

**4**

**МОДЕЛИРОВАНИЕ  
И АНАЛИЗ ДАННЫХ**

НАУЧНЫЙ ЖУРНАЛ

**MODELLING  
AND DATA ANALYSIS**

SCIENTIFIC JOURNAL

**2024**

ISSN: 2219-3758

ISSN: 2311-9454 (ONLINE)

# МОДЕЛИРОВАНИЕ И АНАЛИЗ ДАННЫХ

НАУЧНЫЙ ЖУРНАЛ

**2024 • Том. 14 • № 4**

# MODELLING AND DATA ANALYSIS

SCIENTIFIC JOURNAL

**2024 • Vol. 14 • № 4**



Московский государственный  
психолого-педагогический университет  
Moscow State University  
of Psychology & Education

## Моделирование и анализ данных

### Главный редактор:

Л.С. Куравский ФГБОУ ВО МГППУ, Россия

### Заместители главного редактора:

С.Д. Кулик МИФИ, Россия  
А.В. Пантелеев МАИ, Россия

### Редакционный совет

#### Председатель редакционного совета:

Г.Г. Амосов МИАН, Россия

#### Члены редакционного совета:

В.А. Барабанщиков ФГБОУ ВО МГППУ, Россия  
Питер Бентлер Калифорнийский университет  
Лос-Анджелеса, США

А.В. Горбатов МИСиС, Россия  
Л.С. Куравский ФГБОУ ВО МГППУ, Россия  
Леонид Либкин Эдинбургский университет,  
Великобритания

А.А. Марголис ФГБОУ ВО МГППУ, Россия  
В.В. Рубцов ФГБОУ ВО МГППУ, Россия  
Д.В. Ушаков ИП РАН, Россия  
Девид Фрэнсис Университет Хьюстона, США

#### Редакционная коллегия:

К.К. Абгарян ФИЦ ИУ РАН, Россия  
Г.Г. Амосов МИАН, Россия  
М.В. Воронов ФГБОУ ВО МГППУ, Россия  
Е.Л. Григоренко МГУ им. М.В. Ломоносова,  
Россия; Йельский университет,  
США

В.К. Захаров МГУ им. М.В. Ломоносова,  
Россия

А.И. Кибзун МАИ, Россия  
Леонид Либкин Эдинбургский университет,  
Великобритания

М.Д. Малых РУДН, Россия  
В.Р. Милов НГТУ им. Р.Е. Алексеева,  
Россия

А.В. Наумов МАИ, Россия  
Д.Л. Ревизников МАИ, Россия  
С.И. Салпагаров РУДН, Россия  
Холлинг Хайнц Университет Мюнстера,  
Германия

Девид Фрэнсис Университет Хьюстона,  
США

К.В. Хорошенков Брэдфордский университет,  
Великобритания.

Г.А. Юрьев ФГБОУ ВО МГППУ, Россия

## Моделирование и анализ данных

Издательство ФГБОУ ВО МГППУ

Издается с 2011 года. Периодичность: 4 раза в год.

Свидетельство регистрации СМИ: ПИ № ФС77-66444

Дата регистрации: 14.07.2016

Формат: 70×100/16

Все права защищены. Название журнала, логотип, рубрики, все тексты и иллюстрации являются собственностью ФГБОУ ВО МГППУ и защищены авторским правом. Перепечатка материалов и использование иллюстраций допускается только с письменного разрешения редакции.

© ФГБОУ ВО «Московский государственный психолого-педагогический университет», 2024, № 4

## Modelling and Data Analysis

### Editor-in-Chief:

L.S. Kuravsky MSUPE, Russia

### Deputy Editors-in-Chief:

S.D. Kulik MPhI, Russia  
A.V. Panteleev MAI, Russia

### The Editorial Council

#### Chairman of the Editorial Council:

G.G. Amosov MI RAS, Russia

#### The Members of the Editorial Council:

V.A. Barabanschikov MSUPE, Russia  
Peter Bentler University of California,  
USA

A.V. Gorbатов MISIS, Russia  
L.S. Kuravsky MSUPE, Russia  
Leonid Libkin University of Edinburgh,  
UK

A.A. Margolis MSUPE, Russia  
V.V. Rubtsov MSUPE, Russia  
D.V. Ushakov IP RAS, Russia  
David Francis University Of Houston, USA

#### The Editorial Board:

K.K. Abgaryan IU RAS, Russia  
G.G. Amosov MI RAS, Russia  
M.V. Voronov MSUPE, Russia  
E.L. Grigorenko Lomonosov Moscow State  
University, Russia;  
Yale University, USA

V.K. Zakharov Lomonosov Moscow State  
University, Russia

A.I. Kibzun MAI, Russia  
Leonid Libkin University of Edinburgh,  
UK

M.D. Malykh RUDN, Russia  
V.R. Milov NNSTU n.a. R.E. Alekseev,  
Russia

A.V. Naumov MAI, Russia  
D.L. Reviznikov MAI, Russia  
S.I. Salpargarov RUDN, Russia  
Holling Heinz University Of Münster,  
Germany

David Francis University Of Houston,  
USA

K.V. Horoshenkov University of Bradford,  
UK

G.A. Yuryev MSUPE, Russia

## Modelling and Data Analysis

Publisher MSUPE

Frequency: since 2011

Published: 4 times a year

The mass medium registration certificate:

PN № ФС77-66444.

From: 14.07.2016

Format: 70×100/16

All rights reserved. Journal title, logo, rubrics, all texts and images are the property of MSUPE and copyrighted. Using reprints and illustrations is allowed only with the written permission of the publisher.

© MSUPE, 2024, no. 4



## ◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇ СОДЕРЖАНИЕ ◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇

### АНАЛИЗ ДАННЫХ

*Артеменков С.Л.*

О расширении элементарной теории вероятности  
для моделирования психологических явлений ..... 5

*Битюков Ю.И., Битюков П.Ю.*

Об использовании дискретного  
преобразования Фурье в схемах подразделений ..... 30

*Вейценфельд Д.А., Киселёв Г.А.*

Метод синтеза поведения когнитивного  
агента на основе обработки мультимодальных сигналов ..... 45

*Воронов М.В., Пичугина Е.И.*

Конструктивный метод формализации текстов-инструкций ..... 63

*Паранук А.А., Терещенко И.А., Шишков В.С.*

Математическая модель процесса ингибирования газосборных шлейфов ..... 78

### МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ

*Базилевский М.П.*

Оптимизационная задача построения  
линейных регрессий с минимальной величиной  
средней абсолютной ошибки на тестовых выборках ..... 91

*Ким Н.В., Походенко М.В.*

Формирование области начальных условий  
воздушных стартов беспилотного летательного аппарата ..... 104

*Симкина А.В.*

Уточнение коэффициента сжатия для внешней  
оценки предельного множества 0-управляемости  
линейной дискретной системы с ограниченным управлением ..... 115

### МЕТОДИКА ПРЕПОДАВАНИЯ

*Лукин В.Н., Чернышов Л.Н.*

Подготовка разработчиков свободного программного обеспечения ..... 129

*Куланин Е.Д., Степанов М.Е.*

Вычислительный эксперимент  
в преподавании высшей математики. Геометрия ..... 138



◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇ **CONTENTS** ◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇

**DATA ANALYSIS**

---

*Artemenkov S.L.*  
On the Extension of the Elementary  
Theory of Probability for Psychological Phenomena ..... 28

*Bityukov Yu.I., Bityukov P.Yu.*  
On the Use of the Discrete Fourier Transform in Subdivision Schemes ..... 45

*Weizenfeld D., Kiselev G.*  
Method for Creating Behavior of Cognitive  
Agents Based on Multimodal Signal Processing ..... 62

*Voronov M.V., Pichugina E.I.*  
Constructive Method of Formalization of Instruction Texts ..... 78

*Paranuk A.A., Tereshchenko I.A., Shishkov V.S.*  
Analysis of Moisture Content Data of Natural Gas in Pipeline Systems ..... 91

**OPTIMIZATION METHODS**

---

*Bazilevskiy M.P.*  
Optimization Problem of Constructing Linear Regressions  
with a Minimum Value of the Mean Absolute Error on Test Sets ..... 103

*Kim N.V., Pokhodenko M.V.*  
Formation of the Area of Initial Conditions  
for Aerial Launches of an Unmanned Aerial Vehicle ..... 115

*Simkina A.V.*  
Refinement of the Compression Ratio  
for an External Estimation of the Limit 0-Controllable  
Set of a Linear Discrete-Time System with Bounded Control ..... 129

**METHOD OF TEACHING**

---

*Lukin V.N., Chernyshov L.N.*  
Training of Free Software Developers ..... 138

*Kulanin Y.D., Stepanov M.E.*  
Computational Experiment in Teaching Higher Mathematics. Geometry ..... 163



## О расширении элементарной теории вероятности для моделирования психологических явлений

*Артеменков С.Л.\**

Московский государственный психолого-педагогический университет  
(ФГБОУ ВО МГППУ), г. Москва, Российская Федерация  
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-1619-2209>  
e-mail: [slart@inbox.ru](mailto:slart@inbox.ru)

На основе рассмотрения достижений квантовой механики и психологии восприятия рассмотрены некоторые их возможностей расширения классической теории вероятностей на область представления психологических событий, для которых объединение исходов может иметь вероятность большую, чем вероятность одиночных событий из их общего множества. Отмечено, что модель, опирающаяся на общее пространство элементарных непересекающихся элементов недостаточна для описания психологии поведения, связанного с порождающими процессами и сопредставленными явлениями. Для расширения элементарной теории вероятностей могут быть использованы результаты квантовой теории, относящиеся к представлениям о тестовых пространствах, и возможности объединения отдельных событий в тесте. Предлагаемые модели могут включать как системы отдельных тестов с совмещением событий в дополнительных тестах, так и возможность объединения самих отдельных тестовых событий комбинаторными и геометрическими (проекционными) способами. Простые примеры расширения классических вероятностных моделей показывают, что «ошибку объединения» в психологии эвристического поведения следует считать не столько ошибкой испытуемых, сколько научной иллюзией исследователей, когда поведение более сложной системы пытаются уложить в прокрустово ложе слишком простой модели.

**Ключевые слова:** вероятность, квантовые представления, тестовое пространство, сопредставленность, ошибка объединения, научная иллюзия.

### Для цитаты:

*Артеменков С.Л.* О расширении элементарной теории вероятности для моделирования психологических явлений // Моделирование и анализ данных. 2024. Том 14. № 4. С. 5–29. DOI: <https://doi.org/10.17759/mda.2024140401>



\***Артеменков Сергей Львович**, кандидат технических наук, профессор, Заведующий кафедрой прикладной информатики и мультимедийных технологий, руководитель центра информационных технологий для психологических исследований факультета информационных технологий, ФГБОУ ВО «Московский государственный психолого-педагогический университет» (ФГБОУ ВО МГППУ), г. Москва, Российская Федерация, ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-1619-2209>, e-mail: slart@inbox.ru

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Известно, что у теории вероятностей не было античных или средневековых предшественников, она целиком – создание Нового времени [9]. Несмотря на относительно простой формальный характер и практическую полезность, появление элементарной теории вероятностей в середине 17 века встретило большое сопротивление и недостаток понимания тогда, когда она была впервые внедрена. Трудности понимания были скорее философскими, чем математическими. В частности, даже великие гении того времени (Джероламо Кардано, Пьер Ферма, Блез Паскаль, Христиан Гюйгенс, Якоб Бернулли и др.) испытывали трудности, «ломая» головы в отношении двух понятий: что можно (и на самом деле нужно) считать предположения, т.е. возможности, которые никогда реально не существовали; что порядок может быть получен из случайности.

В настоящее время в классической теории понятие вероятности в основном включает представление о количественной мере «осуществимости некоторого события при наличии неопределённости, то есть в ситуации, когда это событие характеризуется как возможное (которое может как произойти, так и не произойти)» [18, с. 1]. При этом множество событий в современных учебниках по классической теории вероятностей изначально актуализируется и представляет собой дискретное или континуальные пространства элементарных исходов (событий) [10, 20, 31].

Вместе с тем в философской литературе существует ряд концепций вероятности. В частности, упоминается вероятность как степень следования, вероятность как степень рациональной веры, вероятность как предрасположенность (диспозиция) и др. [11, 12, 29, 41, 43, 53]. В целом о вероятности можно говорить как о промежуточной категории, которая осуществляет «постепенный или плавный переход от необходимости к случайности и от случайности к необходимости. Меньшая вероятность стоит ближе к случайности. Большая вероятность стоит ближе к необходимости. Одним своим «концом» вероятность упирается в случайность, переходит в нее, а другим «концом» переходит в необходимость» [6, с. 593]. Понятие вероятности в качестве недостаточной уверенности в собственном поведении представляет интерес и для более глубокого понимания информации и системной сложности. Например, согласно У. Матурана понятие «информации относится к степени неуверенности наблюдателя в своем поведении в области определенных им самим альтернатив, ... генетическая и нервная системы порождают информацию посредством самоспецификации, которая воспринимается наблюдателем как самодекодирование генетической и нервной систем в процессах роста и поведения» [22, с. 137].



В эпистемологическом смысле можно также видеть, что «само понятие вероятности выполняет роль «мостовой» функции между объектами математики и объектами конкретных приложений» [28, с. 303]. Эти же авторы далее, на наш взгляд, вполне правомерно утверждают, что «выделение эмпирического понятия в качестве самостоятельного обнаруживает его сравнительную узость и ограниченность. Вне контекста теории о нем можно сказать разве только то, что оно может выражаться относительной частотой появляемости события. Т.е. фактически математическая теория вероятностей накладывает свою структуру на, так сказать, безличный случай, диктуя соответствующие схемы и законы безотносительно конкретной природы случайных явлений ...» [28, с. 308–309].

Вместе с тем классическая теория вероятностей показала свою результативность во многих важных областях науки и, фактически, произошел перенос «этой теории на весьма широкий класс массовых явлений, характеризующихся с помощью относительной частоты, ... и притом без достаточно детального обоснования адекватности этого переноса» [28, с. 309]. В особой мере недостатки этого «безоглядного» переноса проявляются в области рассмотрения психологических процессов и явлений. На примере рассмотрения процессов восприятия и принятия человеком решений ранее было показано, что использование стандартных схем расчета вероятностей для соответствующих психологических событий не является валидным и, по нашему мнению, приводит к научным иллюзиям, т.е. речь может идти не об иллюзиях испытуемых, а об иллюзиях ученых исследователей [3, 33, 35].

Научные эксперименты в психологии показали, что у людей есть «ложная» вера в то, что два случайных события имеют большую вероятность взаимного осуществления, чем каждое из событий в отдельности. Естественно, это противоречит одному из правил элементарной теории вероятностей. Явление, связанное с такой «ложной» верой, обычно рассматривается, как когнитивная иллюзия, и было продемонстрировано в большом наборе разных контекстов, включая: оценку частоты встречаемости слов, личностные суждения, медицинские прогнозы, принятие решений в условиях рисков, подозрения в совершении преступлений и политические прогнозы [13].

Вместе с тем вполне можно утверждать и обратное. Своеобразной научной иллюзией является подход, связанный с принятием правил специальной и явно упрощенной модели объединения вероятности случайных событий в качестве нормы для оценки психологических процессов. Это не соответствует действительности, в которой имеется большая вариативность поведения и сосуществование различных тенденций оценки вероятностей появления событий. Т.е. имеет место использование нормы объединения вероятностей независимых случайных событий вне реальных границ ее применимости и принятие этой нормы в качестве универсального стандарта, относящегося к реальности любых случайных событий.

Известно, что в психологии мы встречаемся с такого рода событиями, которые можно считать совместными и объединенными в том числе в силу особого порождающего характера психологических процессов и явлений. Становясь психологически действительными, внешне случайные вещи во многих случаях являются более



вероятными в силу имеющихся психологических механизмов восприятия и осмысления. Психология восприятия (в частности, гештальтпсихология) говорит нам о такой целостности психических образов, которая больше, чем сумма своих частей, а память человека вполне естественно может хранить целостные картины взаимосвязанных представлений, что поддерживается на уровне нейрофизиологии сетевым строением мозговых систем [5, 8].

Однако в равно или разном вероятном континууме элементарных событий классической теории вероятностей все случайные события являются несовместными: вероятность их объединения оказывается всегда меньше, чем вероятность появления любого из этих событий по отдельности. Попытка создания субъективной теории вероятности на этом основании также не решает имеющиеся противоречия с психологической действительностью [1].

В особом виде расширение теории вероятностей стало необходимым для квантовой механики, которая в операциональных терминах представляется именно как некоторое исчисление вероятностей. Квантовые высказывания являются ограниченной формой классических высказываний. Вероятности присваиваются только тестируемым высказываниям, но не всем произвольным высказываниям. Квантово-логические свойства являются просто тестируемыми свойствами (с точки зрения прежней концепции измерений). При этом квантовую механику можно понимать как неклассическую теорию вероятностей [54]. Более точное определение представляет квантовую механику не как новую теорию вероятностей, а как конкретную вероятностную теорию, выбранную из класса вероятностных моделей, удовлетворяющих гораздо более общей схеме, которая заслуживает того, чтобы считаться «неклассической» теорией вероятностей [61]. Полученные в этом направлении результаты в значительной мере разбросаны по различным источникам и остаются менее известными, чем следовало бы.

В связи с этим целью настоящей статьи является описание некоторых возможностей расширения теории вероятностей для осуществления применимости ее к более широкому классу явлений и, в частности, к совместным психологическим явлениям. Для этого предлагается ввести изменения в аксиоматику классической теории и расширить множество так называемых элементарных событий на случаи, как несовместности проведения испытаний, так и совместного появления событий первичного дискретного множества или континуума.

## **2. ДВА ПОНЯТИЯ ВЕРОЯТНОСТИ В НАУКЕ 20 ВЕКА**

В естественных науках и математике в 20 веке были выработаны два основных научных понятия, которые позволяют работать с событиями в непрерывных многомерных и бесконечномерных пространствах. В 1919 г. австрийский математик и философ Р. фон Мизес выдвинул понятие вероятности как относительной частоты (частотное или, как его еще называют, эмпирическое понятие вероятности). При помощи этого понятия он изложил основы теории вероятностей, понимаемой

как раздел прикладной математики. Строгое изложение теории вероятности дано им в 1931 г. Вероятность события – это предел последовательности частот его появления, предел, возникающий, когда число испытаний (коллектив) стремится к бесконечности [23].

Коллектив, по Мизесу есть некоторая безграничная последовательность экспериментов (испытаний), в которой каждый ее элемент (эксперимент) либо наделен, либо не наделен каким-то определенным признаком, например, таким признаком может быть выпадение фиксированной грани игрального кубика. Причем, каждый признак должен иметь в коллективе определенную долю, которая и есть его вероятность.

Важные свойства коллектива – существование пределов относительных частот определенных признаков и иррегулярность (*Regellosigkeit*) коллектива. Последовательность результатов испытаний должна быть сходящейся, т.е. постепенно стабилизироваться вокруг того значения, которое будет пределом этой последовательности при гипотетическом продолжении числа испытаний до бесконечности. Иррегулярность вводится для сохранения собственно вероятностного смысла данной концепции. Испытания должны проводиться случайным образом без подгонки к какой-либо (закономерной) тенденции, касающейся результата этих испытаний.

Согласно критикам концепции, из которой исходил фон Мизес, требование иррегулярности ограничивает вероятность чисто случайными явлениями (в частности, отсутствие стратегии игры) и наталкивается на непреодолимые математические трудности, поскольку требование иррегулярности оказывается плохо совместимым с требованием существования предела [30]. Некоторые замечания по этой концепции можно также увидеть в курсе теории вероятностей Б.В. Гнеденко, который следует идеям А.Н. Колмогорова [9].

В 1929 г. советский математик А.Н. Колмогоров опубликовал статью, в которой предложил использовать аксиоматическое понятие вероятности на базе теории множеств и теории меры. В 1933 г. им была написана небольшая книга, в которой были изложены доказанные на базе этого понятия основные теоремы теории вероятностей (книга была издана на немецком языке, в 1936 г. появилась ее русская версия). Согласно концепции Колмогорова, задается множество элементарных событий  $\Omega$ , множество подмножеств этого множества называется множеством случайных событий. Пустое множество  $\emptyset$  символизирует невозможное событие. Мера множества подчиняется трем естественным аксиомам:  $P(\Omega) = 1$ ,  $P(\emptyset) = 0$ ,  $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ , если  $A$  и  $B$  не пересекаются. В современной математике теория вероятностей погружается в контекст представлений об абстрактных многомерных и бесконечномерных функциональных пространствах. Однако сохраняются основные представления теории Колмогорова [14].

В основе всякой теоретико-вероятностной схемы лежит так называемое пространство элементарных событий  $(\Omega, U, P)$  – измеримое пространство элементов  $\omega$ , называемых элементарными событиями или элементарными исходами с заданной на  $\sigma$ -алгебре  $U$  вероятностной мерой  $P = P(A): P(\Omega) = 1$ . Множества пространства  $\Omega$  называются событиями; мера  $P(A)$  множества  $A \in U$  называется вероятностью события  $A$  [26].



Хотя формальная аксиоматическая теория вероятностей явилась продуктивной с математической точки зрения, однако она не имеет непосредственного физического осмысления. Конкретный смысл понятия вероятности остается произвольным. Во всех приложениях понятие вероятности события отождествляется с относительной частотой его появления при тех или иных условиях. При этом в приложениях, в частности, в статистической физике, можно идти двумя путями. При каждом применении определить смысл ряда понятий: вероятности, условной вероятности и статистической независимости. Такой путь мыслим для ограниченного круга вопросов. Гораздо более общее и плодотворное решение вопроса получается на пути, систематически проведенном Р. Мизесом, который состоит в том, что уже в рамках математической теории понятие вероятности события связывается с относительной частотой появления данного события в целой их последовательности. Иначе в формальной теории вероятностей, как было отмечено выше, конкретный смысл понятия вероятности остается произвольным [19]. Вместе с этим математические теоретические определения (например, метрики пространства посредством трех аксиом, приведенных выше) предстают как более объективные, а операциональные частотные определения несут по выражению А.А. Печенкина «печать антропоморфизма»: они «включают в содержание определяемого термина не только предметы природы, но и действия человека, оперирующего этими предметами» [25, с. 215].

### 3. ВЕРОЯТНОСТЬ В КВАНТОВОЙ МЕХАНИКЕ

В квантовой механике первоначально использовалась частотная интерпретация вероятности, интерпретация в духе идей фон Мизеса [17]. Однако развитие математического аппарата этой теории привело к интерпретации вероятности в духе идей А.Н. Колмогорова. Здесь оказалось возможным обобщить дискретную классическую теорию вероятностей путем допущения множественности наборов исходов, каждый из которых представляет отдельный «эксперимент». В Квантовой механике пространство состояний  $S$  является сферой – множество единичных векторов гильбертова пространства  $H$ . Не всякое подмножество считается свойством – только получаемые путем пересечения прямых, плоскостей и т.д., проходящих через центр сферы. В результате логика физических свойств является изоморфной решетке множества  $L(H)$  подпространств  $H$ , прямых, плоскостей и т.д., проходящих через центр координат.

При построении квантовой физики, в частности, выяснилось, что классическая логика не совсем верна. На это указывали рассмотрения квантовых опытов [59]. По сравнению с обычной логикой квантовая – расширяется понятием «одновременной разрешимости», что является характеристикой квантовой механики, т.е. квантовая механика – это классическая логика плюс новая идея (одновременная разрешимость состояний). Физически важные утверждения в квантовой механике образуют некоторую проекционную геометрию, в то время как в классической динамике состояния, имеющие отношение к заданной системе, образуют Булеву алгебру, причем ее можно рассматривать как раздел математической логики, изучающий высказывания и операции над ними.



В частности, было показано, что в квантовой механике плохо обстоит дело дистрибутивным законом [37, 56]. Дистрибутивный закон классической логики, который нарушается в квантовой механике, имеет вид:  $p \& (q \text{ or } r) = (p \& q) \text{ or } (p \& r)$ . Определения логики высказываний: сочетание:  $p \& q$  ( $\& = \text{и}$ ); объединение:  $p \text{ or } q$  ( $\text{or} = \text{или}$ ). Классически этот закон очевидно верен: обе стороны равенства «правда», если  $p$  «правда» и хотя бы один из  $q, r$  «правда».

Х.У. Патнэм (1968) поставил вопрос: может ли «необходимая правда» логики быть неистинной по причине эмпирических факторов? Он утверждал, что ответ на этот вопрос является утвердительным и логика в определенном смысле является естественной наукой. Логика столь же эмпирична, как и геометрия. Вполне можно говорить о «физической логике» также как о «физической геометрии» [56]. Якобы таким образом, квантовая механика представляет собой наиболее глубокую революцию в истории науки, поскольку она изменяет элементарные правила логики. В результате именно такая трактовка квантовой механики представлена, например, в одном из современных курсов математики для студентов-физиков [7].

Чтобы пояснить ситуацию с нарушением дистрибутивного закона, рассмотрим пример. Пусть  $H$  является  $n$ -размерным евклидовым пространством (например,  $n = 3$ ). Пусть  $L(H)$  является множеством подпространств пространства  $H$ : линии, плоскости и др., проходящие через начало координат, включая эту точку начала координат и все пространство. Упорядочим  $L(H)$  по вложению элементов множеств, т.е. создадим решетку, которую можно рассмотреть, как неклассическую логику. Решетка дистрибутивна, если пересечение дистрибутивно относительно объединения и объединение дистрибутивно относительно пересечения:  $a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$  и  $a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$ . Это верно как для множеств ( $\vee = \cup, \wedge = \cap$ ), так и для высказываний ( $\vee = \text{or}, \wedge = \&$ ). Но это не всегда «правда».

В частности, для  $L(H)$ : если  $a, b$  – отдельные линии, тогда  $(a \wedge b) = 0$ ,  $(a \vee b)$  – это плоскость; если  $a, b$  – отдельные плоскости, тогда  $(a \vee b) = 1$ ,  $(a \wedge b)$  – это линия. Если  $a, c$  – прямые, не лежащие в плоскости  $b$ , тогда  $a \vee b, b \vee c = 1$ ,  $a \wedge b = b \wedge c = a \wedge c = 0$ . Имеем не дистрибутивный пример, как и ранее. Это и есть квантовая логика фон Неймана в геометрической интерпретации. Если  $L$  дистрибутивная решетка, тогда каждый элемент  $a$  в ней имеет не более одного дополнения (если имеет дополнение, то оно единственное). В не дистрибутивном случае один элемент может иметь много дополнений. Один из вариантов введения Булевой алгебры, являющейся основой классической логики, как раз и состоит в представлении ее в качестве дополненной дистрибутивной решетки. В квантовой механике решетка подпространств  $L(H)$  не является однозначно дополненной и таким образом не является дистрибутивной, т.е. классическую (булеву) логику оказалось надо «спасать».

Один из путей «спасения» классической логики заключается в представлении, что  $L(H)$  находится внутри большой булевой алгебры всех подмножеств сферы  $S$ . Другими словами, надо позволить произвольным высказываниям о состояниях системы считаться осмысленными. Однако ни одна из вероятностных мер на  $L(H)$  не расширяется любым последовательным образом в вероятностную меру на этой



большой булевой алгебре. Т.е. по факту не существует такое встраивание  $L(H)$  в булеву алгебру, которое сохраняет вероятности. Другими словами,  $L(H)$  содержит много маленьких булевых сублогик. Получается, что квантовая логика более общая, чем классическая логика.

Вместе с тем квантово-логические свойства являются всеми теми свойствами, которые действительно существуют в мире. Если это так, то классическая логика является специальным случаем квантовой логики – и надо действительно исправлять представления о том, как работает логика. Однако, современные представления и научные факты говорят о том, что квантовая логика является специализацией классической логики, а не заменой для нее. Но для понимания этого приходится немного расширить наше понимание теории вероятностей [60].

Квантовая механика операционально – это теория возможных статистических распределений результатов определенных измерений, и ее неклассическая «логика» отражает тот фундаментальный факт, что не все наблюдаемые явления можно наблюдать одновременно. Из-за этого существования несовместимых (дополнительных) наблюдаемых, множество вероятностных событий (или суждений) менее богато, чем это было бы в классической теории вероятностей, а множество возможных статистических распределений, соответственно, менее жестко ограничено. То, что некоторые «неклассические» распределения вероятностей, допускаемые этой теорией, на самом деле проявляются в природе, возможно, удивительно, но похоже никоим образом не требует какого-либо глубокого сдвига в нашем понимании логики. Собственно, в сложных системах и, в частности, в биологии такого рода дополнительность также наблюдается, когда речь идет о том, что у системы не существует наибольшей модели, а «формальные системы, как модели, необходимые для описания каждого отдельного аспекта явлений в естественных системах, оказываются невыводимыми одна из другой» [2, с. 54]. Эпистемологические вопросы моделирования сложных систем рассмотрены в работе [4].

Известно, что идея дополнительности была первоначально развита в психологии сознания Уильяма Джеймса, который писал, что у некоторых людей оно может быть разделено на части, которые сосуществуют, взаимно игнорируя и дополняя друг друга [47]. В современной психопатологии имеется большое разнообразие описаний деперсонализации и расщепления сознания личности [21].

В квантовых измерениях состояния являются единичными векторами (векторами длины 1). Определим измерения в виде максимального набора взаимно ортогональных (перпендикулярных) единичных векторов. Вероятность получения  $x$  в состоянии  $v$  – квадрат проекции компонента  $v$  в направлении  $x$ :  $Pr(x|v) = |(v, x)|^2$ . Это работает и в пространствах большей размерности.

Займствуя термины из теории вероятностей, событием можно назвать любое подмножество измерений – это любое множество взаимно ортогональных единичных векторов. Любой вектор состояния присваивает вероятность любому событию (просто добавляет). Если посмотреть на квантовую механику под этим углом, то тестируемое свойство можно определить как множество состояний, которые



исключаются наблюдением. Это будет множество  $A$  векторов состояний ортогональных ко всем (выходным) векторам в событии  $A$ . Если  $A$  является событием с вероятностью  $p$ , тогда вероятность  $A^\perp$  равна  $1-p$  (если  $A^\perp = B^\perp$ , то  $A$  и  $B$  имеют одинаковую вероятность во всех состояниях).

Формальная структура квантовой механики может быть однозначно определена небольшим числом разумных предположений вместе, возможно, с некоторыми очевидными закономерностями в наблюдаемых явлениях. Эта возможность уже рассматривалась фон Нейманом (в его поздних работах по непрерывной геометрии), но впервые стала явной и программной в работах Джорджа Макки [42]. Он представил последовательность из шести аксиом (определяющих очень консервативную обобщенную теорию вероятностей), которые лежат в основе построения «логики» экспериментальных утверждений, или, в его терминологии, «вопросов», имеющих структуру сигма-ортомодулярного частично упорядоченного множества [51, 52].

Очень естественным направлением для обобщения дискретной классической теории вероятностей является допущение множественности наборов исходов, каждый из которых представляет отдельный «эксперимент». Общим для всех них является Тестовое пространство – это непустая коллекция  $A$  непустых множеств  $E, F, \dots$ , каждое из которых понимается как дискретное исходное множество, как в классической теории вероятностей. Каждое множество  $E \in A$  называется тестом. Множество  $X = \mathcal{U}A$  всех результатов всех тестов, принадлежащих  $A$ , называется пространством результатов  $A$ . Здесь важно, что различные тесты могут перекрываться, т.е. иметь общие результаты. Было показано, что эта структура может сочетаться как с обычным формализмом теории меры полномасштабной классической теории вероятностей, так и с формализмом гильбертова пространства квантовой теории вероятностей [60].

Факт того, что квантовые структуры являются обобщением традиционных вероятностных конструкций и поэтому они лучше отвечают имеющимся результатам наблюдений, позволил в настоящее время разработать технологию свёртки прикладных марковских моделей в квантовые представления для моделирования поведения марковских процессов при решении диагностических задач. В результате квантовые представления становятся применимыми к самым разным макропроцессам и, в частности, к задачам психодиагностики [48, 49]. При этом каждое квантовое представление соответствует одному из кластеров, выявленных в результате проведенного кластерного анализа случайных процессов, а кластеры состояний, фактически, являются результатами отдельных тестов в общем тестовом пространстве [15, 16].

#### 4. ТЕСТОВОЕ ПРОСТРАНСТВО

Понятие тестового пространства является особенно простой и гибкой математической основой для изучения теории вероятностей – классической, квантовой и других. Тестовое пространство предполагает набор (возможно, перекрывающихся) дискретных выборочных пространств. Первичная идея была подробно разработана в 1970-х и 80-х годах [39, 40, 57]. «Квантовая логика» вполне естественно возникает



как инвариант тестовых пространств; однако последние гораздо легче интерпретировать и манипулировать ими.

Тестовое пространство является обобщением понятия дискретного выборочного пространства в классической теории вероятностей. Это пара  $(X, A)$ , где  $X$  – непустое множество, а  $A$  – покрытие  $X$  непустыми подмножествами, называемыми тестами. Предполагаемая интерпретация состоит в том, что каждое множество  $E \in A$  представляет множество всех возможных результатов некоторого эксперимента, решения или физического процесса. Соответственно, подмножество теста называется опытом или событием, а элементы теста  $x \in X$  называются результатами или исходами. Вес вероятности или состояние на  $(X, A)$  является функцией  $w: X \rightarrow [0, 1]$  суммирующая до 1 по каждому тесту. (Простая) случайная величина на  $(X, A)$  – это отображение  $f: E \rightarrow R$ , определяемое по тесту  $E \in A$ .

