многообразиях. М., Мир, 1968.



The Use of Images in Teaching Higher Mathematics

Yevgeny D. Kulanin*

Moscow State University of Psychology & Education (MSUPE), Moscow, Russia

ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-6093-7012>

e-mail: lucas03@mail.ru

Mikhail E. Stepanov**

Moscow State University of Psychology & Education (MSUPE), Moscow, Russia

ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-4803-8211>

e-mail: mestepanov@yandex.ru

The article continues the cycle of methodological developments of authors [1] – [17]. It discusses some problems related to ways to improve the culture of mathematical thinking of mathematics students. The authors rely on the experience of working at the Faculty of Information Technology of MSUPE.

Keywords: higher education, methods of teaching mathematics, analytical geometry, affine geometry, projective geometry, geometric transformations, linear algebra, general algebra, number theory, mathematical analysis, complex analysis, differential equations, equations of mathematical physics, mathematical logic, discrete mathematics.

For citation:

Kulanin Y.D., Stepanov M.E. The Use of Images in Teaching Higher Mathematics. *Modelirovanie i analiz dannykh = Modelling and Data Analysis*, 2024. Vol. 14, no. 2, pp. 192–225. DOI: <https://doi.org/10.17759/mda.2024140212> (In Russ., abstr. in Engl.).

References

1. Stepanov M.E. The image of a force field as a heuristic model in mathematics. Modeling and data analysis. Proceedings of the Faculty of Information Technologies of MGPPU. – Issue 3., 2007.
2. Stepanov M.E. The Erlangen Klein program and the geometry of a triangle. Modeling and data analysis. Proceedings of the Faculty of Information Technologies of MGPPU. – 2015. No. 1. pp. 100–135.

****Yevgeny D. Kulanin***, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Moscow State University of Psychology & Education (MSUPE), Moscow, Russia, ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-6093-7012>, e-mail: lucas03@mail.ru

*****Mikhail E. Stepanov***, Candidate of Pedagogical Sciences, Associate Professor, Moscow State University of Psychology & Education (MSUPE), Moscow, Russia, ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-4803-8211>, e-mail: mestepanov@yandex.ru



3. Stepanov M.E. Klein's Erlangen program and the geometry of triangles (Part two). Modeling and data analysis. Proceedings of the Faculty of Information Technologies of MGPPU. – 2016. No. 1. pp. 60–115.
4. Stepanov M.E. Erlangen Klein program and triangle geometry Modeling and Data analysis. Mathematical education. 2017. No.3(83). pp. 28–42.
5. Stepanov M.E. Computer technologies as a means of introducing the student to mathematical reality. Modeling and data analysis. Scientific journal. – Issue 1, 2018.
6. Kulanin E.D., Nurkaeva I.M. On two geometric problems on the extremum. Math at school. 2019. No. 4. p. 3
7. Kulanin E.D., Nurkaeva I.M. Once again about the Mavlo problem. Mathematics in school. 2020. No. 2. pp. 76–79.
8. Kulanin E.D., Stepanov M.E., Nurkaeva I.M. Propaedeutics of solving extreme problems in the school course of mathematics. Modeling and analysis of data. 2019. No. 4. pp. 127–144.
9. Kulanin E.D., Nguyen Wu Quang, Stepanov M.E. Tangible objectivity with computer support. Modeling and data analysis. Scientific Journal nal. 2019. No. 4. pp. 145–156.
10. Kulanin E.D., Stepanov M.E., Nurkaeva I.M. The role of imaginative thinking in scientific thinking. Modeling and data analysis. 2020. Vol.10. No.2 pp. 110–128. 11.Kulanin E.D., Stepanov M.E., Nurkaeva I.M. On various approaches to solving extreme problems. Modeling and data analysis. 2020. Vol.11. No.1. pp. 40–60.
12. Lungu K.N., Norin V.P., Pismennyi D.T., Shevchenko Yu.A., Kulanin E.D. Collection of problems in higher mathematics with control papers. Moscow, 2013. Volume 2 (8th edition).
13. Stepanov M.E. From experience in the field of typhlopedagogics. Modeling and data analysis. 2017. No. 1. pp. 42–53.
14. Stepanov M.E. Some questions of the methodology of teaching higher mathematics. Modeling and data analysis. 2017. No. 1. pp. 54–94.
15. Kulanin E.D., Stepanov M.E. From the experience of working in the remote mode Learning Modeling and data analysis. 2022. Vol. 12. No. 3. pp. 58–70.
16. Kulanin E.D., Stepanov M.E. Comprehensive consideration of mathematical concepts as a methodological technique. Modeling and data analysis. 2022. Vol. 12. No. 4. pp. 67–84.
17. Kulanin E.D., Stepanov M.E. On visualization of solutions to some extreme problems. Modeling and data analysis. 2022. Vol.12. No. 4. pp. 94–104.
18. Dieudonne J. Linear algebra and elementary geometry. M., Nauka, 1972.
19. Hegel G.V.F. Science of Logic. Volume 1. M., Mysl, 1970.
20. Losev A.F. Dialectics of myth. M., Ast, 2021.
21. Arnold V.I. On teaching mathematics. Successes of mathematical sciences. vol. 53, issue.1 (319), 1998.
22. Vitushkin A.G. Estimation of the complexity of the tabulation problem. M., State Publishing House of Physics and Mathematics lit., 1959.
23. Stepanov M.E. On a class of continuous functions. Modeling and data analysis. Proceedings of the Faculty of Information Technologies of MGPPU. – Issue 4, 2009.
24. Kline M. Mathematics. The Loss of Certainty. M., Mir, 1984, p. 372.
25. Spivak M. Mathematical analysis on manifolds. M., Mir, 1968.

Получена 22.01.2024

Принята в печать 06.03.2024

Received 22.01.2024

Accepted 06.03.2024

Моделирование и анализ данных 2024. Том 14. № 2.

Научный журнал

Издаётся с 2011 года

Учредитель

Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Московский государственный психолого-педагогический университет»

Адрес редколлегии:

г. Москва, ул. Сретенка, 29, факультет информационных технологий

Тел.: +7 (499) 167-66-74

E-mail: mad.mgppu@gmail.com

Журнал зарегистрирован в Государственном комитете РФ по печати.

Свидетельство о регистрации средств массовой информации

ПИ № ФС77-66444 от 14 июля 2016 года

ISSN: 2219-3758

ISSN: 2311-9454 (online)

Подписано в печать: 17.06.2024.

Формат: 70*100/16. Гарнитура Times.

Усл. печ. п. 14,1. Усл.-изд. л. 10,9.

Печать по требованию. Электронное издание.