Как было отмечено выше в общем случае различные тесты могут перекрывать друг друга. Тестовое пространство, состоящее только из одного теста, является классическим. Тестовое пространство, в котором различные тесты не пересекаются, называется полуклассическим. Однако, как показывают приведенные ниже примеры, не полуклассические тестовые пространства возникают вполне естественно. Следует также отметить то, что вероятность исхода по отношению к данному событию не зависит от теста. Если результат является общим для двух или более тестов, его вероятность в данном опыте не зависит от того, какой тест используется для его получения. Другими словами, вероятности, которые состояния присваивают исходам, не зависят от контекста [60].

В качестве простейшего примера можно взять две (неидентичные) монеты, одна с гранями  $H$  и  $T$ , другая с гранями  $h$  и  $t$ . Пусть  $E$  – опыт подбрасывания первой монеты, так что  $E = \{H, T\}$ . Пусть  $F$  – опыт подбрасывания второй монеты, так что  $F = \{h, t\}$ . Тогда у нас есть очень простое полуклассическое тестовое пространство с  $X = \{H, T, h, t\}$  и  $A = \{E, F\} = \{\{H, T\}, \{h, t\}\}$ . Теперь можно рассмотреть последовательные эксперименты: (а) подбросить монету  $E$  два раза подряд или (б) подбросить монету  $E$ : если результат  $H$ , подбросить ее еще раз; если нет, подбросить монету  $F$ . Здесь наборы исходов равны  $\{HH, HT, TH, TT\}$  и  $\{HH, HT, Th, Tt\}$ . Они имеют два общих результата, а именно  $HH$  и  $HT$ . Можно также представить своеобразную квантовую ситуацию, когда монеты  $E$  и  $F$  «сцеплены» друг с другом и их поведение взаимосвязано: при выпадении  $H$  выпадает и  $h$ , а при выпадении  $T$  получается  $t$ . Тогда второй набор исходов имеет вид  $\{HH, HT, Tt, Tt\}$ .

Дискретная классическая теория вероятностей – это теория тестовых пространств вида  $(E; \{E\})$ , имеющая только один тест. В более общем смысле пусть  $S$  – множество, а  $\Sigma$  – поле подмножеств  $S$ . Пусть  $B = B(S; \Sigma)$  – набор (скажем, счетных) разбиений  $S$  на непустые  $\Sigma$ -измеримые множества. Каждое разбиение  $E \in B$  можно представить как исходное множество для «крупнозернистого» измерения значения в  $S$ . Соответственно, получаем тестовое пространство  $(\Sigma^*; B(S; \Sigma))$ , где  $\Sigma^*$  – множество непустых элементов  $\Sigma$ . Это называется тестовым пространством Бореля, связанным с  $(S; \Sigma)$ . Состояния на  $(\Sigma^*; B(S; \Sigma))$  соответствуют  $\sigma$ -аддитивным вероятностным мерам

на  $(S; \Sigma)$ , а простые случайные величины на  $(\Sigma^*; B(S; \Sigma))$  соответствуют простым случайным величинам (в обычном смысле) на  $(S; \Sigma)$ ; более общие случайные величины могут быть восстановлены как их пределы. Таким образом, Колмогоровская теория вероятностей по существу является теорией Борелевских тестовых пространств [60].

Одно из достоинств тестовых пространств – это простота, с которой можно создавать простые и поучительные специальные примеры. Рассмотрим так называемый треугольник Рона Райта [62], представляющий собой запечатанный треугольный ящик с непрозрачными верхом и дном, и полупрозрачными боковыми стенками. Интерьер ящика разделен на три сообщающиеся камеры  $(a, b, c)$ , каждая из которых занимает один угол. Внутри коробки в случайном месте находится светлячок, видимый через конкретную стенку тогда и только тогда, когда светлячок занимает одну из двух камер за ней и мигает.

Каждая стенка ящика соответствует эксперименту. Глядя через одну из стенок, можно увидеть свет в камере  $(a)$ , свет в камере  $(b)$  или вообще не увидеть света. Представляя этот последний результат через  $x$ , мы можем представить эксперимент по просмотру этой стенки через  $\{a; x; b\}$ . Аналогично представив эксперименты, связанные с двумя другими стенками, через  $\{b; y; c\}$  и  $\{c; z; a\}$ , получим тестовое пространство  $M = \{\{a; x; b\}; \{b; y; c\}; \{c; z; a\}\}$ , которое удобно представить графически (рисунок 1).

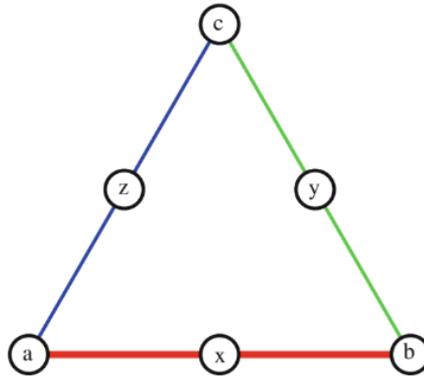


Рис. 1. «Диаграмма Гричи» треугольника Райта, в которой результаты, принадлежащие обычному тесту, лежат вдоль сторон треугольника

На рисунке 1 показана «Диаграмма Гричи» [44] треугольника Райта, в которой результаты, принадлежащие обычному тесту, лежат вдоль сторон треугольника (в общем случае вдоль прямой линии или гладкой кривой). Каждый узел  $(a, b, c)$  представляет результат наблюдения, причем результаты, соответствующие каждому эксперименту, лежат на общей линии, соответствующей трем тестам  $(x, y, z)$ . Тесты при этом принимают только два состояния, события которых не смешиваются – не могут быть одновременно. В этом случае такие состояния в тестах называются



дисперсионно свободными. Пространство  $Pr(M)$  всех вероятностных весов на  $M$  трехмерно, поскольку такой вес однозначно определяется тройкой  $(a, b, c)$ , причем для  $M$  есть исходы, которые являются не дисперсионно свободными  $p(a) = p(b) = p(c) = 1/2$ ;  $p(x) = p(y) = p(z) = 0$  [61].

В более общем виде задачу можно усложнить, если представить, что количество светлячков в треугольнике Райта может быть больше одного, а их перемещения внутри ящика являются случайными. В этом случае события смогут происходить одновременно, и система вероятности таких событий будет сложнее. Таким образом, можно предложить дальнейшее расширение понятия тестового пространства. Покажем далее, что такое расширение оказывается важным для расчета вероятностей в ряде психологических задач.

## 5. КОГНИТИВНАЯ ИЛЛЮЗИЯ, СВЯЗАННАЯ С «ОШИБКОЙ ОБЪЕДИНЕНИЯ»

Согласно теории вероятностей вероятность объединения двух и более случайных событий всегда меньше вероятности одного события. Но многочисленные эксперименты показывают, что психологически люди склонны ошибаться и считать, что вероятность двух событий выше вероятности появления одного события [46].

Классический эксперимент Тверски и Канемана посвящен исследованию ситуации с банковской служащей. Испытуемым сообщаются следующие сведения: Линда, возраст 31 год, одинокая, искренняя и привлекательная, специализировалась в филологии. Когда была студенткой, была очень обеспокоена вопросами дискриминации и социальной справедливости, а также участвовала в антиядерных демонстрациях.

Затем спрашивается: Какая из следующих альтернатив более вероятна?

А) Линда – кассир банка.

В) Линда – кассир банка и активно участвует в феминистском движении.

Большинство людей выбирают – В) и эти люди являются «жертвами ошибки объединения». Теоретически, для двух независимых событий не может быть, чтобы они вместе были более вероятны, чем каждое из событий в отдельности [58].

Нарушения правила объединения носят систематический характер. Причины, почему столь неадекватное поведение имеет место и столь часто встречается, оказываются в целом неясными и слабо объяснимыми. В соответствии с общепризнанными нормативными взглядами это поднимает ряд вполне обоснованных вопросов. Почему люди столь часто не принимают во внимание правильную логическую форму утверждений при оценке вероятностей? Почему они столь не расположены координировать оценку вероятности с общепринятой теорией и ее логической структурой?

Много раз отмечалось, что понятие вероятности здесь очень нечетко определено и эти вероятности скорее всего, связаны, например, с суждениями о правдоподобности [45] и вопросом того, насколько хорошие предсказания согласуются с некоторой общей моделью предполагаемой реальности, включающей сосуществование различных (бессознательных и сознательных) тенденций [33].

Попытки обосновать ответы на представленные выше вопросы привели также к представлениям о том, что когнитивные процессы сродни квантовым явлениям. Ситуацию предпочтения вероятности двух событий можно описать, используя квантовые вероятности. В частности, можно провести анализ с использованием простейшей структуры, возможной в квантовой теории: двумерного векторного пространства [38, 55].

В квантовом объяснении одномерные подпространства (представленные единичными векторами) реализуют предложения  $A$  и  $B$  и их ортогональные аналоги  $A^\perp$  и  $B^\perp$ . Кроме того, соответствующие знания о системе (данные с описанием Линды) могут быть представлены простым вектором  $S$ , называемым вектором состояния. В основном предполагается, что длины проекций векторов состояния на векторы, представляющие обсуждаемые события, представляют (квантовые) вероятности событий (так называемое правило Борна).

Согласно [38] рассмотрим ситуацию сравнения двух утверждений: (A) «Линда – активно участвует в феминистском движении» с обычной вероятностью 0,61 и (B) «Линда – кассир банка» с вероятностью 0,38. Покажем, что (совместное) утверждение (A & затем B) «Линда – феминистка и кассир банка» вполне может иметь вероятность 0,51. Как представлено на рисунке 2 базовое предположение для обработки объединения состоит в том, что сначала вектор состояния  $S$  проецируется в состояние  $A$ , а затем результирующий вектор проецируется в состояние  $B$  (правило Людерса) [50]. Согласно рисунку 2, результатом этой операции является вектор длины 0,51. Очевидно, что эта операция не соответствует пересечению двух векторных пространств. Чтобы отличить ее от операции пересечения  $A \cap B$ , ее определили как «A & затем B».

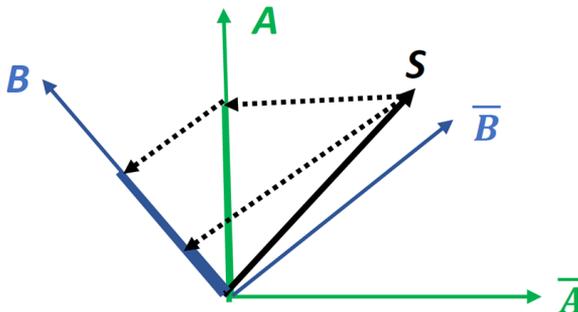


Рис. 2. Векторное объяснение ошибки объединения (адаптировано из [55])

Рисунок 2 иллюстрирует, что обычного двумерного векторного пространства достаточно, чтобы решить проблему объединения вероятностей в психологии. Комплексные числа (как это требуется для охвата истинного гильбертова пространства) в данном случае не нужны. Обычных проекций достаточно, чтобы показать возможность возникновения «ошибки объединения».



Однако нам представляется, что квантовое рассмотрение обладает недостаточной объяснительной силой и при этом привлекает слишком сложные квантовые представления, далекие от психологических явлений. При векторном объяснении ошибки объединения трудно пояснить как могут образоваться еще более большие вероятности объединения событий, что наблюдается на практике. Кроме того, векторное объяснение ошибки объединения трудно соединить с существующими представлениями о механизмах психологических процессов.

## **6. СОПРЕДСТАВЛЕННАЯ МОДЕЛЬ ОБЪЕДИНЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ**

В целом, как было отмечено ранее, можно утверждать, что в случае «ошибки объединения» ошибаются не люди, а психологи, принимая более сложные психологические события за простейшие случайные события (бросания монеты или кости), с которыми изначально имеет дело элементарная теория вероятностей. На практике можно понять, что возможность появления многих разных свойств у объекта восприятия часто легче представить, чем остаться только с одним из этих свойств и без всех других (опустим здесь вопрос о развитости сознания или категориальной системы). Рассматривая эти возможности как вероятность в виде частоты появления соответствующих свойств, вполне можно говорить о том, что вероятность появления множества разных свойств в продуктах восприятия обычно больше вероятности появления только одного свойства.

Таким образом, согласно реальности восприятия, для любого объекта более валидно иметь множество определенных и связанных характеристик, чем только одну особенность. Иначе говоря, перцептивные процессы (в отличие от упрощенных процессов мышления) показывают, что объект восприятия с множеством одновременных и связанных с ним (сопредставленных) свойств на самом деле более действителен и актуален, чем абстрактный объект с несколькими случайными признаками. Сопредставленные свойства событий восприятия имеют общее происхождение и оказываются совместно порожденными. Это предполагает, что природа такого познания весьма сложна, что не учитывается в упрощенных абстрактных научных представлениях, например, в модели равновероятностного континуума случайных событий [3].

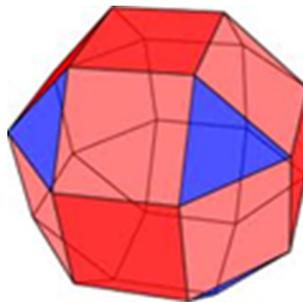
Разработанный ранее в нашей стране подход трансцендентальной психологии [24, 27, 34] позволяет обосновать сопредставленную математическую вероятностную модель, которая согласуется с психологией восприятия человека и эвристическими суждениями людей в условиях неопределенности [3, 32, 33, 35]. Согласно трансцендентальному подходу, процессы восприятия имеют полифункциональный характер с со-существованием различных альтернатив и обладают функциональной гибкостью, необходимой для эффективного действия перцептивных и когнитивных систем в постоянно изменяющихся условиях [27].

Для моделирования сопредставленности, фактически, не нужно отказываться от теории вероятностей в том числе в ее элементарной форме. Необходимо

обратиться к созданию более сложных моделей теории вероятностей и, в первую очередь, представить как элементарные объекты теории вероятностей (монета или игральная кость) могут получить более широкое тестовое пространство с возможностью объединения событий. В принципе эта возможность предполагается и в указанной выше теории тестовых пространств, хотя специально не актуализируется в ней.

Простым примером модели с появлением объединения событий (в качестве отдельного дополнительного события по отношению к известным единичным исходам) является эксперимент с падением монеты-медальона, которая кроме выпадения двух сторон  $H$  и  $T$  может вдруг раскрыться и показать одну из частей развернутого медальона, в котором снаружи есть, а внутри нет изображений «орла» и «решки». Для монеты-медальона возможны (и могут быть равновероятны) все четыре варианта событий: два варианта, когда монета-медальон падает как обычная монета, не раскрываясь, и два других варианта, когда монета-медальон падает, раскрываясь как медальон. Тестовое пространство медальона имеет только один возможный тест, состоящий из четырех исходов с возможным появлением двух событий  $H$  и  $T$  одновременно  $\{H, T, HT, O\}$ .

Более сложной моделью, в которой вероятность объединения событий может превысить вероятность одиночных событий, является модель игральной кости, превращенной в более сложную объемную фигуру, например, в ромбокубооктаэдр. Он представляет собой объемную фигуру, которую можно образовать из первичного куба путем превращения его ребер и вершин в отдельные грани и состоящую из 8 треугольников и 18 квадратов. Рассмотрим его как вариант особой «кости», т.е. при бросках будем интересоваться только выпадением всех шести граней, которые в ромбокубооктаэдре являются гранями первичного куба (игральной кости) с учетом проективной возможности наблюдения соответствующих граней куба, находясь в отдалении на линии, перпендикулярной плоскости любой реально выпавшей грани. На рисунке 3, где представлено изображение ромбокубооктаэдра, эти грани первичного куба показаны темно красным цветом.



*Рис. 3. Изображение ромбокубооктаэдра (рассматриваемые в качестве исходных событий грани первичного куба выделены темно красным цветом)*

На рисунке 4 представлено тестовое пространство наблюдаемых одновременно (темно красных) граней первичного куба в ромбокубооктаэдре. Это пространство

можно представить в виде трех тестов и включает: (А) – 6 состояний выпадения граней первичного куба – игральной кости; (В) – 12 состояний возможности одновременного видения двух граней первичного куба; (С) – 8 состояний возможности одновременного видения трех граней первичного куба).

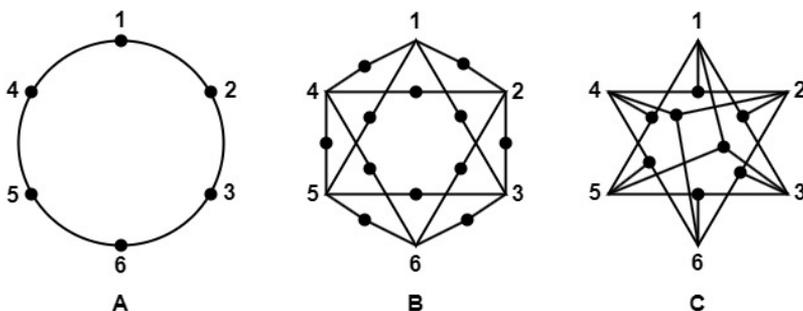


Рис. 4. Тестовое пространство для ромбокубооктаэдра (А – 6 состояний выпадения граней исходного куба – обычной «кости»; В – 12 состояний возможности видения двух граней исходного куба; С – 8 состояний возможности видения трех граней исходного куба)

Можно видеть, что в ромбокубооктаэдре вероятность увидеть определенную комбинацию из нескольких первичных граней в целом существенно больше вероятности увидеть только одну из этих граней. На любую их первичных граней 1–6 на рисунке 4А приходится 4 состояния из двух граней (рис. 4В) и 4 состояния из трех граней (рис. 4С). Можно видеть, что в данной модели различные объединенные исходы, включающие 2 и 3 отдельных первичных состояний кубической игральной кости, включаются в общее дискретное пространство элементарных исходов  $\Omega$ , в котором отдельные первичные исходы в результате могут объединяться. При этом важно, что вероятность объединения первичных случайных событий может превышать вероятность любого из этих событий по отдельности, что согласуется с результатами психологических экспериментов. В частности, кросс-культурный эксперимент по восприятию вероятности совместных событий показал возможность влиять на принятие человеком решения в предсказуемом направлении, варьируя воспринимаемые и смысловые параметры ситуации в соответствии с теоретическими предположениями, связанными с новой моделью оценки вероятности [36].

Для ромбокубооктаэдра вероятности выпадения квадратных и треугольных граней не должны быть равны друг другу и предпочтение в величине вероятности, по-видимому, надо отдать квадратной грани, что согласуется с результатами частотных экспериментов.

Примерный расчет вероятностей для пространства исходов ромбокубооктаэдра проведем с учетом того, что вероятность выпасть треугольной грани  $q$  равна  $\frac{3}{4}$  от вероятности выпадения любой квадратной грани  $p$ . Имеем общую формулу:  $18p + 8(\frac{3}{4})p = 1$ ; откуда  $p = 1/24$ ;  $q = \frac{3}{4} p = 1/32$ . Вероятность получения любой одной исходной



(темно красной на рисунке 3) квадратной грани  $d = 6/24 = 1/4$ . Вероятность получения любых двух квадратных граней с учетом появления этих граней в составе выпадения двух или трех (темно красных) граней  $e = 1 - d = 3/4$ . Соответственно вероятность получения любых двух (но не трех) квадратных граней  $p_2 = 12/24 = 1/2$ . Вероятность получения любых трех квадратных граней  $p_3 = 8/32 = 1/4$ . Таким образом в тестовой модели ромбокубооктаэдра вероятность объединения событий (совместного появления двух граней первичной игральной кости) может существенно превысить вероятность одного события (выпадения только одной грани первичной игральной кости). В общем случае вероятности объединенных событий могут быть как меньше, так и больше вероятностей отдельных исходов в зависимости от конкретики используемой модели и решаемой задачи.

Рассмотренные примеры показывают, что при создании более сложных вероятностных моделей, с одной стороны, пространство событий может выступать в виде системы отдельных тестов с совмещением событий в разных тестах, а с другой стороны в этих тестах события тоже могут совмещаться в том или ином виде. В более общем виде этому, например, могут соответствовать: наборы различных проективных геометрий или сетевых иерархических структур, типа различных деревьев.

## 7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Одной из важных разработок теории квантовой механики является создание представления о тестовых пространствах, что позволяет расширить классическую теорию вероятности. Введение понятия тестовых пространств в состав общей теории вероятностей является, на наш взгляд, важной вехой в развитии этой теории. В целом аксиоматика классической теории вероятностей в этом случае расширяется с множества несовместных элементарных событий на случаи, как повторяемости событий в несовместных тестовых испытаниях, так и случаи совместного появления событий в отдельных тестах. Это обеспечивает новые возможности применения теории вероятностей к более широкому классу явлений и, в частности, к моделированию сопредставленных психологических явлений, в том числе без привлечения к объяснению психологии поведения человека векторных аналогий из квантовой механики.

На этой основе в работе представлены простые математические модели, позволяющие более адекватно объяснить эвристическое поведение человека при оценке вероятностей случайных событий. Фактически, при применении научных норм теории вероятностей в психологии и других науках о живом необходимо строить новые модели, учитывающие относительно более сложный характер рассматриваемых явлений и процессов. В частности, на основе разработанной модели сопредставленных событий удается преодолеть «ошибку объединения» вероятностей [13, 58] и показать, что эвристическое поведение человека при оценке вероятностей случайных событий не должно считаться ошибочным [3, 35].

В результате можно утверждать, что «ошибка объединения» – это скорее научная иллюзия. Когда результаты применения нормативных научных концепций серьезно



отличаются от наблюдаемого поведения живых существ, разумно проверить пределы применимости научной модели, которая используется в качестве правильной и валидной нормы. Простая модель, использованная для образования этой нормы, может не соответствовать более сложной системе, которую пытаются уложить в прокрустово ложе более простой модели.

Таким образом, предлагаемое расширение элементарной теории вероятностей для моделирования психологических явлений основано на использовании результатов квантовой теории, относящихся к представлениям о тестовых пространствах (в виде системы отдельных дополнительных полно вероятностных тестов с совмещением событий в разных тестах), и рассмотрения вероятностных моделей с возможностями совмещения (объединения) отдельных случайных событий (с учетом сетевых иерархических структур, типа деревьев, или множества различных проективных геометрий).

### *Литература*

1. *Абрамов В.Е., Маслов О.Н., Шаталов И.С., Юкласов К.А.* Леонард Джимми Сэвидж и его субъективная теория вероятностей. Часть I. Условия возникновения, предпосылки и перспективы. Информационные технологии. Т. 18. № 1. 2020, С. 89–105.
2. *Артеменков С.Л.* Аспекты моделирования и особые свойства сложных систем // Моделирование и анализ данных. 2016. № 1. С. 47–59. doi:10.17759/mda.04.
3. *Артеменков С.Л.* Модель сопредставленности для оценки вероятности объединения событий // Моделирование и анализ данных. 2014. № 1. С. 43–54.
4. *Артеменков С.Л.* Онтологический и эпистемологический аспекты моделирования: модельное отношение и адиафорные системы. Моделирование и анализ данных. 2022. № 4. С. 5–24. DOI: 10.17759/mda.2022120401.
5. *Аткинсон Р., Шифрин Р.* Человеческая память: система памяти и процессы управления // Психология памяти / Под ред. Ю. Б. Гиппенрейтер, В. Я. Романова. 3-е изд. М.: Астрель, 2008. С. 387–407.
6. *Балашов Л.Е.* Новая метафизика. Категориальная картина мира или основы категориальной логики / Л.Е. Балашов. М.: РГИУ, 2003. 868 с.
7. *Бамберг П., Стернберг Ш.* Курс математики для студентов-физиков. Фазис. 2006. Т. 1, Т. 2. 1256 с.
8. *Вертгеймер М.* Продуктивное мышление. М.: Прогресс, 1987. 336 с.
9. *Гнеденко Б.В.* Курс теории вероятностей / Учебное пособие для высшего и среднего образования гос. ун-тов / Б.В. Гнеденко. 5-е изд. стереотипное. М.: Наука, 1969. 400 с.
10. *Горяинов В.В.* Лекции по теории вероятностей / М.: МФТИ, 2019. 59 с.
11. *Закон. Необходимость. Вероятность: сборник статей.* М.: Прогресс, 1967. 367 с.
12. *Кайберг Г.* Вероятность и индуктивная логика. М.: Прогресс, 1978. 374 с.
13. *Канеман Д., Словик П., Тверски А.* Принятие решений в неопределенности: Правила и предубеждения. Харьков: Гуманитарный центр, 2005. 632 с.
14. *Колмогоров А.Н.* Основные понятия теории вероятности. Москва, Наука, 1974, 120 с.
15. *Куравский Л.С., Козырев А.Д., Грешиников И.И.* Математическая модель сопутствующей деятельности пилота и ее применение для объективной оценки его состояния и профессиональной подготовки // Экспериментальная психология. 2024. Том 17. № 1. С. 161–180. DOI: 10.17759/expsy.2024170111

16. *Куравский Л.С., Юрьев Г.А., Юрьева Н.Е., Исаков С.С., Несимова А.О., Николаев И.А.* Адаптивная технология психологической диагностики на основе марковских и квантовых представлений процесса выполнения заданий // *Моделирование и анализ данных*. 2022. Том 12. № 4. С. 36–55. DOI: 10.17759/mda.2022120403
17. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Квантовая механика (нерелятивистская теория) // *Теоретическая физика*. М.; Л.: ОГИЗ, 1948. Т. 5. Ч. 1. 570 с.
18. *Леонов Н.Н., Сачков Ю.В., Рузавин Г.И.* Вероятность / Гуманитарный портал: Концепты [Электронный ресурс] // Центр гуманитарных технологий, 2002–2023 (последняя редакция: 29.11.2023). URL: <https://gtmarket.ru/concepts/7069>
19. *Леонтович М.А.* Статистическая физика. М.; Л.: ОГИЗ, 1944. 256 с.
20. *Лотов В.И.* Лекции по теории вероятностей / учебное пособие для студентов механико-математического факультета НГУ. Новосибирск: НГУ, 2019. 115 с.
21. *Лэйнг Р.Д.* Расколотое «Я». М.: АСТ, 2021. 288 с.
22. *Матурана У.* Биология познания. В книге *Язык и интеллект*. Сб./Пер. с англ. и нем. / Сост. и вступ. Ст. В.В. Петрова. М.: Прогресс, 1995. 95–142.
23. *Мизес Р.* Вероятность и статистика: Пер. с нем. / Под ред. и с предисл. А.Я. Хинчина. М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2009. 264 с.
24. *Миракян А.И.* Контурсы трансцендентальной психологии (книга 2). М.: Изд-во «Институт психологии РАН, 2004. 384 с.
25. *Печенкин А.А.* Понятие вероятности в математике и физике (дискуссии 1920–1930-х гг. в СССР). Эпистемология и философия науки. 2019. Т. 56. № 3. С. 202–218.
26. *Прохоров Ю.В., Розанов Ю.А.* Теория вероятностей. Основные понятия, предельные теоремы, случайные процессы, М.: Наука, 1973. 494 с.
27. *Психология восприятия: трансцендентальный вектор развития* / под ред. Г. В. Шуковой. М.; СПб.: Нестор-История, 2020. 284 с.
28. *Пятницын Б.Н., Григорьян Э.Р.* Обоснование и проблема выбора теории вероятностей. Философия науки. Вып. 1. Проблемы рациональности. М.: ИФ РАН, 1995. 302–318.
29. *Рузавин Г.И.* Логическая вероятность и индуктивный вывод // *Вопросы философии*. 1967. № 4. С. 102–110.
30. *Хинчин А.Я.* Частотная теория Р. Мизеса и современные идеи теории вероятности // *Вопросы философии*. 1961. № 1. С. 91–102. № 2. С. 77–89.
31. *Чернова Н.И.* Теория вероятностей: Учебное пособие / СибГУТИ. Новосибирск, 2009. 128 с.
32. *Artemenkov S.L.* Corepresentation of the features of objects in the processes of perception and assessment of the chances of joint events / 42nd European Conference on Visual Perception (ECVP) 2019 Leuven. Perception. 2019. 48(S2). P. 141. <https://journals.sagepub.com/doi/full/10.1177/0301006619863862>
33. *Artemenkov S.L.* Kansei Versus Extensional Reasoning: The Scientific Illusion of the Conjunction Fallacy in Probability Judgments // *Proceedings of the First International Workshop on Kansei*. 2006. 8–11. Available at: [https://www.psychology.hes.kyushu-u.ac.jp/~lab\\_miura/Kansei/Workshop/proceedings/Opening\\_talk.pdf](https://www.psychology.hes.kyushu-u.ac.jp/~lab_miura/Kansei/Workshop/proceedings/Opening_talk.pdf)
34. *Artemenkov S.L.* Metaphysics and Fundamentals of Transcendental Psychology Approach. *Open Journal of Philosophy*, 2021. 11. 125–147. <https://doi.org/10.4236/ojpp.2021.111010>
35. *Artemenkov S.L.* Prerequisites of Regulatory Scientific Models in Education and Social Practice: Transcendental Approach to Conjunction Fallacy. *Advances in Social Science, Education and Humanities Research (ASSEHR)*, volume 315. *Proceedings of the 2019 International Conference on Pedagogy, Communication and Sociology (ICPCS 2019)*. 2019. 313–317. <https://doi.org/10.2991/icpcs-19.2019.69>



36. *Artemenkov S.L.* Scientific conceptions and heuristics in cross-cultural communication and education in terms of a joint probability decision making. Riga: ISMA. Information Technologies, Management and Society, 2013, Vol. 6, No. 1. P. 20–30.
37. *Birkhoff G. & von Neumann J.* “The Logic of Quantum Mechanics”, *Annals of Mathematics*, 1936, 37(4): 823–843. doi:10.2307/1968621
38. *Blutner R.* Complementarity and Quantum Cognition. In S. Satsangi, A.M. Horatschek, A. Srivastav (eds) *Consciousness Studies in Sciences and Humanities*. 2021. 27–45.
39. *Foulis D.J., & Randall C.H.* Operational statistics. I. Basic concepts. *Journal of Mathematical Physics*. 1972, 13. 1667–1675.
40. *Foulis, D.J., & Randall, C.H.* *Manuals, Morphisms and Quantum Mechanics*, in A. Marlow, ed., *Mathematical Foundations of Quantum Theory*, Academic Press, New York. 1978. 105–126.
41. *Galavotti M.C.* *Philosophical introduction to probabilities*. Stanford, 2005.
42. *George Mackey* (1916–2006), *Notices of the American Mathematical Society*. 2007. 54(7). 824–850.
43. *Gillies D.* *Philosophical theories of probability*. L., 2000.
44. *Greechie R.J.* Orthomodular lattices admitting no states, *Journal of Combinatorial Theory, Series A*. 1971. 10(2). 119–132. [https://doi.org/10.1016/0097-3165\(71\)90015-X](https://doi.org/10.1016/0097-3165(71)90015-X)
45. *Hertwig R., & Gigerenzer G.* The ‘conjunction fallacy’ revisited: how intelligent inferences look like reasoning errors. *Journal of Behavioral Decision Making*, 1999. 12, 275–305.
46. *Heuristics & Biases: the psychology of intuitive judgement* / edited by T. Gilovich, D. Griffin, D. Kahneman. Cambridge University Press. 2002. 857 p.
47. *James W.* *The Principles of Psychology*. New York/London: Holt and Macmillan. 1890. V. 1.
48. *Kuravsky L.S.* Modeling dynamical behavior of stochastic systems: spectral analysis of qubit representations vs the mutual markovian model likelihood estimations. *Lobachevskii Journal of Mathematics*. 2021. 42 (10). 2364–2376.
49. *Kuravsky L.S.* Simplification of Solving Diagnostics Problems by Convolution of Applied Markovian Models into the Quantum Representations. *Lobachevskii Journal of Mathematics*. 2022. 43 (7). 1669–1682.
50. *Lüders G.* Über die Zustandsänderung durch den Meßprozeß, *Annalen der Physik*. 1951. 8, 322–328; English translation by K.A. Kirkpatrick, at arXiv: quant-ph/0403007.
51. *Mackey G.W.* “Quantum Mechanics and Hilbert Space”, *The American Mathematical Monthly*, 1957, 64(8): 45–57. doi:10.2307/2308516
52. *Mackey G.W.* *The Mathematical Foundations of Quantum Mechanics: A Lecture-note Volume*, New York: W.A. Benjamin. 1963.
53. *Mellor D.H.* *Probability: A philosophical introduction*. L., 2005.
54. *Pitowsky I.* Quantum Mechanics as a Theory of Probability. In W. Demopoulos, I. Pitowsky (eds) *Physical Theory and its Interpretation. The Western Ontario Series in Philosophy of Science*, vol. 72. Springer, Dordrecht. 2006. 213–240. [https://doi.org/10.1007/1-4020-4876-9\\_10](https://doi.org/10.1007/1-4020-4876-9_10)
55. *Pothos E., & Busemeyer J.R.* Formalizing heuristics in decision-making: a quantum probability perspective. *Frontiers in psychology*, 2011. 2. 289. <https://doi.org/10.3389/fpsyg.2011.00289>
56. *Putnam H.* 1968, “Is Logic Empirical?” in R. Cohen and M.P. Wartofski (eds), *Boston Studies in the Philosophy of Science* (Volume 5), Dordrecht: D. Reidel; reprinted as “The Logic of Quantum Mechanics” in Hilary Putnam, *Mathematics, Matter and Method*, Cambridge University Press, 1976, second edition 1979, pp. 174–197. doi:10.1017/CBO9780511625268.012
57. *Randall C.H., & Foulis D.J.* Operational statistics. II. Manuals of operations and their logics. *J. Math. Phys.* 14 (1973), 1472–1480.
58. *Tversky A., Kahneman D.* Extensional vs. intuitive reasoning: The conjunction fallacy in probability judgment. *Psychological Review*, 1983. 90(4). 293–315. <https://doi.org/10.1037/0033-295X.90.4.293>



59. *von Neumann J.* 1932, *Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik*, Berlin: Springer-Verlag; English translation: *Mathematical Foundations of Quantum Mechanics*, Princeton: Princeton University Press, 1955.
60. *Wilce A.* Test Spaces. in K. Engesser, D. Gabbay and D. Lehman (eds), *The Handbook of Quantum Structures: Quantum Logic*, North Holland, 2009, pp. 443–549.
61. *Wilce A.* Dynamical states and the conventionality of (non-) classicality. In M. Hemmo, O. Shenker (eds) *Quantum, probability, logic. The work and influence of Itamar Pitowsky*. Springer Cham. 2020. 585–627. <https://doi.org/10.1007/978-3-030-34316-3>
62. *Wright R.* Generalized urn models. *Foundations of Physics*. 1990. 20. 881–903.



# On the Extension of the Elementary Theory of Probability for Psychological Phenomena

**Sergei L. Artemenkov\***

Moscow State University of Psychology and Education (MSUPE), Moscow, Russia

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-1619-2209>

e-mail: [slart@inbox.ru](mailto:slart@inbox.ru)

Based on a review of the achievements of quantum mechanics and the psychology of perception, some of their possibilities for expanding the classical theory of probability to the field of representing psychological events, for which a combination of outcomes may have a probability greater than the probability of single events from their common set, are considered. It is noted that a model based on a common space of elementary non-intersecting elements is insufficient for describing the psychology of behavior associated with generative processes and co-represented phenomena. To extend elementary probability theory, results from quantum theory relating to ideas about test spaces and the possibility of combining individual events in a test can be used. The proposed models can include both systems of individual tests with repetition of events in additional tests and the possibility of combining individual test events themselves using combinatorial and geometric (projection) methods. Simple examples of expanding classical probabilistic models show that the “Conjunction Fallacy” in the psychology of heuristic behavior should be considered not so much an error of subjects as a scientific illusion of researchers, when they try to fit the behavior of a more complex system into the Procrustean bed of an overly simple model.

**Keywords:** probability, quantum representations, test spaces, co-representation, conjunction fallacy, scientific illusion.

## For citation:

Artemenkov S.L. On the Extension of the Elementary Theory of Probability for Psychological Phenomena. *Modelirovanie i analiz dannykh = Modelling and Data Analysis*, 2024. Vol. 14, no. 4, pp. 5–29. DOI: <https://doi.org/10.17759/mda.2024140401> (In Russ., abstr. in Engl.).

## References

1. Abramov V.E., Maslov O.N., Shatalov I.S., Yuklasov K.A. Leonard Jimmy Savage and His Subjective Probability Theory. Part 1. Scientific Background, Preconditions and Prospects. *Informacionnye tekhnologii = Information Technologies*. 2020. Vol. 18. no. 1., pp. 89–105. (In Russ., abstr. in Engl.).

\***Sergei L. Artemenkov**, PhD in Engineering, Professor, Head of the Department of Applied Informatics and Multimedia Technologies, Head of the Center of Information Technologies for Psychological Research of the Faculty of Information Technologies, Moscow State University of Psychology and Education (MSUPE), Moscow, Russia, ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-1619-2209>, e-mail: [slart@inbox.ru](mailto:slart@inbox.ru)



2. Artemenkov S.L. The Aspects of Modelling and Specific Characteristics of Complex Systems. Modelirovanie i analiz dannykh = Modelling and Data Analysis, 2016, no. 1. pp. 47–59. doi:10.17759/mda.04. (In Russ., abstr. in Engl.).
3. Artemenkov S.L. Co-representation Model for Estimation of Joint Probability of Events. Modelirovanie i analiz dannykh = Modelling and Data Analysis, 2014, no. 1. pp. 43–54. (In Russ., abstr. in Engl.).
4. Artemenkov S.L. Ontological and Epistemological Aspects of Modeling: Modelling Relation and Adiaphoric Systems. Modelirovanie i analiz dannykh = Modelling and Data Analysis, 2022. Vol. 12, no. 4, pp. 5–24. DOI: <https://doi.org/10.17759/mda.2022120401> (In Russ., abstr. in Engl.).
5. Atkinson R., SHifrin R. CHelovecheskaya pamyat': sistema pamyati i processy upravleniya // Psihologiya pamyati / Pod red. YU. B. Gippenrejtser, V. YA. Romanova. 3-e izd. M.: Astrel', 2008. S. 387–407.
6. Balashov L.E. Novaya metafizika. Kategorial'naya kartina mira ili osnovy kategorial'noj logiki / L.E. Balashov. M.: RGIU, 2003. 868 p.
7. Bamberg P., Sternberg SH. Kurs matematiki dlya studentov-fizikov. Fazis. 2006. T. 1, T. 2. 1256 p.
8. Vertgejmer M. Produktivnoe myshlenie. M.: Progress, 1987. 336 p.
9. Gnedenko B.V. Kurs teorii veroyatnostej / Uchebnoe posobie dlya vysshego i srednego obrazovaniya gos. un-tov / B.V. Gnedenko. 5-e izd. stereotipnoe. M.: Nauka, 1969. 400 p.
10. Goryajnov V.V. Lekcii po teorii veroyatnostej. M.: MFTI, 2019. 59 p.
11. Zakon. Neobходimost'. Veroyatnost': sbornik statej. M.: Progress, 1967. 367 p.
12. Kajberg G. Veroyatnost' i induktivnaya logika. M.: Progress, 1978. 374 p.
13. Kahneman D., Slovik P., Tverski A. Prinyatie reshenij v neopredelennosti: Pravila i predubezhdeniya. Har'kov: Gumanitarnyj centr, 2005. 632 p.
14. Kolmogorov A.N. Osnovnye ponyatiya teorii veroyatnosti. Moskva, Nauka, 1974, 120 p.
15. Kuravsky L.S., Kozyrev A.D., Greshnikov I.I. Mathematical Model of the Pilot Associated Activities and Its Application for Objective Professional Training and Condition Assessment. Eksperimental'naâ psihologiya = Experimental Psychology (Russia), 2024. Vol. 17, no. 1, pp. 161–180. DOI: 10.17759/exppsy.2024170111. (In Russ., abstr. in Engl.)
16. Kuravsky L.S., Yuryev G.A., Yuryeva N.E., Isakov S.S., Nesimova A.O., Nikolaev I.A. Adaptive Technology of Psychological Diagnostics Based on the Markovian and Quantum Representations of the Task Performing Process. Modelirovanie i analiz dannykh = Modelling and Data Analysis, 2022. Vol. 12, no. 4, pp. 36–55. DOI: <https://doi.org/10.17759/mda.2022120403> (In Russ., abstr. in Engl.).
17. Landau L.D., Lifshic E.M. Kvantovaya mekhanika (nerelyativistskaya teoriya) // Teoreticheskaya fizika. M.; L.: OGIZ, 1948. T. 5. CH. 1. 570 p.
18. Leonov H.H., Sachkov YU.V., Ruzavin G.I. Veroyatnost' / Gumanitarnyj portal: Koncepty [Elektronnyj resurs]. Centr gumanitarnyh tekhnologij, 2002–2023 (poslednyaya redakciya: 29.11.2023). URL: <https://gtmarket.ru/concepts/7069>
19. Leontovich M.A. Statisticheskaya fizika. M.; L.: OGIZ, 1944. 256 p.
20. Lotov V.I. Lekcii po teorii veroyatnostej / uchebnoe posobie dlya studentov mekhaniko-matematicheskogo fakul'teta NGU. Novosibirsk: NGU, 2019. 115 p.
21. Lejng R.D. Raskolotoe «YA». M.: AST, 2021. 288 p.
22. Maturana U. Biologiya poznaniya. V knige YAzyk i intellekt. Sb./Per. s ang. i nem. / Sost. i vst-up. St. V.V. Petrova. M.: Progress, 1995. 95–142.
23. Mizes R. Veroyatnost' i statistika: Per. s nem. / Pod red. i s predisl. A.YA. Hinchina. M.: Knizhnyj dom «LIBROKOM», 2009. 264 p.
24. Mirakyan A.I. Kontury transcendent'noj psihologii (kniga 2). M.: Izd-vo «Institut psihologii RAN, 2004. 384 s.



25. Pechenkin A.A. Ponyatie veroyatnosti v matematike i fizike (diskussii 1920–1930-h gg. v SSSR). *Epistemologiya i filosofiya nauki*. 2019. T. 56. № 3. pp. 202–218.
26. Prohorov YU.V., Rozanov YU.A. *Teoriya veroyatnostej. Osnovnye ponyatiya, predel'nye teoremy, sluchajnye processy*, M.: Nauka, 1973. 494 p.
27. *Psihologiya vospriyatiya: transcendentallyj vektor razvitiya*. pod red. G. V. SHukovoj. M.; SPb.: Nestor-Istoriya, 2020. 284 p.
28. Pyatnitsyn B.N., Grigor'yan E.R. Obosnovanie i problema vybora teorii veroyatnostej. *Filosofiya nauki*. Vyp. 1. Problemy racional'nosti. M.: IF RAN, 1995. 302–318.
29. Ruzavin G.I. Logicheskaya veroyatnost' i induktivnyj vyvod // *Voprosy filosofii*. 1967. № 4. pp. 102–110.
30. Hinchin A.YA. CHastotnaya teoriya R. Mizesa i sovremennye idei teorii veroyatnosti // *Voprosy filosofii*. 1961. № 1. pp. 91–102. № 2. pp. 77–89.
31. Chernova N.I. *Teoriya veroyatnostej: Uchebnoe posobie / SibGUTI*. Novosibirsk, 2009. 128 p.
32. Artemenkov S.L. Corepresentation of the features of objects in the processes of perception and assessment of the chances of joint events / 42nd European Conference on Visual Perception (ECVP) 2019 Leuven. *Perception*. 2019. 48(S2). P. 141. <https://journals.sagepub.com/doi/full/10.1177/0301006619863862>
33. Artemenkov S.L. Kansei Versus Extensional Reasoning: The Scientific Illusion of the Conjunction Fallacy in Probability Judgments // *Proceedings of the First International Workshop on Kansei*. 2006. 8–11. Available at: [https://www.psychology.hes.kyushu-u.ac.jp/~lab\\_miura/Kansei/Workshop/proceedings/Opening\\_talk.pdf](https://www.psychology.hes.kyushu-u.ac.jp/~lab_miura/Kansei/Workshop/proceedings/Opening_talk.pdf)
34. Artemenkov S.L. Metaphysics and Fundamentals of Transcendental Psychology Approach. *Open Journal of Philosophy*, 2021. 11. 125–147. <https://doi.org/10.4236/ojpp.2021.111010>
35. Artemenkov S.L. Prerequisites of Regulatory Scientific Models in Education and Social Practice: Transcendental Approach to Conjunction Fallacy. *Advances in Social Science, Education and Humanities Research (ASSEHR)*, volume 315. *Proceedings of the 2019 International Conference on Pedagogy, Communication and Sociology (ICPCS 2019)*. 2019. 313–317. <https://doi.org/10.2991/icpcs-19.2019.69>
36. Artemenkov S.L. Scientific conceptions and heuristics in cross-cultural communication and education in terms of a joint probability decision making. *Riga: ISMA. Information Technologies, Management and Society*, 2013, Vol. 6, No. 1. P. 20–30.
37. Birkhoff G. & von Neumann J. “The Logic of Quantum Mechanics”, *Annals of Mathematics*, 1936, 37(4): 823–843. doi:10.2307/1968621
38. Blutner R. Complementarity and Quantum Cognition. In S. Satsangi, A.M. Horatschek, A. Srivastav (eds) *Consciousness Studies in Sciences and Humanities*. 2021. 27–45.
39. Foulis D.J., & Randall C.H. Operational statistics. I. Basic concepts. *Journal of Mathematical Physics*. 1972, 13. 1667–1675.
40. Foulis, D.J., & Randall, C.H. *Manuals, Morphisms and Quantum Mechanics*, in A. Marlow, ed., *Mathematical Foundations of Quantum Theory*, Academic Press, New York. 1978. 105–126.
41. Galavotti M.C. *Philosophical introduction to probabilities*. Stanford, 2005.
42. George Mackey (1916–2006), *Notices of the American Mathematical Society*. 2007. 54(7). 824–850.
43. Gillies D. *Philosophical theories of probability*. L., 2000.
44. Greechie R.J. Orthomodular lattices admitting no states, *Journal of Combinatorial Theory, Series A*. 1971. 10(2). 119–132. [https://doi.org/10.1016/0097-3165\(71\)90015-X](https://doi.org/10.1016/0097-3165(71)90015-X)
45. Hertwig R., & Gigerenzer G. The ‘conjunction fallacy’ revisited: how intelligent inferences look like reasoning errors. *Journal of Behavioral Decision Making*, 1999. 12, 275–305.



46. Heuristics & Biases: the psychology of intuitive judgement / edited by T. Gilovich, D. Griffin, D. Kahneman. Cambridge University Press. 2002. 857 p.
47. James W. The Principles of Psychology. New York/London: Holt and Macmillan. 1890. V. 1.
48. Kuravsky L.S. Modeling dynamical behavior of stochastic systems: spectral analysis of qubit representations vs the mutual markovian model likelihood estimations. Lobachevskii Journal of Mathematics. 2021. 42 (10). 2364–2376.
49. Kuravsky L.S. Simplification of Solving Diagnostics Problems by Convolution of Applied Markovian Models into the Quantum Representations. Lobachevskii Journal of Mathematics. 2022. 43 (7). 1669–1682.
50. Lüders G. Über die Zustandsänderung durch den Meßprozeß, *Annalen der Physik*. 1951. 8, 322–328; English translation by K.A. Kirkpatrick, at arXiv: quant-ph/0403007.
51. Mackey G.W. “Quantum Mechanics and Hilbert Space”, *The American Mathematical Monthly*, 1957, 64(8): 45–57. doi:10.2307/2308516
52. Mackey G.W. *The Mathematical Foundations of Quantum Mechanics: A Lecture-note Volume*, New York: W.A. Benjamin. 1963.
53. Mellor D.H. *Probability: A philosophical introduction*. L., 2005.
54. Pitowsky I. Quantum Mechanics as a Theory of Probability. In W. Demopoulos, I. Pitowsky (eds) *Physical Theory and its Interpretation. The Western Ontario Series in Philosophy of Science*, vol 72. Springer, Dordrecht. 2006. 213–240. [https://doi.org/10.1007/1-4020-4876-9\\_10](https://doi.org/10.1007/1-4020-4876-9_10)
55. Pothos E., & Busemeyer J.R. Formalizing heuristics in decision-making: a quantum probability perspective. *Frontiers in psychology*, 2011. 2. 289. <https://doi.org/10.3389/fpsyg.2011.00289>
56. Putnam H. 1968, “Is Logic Empirical?” in R. Cohen and M.P. Wartofski (eds), *Boston Studies in the Philosophy of Science (Volume 5)*, Dordrecht: D. Reidel; reprinted as “The Logic of Quantum Mechanics” in Hilary Putnam, *Mathematics, Matter and Method*, Cambridge University Press, 1976, second edition 1979, pp. 174–197. doi:10.1017/CBO9780511625268.012
57. Randall C.H., & Foulis D.J. Operational statistics. II. Manuals of operations and their logics. *J. Math. Phys.* 14 (1973), 1472–1480.
58. Tversky A., Kahneman D. Extensional vs. intuitive reasoning: The conjunction fallacy in probability judgment. *Psychological Review*, 1983. 90(4). 293–315. <https://doi.org/10.1037/0033-295X.90.4.293>
59. von Neumann J. 1932, *Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik*, Berlin: Springer-Verlag; English translation: *Mathematical Foundations of Quantum Mechanics*, Princeton: Princeton University Press, 1955.
60. Wilce A. Test Spaces. in K. Engesser, D. Gabbay and D. Lehman (eds), *The Handbook of Quantum Structures: Quantum Logic*, North Holland, 2009, pp. 443–549.
61. Wilce A. Dynamical states and the conventionality of (non-) classicality. In M. Hemmo, O. Shenker (eds) *Quantum, probability, logic. The work and influence of Itamar Pitowsky*. Springer Cham. 2020. 585–627. <https://doi.org/10.1007/978-3-030-34316-3>
62. Wright R. Generalized urn models. *Foundations of Physics*. 1990. 20. 881–903.

Получена 01.10.2024

Received 01.10.2024

Принята в печать 21.10.2024

Accepted 21.10.2024

УДК 519.651

## Об использовании дискретного преобразования Фурье в схемах подразделений

**Битюков Ю.И. \***

Московский авиационный институт  
(национальный исследовательский университет) (МАИ)  
г. Москва, Российская Федерация  
ORCID: <https://orcid.org/0009-0008-6384-0564>  
e-mail: [yib72@mail.ru](mailto:yib72@mail.ru)

**Битюков П.Ю. \*\***

Московский энергетический институт  
(национальный исследовательский университет) (МЭИ)  
г. Москва, Российская Федерация  
ORCID: <https://orcid.org/0009-0000-8697-7047>  
e-mail: [p.bityukoff@yandex.ru](mailto:p.bityukoff@yandex.ru)

Статья посвящена развитию метода геометрического моделирования, основанного на схемах подразделений и применению этого метода к параметрическому описанию поверхности или области по облаку точек, полученному каким-либо способом. Для нахождения начальной последовательности схемы подразделений применяется метод наименьших квадратов, но непосредственное его использование затруднительно из-за огромных размеров матриц. Поскольку схемы подразделений основаны на свертках последовательностей, для устранения проблемы размеров матриц, используется дискретное преобразование Фурье и методом наименьших квадратов находится не сама начальная последовательность, а ее преобразование Фурье.

**Ключевые слова:** схема подразделений, вейвлет, дискретное преобразование Фурье, геометрическое моделирование.

**Для цитаты:**

*Битюков Ю.И., Битюков П.Ю.* Об использовании дискретного преобразования Фурье в схемах подразделений // Моделирование и анализ данных. 2024. Том 14. № 4. С. 30–44. DOI: [10.17759/mda.2024140402](https://doi.org/10.17759/mda.2024140402)

\***Битюков Юрий Иванович**, доктор технических наук, профессор кафедры «Теория вероятностей и компьютерное моделирование», Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет) (МАИ), г. Москва, Российская Федерация, ORCID: <https://orcid.org/0009-0008-6384-0564> e-mail: [yib72@mail.ru](mailto:yib72@mail.ru)



**\*\*Битюков Павел Юрьевич**, студент-магистр, Московский энергетический институт (национальный исследовательский университет) (МЭИ), г. Москва, Российская Федерация, ORCID: <https://orcid.org/0009-0000-8697-7047>, e-mail: [p.bitjukoff@yandex.ru](mailto:p.bitjukoff@yandex.ru)

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Схемы подразделений появились в задачах геометрического моделирования, причем в последствии обнаружилась тесная их связь с вейвлетами [1]. В частности вейвлеты и масштабирующие функции можно получать посредством схем подразделений, в которых в качестве маски схемы выступает масштабная последовательность [1, 2]. Схема подъема, использующая схемы подразделений, представленная в статье [3], позволяет строить биортогональные вейвлеты с заданными свойствами. Использованию схем подразделений и вейвлетов в задачах геометрического моделирования посвящены, например статьи [4–9]. Схема подъема и схема подразделений позволяет построить параметрическое семейство биортогональных вейвлетов, которое предоставляет параметрическое семейство фильтров. Такое семейство было использовано в статье [10] в задаче подрисовки изображений и нужный вейвлет выбирается не из общих соображений, а из решения оптимизационной задачи. По схемам подразделений следует отметить монографию [11], в которой дакзываются основные результаты относящиеся к ним и работу [12], в которой исследуется сходимость схем.

В работах [13,14] изучаются основные на вейвлет-фреймах алгоритмы для 3D-реконструкции поверхности или области по облаку точек. Так, в работе [13] с помощью фреймов аппроксимируется характеристическая функция множества, граница которого представлена облаком точек, а в работе [14] также задача решается построением аппроксимации функции  $u(x, y, z)$  линейной комбинацией масштабирующих функций. Сама поверхность (граница области), построенная по облаку точек задается уравнением  $u(x, y, z) = 0$ . В обеих работах аппроксимация ищется с помощью алгоритма Брегмана. Недостаток метода, основанного на масштабирующих функциях состоит в том, что они редко когда известны в аналитическом виде и матрицу системы линейных уравнений составить затруднительно.

В настоящей работе на основе статей [13, 14] развивается метод реконструкции поверхности или области по облаку точек. В этом методе поверхность (область) описывается с помощью линейной комбинации масштабирующих функций, но при этом сами функции не находятся, а функция описывающая поверхность (область) находится через схему подразделений. Причем преобразование Фурье начальной последовательности к этой схеме определяется методом наименьших квадратов. Полученная линейная комбинация аппроксимирует характеристическую функцию множества, граница которого содержит данное облако точек. Все примеры, представленные в статье, созданы с использованием языка программирования Python и библиотек Numpy и Plotly. Облака точек, полученных лазерным сканированием, взяты с сайта [https://sites.cc.gatech.edu/projects/large\\_models/](https://sites.cc.gatech.edu/projects/large_models/).



## 2. СХЕМЫ ПОДРАЗДЕЛЕНИЙ. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

В данном разделе приводятся основные результаты, касающиеся стационарных схем подразделений, которые будут использованы в дальнейшем. Схема подразделений [11] определяется заданной последовательностью  $a = \{a_\alpha\}_{\alpha \in \mathbf{Z}^s}$ ,  $s \in \mathbf{N}$ . Мы будем предполагать, что  $\text{supp } a = \{\alpha : a_\alpha \neq 0\}$  – конечное множество. Обозначим  $l_\infty(\mathbf{Z}^s)$  линейное нормированное пространство ограниченных последовательностей  $v = \{v_\alpha\}_{\alpha \in \mathbf{Z}^s}$ , в котором норма определяется равенством  $\|v\|_\infty = \sup_{\alpha \in \mathbf{Z}^s} |v_\alpha|$ . Введем в рассмотрение оператор  $S_a : l_\infty(\mathbf{Z}^s) \rightarrow l_\infty(\mathbf{Z}^s)$ , который определим формулой  $(S_a v)_\alpha = \sum_{\beta \in \mathbf{Z}^s} a_{\alpha-2\beta} v_\beta$ ,  $v \in l_\infty(\mathbf{Z}^s)$ . Последовательность  $\{a_\alpha\}_{\alpha \in \mathbf{Z}^s}$  будем называть маской схемы подразделений, а  $S_a$  – оператором схемы подразделений.

**Определение 1.** [11] Будем говорить, что схема подразделений

$$v^m = S_a v^{m-1} = (S_a)^m v, \quad m = 1, 2, \dots, v^0 = v$$

сходится в  $l_\infty(\mathbf{Z}^s)$ , если существует непрерывная функция  $(S_a^\infty v) : \mathbf{R}^s \rightarrow \mathbf{R}$  такая, что

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} (S_a^m v) \left( \frac{\cdot}{2^m} \right) - v_\infty = 0. \quad (1)$$

Если функция  $(S_a^\infty v)$  удовлетворяет дополнительному свойству  $(S_a^\infty v)(k) = v_k$ ,  $k \in \mathbf{Z}^s$ , то она называется интерполяционной.

Следует заметить, что для интерполяционной схемы должно быть выполнено условие [11]  $a_{2k} = \delta_k$ , где  $\delta_k = 1$  при  $k = 0$  и  $\delta_k = 0$  в остальных случаях.

**Теорема 1.** (Необходимое условие сходимости схемы подразделений [11]) Пусть  $s = 1$ . Предположим, что схема подразделений сходится для некоторого  $v \in l_\infty(\mathbf{Z})$  и  $(S_a^\infty v) \not\equiv 0$ . Тогда маска удовлетворяет условию  $\sum_{\beta \in \mathbf{Z}} a_{2\beta} = 1$ ;  $\sum_{\beta \in \mathbf{Z}} a_{2\beta+1} = 0$ .

Введем в рассмотрение многочлен Лорана  $A(z) = \sum_{n \in \mathbf{Z}} a_n z^n$ . Тогда из необходимого условия сходимости схемы подразделений получаем:  $A(-1) = 0$ ;  $A(1) = 2$ . Из первого равенства следует, что, если маска имеет конечный носитель, т.е.  $A(z) = z^{-k} R(z)$ , где  $R(z)$  – многочлен, то этот многочлен делится нацело на  $(z+1)$ . Поэтому  $A(z) = (1+z)Q(z)$ ,  $Q(1) = 1$ . Пусть  $Q(z) = \sum_{n \in \mathbf{Z}} q_n z^n$  и  $q = \{q_n\}_{n \in \mathbf{Z}}$ .

**Теорема 2.** [12] Пусть  $s = 1$ . Схема  $S_a$  сходится при любом выборе начальной последовательности  $v^0$ , если существует  $L \in \mathbf{N}$  такое, что  $\|(S_q)^L\|_\infty < 1$ .

Если обозначить  $Q_L(z) = Q(z)Q(z^2)\dots Q(z^{2^{L-1}}) = \sum_j q_j^{[L]} z^j$ , то имеет место равенство [12]:

$$\|(S_q)^L\|_\infty = \max_{0 \leq i < 2^L} \sum_j |q_{i-j \cdot 2^L}^{[L]}|.$$



**Теорема 3.** [12] Пусть  $s = 1$  и  $A(z) = \left(\frac{1+z}{2}\right)^n Q(z)$ . Если  $S_q$  сходится при любом выборе начальной последовательности, то  $(S_a^\infty v) \in C^n(\mathbf{R})$  для любой начальной последовательности  $v$  и  $\frac{d^n}{dt^n}(S_a^\infty v)(t) = (S_b^\infty(\Delta^n v))(t)$ , где  $\Delta^n v = \Delta(\Delta^{n-1}v)$  и  $(\Delta^1 v)_k = v_k - v_{k-1}$ ,  $k \in \mathbf{Z}$ .

**Теорема 4.** [11] Предположим, что схема подразделений сходится для всех  $v \in l_\infty(\mathbf{Z}^s)$  и для некоторого  $v \in l_\infty(\mathbf{Z}^s)$  функция  $(S_a^\infty v) \neq 0$ . Тогда маска  $\{a_\alpha\}_{\alpha \in \mathbf{Z}^s}$  определяет единственную непрерывную функцию с компактным носителем  $\varphi = S_a^\infty \delta$ , удовлетворяющую условиям:

$$\varphi(t) = \sum_{\alpha \in \mathbf{Z}} a_\alpha \varphi(2t - \alpha), t \in \mathbf{R}^s, \quad \sum_{\alpha \in \mathbf{Z}} \varphi(t - \alpha) = 1, \forall t \in \mathbf{R}^s.$$

Более того,  $(S_a^\infty v)(t) = \sum_{\alpha \in \mathbf{Z}^s} v_\alpha \varphi(t - \alpha), t \in \mathbf{R}^s.$

### 3. ПРИМЕНЕНИЕ ДИСКРЕТНОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУРЬЕ К НАХОЖДЕНИЮ ИТЕРАЦИЙ СХЕМЫ ПОДРАЗДЕЛЕНИЙ

Пусть  $\lambda = \{\lambda_k\}_{k \in \mathbf{Z}^s}$ ,  $s \in \mathbf{N}$ . Определим последовательность

$$(\uparrow \lambda)_n = \begin{cases} \lambda_k, & n = 2k, k \in \mathbf{Z}^s; \\ 0, & n \neq 2k, k \in \mathbf{Z}^s. \end{cases}$$

Если  $\omega_m = e^{2\pi i/m}$ ,  $m \in \mathbf{N}$  и  $a = \{a_k\}_{k \in \mathbf{Z}^s}$  – периодическая последовательность  $a_{n+k} = a_k$ ,  $n = (n_1 \dots n_s)^T$ , для всех  $k \in \mathbf{Z}^s$ , то дискретное преобразование Фурье последовательности  $a$  определяется равенством [1]:

$$\hat{a}_{k_1, \dots, k_s} = \sum_{j_1=0}^{n_1-1} \dots \sum_{j_s=0}^{n_s-1} a_{j_1, \dots, j_s} \omega_{n_1}^{-j_1 \cdot k_1} \dots \omega_{n_s}^{-j_s \cdot k_s}$$

для  $0 \leq k_j < n_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, s$  и последовательность  $\hat{a}$  также является периодической. В дальнейшем периодическую последовательность будем указывать на периоде, т.е.  $a = \{a_{k_1, \dots, k_s}\}_{k_1=0, \dots, k_s=0}^{n_1-1, \dots, n_s-1}$ .

Обратное преобразование Фурье последовательности  $a$  определяется равенством:

$$a_{k_1, \dots, k_s} = \frac{1}{n_1 \dots n_s} \sum_{j_1=0}^{n_1-1} \dots \sum_{j_s=0}^{n_s-1} a_{j_1, \dots, j_s} \omega_{n_1}^{j_1 \cdot k_1} \dots \omega_{n_s}^{j_s \cdot k_s}$$



**Лемма 1.** Если задана периодическая последовательность  $a = \{a_{k_1, \dots, k_s}\}_{k_1, \dots, k_s=0}^{n_1-1, \dots, n_s-1}$ , то справедливо равенство

$$\widehat{\uparrow a_{k_1, \dots, k_s}} = \hat{a}_{k_1, \dots, k_s}, \quad k_j = 0, 1, \dots, 2n_s - 1, \quad j = 1, \dots, s.$$

**Доказательство.** Имеем

$$\begin{aligned} \widehat{\uparrow a_{k_1, \dots, k_s}} &= \sum_{j_1=0}^{2n_1-1} \dots \sum_{j_s=0}^{2n_s-1} (\uparrow a)_{j_1, \dots, j_s} \omega_{2n_1}^{-j_1 k_1} \dots \omega_{2n_s}^{-j_s k_s} = \\ &= \sum_{j_1=0}^{n_1-1} \dots \sum_{j_s=0}^{n_s-1} a_{j_1, \dots, j_s} \omega_{2n_1}^{-2j_1 k_1} \dots \omega_{2n_s}^{-2j_s k_s} = \sum_{j_1=0}^{n_1-1} \dots \sum_{j_s=0}^{n_s-1} a_{j_1, \dots, j_s} \omega_{n_1}^{-j_1 k_1} \dots \omega_{n_s}^{-j_s k_s} = \hat{a}_{k_1, \dots, k_s}. \end{aligned}$$

**Определение 2.** Пусть даны две периодические последовательности  $a = \{a_{k_1, \dots, k_s}\}_{k_1, \dots, k_s=0}^{n_1-1, \dots, n_s-1}$ ,  $b = \{b_{k_1, \dots, k_s}\}_{k_1, \dots, k_s=0}^{n_1-1, \dots, n_s-1}$ . Циклическая свертка таких последовательностей  $c = a * b$  представляет собой периодическую последовательность, которая определяется равенством

$$\begin{aligned} c_{k_1, \dots, k_s} &= \sum_{\lambda_1, \dots, \lambda_s=0}^{n_1-1, \dots, n_s-1} a_{k_1-\lambda_1, \dots, k_s-\lambda_s} b_{\lambda_1, \dots, \lambda_s} = \sum_{\lambda_1, \dots, \lambda_s=0}^{n_1-1, \dots, n_s-1} b_{k_1-\lambda_1, \dots, k_s-\lambda_s} a_{\lambda_1, \dots, \lambda_s}, \\ k_1 &= 0, 1, \dots, n_1 - 1, \dots, k_s = 0, 1, \dots, n_s - 1. \end{aligned}$$

Как известно [1], имеет место равенство  $\hat{c} = \hat{a} \cdot \hat{b}$ . Пусть  $D = (d_{k_1, \dots, k_s})_{k_1, \dots, k_s=0}^{n_1-1, \dots, n_s-1}$  и натуральные числа  $n_1, \dots, n_s$  являются четными. Введем обозначение

$$\begin{aligned} D_1 &= (d_{k_1, \dots, k_s})_{k_1, \dots, k_s=0}^{\frac{n_1-1}{2}, \dots, \frac{n_s-1}{2}}, \quad D_2 = (d_{k_1, \dots, k_s})_{k_1=\frac{n_1}{2}, k_2=0, \dots, k_s=0}^{n_1-1, \frac{n_2}{2}-1, \frac{n_3}{2}-1, \dots, \frac{n_s}{2}-1}, \dots, \\ D_{2^s-1} &= (d_{k_1, \dots, k_s})_{k_1=\frac{n_1}{2}, \dots, k_{s-1}=\frac{n_{s-1}}{2}, k_s=0}^{n_1-1, \dots, n_{s-1}-1, \frac{n_s}{2}-1}, \quad D_{2^s} = (d_{k_1, \dots, k_s})_{k_1=\frac{n_1}{2}, \dots, k_s=\frac{n_s}{2}}^{n_1-1, \dots, n_s-1}. \end{aligned}$$

При этом  $D_{i,k} = (D_i)_k$ .

**Лемма 2.** Если дано преобразование вида

$$c^j = (\uparrow c^{j-1}) * a^j, \quad j = 1, 2, \dots, \quad (1)$$

где  $a^j$  – заданная последовательность и  $C^j = \widehat{c^j}$ ,  $A^j = \widehat{a^j}$ , то

$$C_{\alpha_1, \dots, \alpha_j}^j = A_{\alpha_1, \dots, \alpha_j}^j \cdot A_{\alpha_2, \dots, \alpha_j}^{j-1} \cdot \dots \cdot A_{\alpha_j}^1 \cdot C^0, \quad \alpha_1, \dots, \alpha_j = 1, 2, \dots, 2^s. \quad (2)$$

**Доказательство.** Согласно лемме 1, для преобразования (1) получим (произведение поэлементное)

$$C_{\alpha_1}^j = A_{\alpha_1}^j \cdot C_{\alpha_1}^{j-1}, \quad \alpha_1 = 1, 2, \dots, 2^s.$$

Отсюда получаем утверждение леммы.

Заметим, что в схемах подразделений используются не циклические, а линейные свертки. Определение итераций схем подразделений с помощью дискретного преобразования Фурье дается следующей теоремой.

**Теорема 5.** Пусть дана схема подразделений  $x^\lambda = a * (\uparrow x^{\lambda-1})$ ,  $\lambda = 1, \dots, j$ , где

$$x^0 = \{x_{\beta_1, \dots, \beta_s}^0\}_{\beta_1, \dots, \beta_s \in \mathbb{Z}}, \quad \text{supp } x^0 \subset \prod_{\beta=1}^s [k_{\beta,0}^0, k_{\beta,1}^0] \cap \mathbb{Z}^s,$$

$$a = \{a_{\beta_1, \dots, \beta_s}\}_{\beta_1, \dots, \beta_s \in \mathbb{Z}}, \quad \text{supp } a \subset [-r; r]^s.$$

Если  $n_\beta^0 = k_{\beta,1}^0 - k_{\beta,0}^0 + 2r$ ,  $n_\beta^\lambda = 2^\lambda n_\beta^0$ ,  $k_{\beta,0}^\lambda = 2k_{\beta,0}^{\lambda-1} - r$ ,  $k_{\beta,1}^\lambda = 2k_{\beta,1}^{\lambda-1} + r$  и периодическую последовательность  $a^\lambda$  на множестве  $\prod_{\beta=1}^s [0; n_\beta^\lambda - 1] \cap \mathbb{Z}^s$  определить равенством

$$a_{\alpha_1, \dots, \alpha_s}^\lambda = \begin{cases} a_{\alpha_1-r, \dots, \alpha_s-r}, & \alpha_\beta = 0, 1, \dots, 2r, \beta = 1, \dots, s; \\ 0, & 2r+1 \leq \alpha_\beta \leq n_\beta^\lambda - 1, \beta = 1, \dots, s, \end{cases} \quad \lambda = 0, 1, \dots, j,$$

то  $x_{\alpha_1, \dots, \alpha_s}^j = y_{\alpha_1-k_{1,0}^j, \dots, \alpha_s-k_{s,0}^j}^j$ ,  $\alpha_\beta \in [k_{\beta,0}^j; k_{\beta,1}^j]$ ,  $\beta = 1, \dots, s$ , где  $y^j = Y^{\uparrow j}$ ,

$$Y_{\alpha_1, \dots, \alpha_j}^j = A_{\alpha_1, \dots, \alpha_j}^j \cdot A_{\alpha_2, \dots, \alpha_j}^{j-1} \cdot \dots \cdot A_{\alpha_j}^1 \cdot Y^0, \alpha_1, \dots, \alpha_j = 1, 2, \dots, 2^s, Y^0 = \widehat{y}^0,$$

и  $y_{\alpha_1, \dots, \alpha_s}^0 = x_{\alpha_1+k_{1,0}^0, \dots, \alpha_s+k_{s,0}^0}^0$ ,  $\alpha_\beta = 0, 1, \dots, n_\beta^0 - 1$ .

**Доказательство.** В схеме подразделений

$$x_{\alpha_1, \dots, \alpha_s}^\lambda = \sum_{\beta_1, \dots, \beta_s} a_{\alpha_1-2\beta_1, \dots, \alpha_s-2\beta_s} x_{\beta_1, \dots, \beta_s}^{\lambda-1} = \sum_{\beta_1, \dots, \beta_s} a_{\alpha_1-\beta_1, \dots, \alpha_s-\beta_s} (\uparrow x^{\lambda-1})_{\beta_1, \dots, \beta_s},$$

которую можно записать в виде  $x^\lambda = a * (\uparrow x^{\lambda-1})$ , ненулевые значения  $x_{\alpha_1, \dots, \alpha_s}^\lambda$  могут быть получены лишь при  $\alpha_\beta \in [k_{\beta,0}^\lambda; k_{\beta,1}^\lambda]$ , где  $k_{\beta,0}^\lambda = 2k_{\beta,0}^{\lambda-1} - r$ ,  $k_{\beta,1}^\lambda = 2k_{\beta,1}^{\lambda-1} + r$ . Таким образом,

$$k_{\beta,0}^\lambda = 2k_{\beta,0}^{\lambda-1} - r = 2^2 k_{\beta,0}^{\lambda-2} - 2r - r = \dots = 2^\lambda k_{\beta,0}^0 - r \sum_{k=0}^{\lambda-1} 2^k = 2^\lambda k_{\beta,0}^0 - r(2^\lambda - 1),$$

$$k_{\beta,1}^\lambda = 2k_{\beta,1}^{\lambda-1} + r = 2^2 k_{\beta,1}^{\lambda-2} + 2r + r = \dots = 2^\lambda k_{\beta,1}^0 + r \sum_{k=0}^{\lambda-1} 2^k = 2^\lambda k_{\beta,1}^0 + r(2^\lambda - 1).$$



Рассмотрим преобразование

$$\begin{aligned} y_{\alpha_1, \dots, \alpha_s}^\lambda &= \sum_{\beta_1=0}^{n_1^\lambda-1} \dots \sum_{\beta_s=0}^{n_s^\lambda-1} (\uparrow y^{\lambda-1})_{\beta_1, \dots, \beta_s} a_{\alpha_1-\beta_1, \dots, \alpha_s-\beta_s}^\lambda = \\ &= \sum_{\beta_1, \dots, \beta_s=0}^{2r} (\uparrow y^{\lambda-1})_{\alpha_1-\beta_1, \dots, \alpha_s-\beta_s} a_{\beta_1, \dots, \beta_s} = \sum_{\beta_1, \beta_2=-r}^r (\uparrow y^{\lambda-1})_{\alpha_1-r-\beta_1, \dots, \alpha_s-r-\beta_s} a_{\beta_1, \dots, \beta_s}, \end{aligned}$$

где  $n_\beta^\lambda = 2n_\beta^{\lambda-1}$ ,  $\beta = 1, \dots, s$ . Пусть  $\text{supp } y^{\lambda-1} \subset \prod_{\beta=1}^s [\eta^{\lambda-1}; \eta^{\lambda-1} + L_s^{\lambda-1}]$ . Тогда ненулевые значения  $y_{\alpha_1, \dots, \alpha_s}^\lambda$  могут получаться только при  $2\eta^{\lambda-1} \leq \alpha_\mu - r - \beta_\mu \leq 2\eta^{\lambda-1} + 2L_\mu^{\lambda-1}$ , т.е. при  $\eta^\lambda \leq \alpha_\mu \leq \eta^\lambda + L_\mu^\lambda$ , где  $\eta^\lambda = 2\eta^{\lambda-1}$ ,  $L_\mu^\lambda = 2L_\mu^{\lambda-1} + 2r$ .

Пусть  $\eta^0 = 0$  и  $L_\beta^0 = k_{\beta,1}^0 - k_{\beta,0}^0$ ,  $n_\beta^0 = L_\beta^0 + 2r$ ,  $\beta = 1, \dots, s$ . Тогда  $\eta^\lambda = 0$ ,  $\forall \lambda$  и  $n_\beta^\lambda = 2^\lambda n_\beta^0 = 2^\lambda L_\beta^0 + 2^{\lambda+1} r$ . С другой стороны

$$\begin{aligned} L_\beta^\lambda &= 2L_\beta^{\lambda-1} + 2r = 2^2 L_\beta^{\lambda-2} + 2^2 r + 2r = \dots = 2^\lambda L_\beta^0 + \sum_{k=1}^{\lambda} 2^k r = \\ &= 2^\lambda L_\beta^0 + 2r \sum_{k=1}^{\lambda} 2^{k-1} = 2^\lambda L_\beta^0 + 2r(2^\lambda - 1) < n_\beta^\lambda - 1. \end{aligned}$$

Пусть  $y_{\alpha_1, \dots, \alpha_s}^0 = x_{\alpha_1+k_{1,0}^0, \dots, \alpha_s+k_{s,0}^0}^0$ ,  $\alpha_\beta = 0, 1, \dots, n_\beta^0 - 1$ . Замечая, что при  $\alpha_s - \beta_s = 2\gamma_s$ ,  $s = 1, 2$

$$(\uparrow x^0)_{\alpha_1-\beta_1, \dots, \alpha_s-\beta_s} = x_{\gamma_1, \dots, \gamma_s}^0 = y_{\gamma_1-k_{1,0}^0, \dots, \gamma_s-k_{s,0}^0}^0 = (\uparrow y^0)_{\alpha_1-\beta_1-k_{1,0}^0-r, \dots, \alpha_s-\beta_s-k_{s,0}^0-r},$$

получаем  $x_{\alpha_1, \dots, \alpha_s}^1 = y_{\alpha_1-k_{1,0}^1, \dots, \alpha_s-k_{s,0}^1}^1$ . Продолжая рассуждение, находим  $x_{\alpha_1, \dots, \alpha_s}^j = y_{\alpha_1-k_{1,0}^j, \dots, \alpha_s-k_{s,0}^j}^j$ . Тот факт, что  $y^j = \tilde{Y}^j$  следует из леммы 2.

## 4. ОПРЕДЕЛЕНИЕ НАЧАЛЬНОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ СХЕМЫ ПОДРАЗДЕЛЕНИЙ

В данном разделе использованы обозначения из теоремы 5. Пусть известны значения  $f_l$  некоторой функции в точках  $2^{-j}l$ ,  $l \in \mathbf{Z}^s$ ,  $j \in \mathbf{N}$ , при этом  $\text{supp } f \subset \prod_{\beta=1}^s [k_{\beta,0}^j; k_{\beta,1}^j] \cap \mathcal{Z}^s$ . Будем искать начальную последовательность  $x^0$  схемы подразделений  $x^\lambda = a^*(\uparrow x^{\lambda-1})$ ,  $x^0 = x$ ,  $\lambda = 1, 2, \dots, j$  из условия

$$x^0 = \arg \min_x x^j - f^2, \text{supp } x \subset \prod_{\beta=1}^s [k_{\beta,1}^0; k_{\beta,0}^0]. \quad (3)$$

Введем в рассмотрение последовательности  $F = \widehat{f_{\cdot+k_0^j}}$ , где  $k_0^j = (k_{1,0}^j, \dots, k_{s,0}^j)$  и  $(f_{\cdot+k_0^j})_{\alpha_1, \dots, \alpha_s} = f_{\alpha_1+k_{1,0}^j, \dots, \alpha_s+k_{s,0}^j}$ ,  $\alpha_\beta = 0, 1, \dots, n_\beta^j - 1$ ,  $\beta = 1, \dots, s$ . Тогда вместо задачи (3) можно рассмотреть задачу  $Y^0 = \arg \min_{y^0} F - Y^{j2}$ . Как показано в теореме 5

$$Y_{\alpha_1, \dots, \alpha_j}^j = A_{\alpha_1, \dots, \alpha_j}^j \cdot A_{\alpha_2, \dots, \alpha_j}^{j-1} \cdot \dots \cdot A_{\alpha_j}^1 \cdot Y^0, \alpha_\beta = 1, \dots, 2^s, \beta = 1, \dots, j.$$

Если обозначить  $Q_{\alpha_1, \dots, \alpha_j} = A_{\alpha_1, \dots, \alpha_j}^j \cdot A_{\alpha_2, \dots, \alpha_j}^{j-1} \dots A_{\alpha_j}^1$ , то можно рассмотреть переопределенную систему линейных уравнений

$$Q_{\alpha_1, \dots, \alpha_j} \cdot Y^0 = F_{\alpha_1, \dots, \alpha_j}, \alpha_\beta = 1, \dots, 2^s, \beta = 1, \dots, j. \quad (4)$$

При этом нужно заметить, что в левой части каждого уравнения произведение поэлементное. Если обозначить  $\bar{Y}^0$ ,  $\bar{F}_{\alpha_1, \dots, \alpha_j}$ ,  $\bar{Q}_{\alpha_1, \dots, \alpha_j}$  – вектор-столбцы, в которых в некотором порядке (одинаковом) перечислены все элементы  $Y^0$ ,  $F_{\alpha_1, \dots, \alpha_j}$  и  $Q_{\alpha_1, \dots, \alpha_j}$ , соответственно, а  $\bar{Q}_{\alpha_1, \dots, \alpha_j} = \text{diag } \bar{Q}_{\alpha_1, \dots, \alpha_j}$  – диагональная матрица, у которой на диагонали стоят элементы вектор-столбца  $\bar{Q}_{\alpha_1, \dots, \alpha_j}$ , то каждое уравнение (4) можно записать в матричном виде  $\bar{Q}_{\alpha_1, \dots, \alpha_j} \bar{Y}^0 = \bar{F}_{\alpha_1, \dots, \alpha_j}$ .

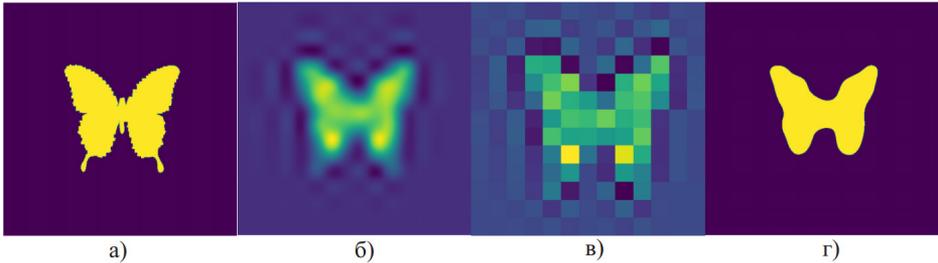


Рис. 1. Последовательности а)  $f$ , б)  $x^7$ , в)  $x^2$ , г)  $x_\theta^7$ , для  $\theta = 0,5$

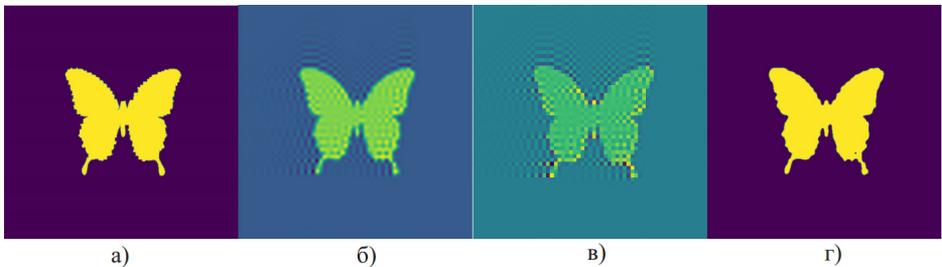


Рис. 2. Последовательности а)  $f$ , б)  $x^7$ , в)  $x^4$ , г)  $x_\theta^7$ , для  $\theta = 0,4$

Обозначим  $B$  – блочную матрицу, блоки которой представляют собой матрицы  $\bar{Q}_{\alpha_1, \dots, \alpha_j}$ , расположенные друг под другом. соответственно,  $\bar{F}$



– вектор-столбец, у которого  $\bar{F}_{\alpha_1, \dots, \alpha_j}$  расположены друг под другом. Таким образом,  $Y^0 = \arg \min_y F - Y^{j2}$  представляет собой решение методом наименьших квадратов системы линейных уравнений  $B\bar{Y}^0 = \bar{F}$ . Отсюда  $\bar{Y}^0 = (B^T B)^{-1} B^T \bar{F}$ . Заметим, что  $B^T B$  представляет собой диагональную матрицу, у которой на главной диагонали перечислены все элементы  $\sum_{\beta_1, \dots, \beta_j=1}^{2^j} Q_{\beta_1, \dots, \beta_j} \cdot Q_{\beta_1, \dots, \beta_j}$ , где произведение поэлементное. Поэтому, если под « $\cdot$ » и « $/$ » понимать поэлементное умножение и деление, то

$$Y^0 = \frac{\sum_{\beta_1, \dots, \beta_j=1}^{2^j} Q_{\beta_1, \dots, \beta_j} \cdot F_{\beta_1, \dots, \beta_j}}{\sum_{\beta_1, \dots, \beta_j=1}^{2^j} Q_{\beta_1, \dots, \beta_j} \cdot Q_{\beta_1, \dots, \beta_j}}.$$

Искомая начальная последовательность  $x^0$  определяется равенством:

$$x_{\alpha_1, \dots, \alpha_s}^0 = y_{\alpha_1 - k_{10}^0, \dots, \alpha_s - k_{s,0}^0}^0, y^0 = \bar{Y}^0.$$

В примере, представленном на рис. 1 рассматривалась схема подразделений  $x^\lambda = a * (\uparrow x^{\lambda-1})$ ,  $\lambda = 3, \dots, 7$ . Заданная последовательность  $f$ , которая принимает значения 0 и 1 в точках  $(2^{-7} l_1, 2^{-7} l_2)$ ,  $l_1, l_2 \in \mathbf{Z}$ , представлена на рис. 1 а). Последовательность  $x^7$  и последовательность  $x^2$ , найденная с помощью дискретного преобразования Фурье, представлены на рис. 1 б), в) соответственно. На рис. 1 г) представлена последовательность  $x_\theta^7 = \begin{cases} 1, x^7 > \theta; \\ 0, x^7 \geq \theta \end{cases}$  для  $\theta = 0, 5$ . Аналогичные последовательности для схемы подразделений  $x^\lambda = a * (\uparrow x^{\lambda-1})$ ,  $\lambda = 5, \dots, 7$  и  $\theta = 0, 4$  представлены на рис. 2. В обоих примерах использовалась маска  $a = u \otimes u$ , где  $u = \left( \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{4}, 0 \right)$ .

## 5. МОДЕЛИРОВАНИЕ ПОВЕРХНОСТИ И ОБЛАСТИ ПО ОБЛАКУ ТОЧЕК

Пусть задано множество точек  $P = \{p_i\}_{i=1}^N \subset \mathbf{Z}^s$ , и  $1_P$  – характеристическая функция множества  $P$ . Для  $\varepsilon > 0$  определим последовательность

$$f_l^\varepsilon = \min \left( (1_{U_\varepsilon(0)} * 1_P)_l, 1 \right), l \in \mathbf{Z}^s, \quad (5)$$

где  $U_\varepsilon(0) = \{l \in \mathbf{Z}^s : l < \varepsilon\}$ . Здесь нужно отметить следующее. В статье [13] предлагается сначала построить функцию, значение которой в каждой точке  $\mathbf{Z}^s$  равно расстоянию от этой точки до множества  $P$  и с помощью нее определять уже характеристическую функцию области. Построение такой функции занимает существенно больше времени, чем построение функции (5). Если  $f^\varepsilon$  задает границу замкнутой

области  $D$ , то для получения характеристической функции  $1_D$  этой замкнутой области в статье использовался морфологический алгоритм заполнения области.

Пусть выбран кратномасштабный анализ [1] с масштабной последовательностью  $u$  и масштабирующей функцией  $\varphi = S^\infty \delta \in C^r(\mathbf{R})$ . Рассмотрим схему подразделений  $x^\lambda = a^*(\uparrow x^{\lambda-1})$ ,  $\lambda = 1, \dots, j$ , где  $a = u \otimes \dots \otimes u$ . Последовательность  $x^0$  будем находить методом, описанным в предыдущем разделе, где в качестве последовательности  $f$  используется  $1_D$ . В этом случае, по теореме 4, функция

$$(S^\infty x^0)(t) = \sum_{\alpha \in \mathbf{Z}^s} x_\alpha^0 (\varphi \otimes \dots \otimes \varphi)(t - \alpha), \quad t \in \mathbf{R}^s$$

является гладкой аппроксимацией функции  $1_D$ . Соответственно область  $D$  можно описать неравенством  $(S^\infty x^0)(t) \geq \eta$ , где  $\eta \in (0; 1)$ .

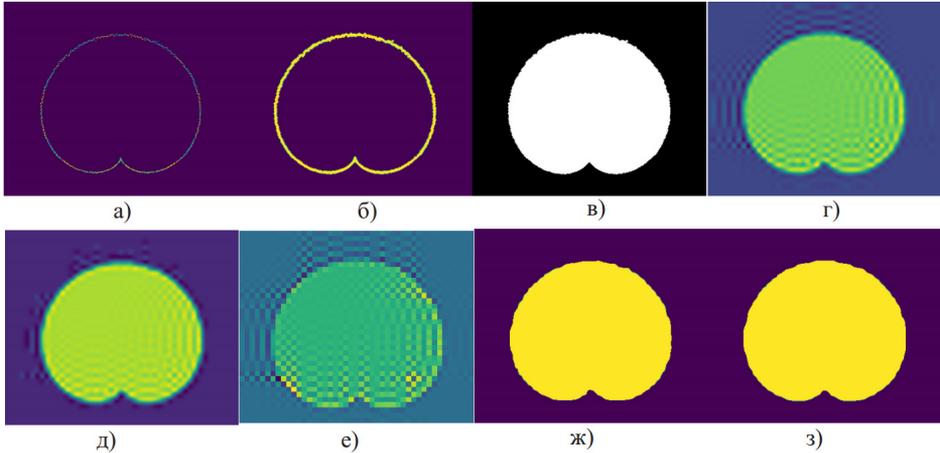


Рис. 3. а) Данное множество точек  $P$ , б) последовательность  $f^\varepsilon$  для  $\varepsilon = 3$   
в) характеристическая функция  $1_D$  области  $D$ , граница которой представлена заданным множеством точек  $P$ , г) последовательность  $x^6$ , д) последовательность  $x^6$  после обнуления части вейвлет-коэффициентов, е) последовательность  $x^3$ , ж) последовательность  $x_\theta^6$  для  $\theta = 0, 4$ , з) последовательность  $x_\theta^6$  для  $\theta = 0, 4$  при обнулении части вейвлет-коэффициентов

Пример моделирования области на плоскости представлен на рис. 3, где на рис. 3 а) показано исходное множество точек, на рис. 3 б) последовательность  $f^\varepsilon$ , а на рис. 3 в) характеристическая функция замкнутой области, граница которой определяется  $f^\varepsilon$ . В этом примере рассматривалась схема подразделений  $x^\lambda = a^*(\uparrow x^{\lambda-1})$ ,  $\lambda = 4, \dots, 6$  и для нахождения начальной последовательности  $x^3$  использовалась характеристическая функция  $1_D$ . На рис. 3 г) представлена последовательность  $x^6$ , а найденная с помощью дискретного преобразования Фурье последовательность  $x^3$ , показана на рис. 3 е). На рис. 3 ж) представлена последовательность  $x_\theta^6$  для  $\theta = 0, 4$ .



Для достижения еще больших сглаживающих эффектов, можно использовать алгоритм вейвлет-разложения [1,2] последовательности  $x^6$  с последующим обнулением вейвлет-коэффициентов по модулю меньших заданного порога и вейвлет-восстановлением [1,2]. Так на рис. 3 д), з) представлены последовательности  $x^6$  и  $x^6_\theta$  после обнуления части вейвлет-коэффициентов.

Примеры моделирования трехмерной области показаны на рис. 4 и 5. В обоих случаях рассматривалась схема подразделений  $x^\lambda = a * (\uparrow x^{\lambda-1})$ ,  $\lambda = 4, \dots, 6$ . На рис. а) показано данное облако точек, на рис. б) представлена характеристическая функция области, на рис. в) и г) показана последовательность  $x^6$  до и после обнуления части вейвлет-коэффициентов.

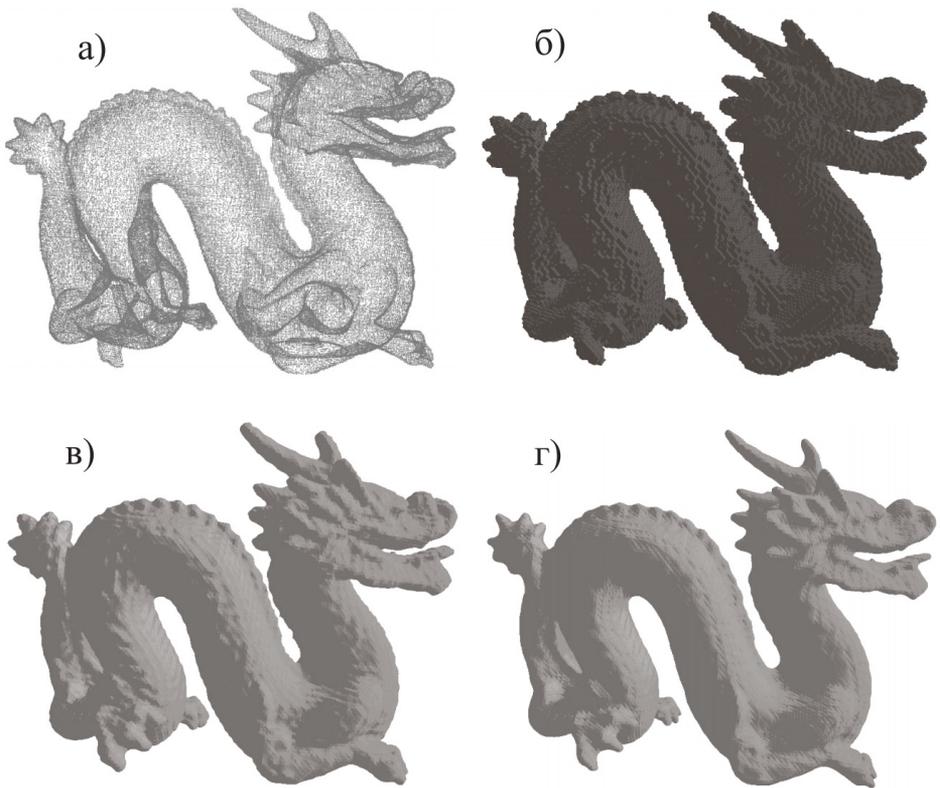


Рис. 4 а) Данное множество точек Р, б) характеристическая функция  $1_D$ ,  $1_{D^c}$  области  $D$ , граница которой представлена заданным множеством точек Р, в) последовательность  $x^6$ , д) последовательность  $x^6$  после обнуления части вейвлет-коэффициентов

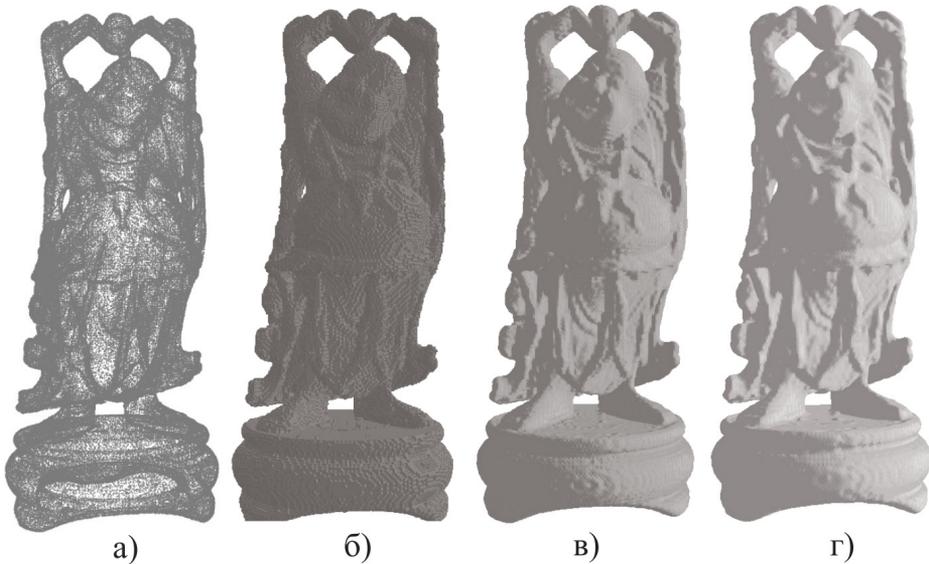


Рис. 5 а) Данное множество точек  $P$ , б) характеристическая функция  $1_D$  области  $D$ , граница которой представлена заданным множеством точек  $P$ , в) последовательность  $x^6$ , д) последовательность  $x^6$  после обнуления части вейвлет-коэффициентов

## 6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной статье представлено развитие метода геометрического моделирования, основанного на схемах подразделений. Нужно заметить, что к таким схемам относятся часто используемые в задачах геометрического моделирования В-сплайн кривые и поверхности, поскольку сами В-сплайны могут быть получены через схемы подразделений. Статья опирается на результаты, полученные в работах [13,14]. Представлен способ нахождения начальной последовательности схемы посредством дискретного преобразования Фурье и метода наименьших квадратов (МНК). Следует отметить, что без преобразования использовать МНК затруднительно, поскольку размеры матриц велики, а с преобразованием Фурье МНК записывается в очень простой форме и построение матрицы как таковой не требуется.

### *Литература*

1. Frazier Michael W. An introduction to wavelets through linear algebra. 1999. Springer. 503 p.
2. Бламмер К. Вейвлет-анализ. Основы теории. Москва, 2004. – 280 с.
3. Sweldens Wim, The lifting scheme: A custom-design construction of biorthogonal wavelets. Applied and Computational Harmonic Analysis, volume3, issue 2, 1996, pp. 186–200.
4. Hering-Bertram Martin, Duchaineau Mark, Hamann Bernd and Joy Kenneth. Generalized B-Spline Subdivision-Surface Wavelets for Geometry Compression. IEEE transactions on visualization and computer graphics. (2004) 10. pp. 326–38.



5. *Lounsbery John*. Multiresolution Analysis for Surfaces of Arbitrary Topological Type. ACM Transactions on Graphics (TOG), volume 16, issue 1, 1994, pp. 34–73
6. *Derose T., Kass Michael and Truong Tien*. Subdivision Surfaces in Character Animation. Seminal Graphics Papers: Pushing the Boundaries, Volume 2, 2023, pp. 801–810
7. *Stollnitz Eric, Derose T. and Salesin David*. Wavelets for Computer Graphics: A Primer Part 1. IEEE Computer Graphics and Applications, volume: 15, issue: 3, May 1995, pp. 1–8.
8. *Stollnitz, Eric and Derose, T. and Salesin, David*. Wavelets for Computer Graphics: A Primer, Part 2. Computer Graphics and Applications, IEEE. 15. 1995, pp. 75–85.
9. *Hassan Mohamed and Dodgson Neil*. Reverse Subdivision, Advances in Multiresolution for Geometric Modelling 2005, pp. 271–283.
10. *Битюков Ю.И., Битюков П.Ю.* Построение параметрического семейства вейвлетов и использование его в обработке изображений Моделирование и анализ данных, 2023, Том 13, № 4 С. 7–22.
11. *Cavaretta A.S., Dahmen W., and Micchelli C. A.*, Stationary Subdivision Schemes, Mem. Amer. Math. Soc. 93, pp. 1–186.
12. *Nira Dyn*, Analysis of Convergence and Smoothness by the Formalism of Laurent Polynomials. Tutorials on Multiresolution in Geometric Modelling, 2002, pp. 51–68.
13. *Dong Bin and Shen Zuowei*. Wavelet Frame Based Surface Reconstruction from Unorganized Points. Journal of Computational Physics. 2011, 230, pp. 8247–8255.
14. *Dong Bin and Shen Zuowei*. MRA-Based Wavelet Frames and Applications. IAS Lecture Note Series, 2013, p. 156.



# On the Use of the Discrete Fourier Transform in Subdivision Schemes

***Yuri I. Bityukov\****

Moscow Aviation Institute (National Research University) (MAI)  
Moscow, Russian Federation  
ORCID: <https://orcid.org/0009-0008-6384-0564>  
e-mail: [yib72@mail.ru](mailto:yib72@mail.ru)

***Pavel Y. Bityukov\*\****

Moscow Power Engineering Institute (National Research University) (MPEI)  
Moscow, Russian Federation  
ORCID: <https://orcid.org/0009-0000-8697-7047>  
e-mail: [p.bityukoff@yandex.ru](mailto:p.bityukoff@yandex.ru)

The article is devoted to the development of the method of geometric modeling based on subdivision schemes and the application of this method to the parametric description of a surface or an area from a point cloud obtained by any method. To find the initial sequence of the scheme of subdivisions, the method of least squares is used, but its direct use is difficult due to the huge size of the matrices. Since subdivision schemes are based on sequence convolutions, a discrete Fourier transform is used to eliminate the matrix size problem, and the method of least squares is not the initial sequence itself, but its Fourier transform.

**Keywords:** subdivision schemes, wavelet, discrete Fourier transform, geometric modeling.

## **For citation:**

Bityukov Yu.I., Bityukov P.Yu. On the Use of the Discrete Fourier Transform in Subdivision Schemes. *Modelirovanie i analiz dannykh = Modelling and Data Analysis*, 2024. Vol. 14, no. 4, pp. 30–44. DOI: <https://doi.org/10.17759/mda.2024140402> (In Russ., abstr. in Engl.).

## **References**

1. *Frazier Michael W.* An introduction to wavelets through linear algebra. 1999. Springer. 503 p.
2. *Blatter K.* Vejvlet-analiz. Osnovy teorii. Moskva, 2004. – 280 p. (In Russ)
3. *Sweldens Wim,* The lifting scheme: A custom-design construction of biorthogonal wavelets. Applied and Computational Harmonic Analysis, volume3, issue 2, 1996, pp. 186–200.

\***Yuri I. Bityukov**, Doctor of Technical Sciences, Professor of the Department of Probability Theory and Computer Modeling, Moscow Aviation Institute (National Research University) (MAI), Moscow, Russian Federation, ORCID: <https://orcid.org/0009-0008-6384-0564>, e-mail: [yib72@mail.ru](mailto:yib72@mail.ru)

\*\***Pavel Y. Bityukov**, Master's Student, Moscow Power Engineering Institute (National Research University) (MPEI), Moscow, Russian Federation, ORCID: <https://orcid.org/0009-0000-8697-7047>, e-mail: [p.bityukoff@yandex.ru](mailto:p.bityukoff@yandex.ru)



4. *Hering-Bertram Martin, Duchaineau Mark, Hamann Bernd and Joy Kenneth.* Generalized B-Spline Subdivision-Surface Wavelets for Geometry Compression. IEEE transactions on visualization and computer graphics. (2004) 10. pp. 326–38.
5. *Lounsbery John.* Multiresolution Analysis for Surfaces of Arbitrary Topological Type. ACM Transactions on Graphics (TOG), volume 16, issue 1, 1994, pp. 34–73.
6. *Derose T., Kass Michael and Truong Tien.* Subdivision Surfaces in Character Animation. Seminal Graphics Papers: Pushing the Boundaries, Volume 2, 2023, pp. 801–810.
7. *Stollnitz Eric, Derose T. and Salesin David.* Wavelets for Computer Graphics: A Primer Part 1. IEEE Computer Graphics and Applications, volume: 15, issue: 3, May 1995, pp. 1–8.
8. *Stollnitz, Eric and Derose, T. and Salesin, David.* Wavelets for Computer Graphics: A Primer, Part 2. Computer Graphics and Applications, IEEE. 15. 1995, pp. 75–85.
9. *Hassan Mohamed and Dodgson Neil.* Reverse Subdivision, Advances in Multiresolution for Geometric Modelling 2005, pp. 271–283.
10. *Битюков Ю.И., Битюков П.Ю.* Построение параметрического семейства вейвлетов и использование его в обработке изображений. Моделирование и анализ данных, 2023, Том 13, № 4, pp. 7–22.
11. *Cavaretta A.S., Dahmen W., and Micchelli C. A.,* Stationary Subdivision Schemes, Mem. Amer. Math. Soc. 93, pp. 1–186.
12. *Nira Dyn,* Analysis of Convergence and Smoothness by the Formalism of Laurent Polynomials. Tutorials on Multiresolution in Geometric Modelling, 2002, pp. 51–68.
13. *Dong Bin and Shen Zuowei.* Wavelet Frame Based Surface Reconstruction from Unorganized Points. Journal of Computational Physics. 2011, 230, pp. 8247–8255.
14. *Dong Bin and Shen Zuowei.* MRA-Based Wavelet Frames and Applications. IAS Lecture Note Series, 2013, p. 156.

Получена 19.11.2024

Принята в печать 03.12.2024

Received 19.11.2024

Accepted 03.12.2024

## Метод синтеза поведения когнитивного агента на основе обработки мультимодальных сигналов

**Вейценфельд Д.А.\***

Российский Университет Дружбы Народов им. Патриса Лумумбы (РУДН)  
г. Москва, Российская Федерация  
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-2787-0714>  
e-mail: [veicenfeld@isa.ru](mailto:veicenfeld@isa.ru)

**Киселёв Г.А.\*\***

Федеральный Исследовательский Центр  
«Информатика и Управление» Российской Академии Наук (ФИЦ ИУ РАН)  
г. Москва, Российская Федерация  
Российский Университет Дружбы Народов им. Патриса Лумумбы (РУДН)  
г. Москва, Российская Федерация  
ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-9231-8662>  
e-mail: [kiselev@isa.ru](mailto:kiselev@isa.ru)

В статье рассматривается проблема прогнозирования деятельности агента исходя из текстового описания задачи и визуального анализа среды. Предложено обновление подходов классической когнитивной архитектуры, позволяющее применять её в реальной среде. Разработано дополнение семиотического метода символического обозначения авторским нейросетевым механизмом связывания векторов текстового и визуального пространств. Проведен ряд экспериментов с полученной моделью в комплексной среде эмулятора вождения автомобиля.

**Ключевые слова:** Планирование поведения, обучение с подкреплением, когнитивные архитектуры, оценка ситуации, мультимодальный анализ.

**Благодарности.** Публикация выполнена при поддержке Программы стратегического академического лидерства РУДН, проект № 021934-0-000. Работа выполнялась с использованием инфраструктуры Центра коллективного пользования «Высокопроизводительные вычисления и большие данные» (ЦКП «Информатика») ФИЦ ИУ РАН (г. Москва).

**Для цитаты:**

Вейценфельд Д.А., Киселев Г.А. Метод создания поведения когнитивных агентов на основе обработки мультимодальных сигналов // Моделирование и анализ данных. 2024. Том 14. № 4. С. 45–62. DOI: <https://doi.org/10.17759/mda.2024140403>



**\*Вейценфельд Даниил Анатольевич**, студент магистратуры, Российский Университет Дружбы Народов им. Патриса Лумумбы (РУДН), г. Москва, Российская Федерация, ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-2787-0714>, e-mail: [veicenfeld@isa.ru](mailto:veicenfeld@isa.ru)

**\*\*Киселев Глеб Андреевич**, кандидат технических наук, научный сотрудник, Федеральный Исследовательский Центр «Информатика и Управление» Российская Академия Наук (ФИЦ ИУ РАН); старший преподаватель, Российский Университет Дружбы Народов им. Патриса Лумумбы (РУДН), г. Москва, Российская Федерация, ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-9231-8662>, e-mail: [kiselev@isa.ru](mailto:kiselev@isa.ru)

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Когнитивные архитектуры предназначены для повышения автономности робототехнических платформ и позволяют им выполнять сложные задачи без человеческого вмешательства. Архитектура должна обеспечивать сложное поведение агента, при наличии группы, осуществлять внутригрупповую коммуникацию и оптимизировать деятельность агентов [1–6]. Интеллектуальный подход к разработке архитектур является актуальной задачей и требует решения множества междисциплинарных проблем. Обычно, структура когнитивных архитектур делится на три уровня контроля поведения: стратегический, тактический и реактивный [7]. Эти уровни реализованы в одной из наиболее перспективных архитектур на сегодняшний день [8], в которой продемонстрированы особенности взаимодействия методов интеллектуального управления, планирования траекторий и поведения. Однако, в предыдущих исследованиях, посвященных архитектуре, недостаточно внимания уделялось реализации функций межмодальных взаимосвязей, представляя этот механизм в виде абстрактных математических переходов между типами данных.

Цель данной работы заключается в предложении методов программной реализации функций-переходов для межмодальных взаимосвязей системы на основе современных методов представления знаний. Подцелями являются описание реализации функции создания последовательности целенаправленных действий когнитивного агента с описываемой архитектурой и ознакомление с методами решения ряда технических проблем, возникающих при реализации действий на робототехническом агенте.

Большинство современных когнитивных архитектур имеет модульную иерархическую структуру [9], где каждый уровень отвечает за выполнение определенных робототехнических функций. В настоящей работе представлен способ верхнеуровневого планирования действий, распознавание команд на естественном языке и анализ изображения с камер агента. Решается задача поиска оптимального поведения на основе сформулированной на естественном языке цели в неизвестной заранее агенту карте. Основным отличием от общеизвестных методов построения управления на основе известной функции переходов между состояниями в подходе является предположение о возможности синтеза этой функции с помощью встроенных нейросетевых методов внимания, которые влияют на динамическое планирование поведения агента.

Когнитивная составляющая предлагаемой архитектуры ранее была основана на семиотическом представлении знаний [10], базовым элементом которой является

знак [11]. Использование знаковой парадигмы в качестве способа представления знаний об элементах окружающей среды было выбрано исходя из исследований нейробиологов и психологов [12, 13] относительно представления знаний человеком. Знаковая парадигма архитектуры учитывает различные типы информации об одном и том же объекте и использует их для перехода от классического для искусственного интеллекта символического способа представления знаний к гибриднему, который отвечает принципам робототехники настоящего времени. В рассматриваемом подходе, явное представление функции семантического связывания знаний агента представлена нечетким образом.

Знак описывается кортежем, в который включаются 4 основные компоненты  $s = \langle n, p, m, a \rangle$ , где  $n$  – компонента имени, с помощью которого задаётся знак,  $p$  – компонента образа,  $m$  – компонента значения и  $a$  – компонента смысла. Каждая из компонент знака отвечает за свой вид представления информации об описываемой сущности. Компонента  $p$  является описанием характерных признаков сущности (при геометрической постановке задачи признаки сущности дополняются описанием псевдофизических представлений окружающего пространства [8, 14]). Компонента  $m$  – отвечает за доступные обобщенные сценарии использования сущности коллективом агентов, а компонента  $a$  – определяет роль представленной знаком сущности в действии планирующего субъекта. Смыслы знака синтезируются в процессе деятельности агента с описываемой сущностью и являются актуализацией в рамках настоящей задачи значений этого знака. Знаком может быть представлен как статический объект, так и действие.

Компоненты знаков связаны и формируют семантические сети, отношения на каждой из которых различны (например, на сети  $m$  – объект-роль, на сети  $p$  – часть-целое, а на сети  $a$  – коалиция – участник коалиции). Робототехнические реализации алгоритмов [8, 9] используют особые предикативные способы представления как описания окружающей агента ситуации, так и его возможных действий и синтезируют последовательность целевых действий агента с помощью алгоритмов распространения активности – последовательного уточнения ролевого состава действий за счёт анализа участников текущей и целевых ситуаций, а также их возможностей.

Описанный способ представления окружающей среды хоть и позволяет привести к общему виду психологически правдоподобные требования к синтезу деятельности робототехнических платформ, но громоздкость используемых структур не позволяет применять его в реальных, не учебных, примерах с должным уровнем автоматизации. Прежде всего, такие задачи возникают при создании систем управления в автономных беспилотных транспортных средствах [15–18]. Основным исключаящим фактором является скорость принятия решений когнитивным циклом архитектуры, включающим последовательность рассуждений на каждом из уровней автоматизации. В настоящей статье предложен метод, позволяющий ускорить когнитивный цикл архитектуры и протестировать её в реальных сценариях. Далее статья организована следующим образом. В разделе 1 приведено описание класса решаемых задач и представлен общий алгоритм синтеза поведения с помощью мультимодального



анализа данных. В разделе 2 описана предлагаемая архитектура системы, методика тестирования её работоспособности на современном мультимодальном наборе данных. В разделе 3 приведены результаты экспериментов на сервере ФИЦ ИУ РАН.

## 2. ПОСТАНОВКА ПРОБЛЕМЫ

Одной из наиболее трудозатратных задач для вычислительного модуля робототехнической реализации когнитивного агента является формирования целенаправленного поведения в виде последовательности иерархических действий, требуемых для решения стоящей перед агентом задачи. Этот процесс состоит из работы 2 основных типов алгоритмов: алгоритма целеуказания и алгоритма синтеза плана поведения. В статье описывается случай, в котором целеуказание производится извне, а агент должен сформировать самостоятельно целевую ситуацию и составить план действий, по её достижению. В рамках настоящей статьи поведение агента и последовательность его действий являются синонимами и далее будут употребляться взаимозаменяющим образом.

В робототехнических платформах план поведения синтезируется набором взаимосвязанных алгоритмов, включающих в себя анализ визуальных и текстовых данных, планирование на их основе, предсказание результатов выполнения действий и других составляющих когнитивного цикла системы. В простейшем случае, в результате работы цикла появляется последовательность абстрактных действий (сценария поведения), каждое из которых имеет уточнение в виде набора моторных команд на сервоприводы робототехнического агента. Для синтеза набора моторных команд используются алгоритмы оптимизации, например, алгоритмы оптимального управления манипулятором и другие, позволяющие реализовывать высокоуровневые команды, не включая их детерминированные составляющие в общий цикл принятия решений. Алгоритмы синтеза оптимального управления можно условно разделить на алгоритмы с дискретным представлением среды – обучение с подкреплением, и алгоритмы непрерывного синтеза управляющего воздействия на основе реакции на сигналы окружающей среды – алгоритмы обработки поведения ПИД-регуляторов. Первый тип методов является развитием теории конечных автоматов и попыткой психологически-правдоподобного решения задачи управления с дискретным временем [19], в нем используются способы изучения среды в терминах спонтанной активности нервной системы, а способы сохранения комплексных действий (опций) представляют, как ассоциативную память агента [20–21]. Второй тип методов сводится к моделированию биологически-правдоподобного анализа окружающей среды мозгом и синтеза управляющего воздействия [22, 23] на среду, с помощью активации имеющихся в арсенале агента атомарных действий. В качестве примера биологически-правдоподобной связи можно привести набор методов по анализу ЭЭГ-сигнала и выявления частотных признаков действий в нем, возникающих как следствие стимула (агенту бросают мяч, и он поднимает руки; агенту показывают видео с движением руки, и он повторяет движение).

При описании задачи в терминах знаковой картины мира реакция агента на внешний стимул описывается функциями  $\psi_p^m, \psi_m^a, \psi_a^p$  связывания семантических сетей, которые позволяют выстраивать однозначную взаимосвязь между целевой командой и типом реакции на неё. На основе трудов Г.С. Осипова [24] можно выделить 3 типа «картины мира» агента – рациональная, житейская и мифологическая. Каждый из типов является краевым представлением и естественные агенты комбинируют типы, составляя свой, гетерогенный тип в силу имеющегося опыта взаимодействия с реальностью. Планирование действий агента в простейшем виде можно описать следующей последовательностью методов:

1. Распознавание команды. Функция перевода из сети имен  $n$  в сеть значений  $m$ . Основные алгоритмы – диаризация (разделение голосов, отдающих команды), транскрибирование (перевод из аудио в текст), методы анализа речи (различные типы анализа и составление графа зависимостей слов в предложении, понимание смысла фразы и целевого объекта).
2. Создание сценария поведения. В житейской картине мира – выбор сценария из имеющихся. В рациональной картине мира – синтез сценария любым алгоритмом планирования [9]. Процесс целиком происходит на сети значений и основным алгоритмом является перебор на основе удовлетворения ограничений по количеству объектов и агентов в задаче. В настоящем методе этот этап возможно провести в неявном виде с помощью использования нейросетевого подхода. Результатом является синтез гипотезы о правильности применения набора действий для достижения целевой ситуации.
3. Уточнение ролей в сценарии поведения. Функция перехода из сети значений  $m$  в сеть образов  $p$ . Для выстраивания такого типа связи необходимо взаимно-однозначное соответствие между ролевым представлением объекта в сценарии возможного поведения агента и его ранее встреченным изображением. Основным алгоритмом, позволяющим совершать рассуждения по выбору объекта в каждой роли – VQA [25] или более общий подход VLM [17,18].

Шаги 2–3 для систем, действующих в реальных не распознанных средах требуют более детальной проработки и описаны далее.

### ***VLM как алгоритм выбора оптимального действия агента***

В этой статье предлагается метод, который автоматически генерирует функцию вознаграждения для агента на основе текстового описания задачи и распознанных им ранее объектов. Стоящая задача не является новой и в работах [26–27] уже описываются примеры LLM, синтезирующих вознаграждение для Q-функции агента на основе данных среды. В работе [28] используется внутреннее состояние агента для синтеза награды за выполнение действий и текстовое описание результата действия для валидации уровня награды. В настоящей работе любая ситуация описывается в качестве последовательности отношений между объектами в комбинированном свернутом виде VLM. Агент получает целеуказание извне и подбирает наиболее похожую ситуацию в пространстве ситуаций на основе описания (как



в житейской картине мира), а после этого активирует заранее известный сценарий достижения целевой ситуации. Сценарии достижения целевой ситуации известны агенту на базовом уровне, вне контекста текущей локации. Уточнение сценария в поставленной задаче сводится к построению карты местности, локализации агента и выполнению сценария методом поиска возможных локальных действий в контексте текущей карты. Процесс оканчивается сохранением детализированного плана для будущего использования.

*Пример:*

- Запрос: налей кофе и принеси мне.
- Целевая ситуация: агент с кружкой кофе в манипуляторе около человека.
- Базовый сценарий: агент едет на кухню, нажимает на кнопку на кофе-машине и по получению разрешающего сигнала забирает кружку. Агент вместе с кружкой едет к источнику задачи.
- Измененный сценарий:
  1. Агент формирует кухню как свернутый полносвязным слоем набор описаний (холодильник стоит в комнате, кофеварка стоит на шкафу, плита есть, мойка в комнате) со всеми видами ранее известных ему объектов.
  2. Каждой комнате в доме назначается класс «кухня» – как промежуточной сценарной комнаты.
  3. Агент пытается построить сценарий по достижению целевой ситуации исходя из описания кухни – в 1 из комнат есть мойка, есть стол, но нет кофемашины. В другой комнате есть плита, но нет других объектов – выбирается та комната, вектор описания которой наиболее близок к промежуточной необходимой ситуации.
  4. Достижение необходимой промежуточной ситуации увеличивает награду агента.
  5. После достижения целевой ситуации агент сохраняет последовательность действий как навык (опцию).

### ***Обоснование выбора VLM***

Основные компоненты VLM–ViT (Visual Transformers) и LLM (Large Language Model). Выбор комбинации ViT и LLM оправдан необходимостью синтеза мультимодальной информации для построения абстрактных планов поведения. ViT обеспечивает высокое качество интерпретации визуальных данных, тогда как LLM дополняет этот процесс, интегрируя текстовую информацию, знания и находя сложные связи между элементами входных последовательностей.

Базовый механизм VLM в настоящей задаче аналогичен VQA (Visual Question Answering). Опрос модели по ключевым текстовым вопросам позволяет извлечь максимальную пользу от механизмов LLM. Подход позволяет агенту строить планы действий, соответствующие поставленным задачам, с учётом всех аспектов сцены и её описания.

ViT используется для анализа изображений из-за наличия механизма извлечения глобальных и локальных визуальных признаков с высоким уровнем семантической детализации. Механизм внимания ViT предназначен для выявления ключевых



аспектов изображений, что критически важно для реализации задачи перцептивного анализа агентом, где требуется понимание сложных визуальных сцен. Например, ViT позволяет интерпретировать сцены с высокой степенью детализации, учитывать пространственные взаимосвязи объектов и выявлять визуальные шаблоны, необходимые для формирования действий агента.

Комбинирование ViT с LLM (например, GPT[29] или LLaMA[30]) позволяет дополнить обработку изображений пониманием агентом постановки задачи на естественном языке. LLM обеспечивает эффективный анализ текстовых описаний задач и запросов, интерпретацию инструкций, а также возможность учитывать общий контекст, включая ранее накопленные знания о мире. Это позволяет модели генерировать осмысленные последовательности действий, учитывая не только визуальную, но и текстовую информацию.

В задачах, связанных с агентами, которые оперируют в пространстве, важно не только распознавать объекты или отвечать на простые вопросы, но и строить планы на основе сложной визуальной и текстовой информации. Модели ViT-LLM способны идентифицировать объекты и их расположение в пространстве, определять семантические взаимосвязи между элементами сцены, генерировать последовательности действий, соответствующих описанию задачи, таких как перемещение объекта, достижение цели или выполнение комплексного набора операций.

Современные VLM, построенные на основе LLM, таких как GPT, обладают существенными преимуществами по сравнению с традиционными моделями VQA, в которых ответы формируются через задачу классификации (выбор из предустановленного набора ответов). Такие модели ограничены фиксированным набором ответов, что снижает их способность адаптироваться к новым запросам или контекстам. Современные VLM используют генеративный подход, который позволяет формировать уникальные ответы, не ограничиваясь предустановленным списком. Это критически важно в задачах, где требуется высокая степень вариативности или детализации в ответах. Классификационные модели VQA [31–33] неэффективны при работе с вопросами, ответы на которые невозможно заранее предсказать, либо с ситуациями, где требуется детальный ответ. VLM тренируются на масштабных мультимодальных наборах данных, имеют механизм переноса и адаптации ранее полученных знаний на новые задачи, что позволяет существенно расширить базовый набор возможностей системы VQA классификации.

ViT делит изображение на равные по размеру регионы (патчи), которые представляют из себя векторы с информацией об объектах внутри патча и взаимоотношениях с объектами в соседних патчах. Итоговые патчи можно интерпретировать как токены для лингвистической модели и минимизировать фактор особенностей конкретного набора данных. Например, модель может быть обучена на наборе данных, сгенерированном в графическом реалистичном эмуляторе Unreal Engine (например, открытый набор данных DriveLM на основе представления города в симулятора Carla), после чего применяться в реальных условиях.



### 3. РАЗРАБОТКА ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЙ VLM

Основной задачей VLM является согласование представлений, получаемых из изображения, с токенами, используемыми LLM. Сложность решения этой задачи в том, что LLM, такие как GPT, обучены работать с текстовыми токенами из своего предопределённого вокабуляра (словарь токенов в LLM, состоящий из слов и подслов), тогда как нейросеть-анализатор изображений генерирует выходные представления в виде эмбеддингов (векторов), которые изначально находятся в другом объектном пространстве. Основная идея использования ViT заключается в преобразовании изображений в «языковые» токены, которые могли бы напрямую взаимодействовать с предобученной LLM.

ViT представляет изображения через эмбеддинги, которые содержат числовые признаки, отражающие пространственные, цветовые и семантические аспекты изображения. Эти эмбеддинги существенно отличаются от токенов, используемых в LLM, которые представляют текстовые данные как дискретные последовательности из предопределённого словаря. Чтобы обеспечить совместимость, требуется создать механизм преобразования визуальных представлений в текстовые.

#### **Формализация проблемы**

Пусть,

$$\mathbf{Z}_{ViT} = \{\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \dots, \mathbf{z}_N\}$$

- набор эмбеддингов (представлений), полученных из изображения с помощью предобученной ViT. Здесь каждый  $\mathbf{z}_i \in R^d$  – это векторное представление одного патча изображения.

$$\mathcal{V}_{LLM} = \{t_1, t_2, \dots, t_M\}$$

- множество токенов из вокабуляра LLM, где каждый  $t_j \in R^k$ .

Проблема заключается в том, что условие  $\mathbf{Z}_{ViT} \subset \mathcal{V}_{LLM}$  не выполняется, т. е. пространство эмбеддингов ViT и пространство токенов LLM не пересекаются:

$$\forall \mathbf{z}_i \in \mathbf{Z}_{ViT}, \exists t_j \in \mathcal{V}_{LLM} : \mathbf{z}_i \neq t_j$$

Эта несовместимость мешает LLM напрямую обрабатывать выходы ViT, так как  $\mathbf{z}_i$  не интерпретируются в терминах предобученного вокабуляра LLM.

#### **Использование проекционной прослойки для согласования пространств**

Для согласования пространств ViT и LLM вводится преобразование  $f : R^d \rightarrow R^k$ , которое позволяет проектировать эмбеддинги ViT в пространство токенов LLM. Это достигается с помощью обучаемой прослойки, такой как линейная проекция, адаптер или нейронная сеть.

Обозначим преобразование:

$$\mathbf{T}_{ViT} = \{f(\mathbf{z}_1), f(\mathbf{z}_2), \dots, f(\mathbf{z}_N)\},$$

где  $f(\mathbf{z}_i) \in \mathcal{V}_{LLM}$ .

На уровне абстракции результат работы прослойки  $f$  – это набор токенов  $T_{ViT}$ , которые находятся в пространстве  $\mathcal{V}_{LLM}$ . Эти токены могут быть поданы на вход LLM:

$$T_{LLM} = T_{ViT} \cup T_{Text},$$

где  $T_{Text}$  – текстовые токены, входящие в задачу, а  $T_{ViT}$  – объединённое представление, совместимое с LLM.

### ***Архитектура экспериментального ViT***

Для решения проблемы согласования пространств была выбрана обучаемая прослойка в виде линейного слоя. Данная прослойка преобразует выходные эмбединги, полученные из Vision Transformer (ViT), в пространство скрытых представлений, совместимое с крупномасштабной языковой моделью (LLM).

В экспериментальной сборке использовалась модель BLIP-2[34] в качестве ViT для обработки изображений и GPT-2 в качестве LLM для генерации текстовых токенов. Основным элементом согласования выступает линейный слой, преобразующий выходные эмбединги BLIP-2 в формат, подходящий для обработки GPT-2. BLIP-2 и GPT-2 предобучены. В настоящей работе производится обучение проекционной прослойки вместе с дообучением GPT-2 на наборе данных DriveLM[35] в варианте, основанном на nuScenes[36].

### ***Архитектура***

- Модуль ViT (BLIP-2): Генерирует эмбединги из изображений, представляющие визуальные данные в высокоразмерном пространстве.
- Линейная прослойка (aligner): Линейный слой уменьшает размерность эмбедингов из BLIP-2 до размерности скрытого пространства GPT-2 (*hidden\_size*), согласуя визуальные представления с текстовыми токенами.
- LLM (GPT-2): Языковая модель обрабатывает объединённые токены (визуальные и текстовые) для генерации текста, основанного на визуальном и текстовом входе.

### ***Принцип работы***

1. Эмбединги изображения, полученные из BLIP-2, преобразуются через линейный слой в скрытое пространство GPT-2.
2. Токены изображения объединяются с текстовыми токенами вопроса, формируя общий вход для GPT-2.
3. GPT-2 генерирует выходной текст, обучаясь на данных, где визуальная информация и текстовые запросы совместно определяют результат.

### ***Набор данных DriveLM***

Набор предназначен для решения задачи восприятия, прогнозирования, планирования, поведения и движения с помощью логики рассуждений, написанной человеком. Представлена задача GVQA по соединению пар QA в структуру в виде графа.

DriveLM состоит из двух отдельных наборов: DriveLM-nuScenes и DriveLM-CARLA, которые собраны на основе набора данных nuScenes и симулятора CARLA соответственно.



Набор nuScenes представляет из себя изображения, полученные с камеры на крыше автомобиля в городских условиях. Каждая сцена снята на 6 камер, направленных в разные стороны: вперед, вперед-влево, вперед-вправо, назад, назад-влево, назад-вправо.

Аннотация каждой сцены включает в себя следующие компоненты:

- Список объектов, находящихся в сцене. Структура объекта:
  - ИД объекта ( $c1, c2, c3, \dots$ )
  - Камера, на которой объект виден (изображения с камер не пересекаются – т. е. не имеют одинаковых объектов, для каждого объекта только одна камера)
  - Тип объекта (Транспорт, Объект ПДД)
  - Статус объекта (только для транспорта – Двигается/Стационарен)
  - Словесное описание (“Синий седан” – Транспорт, “Зеленый сигнал светофора” – Объект ПДД)
  - 2D-координаты объекта на изображении с камеры
- Словесное описание сцены, относительно автомобиля с камерами. Пример: *Эго(Автономный) -автомобиль проезжает перекресток, продолжая движение по текущей дороге..*
- Имена файлов 6-и изображений
- Список пар вопросов-ответов. Разделены на 4 группы:
  - **Поведение** (Behavior):  
*Q: Предсказать поведение эго-автомобиля.*  
*A: Эго-автомобиль едет прямо. Эго-машина едет медленно.*
  - **Восприятие** (Perception):  
*Q: Определите все элементы трафика на переднем плане, классифицируйте их, определите их статус и спрогнозируйте ограничивающую рамку вокруг каждой из них. Выход должен быть списком, отформатированным как  $(c, s, x1, y1, x2, y2)$ , где  $c$  представляет категорию,  $s$  обозначает статус, а  $x1, y1, x2, y2$  – смещения верхнего левого и нижнего правого углов рамки относительно центральной точки.*  
*A: На переднем плане много элементов дорожного движения. Информация об этих элементах дорожного движения: [(светофор, зеленый, 13.19, 382.76, 39.21, 427.96), (светофор, неизвестный, 255.86, 274.14, 279.25, 324.67), (светофор, неизвестный, 388.89, 266.58, 413.72, 318.86), (светофор, зеленый, 713.29, 306.48, 731.57, 345.14), (светофор, зеленый, 826.91, 313.56, 844.49, 351.52), (светофор, неизвестный, 399.02, 400.97, 412.73, 429.78)].*
  - **Предсказывание** (Prediction):  
*Q: Будет ли  $\langle c1, SAM\_BACK, 1088.3, 497.5 \rangle$  в направлении движения эго-автомобиля?*  
*A: Нет.*
  - **Планирование** (Planning):  
*Q: Какие действия может предпринять эго-автомобиль на основе  $\langle c1, SAM\_BACK, 1088.3, 497.5 \rangle$ ? Зачем предпринимать это действие и какова вероятность?*

*А: Действие заключается в том, чтобы продолжить движение с той же скоростью. Причина в том, чтобы соблюдать правила дорожного движения, что имеет большую вероятность.*

Вопросы и ответы из групп предсказания и планирования всегда включают в себя ссылки на объекты из списка объектов, вида `<c1, CAM_BACK,1088.3,497.5>`. В остальных группах они никогда не появляются. В группе восприятия некоторые вопросы требуют позиционного определения объекта относительно 2D-координат изображения.

## 4. ПРОЦЕСС И РЕЗУЛЬТАТЫ ОБУЧЕНИЯ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЙ МОДЕЛИ VLM

В текстовую форму вопросов добавлена информация о том, с какой камеры получено текущее изображение. Вопрос также приведен к формату для обучения задаче Q&A. Пример форматированной пары вопрос-ответ: **Q:** “Камера направлена вперед-влево. **Q:** Что за объекты находятся спереди справа от эго-автомобиля? **A:**” **A:** “Спереди справа от эго-автомобиля много заграждений и одна строительная машина.”. Текстовые данные токенизируются с использованием GPT-2-токенизатора.

Каждое изображение обрабатывается ViT-моделью (BLIP-2) для извлечения векторных представлений (токенов). Эти токены представляют визуальную информацию изображения и выравниваются с текстовыми токенами через обучаемую прослойку.

Были использованы только вопросы из категорий поведения и восприятия, т. е. две другие – предсказывание и планирование – содержат ссылки на объекты, с которыми экспериментальная сборка модели пока не может работать.

Обучение модели включает оптимизацию параметров как обучаемой прослойки, так и GPT-2 модели, что обеспечивает согласованное представление визуальных и текстовых данных в общем пространстве токенов.

Построенная модель объединяет GPT-2 (в качестве языковой модели) и обучаемую линейную прослойку для выравнивания векторных представлений изображений (полученных из ViT BLIP-2) с пространством токенов GPT-2. Обе части модели участвуют в процессе оптимизации.

Объединённые токены (визуальные и текстовые) передаются в модель. Токены, полученные из ViT, выравниваются с пространством GPT-2 с помощью обучаемой линейной прослойки. GPT-2 обрабатывает входные токены, включая преобразованные визуальные данные, для генерации ответа. Для оптимизации используется стандартная кросс-энтропийная функция потерь, встроенная в реализацию модели GPT-2 из пакета Huggingface Transformers. Потери вычисляются с использованием предсказанных выходов GPT-2 и реальных токенов ответа. Отрицательные значения маски используются для исключения padding-токенов из процесса оптимизации. Оптимизация осуществляется с помощью AdamW, где веса модели обновляются по направлению антиградиента с учётом регуляризации.



## Анализ результатов обучения

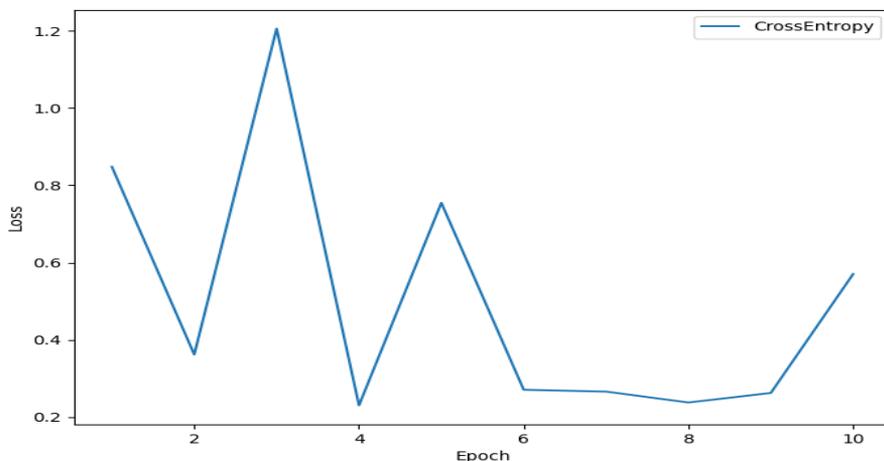


Рис. 1. График функции потерь экспериментальной модели

Обучение модели проводилось в течение 10 эпох с фиксированным набором гиперпараметров. Значение функции потерь варьировалось в диапазоне от 0.03 до 1.2 без четкой тенденции к снижению, что свидетельствует о нестабильной сходимости. На финальных этапах обучения модель достигла следующих метрик на тестовом наборе данных:

- **Перplexия (Perplexity):** 1.7096
- **Точность (Accuracy):** 86,42%

Эти показатели указывают на высокую уверенность модели в своих предсказаниях и значительное соответствие токенов в сгенерированных ответах с ожидаемыми.

## 5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В статье представлен метод синтеза поведения когнитивного агента на основе задачи на естественном языке и объектов на изображении в комплексных сценах. Метод позволяет синтезировать план поведения агента в простых средах, но в условиях, приближенных к реальным требует доработки. Колебание значения функции потерь может указывать на нестабильность процесса оптимизации. Отсутствие снижения потерь говорит о том, что модель либо не усваивает закономерности в данных, либо уже достигла некоторого оптимума, ограниченного архитектурой модели, качеством данных или гиперпараметрами. Возможна проблема с выравниванием пространства визуальных и текстовых токенов, если обучаемая линейная прослойка не выполняет свою функцию должным образом. В будущих работах модель будет дополнена алгоритмом обучения с подкреплением, и позволит синтезировать подходящую стратегию в сложных средах.

Эксперименты показывают, что модель демонстрирует избыточную уверенность в предсказаниях и сильно склонна к повторению токенов, что будет исправлено оптимизацией самой LLM. В будущих исследованиях модель будет обучать прослойку преобразовывать патчи из ViT в токены, соответствующие словам и подсловам LLM, не изменяя ее поведение. Основное преимущество такого подхода – значительное снижение обучаемых параметров, что может помочь в достижении стабильной сходимости. Также будет протестирован подход с созданием «универсальных токенов», которые могут совместно использоваться ViT и LLM. Основным механизмом заключается в разбиении выходных эмбедингов ViT на кванты, каждый из которых сопоставляется уникальному «визуальному» токеноу, добавляемому в вокабуляр LLM. Это позволит расширить языковую модель для работы с изображениями.

### *Литература*

1. *Bechon, P., Barbier, M., Grand, C., Lacroix, S., Lesire, C., & Pralet, C.* (2018). Integrating planning and execution for a team of heterogeneous robots with time and communication constraints. 1091–1097.
2. *Benjamin, D.P., Li, T., Shen, P., Yue, H., Zhao, Z., & Lyons, D.* (2018). Spatial understanding as a common basis for human-robot collaboration. *Advances in Intelligent Systems and Computing*. [https://doi.org/10.1007/978-3-319-60384-1\\_3](https://doi.org/10.1007/978-3-319-60384-1_3). R. Anderson, D. Bothell, M.D. Byrne, S. Douglass, C. Lebiere, Y. Qin. An integrated theory of the mind. *Psychological Review*, 111(4):1036–1060, 2004.
3. *Chu, Z., Wang, Y., Zhu, F., Yu, L., Li, L., & Gu, J.* (2024). Professional Agents – Evolving Large Language Models into Autonomous Experts with Human-Level Competencies. *ArXiv*, abs/2402.03628.
4. *Davis, D.N., & Ramulu, S.K.* (2017). Reasoning with BDI robots: From simulation to physical environment – Implementations and limitations. *Paladyn*, 8(1), 39–57. <https://doi.org/10.1515/pjbr-2017-0003>
5. *Madl, T., Franklin, S., Chen, K., & Trappl, R.* (2018). A computational cognitive framework of spatial memory in brains and robots. *Cognitive Systems Research*, 47, 147–172. <https://doi.org/10.1016/j.cogsys.2017.08.002>
6. *Sumers, T.R., Yao, S., Narasimhan, K., & Griffiths, T.L.* (2023). Cognitive Architectures for Language Agents. *Trans. Mach. Learn. Res.*, 2024.
7. *Emelyanov S.* and etc. (2015) Multilayer cognitive architecture for UAV control. *Cognitive System Research*, 34.
8. *Киселев, Г.А.* (2020). Интеллектуальная система планирования поведения коалиции робототехнических агентов с STRL архитектурой. *Информационные Технологии и Вычислительные Системы*. – С. 21–37. <https://doi.org/10.14357/20718632200203>
9. *Kiselev G., Panov A.* (2019) Hierarchical Psychologically Inspired Planning for Human-Robot Interaction Tasks. In: Ronzhin A., Rigoll G., Meshcheryakov R. (eds) *Interactive Collaborative Robotics*. ICR 2019. *Lecture Notes in Computer Science*, vol 11659. Springer, Cham.
10. *Osipov G.S., Panov A.I.* Relationships and Operations in a Sign-Based World Model of the Actor // *Scientific and Technical Information Processing*. 2018. No. 5.
11. *Osipov, G.S.* Sign-based representation and word model of actor. In: Yager, R., Sgurev, V., Hadjiski, M., and Jotsov, V. (eds.) 2016 IEEE 8th International Conference on Intelligent Systems (IS). pp. 2226. IEEE (2016).
12. *Leontiev A.N.* Activity Consciousness. Personality. M.: Politizdat, 1975.



13. Bruner J. Psychology of knowledge. Outside of direct information. M.: Progress, 1977.413 s.
14. Kiselev G., Panov A. Q-Learning of Spatial Actions for Hierarchical Planner of Cognitive Agents. In: Ronzhin A., Rigoll G., Meshcheryakov R. (eds) Interactive Collaborative Robotics. ICR 2020. Lecture Notes in Computer Science, (Including Subseries Lecture Notes in Artificial Intelligence and Lecture Notes in Bioinformatics), Springer, Cham 2020, pp. 160–169. [https://doi.org/10.1007/978-3-030-60337-3\\_16](https://doi.org/10.1007/978-3-030-60337-3_16)
15. Sima, Chonghao and Renz, Katrin and Chitta, Kashyap and Chen, Li and Zhang, Hanxue and Xie, Chengen and Luo, Ping and Geiger, Andreas and Li, Hongyang. (2024) DriveLM: Driving with Graph Visual Question Answering In: arXiv preprint arXiv:2312.14150
16. Jintao, Xue & Zhang, Dongkun & Xiong, Rong & Wang, Yue & Liu, Eryun. (2023). A Two-Stage Based Social Preference Recognition in Multi-Agent Autonomous Driving System. 5507–5513. 10.1109/IROS55552.2023.10341803.
17. Tian, Ran & Li, Boyi & Wang, Xinshuo & Chen, Yuxiao & Schmerling, Edward & Wang, Yue & Ivanovic, Boris & Pavone, Marco. (2024). Tokenize the World into Object-level Knowledge to Address Long-tail Events in Autonomous Driving. 10.48550/arXiv.2407.00959.
18. Weng, Xinshuo & Ivanovic, Boris & Wang, Yan & Wang, Yue & Pavone, Marco. (2024). PA-RA-Drive: Parallelized Architecture for Real-Time Autonomous Driving. 15449–15458. 10.1109/CVPR52733.2024.01463.
19. Bain, A. (1855). The senses and the intellect. London: Parker.
20. Hull, C.L. (1943). Principles of Behavior: An Introduction to Behavior Theory. New York: D. Appleton-Century Company.
21. Skinner, B.F. (1931). The concept of the reflex in the description of behavior, Ph.D. thesis, Harvard University.
22. <https://github.com/neuroidss/text-generation-neurofeedback-webui>
23. Dong, Na & Zhang, Wen-qi & Gao, Zhong-ke. (2019). Research on fuzzy PID Shared control method of small brain-controlled uav. 10.48550/arXiv.1905.12240.
24. Осунов Г.С., Чудова Н.В., Панов А.И. Знаковая картина мира субъекта поведения.
25. Antol, Stanislaw & Agrawal, Aishwarya & Lu, Jiasen & Mitchell, Margaret & Batra, Dhruv & Zitnick, C. & Parikh, Devi. (2015). VQA: Visual Question Answering. 2. 10.1109/ICCV.2015.279.
26. Xie, S., Sun, C., Huang, J., Tu, Z., and Murphy, K. Rethinking spatiotemporal feature learning: Speed-accuracy trade-offs in video classification. In Proceedings of the European conference on computer vision (ECCV), pp. 305–321, 2018.
27. Gupta, A., Pacchiano, A., Zhai, Y., Kakade, S.M., and Levine, S. Unpacking reward shaping: Understanding the benefits of reward engineering on sample complexity, 2022.
28. Chu, K., Zhao, X., Weber, C., Li, M., and Wermter, S. Accelerating reinforcement learning of robotic manipulations via feedback from large language models. arXiv preprint arXiv:2311.02379, 2023.
29. Radford A. et al. Language models are unsupervised multitask learners // OpenAI blog. – 2019. – Т. 1. – №. 8. – P. 9.
30. Touvron H. et al. Llama: Open and efficient foundation language models // arXiv preprint arXiv:2302.13971. – 2023.
31. Tan H., Bansal M. Lxmert: Learning cross-modality encoder representations from transformers // arXiv preprint arXiv:1908.07490. – 2019.
32. Li X. et al. Oscar: Object-semantics aligned pre-training for vision-language tasks // Computer Vision–ECCV 2020: 16th European Conference, Glasgow, UK, August 23–28, 2020, Proceedings, Part XXX 16. – Springer International Publishing, 2020. – С. 121–137.
33. Zhang P. et al. Vinvl: Revisiting visual representations in vision-language models // Proceedings of the IEEE/CVF conference on computer vision and pattern recognition. – 2021. – С. 5579–5588.



34. *Li J.* et al. Blip-2: Bootstrapping language-image pre-training with frozen image encoders and large language models // International conference on machine learning. – PMLR, 2023. – C. 19730–19742.
35. *Sima C.* et al. Drivelm: Driving with graph visual question answering // arXiv preprint arXiv:2312.14150. – 2023.
36. *Caesar H.* et al. nuscenes: A multimodal dataset for autonomous driving // Proceedings of the IEEE/CVF conference on computer vision and pattern recognition. – 2020. – C. 11621–11631.



# Method for Creating Behavior of Cognitive Agents Based on Multimodal Signal Processing

**Daniil A. Weizenfeld\***

Peoples' Friendship University of Russia (RUDN), Moscow, Russia

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-2787-0714>

e-mail: [veicenfeld@isa.ru](mailto:veicenfeld@isa.ru)

**Gleb A. Kiselev\*\***

Federal Research Center "Informatics and Management"

Russian Academy of Sciences (FRC CSC RAS)

Peoples' Friendship University of Russia (RUDN), Moscow, Russia

ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-9231-8662>

e-mail: [kiselev@isa.ru](mailto:kiselev@isa.ru)

The paper considers the problem of predicting the agent's activity based on the text description of the task and visual analysis of the environment. An update of the approaches of classical cognitive architecture is proposed, allowing its application in a real environment. An addition to the semiotic method of symbolic designation with the author's neural network mechanism for linking vectors of text and visual spaces is developed. A number of experiments with the obtained model in a complex environment of a car driving emulator are conducted.

**Keywords:** activity-related experience, quality of motivation, self-determination theory, intrinsic motivation, extrinsic motivation, academic motivation.

**Acknowledgements.** This publication has been supported by the RUDN University Strategic Academic Leadership Program, project No. 021934-0-000.

The research was carried out using the infrastructure of the Shared Research Facilities «High Performance Computing and Big Data» (CKP «Informatics») of FRC CSC RAS (Moscow).

## For citation:

Weizenfeld D., Kiselev G. Method for Creating Behavior of Cognitive Agents Based on Multimodal Signal Processing. *Modelirovanie i analiz dannykh = Modelling and Data Analysis*, 2024. Vol. 14, no. 4, pp. 45–62. DOI: <https://doi.org/10.17759/mda.2024140403> (In Russ., abstr. in Engl.).

\***Daniil A. Weizenfeld**, Master's Degree Student, Peoples' Friendship University of Russia (RUDN), Moscow, Russia, ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-2787-0714>, e-mail: [veicenfeld@isa.ru](mailto:veicenfeld@isa.ru)

\*\***Gleb A. Kiselev**, Candidate of Technical Sciences, Researcher, Federal Research Center "Informatics and Management", Russian Academy of Sciences (FRC CSC RAS); Senior Lecturer, Peoples' Friendship University of Russia (RUDN), Moscow, Russia, ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-9231-8662>, e-mail: [kiselev@isa.ru](mailto:kiselev@isa.ru)



## References

1. Bechon, P., Barbier, M., Grand, C., Lacroix, S., Lesire, C., & Pralet, C. (2018). Integrating planning and execution for a team of heterogeneous robots with time and communication constraints. pp. 1091–1097.
2. Benjamin, D. P., Li, T., Shen, P., Yue, H., Zhao, Z., & Lyons, D. (2018). Spatial understanding as a common basis for human-robot collaboration. *Advances in Intelligent Systems and Computing*. [https://doi.org/10.1007/978-3-319-60384-1\\_3J](https://doi.org/10.1007/978-3-319-60384-1_3J). R. Anderson, D. Bothell, M.D. Byrne, S. Douglass, C. Lebiere, Y. Qin. An integrated theory of the mind. *Psychological Review*, 111(4):1036–1060, 2004.
3. Chu, Z., Wang, Y., Zhu, F., Yu, L., Li, L., & Gu, J. (2024). Professional Agents – Evolving Large Language Models into Autonomous Experts with Human-Level Competencies. *ArXiv*, abs/2402.03628.
4. Davis, D. N., & Ramulu, S. K. (2017). Reasoning with BDI robots: From simulation to physical environment – Implementations and limitations. *Paladyn*, 8(1), 39–57. <https://doi.org/10.1515/pjbr-2017-0003>
5. Madl, T., Franklin, S., Chen, K., & Trapp, R. (2018). A computational cognitive framework of spatial memory in brains and robots. *Cognitive Systems Research*, 47, 147–172. <https://doi.org/10.1016/j.cogsys.2017.08.002>
6. Summers, T.R., Yao, S., Narasimhan, K., & Griffiths, T.L. (2023). *Cognitive Architectures for Language Agents*. *Trans. Mach. Learn. Res.*, 2024.
7. Emelyanov S. and etc. (2015) Multilayer cognitive architecture for UAV control. *Cognitive System Research*, 34.
8. Kiselev, G.A. (2020). Intellektual'naya sistema planirovaniya povedeniya koalitsii robototekhnicheskikh agentov s STRL arkhitekturoi. *Informatsionnye Tekhnologii i Vychislitel'nye Sistemy*. – pp. 21–37. <https://doi.org/10.14357/20718632200203>
9. Kiselev G., Panov A. (2019) Hierarchical Psychologically Inspired Planning for Human-Robot Interaction Tasks. In: Ronzhin A., Rigoll G., Meshcheryakov R. (eds) *Interactive Collaborative Robotics*. ICR 2019. *Lecture Notes in Computer Science*, vol 11659. Springer, Cham.
10. Osipov G.S., Panov A.I. Relationships and Operations in a Sign-Based World Model of the Actor // *Scientific and Technical Information Processing*. 2018. No. 5.
11. Osipov, G.S. Sign-based representation and word model of actor. In: Yager, R., Sgurev, V., Hadjiski, M., and Jotsov, V. (eds.) 2016 IEEE 8th International Conference on Intelligent Systems (IS). pp. 2226. IEEE (2016).
12. Leontiev A.N. *Activity Consciousness*. Personality. M.: Politizdat, 1975.
13. Bruner J. *Psychology of knowledge*. Outside of direct information. M.: Progress, 1977.413 s.
14. Kiselev G., Panov A. Q-Learning of Spatial Actions for Hierarchical Planner of Cognitive Agents. In: Ronzhin A., Rigoll G., Meshcheryakov R. (eds) *Interactive Collaborative Robotics*. ICR 2020. *Lecture Notes in Computer Science*, (Including Subseries *Lecture Notes in Artificial Intelligence* and *Lecture Notes in Bioinformatics*), Springer, Cham 2020, pp. 160–169. [https://doi.org/10.1007/978-3-030-60337-3\\_16](https://doi.org/10.1007/978-3-030-60337-3_16)
15. Sima, Chonghao and Renz, Katrin and Chitta, Kashyap and Chen, Li and Zhang, Hanxue and Xie, Chengen and Luo, Ping and Geiger, Andreas and Li, Hongyang. (2024) DriveLM: Driving with Graph Visual Question Answering In: *arXiv preprint arXiv:2312.14150*
16. Jintao, Xue & Zhang, Dongkun & Xiong, Rong & Wang, Yue & Liu, Eryun. (2023). A Two-Stage Based Social Preference Recognition in Multi-Agent Autonomous Driving System. 5507–5513. [10.1109/IROS55552.2023.10341803](https://doi.org/10.1109/IROS55552.2023.10341803).



17. Tian, Ran & Li, Boyi & Weng, Xinshuo & Chen, Yuxiao & Schmerling, Edward & Wang, Yue & Ivanovic, Boris & Pavone, Marco. (2024). Tokenize the World into Object-level Knowledge to Address Long-tail Events in Autonomous Driving. 10.48550/arXiv.2407.00959.
18. Weng, Xinshuo & Ivanovic, Boris & Wang, Yan & Wang, Yue & Pavone, Marco. (2024). PA-RA-Drive: Parallelized Architecture for Real-Time Autonomous Driving. 15449–15458. 10.1109/CVPR52733.2024.01463.
19. Bain, A. (1855). The senses and the intellect. London: Parker.
20. Hull, C. L. (1943). Principles of Behavior: An Introduction to Behavior Theory. New York: D. Appleton-Century Company.
21. Skinner, B. F. (1931). The concept of the reflex in the description of behavior, Ph.D. thesis, Harvard University.
22. <https://github.com/neuroidss/text-generation-neurofeedback-webui>
23. Dong, Na & Zhang, Wen-qi & Gao, Zhong-ke. (2019). Research on fuzzy PID Shared control method of small brain-controlled uav. 10.48550/arXiv.1905.12240.
24. Osipov G.S., Chudova N.V., Panov A.I. Znakovaya kartina mira sub"ekta povedeniya.
25. Antol, Stanislaw & Agrawal, Aishwarya & Lu, Jiasen & Mitchell, Margaret & Batra, Dhruv & Zitnick, C. & Parikh, Devi. (2015). VQA: Visual Question Answering. 2. 10.1109/ICCV.2015.279.
26. Xie, S., Sun, C., Huang, J., Tu, Z., and Murphy, K. Rethinking spatiotemporal feature learning: Speed-accuracy trade-offs in video classification. In Proceedings of the European conference on computer vision (ECCV), pp. 305–321, 2018.
27. Gupta, A., Pacchiano, A., Zhai, Y., Kakade, S. M., and Levine, S. Unpacking reward shaping: Understanding the benefits of reward engineering on sample complexity, 2022.
28. Chu, K., Zhao, X., Weber, C., Li, M., and Wermter, S. Accelerating reinforcement learning of robotic manipulations via feedback from large language models. arXiv preprint arXiv:2311.02379, 2023.
29. Radford A. et al. Language models are unsupervised multitask learners // OpenAI blog. – 2019. – Т. 1. – № . 8. – P. 9.
30. Touvron H. et al. Llama: Open and efficient foundation language models // arXiv preprint arXiv:2302.13971. – 2023.
31. Tan H., Bansal M. Lxmert: Learning cross-modality encoder representations from transformers // arXiv preprint arXiv:1908.07490. – 2019.
32. Li X. et al. Oscar: Object-semantics aligned pre-training for vision-language tasks // Computer Vision–ECCV 2020: 16th European Conference, Glasgow, UK, August 23–28, 2020, Proceedings, Part XXX 16. – Springer International Publishing, 2020. – P. 121–137.
33. Zhang P. et al. Vinvl: Revisiting visual representations in vision-language models // Proceedings of the IEEE/CVF conference on computer vision and pattern recognition. – 2021. – P. 5579–5588.
34. Li J. et al. Blip-2: Bootstrapping language-image pre-training with frozen image encoders and large language models // International conference on machine learning. – PMLR, 2023. – P. 19730–19742.
35. Sima C. et al. Drivelm: Driving with graph visual question answering // arXiv preprint arXiv:2312.14150. – 2023.
36. Caesar H. et al. nuscenes: A multimodal dataset for autonomous driving // Proceedings of the IEEE/CVF conference on computer vision and pattern recognition. – 2020. – P. 11621–11631.

УДК: 51-72:65

## Конструктивный метод формализации текстов-инструкций

***Воронов М.В.\****

Московский государственный психолого-педагогический университет  
(ФГБОУ ВО МГППУ), г. Москва, Российская Федерация  
ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-7839-6250>  
[mivoronov@yandex.ru](mailto:mivoronov@yandex.ru)

***Пичугина Е.И.\*\****

Московский государственный психолого-педагогический университет  
(ФГБОУ ВО МГППУ), г. Москва, Российская Федерация  
[pichugina070698@gmail.com](mailto:pichugina070698@gmail.com)

Рассматривается проблема формализации текстовых данных, лежащая на стыке лингвистики, теории систем и информационных технологий. Основное внимание уделяется процессу переноса содержания, представленного в текстах-инструкциях, в формальные структуры. Предлагается метод извлечения содержания из предложений текстов-инструкций, который позволяет эффективно преобразовывать вербальную информацию в формализованные данные.

**Ключевые слова:** регулятивный текст, инструкция, конструктивный алгоритм, формальная структура, фрейм.

**Для цитаты:**

*Воронов М.В., Пичугина Е.И.* Конструктивный метод формализации текстов-инструкций // Моделирование и анализ данных. 2024. Том 14. № 4. С. 63–77.  
DOI: <https://doi.org/10.17759/mda.2024140404>

**\*Воронов Михаил Владимирович**, доктор технических наук, профессор, Московский государственный психолого-педагогический университет (ФГБОУ ВО МГППУ), г. Москва, Российская Федерация, ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-7839-6250>, e-mail: [mivoronov@yandex.ru](mailto:mivoronov@yandex.ru)

**\*\*Пичугина Елена Игоревна**, аспирант, Московский государственный психолого-педагогический университет (ФГБОУ ВО МГППУ), г. Москва, Российская Федерация, e-mail: [pichugina070698@gmail.com](mailto:pichugina070698@gmail.com).

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Основные результаты своей познавательной деятельности люди фиксируют в текстах, представляющих собой организованную определенным образом последовательность знаков, взятых из некоторого множества, например, алфавита. Основные функции текста: сохранять и передавать реципиенту зафиксированные в нем сведения. Следовательно, при манипуляциях с текстом, в том числе с использованием вычислительной техники, необходимо стремиться к сохранению его содержания, с помощью которого автор имел цель передать свои мысли. Однако, текст является лишь отображением мыслей автора, т.е. их моделью. От того, как построена эта модель и зависит уровень соответствия между мыслями автора и текстом, их отражающим. Несомненно, различные индивидуумы, после ознакомления с одним и тот же текстом (знакомясь с содержанием, представляющим собой лишь объективное отражение мыслей автора текста) будут воспринимать его не одинаково (Рис. 1).

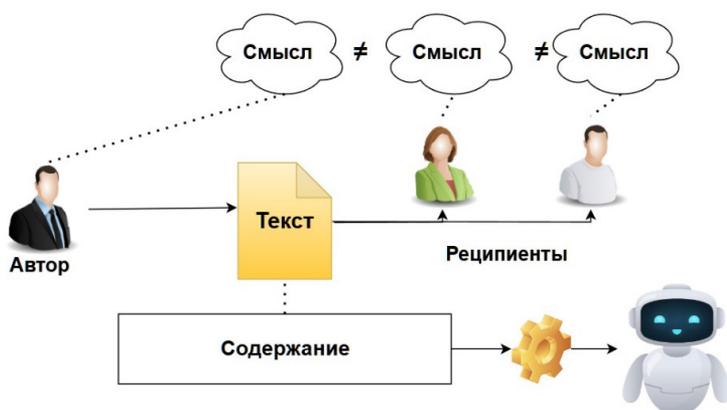


Рис. 1 Восприятие смысла текста

В отличие же от человека программный продукт реализует операции строго в соответствии с заложенным в нем алгоритмом, в основе которого лежит определенное выраженное в формальном виде содержание. В этой связи только достаточно высокий уровень адекватности содержания формализованного варианта текста его вербальному источнику обеспечивает, по крайней мере потенциально, эффективность оперирования им (содержанием) при помощи информационных технологий.

В общем случае вербально представленный текст есть упорядоченное множество слов, каждое из которых есть определенная последовательность букв. С точки зрения лингвистики буква в рамках конкретного языка представляет собой графический символ, чаще всего соответствующий определённому звуку, и, как правило, локализованная буква не несет никакого содержания. Отдельные слова, т.е. обособленно



определенное упорядоченное множество букв данного алфавита, обычно выполняют номинативную функцию, обозначая имена объектов или действий, их свойств и отношений между ними. При этом, по крайней мере в определенной предметной области, за конкретным словом закреплено определенное содержание, правда часто встречаются и многозначные слова, когда одним и тем же словом могут обозначаться разные сущности. В этой связи сформированы различного рода словари (толковые, энциклопедические, фразеологические, двуязычные и др.), которые широко используются на практике, в том числе в компьютерных системах анализа содержания текстов.

В зависимости от преследуемых целей слова в тексте определенным образом (обычно для фиксации законченной мысли, а также конкретизации и уточнения передаваемой отдельными словами информации) объединены в группы, называемыми предложениями. Для данного исследования имеет принципиальное значение следующий факт: передаваемое предложением содержание в существенной мере определяется не только входящими в него словами, но и самой структурой его построения (налицо так называемая семантическая эмерджентность). Это обстоятельство приводит к важному выводу: заключенное в предложении содержание шире, чем суммарное содержание слов предложения взятых в отдельности. Заметим, подобный эффект, правда менее выраженный, наблюдается и при формировании из совокупности предложений конкретного текста: данная совокупность предложений в зависимости от схемы ее построения может передавать разный смысл. Налицо подтверждение ставшего классическим утверждения теории систем: переход на более высокий уровень сложности приводит к появлению у объекта новых свойств, которым не обладают его более простые версии [1]. В ряде работ лингвистов приводятся близкие по сути результаты: «понимание отдельных пропозиций детерминировано их местом, ролью и функциями в текстовом пространстве» [2, с. 50].

Можно сделать вывод, что в процессе формализации текста в интересах сохранения находящегося в нем содержания необходимо выявлять, фиксировать и сохранять структуру составляющих его предложений, а также последовательность последних и связи между ними.

## 2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Задача представления текстов в формальном виде, в максимальной степени сохраняющем содержание источника, столь сложна, что большинство авторов не без основания считают, что разработать универсальные средства формализации произвольного представленного в вербальной форме текста, при сохранении его содержания на достаточно высоком уровне, в обозримом будущем вряд ли возможно [3]. Вместе с тем представляется, что для некоторых типов текстов имеются исключения. К таковым, по нашему мнению, относятся так называемые «регулятивные тексты» – тексты выполняющие координационные (регулятивные) функции. Это распорядительные документы, инструкции, описание технологий, учебные тексты и т.п. Назначение такого рода текстов заключается в том, чтобы обеспечить реципиентам



возможность в достаточно адекватной мере воспроизводить описываемые в текстах действия. Исходя из их назначения, регулятивные тексты стремятся строить соответствующим образом: использовать принятые в данной предметной области слова и обороты речи, строить однозначно интерпретируемые фразы, строго учитывать последовательность отдельных действий и т.п.). Ряд такого рода особенностей открывает, по нашему мнению, возможность успешной формализации заданных в вербальной форме регулятивных текстов [4]. Наиболее ярко признаки регулятивности проявляются у текстов-инструкций, которые являются объектами данного исследования.

Под инструкцией обычно понимают текст, в котором излагается регламент определенной целевой деятельности [5]. Иными словами, это изложение последовательности действий, которые следует произвести.

Лингвисты рассматривают широкий спектр типов инструкций: формально-семантический, собственно прескриптивный, ограничительно-прескриптивный, наглядно-прескриптивный, вопросительно-прескриптивный и др.). Вместе с тем с позиций читающего, все инструкции это, вообще говоря, упорядоченный набор предписаний (прескрипций), т.е. побудительных высказываний об определенных действиях (или их отсутствии). По существу, в тексте-инструкции в словесной форме излагается алгоритм действий, которые реципиенту необходимо неукоснительно осуществить. Заметим, автор текста-инструкции обычно полагает, что читателю понятно, как исполнять данное конкретное (элементарное для данного текста) действие. Этот факт имеет существенное значение при решении вопросов формализации побудительных предложений исходного текста-инструкции. Если же в исходном тексте присутствуют предложения дескриптивного характера, то они носят вспомогательный характер и обычно предназначены для «неквалифицированных» субъектов.

Пусть поставлена задача: в вербальной форме задан текст-инструкция, требуется построить формальную структуру, адекватно передающую содержание исходного текста.

Примечание. Будем считать, что при построении формальной модели данного текста-инструкции располагаем лишь представленной явно словесной структурой, и только! В ряде работ отмечается, что, например, словосочетание «прилагательное + существительное» содержит скрытую предикацию [6, с. 94]. Это влечет за собой за собой предположение о наличии в тексте скрытой предикации. Заметим, именно этот факт в существенной мере определяет (в том числе) принципиальную сложность разработки универсальных средств формализации текстов. В данном же случае, при рассмотрении текстов-инструкций, предполагается отсутствие (или неучет) скрытой предикации. Иначе говоря, формализации подлежит только содержание исходного текста, а не восстановленного смысла, который пытался заложить автор в текст инструкции (иначе говоря, не следует путать понятия смысл и содержание). Содержание это означаемое собственно текстом, а термин «смысл» используют при рассмотрении результатов осознания субъектом в данном случае содержания текста [7]. В конечном счете, в рассматриваемой задаче «домысливание», трактовка представленных в предложении сведений не допустима, кроме разве что идентификация типа отношений между словами текста.



### 3. АНАЛИЗ СТРУКТУРЫ ТЕКСТОВ-ИНСТРУКЦИЙ

В текстах-инструкциях основное место занимают так называемые глагольные предложения, содержащие в своем составе помимо собственно глагола, показатели времени, лица и наклонения, что дает ему возможность выражать основное значение предложения – предикативность [8]. При этом предикат предложения обычно определяет и участников действия (партиципантов, акторов). Именно в этом аспекте часто утверждается, что с предикатом ассоциируется содержательный аспект [9]. Помимо партиципантов при описании ситуации часто используются важные для передачи смысла действия дополнительные признаки (время, место, темп протекания и т. д.), так называемые обстоятельственные слова (сирконстанты), используются различные формы времени и вида [10].

В рамках структурной лингвистики разрабатывается вербоцентрическая теория структурного синтаксиса [11]. Согласно этой теории, глагол в высказывании является структурно-семантическим центром предложения, чье строение определяется способностью глагола создавать лакуны, подлежащие заполнению [12]. При этом все члены предложения, дополняющие семантику глагола, одинаково важны, вследствие чего подлежащее перестает быть главным членом и переходит в разряд дополнений [13, с. 70].

Вместе с тем, еще XIX века А.А. Дмитриевский по этому поводу писал: «Не два главных члена в предложении, а только один. Сказуемое есть неограниченный властелин, царь предложения, если есть в предложении кроме него другие члены, они строго ему подчинены и от него только получают свой смысл и значение, если нет их, даже подлежащего, сказуемое само собой достаточно выражает мысль и составляет целое предложение. Иначе сказать: и само предложение есть не что иное, как сказуемое, или одно, или с приданными ему другими членами» [14, с. 22]. Будем исходить из того, что носителем предикативности всего предложения выступает сказуемое (или сочетание соответствующих слов), т.е. является ключевым признаком предложения, делающим его единицей сообщения. Все остальные члены предложения лишь конкретизируют описываемое в нем действие.

Поскольку основу текстов-инструкций составляют побудительные предложения, занятие такой позиции существенно упрощает решение поставленной задачи. Действительно, в такого рода предложениях содержательную суть обычно несет императивная глагольная словоформа (подключить, снять, перевести и т.д.), остальные члены предложения лишь конкретизируют данное действие и условия его осуществления. Это содержательное ядро такого предложения, отталкиваясь от которого можно сформировать его формальное представление. Последнее удобно представлять в виде специфический граф, типа «гроздь» [15].

Предметом нашего рассмотрения является процесс формализации представленного в тексте-инструкции содержания. В процессе формализации должен осуществляться перенос имеющегося в вербальном тексте содержания в содержание формируемых формальных структур.



Содержание вербального текста передается и словами, и их взаимным расположением, т.е. его структурой. Особенности именно текстов-инструкций позволяют принять следующее условие: слова текста рассматриваются в качестве данных элементов (ими оперирую, как целым). В этом случае основные усилия сосредотачиваются в отображении отношений, в которых находятся сущности, обозначаемые словами текста.

Итак, пусть задан представленный в вербальной форме текст-инструкция. Требуется разработать метод построения его формализованного аналога, обеспечивающего возможность оперировать содержанием исходного текста как математической структурой.

Примечание. В такой постановке термин «формализация» использован скорее по традиции. В данном контексте он означает процесс перестроения структуры данного текста, но так, чтобы новое представление, сохраняя всю информацию, заложенную в содержание исходного варианта, отвечало возможности адекватного оперирования ею при разработке соответствующих программных продуктов.

#### 4. АЛГОРИТМ ФОРМАЛИЗАЦИИ ПРЕДЛОЖЕНИЙ ТЕКСТА-ИНСТРУКЦИИ

Представляется целесообразным решение поставленной задачи осуществить в виде разработки конструктивного процесса построения соответствующей тексту семантической сети.

Напомним, процесс является конструктивным (в математическом аспекте), когда:

- Задан алфавит исходных объектов, рассматриваемых как нерасчленимые;
- Задан список правил образования новых объектов из ранее построенных;
- Процессы построения новых объектов осуществляются имеющими точную характеристику отдельными шагами, причем такими, что обеспечена их «нетрудная» реализация.» [16, с. 1058].

Характерными примерами конструктивных процессов является процесс построение слов из букв данного алфавита. Действительно, автор имеет некоторое множество исходных элементов (букв и ряд знаков препинания). Из них он формирует слова, которые образуются путем приписывания очередного подходящего знака (в том числе и пропуска).

В данном случае исходный алфавит образуют слова текста, т.е. каждое слово воспринимается как имя соответствующего понятия и в дальнейшем им оперируют, как элементом. Это предположение базируется на том, что автор исходного текста-инструкции полагает: реципиенту понятен смысл каждого использованного термина, а также и то, как изменится состояние участвующих в действии объектов после окончания определенного действия. Например, пусть в тексте есть предложение: «вернуть кран  $K_j$  на два деления влево». Это означает, что понятно о каком кране идет речь и известно (по построению) в каком конкретно состоянии он находится, например, в состоянии  $SK7_j$ . По окончании данного действия  $i$  этот кран будет находиться в другом состоянии, например,  $SK7_j(j=i+1)$ .

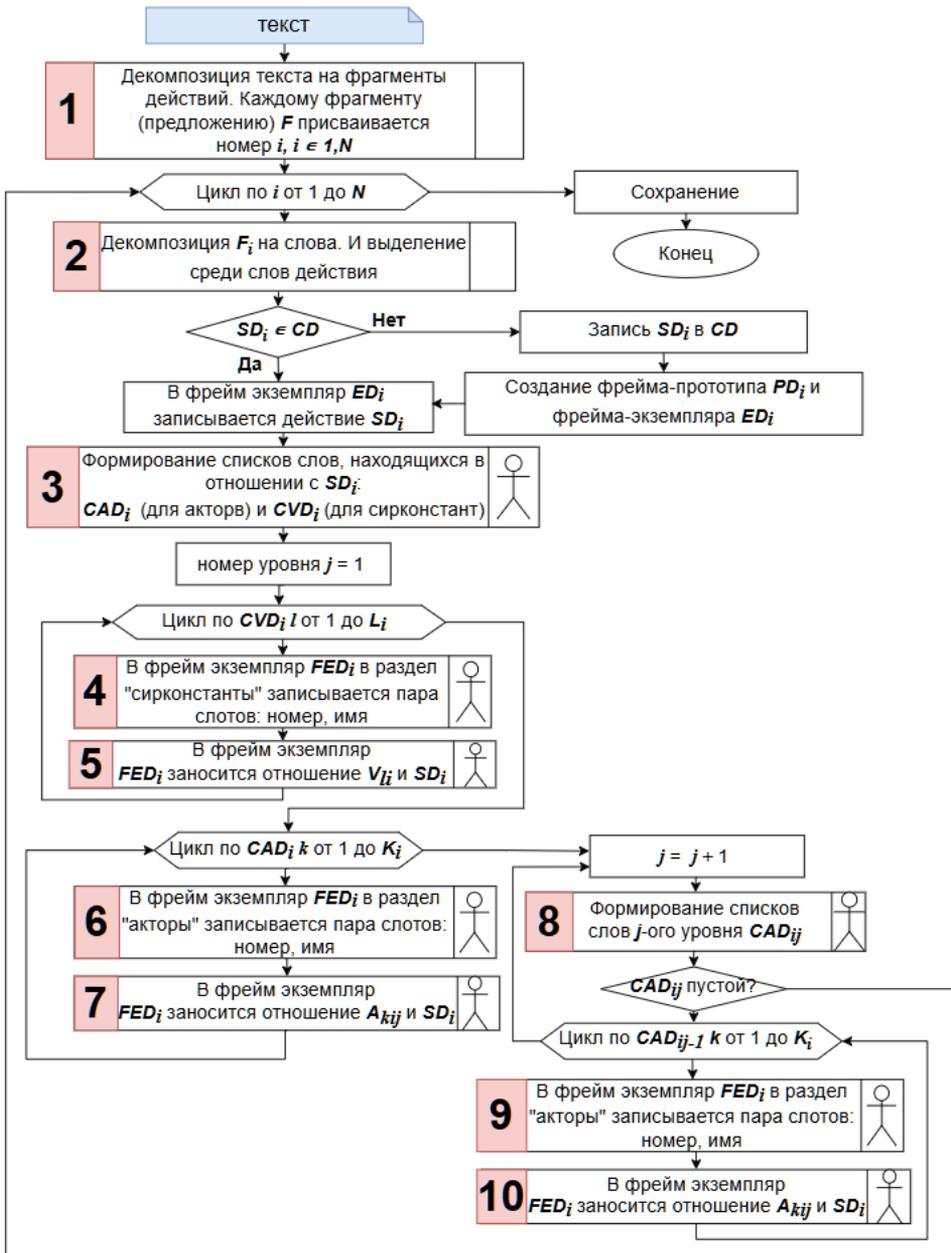


Рис. 2 Блок-схема алгоритма

Обобщенный алгоритм решения поставленной задачи представлен на рис. 2.

$F$  – фрагмент текста (предложение);

$i$  – номер предложения;

$S$  – слово в предложении  $F_i$ ;

$D_i$  – действие в предложении  $i$ ;

$SD$  – слово (оборот), описывающее действие;

$CD$  список слов, описывающих действия;

$PD_i$  – фрейм-прототип действия в предложении  $i$ ;

$ED_i$  – фрейм экземпляр действия в предложении  $i$ ;

$j$  – номер уровня окружения слов данного предложения;

$CVD_i = \{V_{li}\}$ ,  $l \in [1, L_i]$ , список слов, описывающих обстоятельства реализации данного действия;

$CAD_i = \{A_{ki}\}$ ,  $k \in [1, K_i]$ , список слов, обозначающих предметы (акторов), непосредственно участвующие в данном действии;

$FED_i$  фрейм-экземпляр для действия  $D_i$ .

$OVD_i$  список отношений, в которых сирконстанты из  $\{V_{li}\}$ , находятся с данным действием;

$OV_{li}$  – отношение из списка  $OVD_i$  под номером  $l$ , в котором этот сирконстант находится с данным действием;

$OA_{ki}$  – имя актора из списка  $CAD_i$  под номером  $k$ , в котором этот актор находится с данным действием.

Изложим ряд положений, раскрывающих особенности излагаемого подхода решения поставленной задачи.

1. Любой конструктивный процесс осуществляется по шагам [17]. В данном случае реализуются шаги разных уровней. Основным шагом, назовем его внешним, является построение формализма, отображающего содержание отдельного предложения исходного текста. В ходе его осуществления реализуется множество так называемых внутренних шагов. На каждом внутреннем шаге решается «судьба» каждого из составляющих предложения слов. При этом фиксируется отдельное слово и выявляются отношения, в которых соответствующая сущность находится с другими объектами, представленными в данном предложении. Все такого рода сведения определенным образом фиксируются.
2. Предложение текста отображается в виде отдельной подсети (ориентированного графа), характерная структура которой представлена на рис. 3.

Ее образуют следующие компоненты: «ядро» соответствует слову, описывающему в предложении действие, слова, описывающие имена «входных» объектов (непосредственных участников этого действия), а также их состояние на начало действия, слова описывающие имена «выходных» объектов – всех задействованных (и вновь сформированных) в действии объектов, а также соответствующие сирконстанты, значения которых отвечает состоянию всех компонентов на момент окончания данного действия. Таким образом, граф, отображающий структуру предложения представляет собой «гроздь» весьма своеобразного вида: одна группа дуг входит, а другая

выходит из ядра, причем входные дуги в свою очередь составляют два подмножества: одни выходят из акторов, другие из сирконстант, но все они входят в «ядро», отображающее в данном предложении действие.

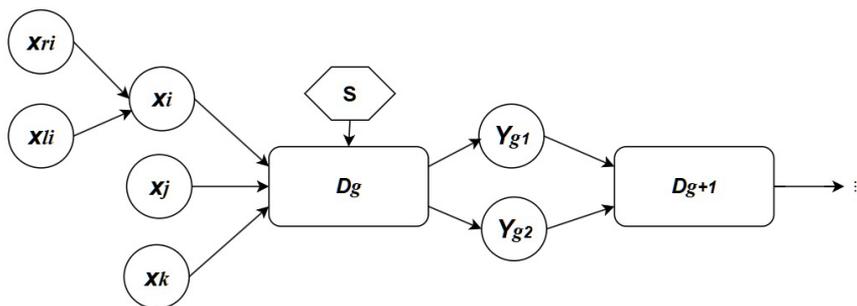


Рис. 3 Отображение структуры отдельного предложения

3. Процедура формализации очередного предложения начинается с выявления сказуемого (предикатного слова или оборота), описывающего собственно действие, о котором идет речь в данном предложении, что является ключевым моментом представляемого подхода. Предикатное слово и является тем первым словом, которое отображается «центральной» вершиной ориентированного графа, представляющего впоследствии структуру рассматриваемого предложения (см. Рис. 3). Отталкиваясь от него осуществляются все последующие (внутренние) шаги, приводящие к формированию остальных компонентов формируемого графа, ибо помимо собственно действия в предложении обычно описаны и отношения данного действия к ряду объектов (акторов действия), а также сирконстанты, характеризующие обстоятельства описываемого действия. Продолжая рассматривать описанный выше пример, отмечаем: исходное слово (обозначение действия) «повернуть», повернуть что? – «кран К7», куда? – «влево», на сколько? – «на два деления».
4. В результате формализации исходный текст представляется в виде семантической сети, элементами которой выступают соответствующие фреймы. Каждый из них несет в себе сведения о представленных в тексте сущностях, а также связях с другими сущностями, отражая динамику изменения их состояния.
5. Формирование графа, отображающего данное предложение, осуществляется по схеме «в ширь». В данном случае это означает, что для каждого рассматриваемого слова выявляются слова, находящиеся с ним только в прямом (непосредственном) отношении. Как уже отмечено, вначале выявляется предикатное слово предложения и формируется множество слов, которые находятся в непосредственном отношении со сказуемым. Это так называемые семантические актанты, представляющие собой акторов, объекты или инструменты действия, а также обстоятельства их участия [18]. Особенность этих слов в том, что они

обозначают только те предметы, которые находятся с данным предикатом в непосредственных отношениях. Будем говорить, что эти слова, т.е. подлежащее и дополнения образуют ярус первого уровня (заметим, ярус первого уровня единственный). Каждому из этих слов могут быть поставлены в соответствие зависимые слова, которые образуют второй ярус. Компоненты последнего также могут содержать зависимые слова и т.д. (ярусов не первого уровня может быть несколько). Важно подчеркнуть, что в каждый данный ярус включаются только слова, обозначающие сущности, находящиеся с образующим данный ярус словом в непосредственном отношении (первый ярус образует предикат предложения, другие ярусы образуют акторы действий). (Рис. 4)

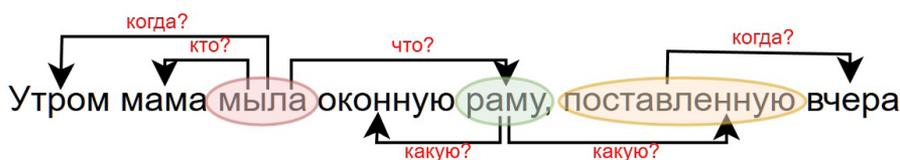


Рис. 4 Пример графа, построенного по предложению

- В текстах встречаются сложные предложения – предложения, составленные из простых предложений (простое предложение содержат одно сказуемое). Если предложение сложносочинённое, т.е. в нем несколько простых предложений, соединенных сочинительными союзами, то все простые предложения рассматриваются и формализуются последовательно, как отдельные предложения исходного текста. Если же предложение сложноподчинённое, т.е. содержит простые предложения, соединенные подчинительными союзами, то они формализуются по описанной выше схеме формирования соответствующего яруса.
- Все результаты осуществления шагов, реализованных в ходе рассмотрения данного предложения, фиксируются в соответствующих фреймах. Формируется два множества фреймов. Первый образуют фреймы, где зафиксирована структура описания рассматриваемого действия (указаны участники данного действия и их отношения к описываемому действию). Во фреймах второго множества отражается история изменения состояния упомянутых в тексте объектов. Для этого в них фиксируется состояние объекта на конец описываемого действия (предыдущие состояния были зафиксированы на предшествующих шагах или заданы в качестве исходных). Правила отображения результатов каждого шага формализации обуславливают принятые схемы формирования соответствующих фреймов (рис. 5).
- Важно рассматривать участвующие в данном действии объекты в состоянии, в котором они находятся именно на начало описываемого в предложении действия. Это условие обеспечивается тем, что поскольку в текстах-инструкциях важна последовательность описываемых действий, то на начало очередного действия, в котором участвует данный объект, он находится в актуальном состоянии. В этой связи состоянию каждого актора на момент окончания данного действия

присваивается номер рассматриваемого предложения. Следовательно, номера предложений, номера действия и состояния участвующих в действиях объектов находятся в однозначно идентифицируемой связи. Это обстоятельство позволяет автоматизировать процесс синтеза текста в целом из построенных формализмов его отдельных предложений [19].

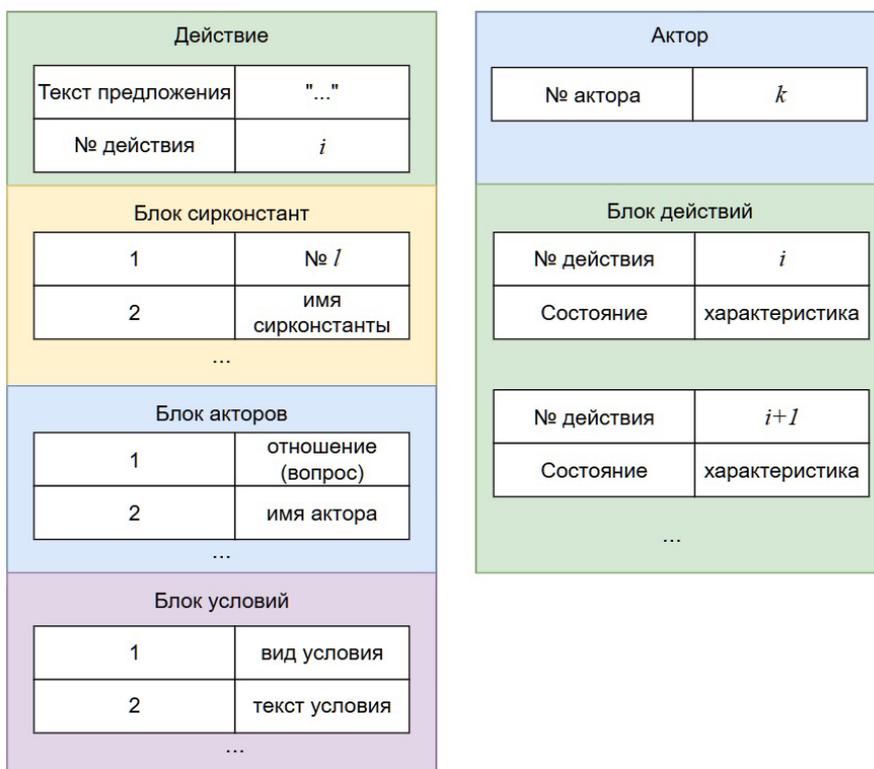


Рис. 5 Структура фреймов

## 5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Предложенный метод формализации текстов, представленных в виде инструкций, основывается на том, что они состоят из определенной последовательности побудительных предложений. Это обеспечивает возможность утверждать, что в основе структуры каждого предложения исходного текста-инструкции лежит его предикат, а остальные слова предложения лишь раскрывают, уточняют описываемое действие.

Изложенный метод представляет собой конкретную форму реализации конструктивного процесса, что обеспечивает возможность решения поставленной задачи:



построить пошаговый, допускающий четкую реализацию автоматизированного процесса, в ходе которого формируется формальная модель заданного в вербальной форме исходного текста-инструкции. Эта модель представляет собой семантическую сеть, связывающую между собой сформированную совокупность заполненных фреймов.

Наличие формальных моделей таких текстов обуславливает возможности решения широкого круга задач анализа и синтеза пакетов документации конкретной предметной области.

### *Литература*

1. *Anderson P.W.* More Is Different Science 1972, no. 177(4047), pp. 393–396.
2. Серебрякова С.В., Милостивая.И. Семантическая эмерджентность как переводческая проблема // Вестник ВолГУ. Серия 2, Языкознание. 2017. Т. 16. № 3. С. 48–57.
3. *Walter Benedikt, Hammes Jakob, Piechotta Marco, Rudolph Stephan.* A Formalization Method to Process Structured Natural Language to Logic Expressions to Detect Redundant Specification and Test Statements // IEEE 25th International Requirements Engineering Conference (RE) – Lisbon. 2017. pp. 263–272.
4. *Воронов М.В., Зотов Д.Р., Кремков М.В.* Автоматизация процессов формализации технологий // Вестник Санкт-Петербургского государственного университета технологии и дизайна. Серия 1: естественные и технические науки. 2022, № 4. С. 5–10.
5. Большой энциклопедический словарь: В 2 т. / Гл. ред. А.М. Прохоров. Т. 1. М., 1991.
6. *Сандакова М.В.* Прилагательное в позиции атрибута и предиката // Вестник Вятского государственного университета. Филологические науки, 2007, № 16. С. 94–100.
7. *Новиков А.И.* Текст и его смысловые доминанты. М.: Ин-т языкознания РАН, 2007. 224 с.
8. *Пащенко Ю.А.* Предикативность и предикат в лингвистике и логике // Вестник ТГПИ Гуманитарные науки С. 70–72. [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <https://cyberleninka.ru/article/v/predikativnost-i-predikat-v-lingvistike-i-logike> (дата обращения: 23.08.2024).
9. *Арутюнова Н.Д.* Сокровенная связка (к проблеме предикативного отношения) / Изв. АН СССР, 1980. Т. 39. № 4. С. 347–358.
10. *Немченко В.Н.* Введение в языкознание: учебник для вузов / В.Н. Немченко. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Издательство Юрайт, 2015. – 679 с.
11. *Zakharov Victor, Krassovitskiy Alexander, Meirambekkyzy Zhazirakhanym, Ualiyeva Irina, Khoroshilov Aleksander, Khoroshilov Alexey.* Automatic Creation Technologies of Declarative Tools for Clustering Media Documents // International Conference on Engineering Technologies and Computer Science (EnT). 2019. pp. 39–42.
12. *Теньер Л.* Основы структурного синтаксиса. М.: Прогресс, 1988. 656 с.
13. *Макаренко Н.Л.* Вербоцентрическая теория синтаксической структуры высказывания в курсе РКИ и современного русского языка / Материалы VII Республиканского научно-практического семинара Лингводидактика – Минск, МГПУ, 2020. С. 66–75.
14. *Дмитриевский А.А.* Практические заметки о русском синтаксисе // Филологические записки. IV. 1877. С. 3–38.
15. *Sihole Vusi, Marshal Linda.* Building Concept Hierarchies for the Internet of Things Patterns Using Domain-specific Dependency Knowledge // Open Innovations (OI). 2019. pp. 1–7.
16. Математическая энциклопедия: гл. редактор И.М. Виноградов – Советская энциклопедия, т. 2, 1979. 1104 с.
17. *Воронов М.В.* Конструктивно-имитационное моделирование слабоструктурированных систем. // Известия МАН ВШ. 2007, № 4(42), С. 156–165.



18. Батура Т.В. Семантический анализ и способы представления смысла текста в компьютерной лингвистике // Программные системы и продукты, 2014. № 4, С. 45–57.
19. Воронов М.В., Пименов В.И. Формализация регулятивных текстов // Информатика и автоматизация, 2021, Том 20, № 3. С. 562–589.



## Constructive Method of Formalization of Instruction Texts

***Mikhail V. Voronov\****

Moscow State University of Psychology and Education (MSUPE), Moscow, Russia

ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-7839-6250>

e-mail: [mivoronov@yandex.ru](mailto:mivoronov@yandex.ru)

***Elena I. Pichugina\*\****

Moscow State University of Psychology and Education (MSUPE), Moscow, Russia

e-mail: [pichugina070698@gmail.com](mailto:pichugina070698@gmail.com)

The problem of formalization of text data, which lies at the intersection of linguistics, systems theory and information technology, is considered. The focus is on the process of translating the content presented in the instructions into formal structures. The method proposed is to extract content from the sentence of the instruction text, which allows for an effective conversion of verbal information into formalized data.

**Keywords:** regulatory text, instruction, constructive algorithm, formal structure, frame.

### **For citation:**

Voronov M.V., Pichugina E.I. Constructive Method of Formalization of Instruction Texts. *Modelirovanie i analiz dannykh = Modelling and Data Analysis*, 2024. Vol. 14, no. 4, pp. 63–77. DOI: <https://doi.org/10.17759/mda.2024140404> (In Russ., abstr. in Engl.).

### **References**

1. Anderson P.W. More Is Different. *Science*, 1972, No. 177 (4047), pp. 393–396.
2. Serebryakova S.V., Milostivaya A.I. Semanticheskaya emergentnost' kak perevodcheskaya problema. *Vestnik VolGU. Seriya 2, Yazykovedenie*. 2017. T. 16. No. 3. pp. 48–57.
3. Walter Benedikt, Hammes Jakob, Piechotta Marco, Rudolph Stephan. A Formalization Method to Process Structured Natural Language to Logic Expressions to Detect Redundant Specification and Test Statements. *IEEE 25th International Requirements Engineering Conference (RE) – Lisbon*. 2017. pp. 263–272.
4. Voronov M.V., Zotov D.R., Kremkov M.V. Avtomatizatsiya protsessov formalizatsii tekhnologiy. *Vestnik Sankt-Peterburgskogo Gosudarstvennogo Universiteta Tekhnologii i Dizaina. Seriya 1: Estestvennye i Tekhnicheskie Nauki*. 2022, No. 4. pp. 5–10.
5. Bol'shoy entsiklopedicheskiy slovar': V 2 t. Glavnyy redaktor A.M. Prokhorov. T. 1. Moscow, 1991.

\***Mikhail V. Voronov**, Doctor of Technical Sciences, Professor, Moscow State University of Psychology and Education (MSUPE), Moscow, Russia, ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-7839-6250>, [mivoronov@yandex.ru](mailto:mivoronov@yandex.ru)

\*\***Elena I. Pichugina**, Graduate Student, Moscow State University of Psychology and Education (MSUPE), Moscow, Russia, [pichugina070698@gmail.com](mailto:pichugina070698@gmail.com)



6. Sandakova M.V. Prilagatel'noe v pozitsii atributa i predikata. Vestnik Vyatskogo Gosudarstvennogo Gumanitarnogo Universiteta Filologicheskie Nauki. 2007, No. 16, pp. 94–100.
7. Novikov A.I. Tekst i ego smyslovye dominanty. Moscow: In-t Yazykovedeniya RAN. 2007, 224 p.
8. Pashchenko Yu.A. Predikativnost' i predikat v lingvistike i logike. Vestnik TGPi Gumanitarnye Nauki, pp. 70–72.
9. Arutyunova N.D., Sokrovennaya svyazka: K probleme predikativnogo otnosheniya. Izvestiya AN SSSR, Seriya LiyA. 1980, T. 39, No 4, pp. 347–358.
10. Nemchenko V.N. Vvedenie v yazykovedenie: uchebnyk dlya vuzov / V.N. Nemchenko – 2-e izd., pererab., i dop – Moscow: Izdatel'stvo Yurayt, pp. 2015–679.
11. Zakharov Victor, Krassovitskiy Alexander, Meirambekkyzy Zhazirakhanym, Ualiyeva Irina, Khoroshilov Aleksander, Khoroshilov Alexey. Automatic Creation Technologies of Declarative Tools for Clustering Media Documents. International Conference on Engineering Technologies and Computer Science (EnT). 2019, pp. 39–42.
12. Tenyer L. Osnovy strukturnogo sintaksisa. Moscow: Progress. 1988, 656 p.
13. Makarenko N.L. Verbotsestricheskaya teoriya sintaksicheskoy struktury vyskazyvaniya v kurse RKI i sovremennogo russkogo yazyka. Materialy VII Respublikan'skogo nauchno-prakticheskogo seminaru Lingvodidaktika – Minsk, MGPU, 2020, pp. 66–75.
14. Dmitrievskiy A.A., Prakticheskie zametki o russkom sintaksise. Filologicheskie zapiski IV, 1877, pp. 3–38.
15. Sithole Vusi, Marshal Linda. Building Concept Hierarchies for the Internet of Things Patterns Using Domain-specific Dependency Knowledge. Open Innovations (OI). 2019, pp. 1–7.
16. Matematicheskaya entsiklopediya: glavnyy redaktor I.M. Vinogradov, t.v – Sovetskaya entsiklopediya, pp. 1979–1104.
17. Voronov M.V., Konstruktsionno-imitatsionnoe modelirovanie slabostrukturirovannykh sistem. Izvestiya MAN VSh № 4(42), 2007 g., pp.156–165.
18. Baturova T.V., Semanticheskyy analiz i sposoby predstavleniya smysla teksta v komp'yuternoy lingvistike. Programmye sistemy i produkty. 2014, No4, pp. 45–57.
19. Voronov M.V., Pimenov V.I., Formalizatsiya regulativnykh tekstov. Informatika i Avtomatizatsiya. 2021, Tom 20, No3, pp. 562–589.

Получена 06.11.2024

Received 06.11.2024

Принята в печать 02.12.2024

Accepted 02.12.2024

## Математическая модель процесса ингибирования газосборных шлейфов

**Паранук А.А.** \*

Кубанский государственный технологический университет  
(ФГБОУ ВО КубГТУ), г. Краснодар, Российская Федерация  
ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-2443-683X>  
e-mail: [rambi.paranuk@gmail.com](mailto:rambi.paranuk@gmail.com)

**Терещенко И.А.** \*\*

Кубанский государственный технологический университет  
(ФГБОУ ВО КубГТУ), г. Краснодар, Российская Федерация  
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-4804-4251>  
e-mail: [ongptr@mail.ru](mailto:ongptr@mail.ru)

**Шишков В.С.** \*\*\*

Филиал ФГБОУ ВО Майкопский государственный  
технологический университет (МГТУ), пос. Яблоновское  
Республика Адыгея, Российская Федерация  
ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-2112-1605>  
e-mail: [vsishshkov@gmail.com](mailto:vsishshkov@gmail.com)

В работе представлена оригинальная математическая модель определения термобарических параметров промышленного шлейфа, в которой учитывается конвективный теплоперенос, турбулентное ядро, возникающее в полости газосборного шлейфа. В представленной математической модели теплоперенос, теплообмен и турбулентное ядро описывается двумя безразмерными коэффициентами. Также в работе приводится авторское уравнение определения влагосодержания природного газа, которая позволяет точнее проводить расчеты процесса ингибирования метанолом в газосборных шлейфах (промышленных газопроводах). Методика расчета ингибитора, которая рассматривается в работе, может применяться для ликвидации гидратов при их образовании в газосборных шлейфах. В методике учитывается фазовый переход газ-гидрат, режим работы газопровода, расход в шлейфе, давление, температура и концентрация ингибитора. Верификация методики проводилась при помощи промышленных данных, полученных с действующего газового месторождения Краснодарского края.

**Ключевые слова:** гидраты природного газа, влагосодержание природного газа, клатратное соединение, ингибитор, теплопотери, промышленный газопровод, конвективный теплоперенос.



**Для цитаты:**

*Паранук А.А., Терещенко И.А., Шишков В.С.* Математическая модель процесса ингибирования газосборных шлейфов // Моделирование и анализ данных. 2024. Том 14. № 4. С. 78–90. DOI: <https://doi.org/10.17759/mda.2024140405>

**\*Паранук Арамбий Асланович**, кандидат технических наук, доцент, Кубанский государственный технологический университет (ФГБОУ ВО КубГТУ), г. Краснодар, Российская Федерация, ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-2443-683X>, e-mail: [rambi.paranuk@gmail.com](mailto:rambi.paranuk@gmail.com)

**\*\*Терещенко Иван Анатольевич**, старший преподаватель, Кубанский государственный технологический университет (ФГБОУ ВО КубГТУ), г. Краснодар, Российская Федерация, ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-4804-4251>, e-mail: [ongptr@mail.ru](mailto:ongptr@mail.ru)

**\*\*\*Шишков Валерий Сергеевич**, кандидат технических наук, доцент, Филиал ФГБОУ ВО Майкопский государственный технологический университет (МГТУ), пос. Яблоновское, Республика Адыгея, Российская Федерация, ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-2112-1605> e-mail: [vsishshkov@gmail.com](mailto:vsishshkov@gmail.com)

## 1. ВВЕДЕНИЕ

При добыче природного газа, в зимний период возникает проблема образования гидратов в промысловых системах сбора природного газа. Так как, природный газ, поступающий из скважины не обработанный, и содержит различные нежелательные компоненты (вода, жидкие углеводороды, соли жесткости), которые приводят к авариям и аварийным инцидентам в шлейфах газопроводов.

Основным компонентом, который является катализатором образования гидратов природного газа, является избыточное содержание влаги в добываемом природном газе. Вода, которая содержится в добываемом природном газе при определенных термобарических параметрах, кристаллизуются и образует клатратное соединение «гидрат». В целях обеспечения работоспособности газосборного шлейфа, и ликвидации гидратов в полость газопровода подают ингибитор (метанол), согласно утвержденным технологическим картам. Использование данной технологий приводит перерасходу ингибитора, а также к дополнительным материальным затратам на хранение и транспортировку ингибитора. Для материальных затрат и сокращения расходов на процесс ингибирования, необходимо использовать дозированную подачу метанола, что влечет за собой достаточно сложный технологический расчеты, который включает несколько математических моделей. К этим математическим моделям относятся: определение температуры и давления природного газа по всей длине газосборного шлейфа, определение температуры фазового перехода, определение объема влаги, который содержится в природном газе, теплопотери шлейфа за счет процесса теплопередачи в окружающую среду и т.д.



## 2. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ И ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Для моделирования термобарических параметров газосборного шлейфа воспользуемся оригинальной математической моделью, которая приводится в работах авторов [1–3].

Предположим, что внутри сечение газового потока в полости трубопровода возникает турбулентное ядро [4], в нем происходит интенсивный конвективный теплоперенос (процесс, обусловленный передачей тепловой энергии между молекулами газа), тогда считаем усреднению температуру температурой ядра. При этом в турбулентном режиме потока газа у стенки возникает пограничный слой, который можно характеризовать средним значением скорости потока  $\mathcal{Q}$ . Распределение температуры по сечению промыслового трубопровода, принимаем переменной, так как происходит теплообмен между стенкой и окружающей средой. Тогда для промыслового газопровода, принимаем две координаты  $(x, r)$ . Причем  $x$  отсчитывается из выхода со скважины, а  $r$  – осевая линия промыслового газопровода (см. рис. 1).

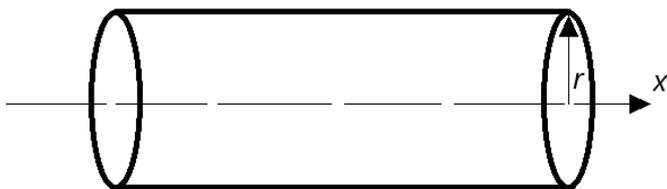


Рис. 1. Участок промыслового газопровода (шлейфа)

Запишем уравнение теплопроводности для рисунка 1 в цилиндрической системе координат  $(r, \theta, x)$  при условии что процесс стационарный с конвективным переносом тепла для шлейфа получим [1–4]:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \chi \left( \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right), \quad (1)$$

где  $T$  – температура газа, °С;  $\chi$  – коэффициент температуропроводности  $\left( \chi = \frac{\lambda}{\rho \tilde{n}} \right)$ , м<sup>2</sup>/с; содержит  $\lambda$  – коэффициент теплопроводности газа, Вт/(град·м);  $\rho$  – плотность газа, кг/м<sup>3</sup>.

В рассматриваемом уравнении (1) температурное поле не зависит от угла  $\theta$ , поэтому полагая что  $\frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} = 0$ . Тогда получим уравнение теплопроводности в виде:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \chi \left( \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right), \quad (2)$$



При условии, что температура газопровода зависит от координат  $T(x, r)$ , и считая, что течение газа стационарно, т.е.  $\frac{\partial T}{\partial t} = 0$  при конвективном переносе вдоль газопровода  $\mathcal{G}_r = 0$ , при  $\mathcal{G}_x = \mathcal{G}$  уравнение (2) примет вид:

$$\mathcal{G} \frac{\partial T}{\partial x} = \chi \left( \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right) \quad (3)$$

Далее в уравнении (3) обезразмерим по  $x = RX$  ( $R$  - шлейфа) и масштабируем координату  $R - r = RY\sqrt{\varepsilon}$ , и также произведем замену переменных  $(x, r) = (X, Y)$ , введем безразмерный параметр  $\varepsilon = \frac{\chi}{\mathcal{G}R}$ , тогда уравнение примет следующий вид [3]:

$$\frac{\partial T}{\partial X} = \frac{\partial^2 T}{\partial Y^2} - \frac{\sqrt{\varepsilon}}{1 - Y\sqrt{\varepsilon}} \frac{\partial T}{\partial Y} + \varepsilon \frac{\partial^2 T}{\partial X^2}. \quad (4)$$

Принимая, что  $\varepsilon = \frac{\chi}{\mathcal{G}R} \ll 1$ , для промысловых шлейфов, тогда проведя оценку порядка величин получим  $10^{-5}$ , тогда двумя последними слагаемыми в правой части уравнения (4) можно пренебречь по сравнению с первым уравнением [1-3].

Для проверки, слагаемых воспользуемся следующими рассуждениями, принимая температуру газа равной  $20^\circ\text{C}$ , а стенки  $10^\circ\text{C}$ , принимаем, что на расстоянии 1 см от стенки температура равняется средней температуре по сечению. Тогда изменение температуры  $\Delta T = 10^0$ , соответственно изменение радиуса  $\Delta r = R - r = 1$ . Далее принимая  $R = 10$  см, произведем следующую оценку порядка величин для промыслового шлейфа:  $Y = \frac{R - r}{R\sqrt{\varepsilon}} \approx \frac{0,1}{3,0 \cdot 10^{-3}} \approx 30$ , соответственно  $\Delta Y \approx \frac{Y}{10} \approx 3$ ; тогда  $\frac{\partial T}{\partial Y} \approx \frac{\Delta T}{\Delta Y} \approx \frac{10}{3} \approx 3,3$ ; порядок второго слагаемого в правой части уравнения (4) оценивается для газовых шлейфов как  $Y = \frac{\sqrt{\varepsilon}}{1 - Y\sqrt{\varepsilon}} \frac{\partial T}{\partial Y} \approx \frac{0,003}{1 - 30 \times 3,1 \times 10^{-3}} \approx 0,01$ .

Тогда, при отбрасывании слагаемого  $\frac{\sqrt{\varepsilon}}{1 - Y\sqrt{\varepsilon}} \frac{\partial T}{\partial Y}$  в уравнении (4), считая остальные слагаемые порядка единицы, составляет величину равную 1%.

Таким образом, для моделирования изменения температуры природного газа  $T(X, Y)$  при  $X, Y > 0$  в тепловом пограничном слое принимается одномерное уравнение теплопроводности [1-4],  $\frac{\partial T}{\partial Y} = \frac{\partial^2 T}{\partial Y^2}$  при граничных условиях  $T(X, 0) = T_0$  получим;

$$T(0, Y) = T_*. \quad (5)$$

где  $T_0$  – температура внутренней стенки трубы, а  $T_*$  – температура газа в ядре потока (вдали от стенки), соответственно полагается, что  $T_* > T_0$ . Решение задачи (5), в частности, дает следующий результат, где  $y = Y\sqrt{\varepsilon}$ :



$$\left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{y=0} = \frac{T_* - T_0}{\sqrt{\pi \varepsilon X}}, \quad (6)$$

Переходим в уравнении (6) к физическим размерным величинами и получается:

$$\left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_{r=R} = -(T_* - T_0) \sqrt{\frac{g}{x \pi \chi}}. \quad (7)$$

В уравнениях (6, 7) температура  $T_0$  и  $T_*$  постоянны при решении уравнения (5), а дальше они считаются меняющимися вдоль оси шлейфа –  $T_0(x)$  и  $T(x) = T_*$ , фактически – это свидетельствует об изменении температуры в пределах погрешности математической модели вдоль шлейфа газопровода с длиной много большей характерной толщины теплового пограничного слоя  $R\sqrt{\varepsilon}$ .

В математической модели принимаем, что  $q(t)$  удельное (по длине шлейфа) тепло-содержание единичного «объема» природного газа (при условии, что газ движется со скоростью в шлейфа  $g$ ), внутренний диаметр газопровода  $D=2R$ , в метрах; через  $T(x) = T_*$  – температура природного газа в ядре потока, которая зависит от координаты вдоль шлейфа.

Обозначим температуру на внешней стенке  $T_+$  (стенка включает теплоизоляцию), тогда для газосборного коллектора (шлейфа) запишем следующее выражение с учетом теплопередачи от природного газа к стенке [3,4]:

$$\frac{dq}{dt} = g \frac{dq}{dx} = \lambda \pi D \left. \frac{dT}{dr} \right|_{r=R} = \lambda D (T_0 - T) \sqrt{\frac{g \pi}{\chi x}}, \quad (8)$$

Тогда уравнение теплопередачи через стенку шлейфа и теплоизоляцию во внешнюю среду можно записать в виде:

$$g \frac{dT}{dx} = \frac{\pi D^2}{4} \rho c = \Lambda \pi D (T_+ - T_0) \frac{dq}{dt}, \quad (9)$$

где  $\Lambda$  – коэффициент теплопередачи через стенку коллектора единицы измерения Вт/(К·м<sup>2</sup>), а определяется сопоставлением расчета с данными измерения как усредненная характеристика теплопередающих свойств стенки шлейфа вместе с теплоизоляцией. Полученные данные соответствует классической теории конвективного теплообмена,

которая входит в число Нуссельта  $Nu = \frac{D\Lambda}{\lambda}$ , согласно источнику [5].

Аналитическое выражение температуры внешней стенки шлейфа полагаем не зависящей от температуры  $T_+$  (постоянно), тогда температура внутренней стенки  $T_0(x)$  будет зависящей. Согласно уравнению (9), выражение для определения температуры внутренней стенки примет следующий вид:

$$T_0 = T_+ - \frac{Dc g \rho}{4\Lambda} \frac{dT}{dx}. \quad (10)$$



Подставляя уравнение (10) выражение (8), с учетом вида левой части уравнения (9) получим:

$$\frac{\pi D^2}{4} \rho c \vartheta \frac{dT}{dx} = \lambda D \left( T_+ - T - \frac{Dc\vartheta\rho}{4\Lambda} \frac{dT}{dx} \right) \sqrt{\frac{\vartheta\pi}{\chi x}}, \quad (11)$$

Тогда производная по температуре, зависящая от координаты в ядре потока выражается уравнением:

$$\frac{dT}{dx} = \frac{4\lambda}{\rho c \vartheta D} \sqrt{\frac{\vartheta\pi}{\chi x}} \frac{T_+ - T}{\pi \frac{\lambda}{\Lambda} \sqrt{\frac{\vartheta\pi}{\chi x}}} \quad (12)$$

Продифференцировав уравнение (12) с учетом  $\chi = \frac{\lambda}{\rho \tilde{n}}$ , запишем выражение в следующем виде:

$$\frac{dT}{dx} = \frac{4\lambda}{D} \sqrt{\frac{\chi\pi}{\vartheta x}} \frac{T_+ - T}{\pi + \frac{\lambda}{\Lambda} \sqrt{\frac{\vartheta\pi}{\chi x}}} \quad (13)$$

Введем коэффициент потерь тепла  $= \frac{\lambda}{\Lambda} \sqrt{\frac{\vartheta\pi}{\chi x}}$  и коэффициент переноса тепла  $\beta = \frac{8}{D} \sqrt{\frac{\chi}{\pi\vartheta}}$ . При интегрировании уравнение (13) примет вид:

$$\int_{T_1}^{T_2} \frac{dT}{T_+ - T} = \beta \int_0^L \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} + \alpha} d\sqrt{x} \quad (14)$$

Получим после интегрирования выражение:

$$\ln \frac{T_+ - T_1}{T_+ - T_2} = \beta \left( \sqrt{L} - \ln \frac{\sqrt{L} + \alpha}{\alpha} \right) \quad (15)$$

После тождественного преобразования уравнение (15) принимает вид:

$$T_2 = T_+ + (T_1 - T_+) \left( \frac{\sqrt{L} + \alpha}{\alpha} \right)^\beta e^{(-\beta\sqrt{L})} \quad (16)$$

где  $= \frac{2}{\pi D \Lambda} \sqrt{cQ\lambda}$ ;  $\beta = 4 \sqrt{\frac{\lambda}{cQ}}$  – коэффициенты отражают изменение температуры от ядра к стенке;  $Q$  – расход природного газа,  $c$  – теплоемкость природного газа, Дж/(кг·К);

Уравнение (16) описывает потери тепла шлейфа в окружающую среду, но и возможен и обратный подвод тепла к природному газу, при этом  $T_1(0)$  и  $T_2(L)$ .



Поскольку модель для определения термобарических параметров промышленного газопровода построена, предложим уравнение для определения распределения влаги в шлейфе по длине до установки подготовки газа к транспорту [6]:

$$W(x) = \left( Y_w \frac{\sum M_g}{M_w} \right) \frac{0.457}{P(x)} e^{0.07357T(x) - 0.000277T(x)^2} + 0.0418e^{0.0547T(x) - 0.000277T(x)^2} \quad (17)$$

где  $Y_w$  – молярная доля воды в газе, определяется по ГОСТ 34807-2021 с помощью переносного гигрометра Hygrovision-mini;  $\sum M_g$  – средний молекулярный вес газовой смеси г/моль;  $M_w$  – молекулярная масса воды, г/моль.

Давление внутри промышленного шлейфа будем вычислять по закону линейного изменения его квадрата  $0 < x < L$ .

Тогда выражение для определения давления в произвольные точки примет вид;

$$P(x)^2 = P_1^2 + (P_2^2 - P_1^2) \frac{x}{L} \quad (18)$$

Для определения температуры образования воспользуемся известной моделью из источников [7–9]

$$T_A(r) = T_i + \frac{(T_o - T_i)}{\ln \frac{R_o}{R_o - \xi}} \ln \frac{r}{R_o} \quad (19)$$

где  $\xi$  – толщина гидратного слоя, в метрах;  $T_\phi$  – температура фазового перехода  $T_\phi = T_\phi(P, T)$ ;  $T_r$  – температура гидрата,  $K$ ;  $T_n$  – температура на внешней поверхности стенки газопровода,  $K$ ;  $R_o$  – радиус чистой трубы ( $r = R_o - \xi$ ), в метрах;

Уравнение (19) позволяет определить температуру образования гидратов в промышленных трубопроводах, так как общая постановка модели включает фазовый переход и описывается задачей Стефана. Она особенно актуальна при различных режимах эксплуатации газосборного шлейфа.

Для определения температуры фазового перехода воспользуемся следующим уравнением [7–9].

$$T_\phi = T_\phi^0(P) - \Delta T_\phi(C) \quad (20)$$

где  $T_\phi^0(P)$  – величина температуры фазового перехода газ – гидрат при отсутствии ингибитора, который определяется индивидуально непосредственно для конкретного месторождения природного газа (экспериментально).

$$\Delta T_\phi(C) = \frac{KC}{M(100 - C)} \quad (21)$$

где  $K$  – константа, зависящая от конкретного ингибитора (метанол  $M = 32,04$  г/моль);  $C$  – концентрация метанола %;  $\Delta T_\phi(C)$  – сдвиг равновесной температуры образования гидратов в присутствии ингибитора



Для определения концентрации ингибитора, который приводит к сдвигу температуры образования гидратов на величину  $\Delta T_{\phi}$  (С) определяется

$$C_{\Gamma} = \frac{M \Delta T_{\phi}}{M \Delta T_{\phi} (C) + K} \quad (22)$$

При эксплуатации промысловых газопроводов в метанол подается с концентрацией от 90 до 95% [9].

Для определения расхода метанола в газосборных шлейфах воспользуемся выражением:

$$G = \frac{WC_{\Gamma}}{C_0 - C_{\Gamma}} + \frac{100 - C_{\Gamma}}{C_0 - C_{\Gamma}} (q_{g1} - q_{g2} + q_{k1} - q_{k2}) \quad (23)$$

где  $W$  – количество содержащейся в природном газе воды г/м<sup>3</sup>;  $q_{g1}$  – количество метанола, содержащегося в поступающем природном газе;  $q_{g2}$  – количество метанола в газовой фазе при его концентрации в водном растворе  $C_{\Gamma}$ ;  $q_{k1}$  – количество метанола, содержащегося в поступающем с газом углеводородном конденсате;  $q_{k2}$  – количество метанола, растворяющегося в углеводородном конденсате при концентрации водного раствора метанола  $C_{\Gamma}$  [10].

### 3. ВЕРИФИКАЦИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ

Для проверки математической модели будем использовать реальные промышленные данные, полученные с действующего газового месторождения Краснодарского края. Исходные данные по месторождению приведены в таблице 1.

Таблица 1

Исходные данные для верификации математической модели

№ скважины	Диаметр шлейфа м	Длина шлейфа км	Давление $P_1$ , МПа	Давление $P_2$ , МПа	Температура $T_1$ , °С	Расход природного газа млн.м <sup>3</sup> /сутки	Толщина стенки трубы мм
1	200	8	3,4	2,8	10	0,96	6,0
2	300	6	4,5	3,2	9,5	0,98	8,0
3	250	5	3,2	2,6	11	0,83	7,0
4	400	3	4,5	3,6	8,5	0,89	9,9
5	200	3	3,2	2,9	10,5	0,82	6,0
6	200	2,2	3,0	2,8	9,7	0,95	6,0
7	300	1,8	4,2	3,75	8,8	0,98	8,0
8	400	7	5,2	3,6	10,1	0,78	9,9
9	200	1,8	2,2	2,1	9,4	0,87	6,0
10	300	1,2	4,5	3,9	10,1	0,92	8,0



№ скважины	Диаметр шлейфа м	Длина шлейфа км	Давление $P_1$ , МПа	Давление $P_2$ , МПа	Температура $T_1$ , °С	Расход природного газа млн.м <sup>3</sup> /сутки	Толщина стенки трубы мм
11	200	10	3,5	2,2	9,8	0,93	6,0
12	200	3	3,1	2,85	9,7	0,95	6,0
13	300	15	4,25	3,65	9,4	0,91	8,0
14	400	6	3,9	3,5	8,9	0,91	9,9
15	200	8	4,4	3,3	10,12	0,92	6,0
16	250	9	3,2	2,9	8,9	0,98	7,0
17	300	12,4	4,12	3,5	10	0,89	8,0
18	300	13,5	4,25	3,45	9,8	0,88	8,0
19	200	7,6	3,1	2,8	8,9	0,85	6,0
20	200	15,6	3,75	3,02	9,85	0,84	6,0

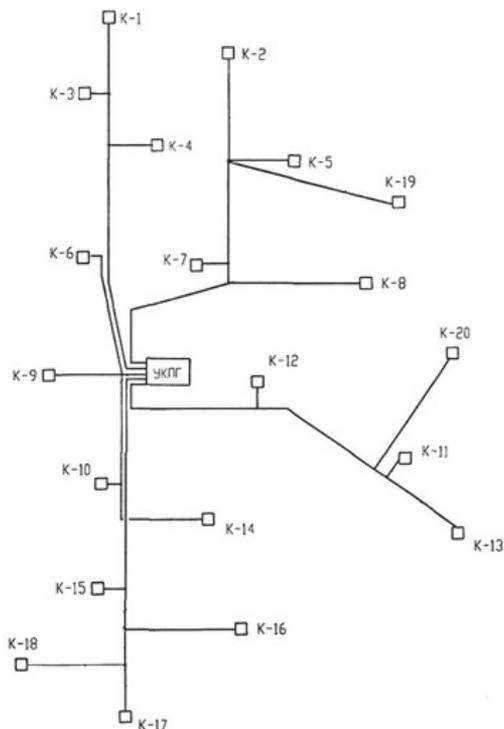


Рис. 2. Газосборная сеть Анастасиевско – Троицкое нефтегазоконденсатного месторождения

Для расчета принимаем, что теплоемкость природного газа  $c = 2483$  Дж/(кг·К); молярная масса природного газа  $\mu = 0.016$  г/моль; коэффициент теплопередачи через



стенку коллектора  $\Lambda = 0,2 \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot ^\circ\text{C})$ . Изоляция коллектора усиленная, состоит их 3 слоев ленты толщиной 1,2 мм; коэффициент теплопроводности газа  $\lambda = 0,2$ , температура окружающей среды  $-5^\circ\text{C}$ . Для определения распределения влаги в промышленном газопроводе будем использовать для расчета по формуле (15) шаг с 400 м по длине шлейфа. В таблицу 2 будем вносить максимальное значение влагосодержания исследуемых промышленных шлейфов.

Таблица 2

### Расчетные данные по предложенной математической модели

№ скважины	Температура $T_2, ^\circ\text{C}$	Макс. влагосодержание природного газа $W(x) \text{ г/моль}$	Скорость газа $\rho$ , кг/с	Коэффициенты отражают изменение температуры от ядра к стенке		Расход природного газа кг/с
				$\alpha$	$\beta$	
1	8,52	2,252	778,8	0,54639	0,00233	237,3
2	8,53	2,251	528,2	0,36803	0,00231	242,27
3	9,898	2,253	537,57	0,40643	0,00251	205,19
4	8,19	2,249	359,1	0,26304	0,002420	220,02
5	9,86	2,252	665,2	0,50497	0,002521	202,72
6	9,4	2,251	770,7	0,54353	0,002342	234,86
7	8,79	2,249	528,2	0,36803	0,002306	242,27
8	8,71	2,252	314,69	0,24625	0,002585	192,83
9	9,09	2,251	705,81	0,52014	0,002447	215,08
10	8,26	2,252	495,88	0,35659	0,002380	227,44
11	8,0	2,251	754,48	0,53778	0,002367	229,91
12	9,21	2,251	770,71	0,54353	0,002342	234,86
13	7,1	2,251	490,49	0,35464	0,002393	224,97
14	7,97	2,249	367,14	0,26598	0,002393	224,97
15	8,6	2,251	746,37	0,53488	0,002380	227,44
16	7,36	2,249	582,9	0,42323	0,002406	222,5
17	7,89	2,251	479,71	0,35072	0,002420	220,02
18	7,56	2,251	474,32	0,34875	0,002433	217,55
19	7,45	2,249	689,58	0,51413	0,002476	210,13
20	7,18	2,25	681,47	0,51110	0,002491	207,66

## 4. ВЫВОДЫ

На основании анализа данных таблицы 1 установлено, что в исследуемых промышленных шлейфах при температуре окружающей среды ( $-5^\circ\text{C}$ ) и принятых расчетных параметрах, образование гидратов в шлейфах не происходит, то есть промышленные газосборные шлейфы не подвергаются облитерации из-за достаточно высокой температуры природного газа, которая поступает из скважины. Также в работе не применяются расчеты по формулам (17–21) так как их используют только при образовании и ликвидации гидратов. Данные формулы приводятся в статье для предоставления



единой методики расчета при различных режимах работы промысловых шлейфов. Также в предложенной математической модели определения термобарических параметров применяются безразмерные коэффициенты, которые отражают изменение температуры от ядра к стенке и конвективный теплоперенос.

### *Литература*

1. Бунякин А.В., Паранук А.А., Мамий С.А., Кешиков М.В. Моделирование тепловых характеристик промысловых шлейфов и проверка условия образования гидратов природного газа /, // Технологии нефти и газа. – 2019. – № 5(124). – С. 47–52. – DOI: 10.32935/1815-2600-2019-124-5-47-52.
2. Быков И.Ю., Паранук А.А., Бунякин А.В. Математическое моделирование температурных условий гидратообразования в промысловых газосборных коллекторах Западно-Песцовой площади Уренгойского НГКМ // Инженерно-физический журнал. – 2022. – Т. 95, № 1. – С. 225–231.
3. Паранук А.А. Косвенный контроль газосборной сети // Нефтегазовое дело. 2012. Т. 10. № 1. С. 36–40.
4. Юдаев Б.Н. Теплопередача: учебник для вузов. – 2-е. изд., перераб. и доп. –М.: Высш.школа, 1981. 319 с.
5. Паточкина О.Л., Казаринов Ю.Г., Ткаченко В.И. Физическая модель зависимости числа Нуссельта от числа Рэлея // Журнал технической физики. – 2016. – Т. 86, № 11. – С. 23–29.
6. Паранук А.А. Дунаев В.И. Приходько М.Г. Об одной методике определения влагосодержания природного газа в трубопроводных системах //Физико-математическое моделирование. Нефть, газ, энергетика. Том 10. № 3 (39) – С. 60–72.
7. Буц, В.В. Модель образования гидратов в трубопроводах в присутствии ингибитора // Территория Нефтегаз. – 2010. – № 6. – С. 20–25.
8. Воеводин А.Ф. Газотермодинамический расчет потоков в простых и сложных трубопроводах // Известия СО АН СССР. Сер. Техн. науки. 1969. Вып. 2. № 8. С. 45–55.
9. Бондарев Э.А., Васильев В.И., Воеводин А.Ф., Павлов Н.Н., Шадрина А.П. Термодинамика систем добычи и транспорта газа// М.; Наука, 1988. 270 с.
10. Буц В.В. Математическое моделирование процесса ингибирования образования гидратов в газопроводах с оптимизацией расхода ингибитора: специальность 05.13.18 – Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ: диссертация на соискание ученой степени кандидата технических наук – г. Саратов, 2012. – 153 с.



## Analysis of Moisture Content Data of Natural Gas in Pipeline Systems

**Arambiy A. Paranuk\***

Kuban State Technological University (KubSTU), Krasnodar, Russia  
ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-2443-683X>  
e-mail: [rambi.paranuk@gmail.com](mailto:rambi.paranuk@gmail.com)

**Ivan. A. Tereshchenko\*\***

Kuban State Technological University (KubSTU), Krasnodar, Russia  
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-4804-4251>  
e-mail: [ongptr@mail.ru](mailto:ongptr@mail.ru)

**Valery S. Shishkov\*\*\***

Branch of the Maykop State Technological University (MSTU)  
Yablonovsky, Republic of Adygea, Russia  
ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-2112-1605>  
e-mail: [vsishshkov@gmail.com](mailto:vsishshkov@gmail.com)

This paper presents an original mathematical model for determining thermobaric parameters of gathering lines, accounting for convective heat transfer and turbulent core formation within the gas gathering pipeline cavity. The presented mathematical model characterizes heat transfer, heat exchange, and turbulent core behavior through two dimensionless coefficients. Additionally, the work introduces a novel equation for natural gas moisture content determination, enabling more precise calculations of methanol inhibition processes in gas gathering lines (field pipelines). The inhibitor calculation methodology presented herein can be applied for hydrate elimination upon their formation in gas gathering lines. The methodology incorporates considerations of gas-hydrate phase transition, pipeline operating conditions, flow rate parameters, pressure variables, temperature metrics, and inhibitor concentration factors. Methodology verification was conducted utilizing field data obtained from an operational gas field in the Krasnodar region.

**Keywords:** natural gas hydrates, moisture content of natural gas, clathrate compound, inhibitor, heat loss, field gas pipeline, convective heat transfer

### For citation:

Paranuk A.A., Tereshchenko I.A., Shishkov V.S. Analysis of Moisture Content Data of Natural Gas in Pipeline Systems. *Modelirovanie i analiz dannykh = Modelling and Data Analysis*, 2024. Vol. 14, no. 4, pp. 78–90. DOI: <https://doi.org/10.17759/mda.2024140405> (In Russ., abstr. in Engl.).

\***Arambiy A. Paranuk**, PhD (Engineering), Associate Professor of the Department of Gas and Oil Transportation Systems and Equipment for the Oil and Gas Industry, Kuban State Technological University (KubSTU), Krasnodar, Russian Federation, <https://orcid.org/0000-0003-2443-683X>, e-mail: [rambi.paranuk@gmail.com](mailto:rambi.paranuk@gmail.com)



**\*\*Ivan A. Tereshchenko**, Senior Lecturer, Department of Gas and Oil Transportation Systems and Equipment for the Oil and Gas Industry, Kuban State Technological University (KubSTU), Krasnodar, Russian Federation (KubSTU), <https://orcid.org/0000-0002-4804-4251>, e-mail: [ongptr@mail.ru](mailto:ongptr@mail.ru)

**\*\*\*Valery S. Shishkov**, PhD (Engineering), Associate Professor, Department of Oil and Gas and Land Management, Branch of the Maykop State Technological University (MSTU), Yablonovsky, Republic of Adygea in Yablonovsky, Republic of Adygea, Russian Federation <https://orcid.org/0000-0003-2112-1605> e-mail: [vsishshkov@gmail.com](mailto:vsishshkov@gmail.com)

### References

1. Bunyakin A.V., Paranuk A.A., Mamiy S.A., Keshokov M.V. Modeling of thermal characteristics of field plumes and testing the conditions for the formation of natural gas hydrates /, // Oil and Gas Technologies. – 2019. – No. 5 (124). – P. 47–52. – DOI 10.32935/1815-2600-2019-124-5-47-52.
2. Bykov I. Yu., Paranuk A.A., Bunyakin A.V. Mathematical modeling of temperature conditions for hydrate formation in field gas gathering reservoirs of the Zapadno-Pestsovaya area of the Urengoy OGCF // Engineering Physics Journal. – 2022. – Vol. 95, No. 1. – P. 225–231.
3. Paranuk A.A. Indirect control of gas gathering network // Oil and Gas Business. 2012. Vol. 10. No. 1. P. 36–40.
4. Yudaev B.N. Heat transfer: textbook for universities. – 2nd ed., revised and enlarged. – M.: Higher. school, 1981. 319 p.
5. Patochkina O.L., Kazarinov Yu. G., Tkachenko V.I. Physical model of dependence of Nusselt number on Rayleigh number // Journal of Technical Physics. – 2016. – Vol. 86, No. 11. – P. 23–29.
6. Paranuk A.A. Dunaev V.I., Prikhodko M.G. On one method for determining the moisture content of natural gas in pipeline systems // Physical and mathematical modeling. Oil, gas, energy. Vol. 10. No. 3 (39) – P. 60–72.
7. Buts, V.V. Model of hydrate formation in pipelines in the presence of an inhibitor // Territory of Oil and Gas. – 2010. – No. 6. – P. 20–25.
8. Voevodin A.F. Gas-thermodynamic calculation of flows in simple and complex pipelines // Bulletin of the Siberian Branch of the USSR Academy of Sciences. Ser. Tech. sciences. 1969. Issue 2. No. 8. P. 45–55.
9. Bondarev E.A., Vasiliev V.I., Voevodin A.F., Pavlov N.N., Shadrina A.P. Thermodynamics of gas production and transportation systems// Moscow; Science, 1988. 270 p.
10. Buts V.V. Mathematical modeling of the process of inhibiting hydrate formation in gas pipelines with optimization of inhibitor consumption: specialty 05.13.18 – Mathematical modeling, numerical methods and software packages: dissertation for the degree of candidate of technical sciences – Saratov, 2012. – 153 p.

Получена 06.11.2024

Received 06.11.2024

Принята в печать 02.12.2024

Accepted 02.12.2024

## ◇◇◇◇◇◇◇◇ МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ ◇◇◇◇◇◇◇◇

УДК 519.862.6

### **Оптимизационная задача построения линейных регрессий с минимальной величиной средней абсолютной ошибки на тестовых выборках**

**Базилевский М.П.\***

Иркутский государственный университет путей сообщения  
(ФГБОУ ВО ИргУПС), г. Иркутск, Российская Федерация  
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-3253-5697>  
e-mail: [mik2178@yandex.ru](mailto:mik2178@yandex.ru)

Статья посвящена проблеме отбора заданного числа наиболее информативных регрессоров в линейных регрессиях. При использовании метода наименьших квадратов точное решение этой задачи по критерию максимизации коэффициента детерминации при задействовании всей выборки данных может быть получено в результате решения особым образом сформулированной задачи частично-булевого линейного программирования. Однако в машинном обучении важным этапом при создании надежной и эффективной модели считается её построение по обучающей выборке и проверка точности её предсказания по тестовой выборке. Поэтому в статье сформулирована оптимизационная задача отбора информативных регрессоров в линейных регрессиях по критерию минимизации средней абсолютной ошибки на тестовой выборке. Формулировка основана на известном приёме, согласно которому абсолютные ошибки должны быть представлены в виде разности между двумя неотрицательными переменными. С использованием встроенных в пакет Gretl статистических данных о заработной плате спортсменов и решателя оптимизационных задач LPSolve проведены вычислительные эксперименты. Для этого обучающая выборка формировалась из 70%, 75% и 80% наблюдений. Во всех этих случаях среднее снижение значения коэффициента детерминации моделей составило 24,76%, 18,4% и 12,22%, но при этом средняя абсолютная ошибка уменьшилась на 24,8%, 26,3% и 21,05% соответственно. Эксперименты показали, что среднее время решения задач при минимизации средней абсолютной ошибки на тестовых выборках оказалось в 2,33–2,85 раза выше, чем время решения задач при максимизации коэффициента детерминации на обучающих выборках.

**Ключевые слова:** машинное обучение, регрессионный анализ, метод наименьших квадратов, отбор информативных регрессоров, коэффициент



детерминации, средняя абсолютная ошибка, обучающая выборка, тестовая выборка, задача частично-булевого линейного программирования.

**Для цитаты:**

*Базилевский М.П.* Оптимизационная задача построения линейных регрессий с минимальной величиной средней абсолютной ошибки на тестовых выборках // Моделирование и анализ данных. 2024. Том 14. № 4. С. 91–103. DOI: <https://doi.org/10.17759/mda.2024140406>

*\*Базилевский Михаил Павлович*, кандидат технических наук, доцент кафедры математики, Иркутский государственный университет путей сообщения (ФГБОУ ВО ИрГУПС), г. Иркутск, Российская Федерация, ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-3253-5697>, e-mail: [mik2178@yandex.ru](mailto:mik2178@yandex.ru)

## 1. ВВЕДЕНИЕ

В современном мире модели машинного обучения [1, 2] активно применяются для решения самых разнообразных задач анализа данных в энергетике [3], экономике [4], медицине [5], промышленности [6] и других областях человеческой деятельности. Существует множество разновидностей моделей машинного обучения, однако наиболее высокими интерпретационными качествами из них обладают регрессионные модели [7]. Регрессионный анализ в настоящее время развивается не менее стремительно, чем искусственный интеллект. Например, в [8] предложен метод частичных наименьших квадратов расстояний, в [9] – двухуровневый метод регрессионного анализа, использующий ансамбли деревьев с оптимальной дивергенцией, в [10] исследовано двухкритериальное оценивание регрессий методами наименьших квадратов (МНК) и модулей, в [11] рассмотрена методика построения линейно-неэлементарных регрессий.

Очень часто при проведении регрессионного анализа на практике приходится решать задачу отбора наиболее информативных регрессоров (ОИР) [12], т.е. формировать регрессионную модель только со значимо влияющими на результативный признак объясняющими переменными. Для её решения разработано множество методов, многие из которых описаны в монографии [13]. Из них точное решение задачи ОИР дает метод всех возможных регрессий [14], суть которого заключается в оценивании моделей со всеми возможными комбинациями вариантов вхождения объясняющих переменных в регрессионное уравнение. Поэтому метод всех регрессий самый трудоёмкий из всех. Другой точный метод решения задачи ОИР был предложен в работе [15]. В ней сформулирована задача частично-булевого линейного программирования (ЧБЛП), решение которой дает оцененную с помощью МНК наилучшую по коэффициенту детерминации регрессию с заданным числом объясняющих переменных. В [16] эта задача была трансформирована в задачу частично-целочисленного линейного программирования, решение которой дает оптимальную по скорректированному коэффициенту детерминации регрессию. В [17] экспериментально доказано, что при построении вполне интерпретируемых линейных регрессий

предложенный в работах [15, 16] метод существенно выигрывает по эффективности у метода всех возможных регрессий.

В предложенной в работах [15–17] технологии ОИР осуществляется сразу по всей исходной выборке данных. Однако в машинном обучении важным этапом при создании надежной и эффективной модели считается предварительное разделение выборки на обучающую и тестовую [18–20]. По обучающей выборке строится модель, а тестовая выборка используется для проверки точности предсказания модели. Обычно на обучающую выборку приходится 70% наблюдений, а на тестовую – 30%. Разделение выборки делается, во-первых, для оценки работоспособности модели в реальных условиях, во-вторых, для предотвращения переобучения, в-третьих, для объективной оценки качества модели. Цель данной работы состоит в формализации задачи ОИР в линейной регрессии по критерию минимизации величины средней абсолютной ошибки на тестовой выборке.

## 2. ПОСТАНОВКА ОПТИМИЗАЦИОННОЙ ЗАДАЧИ

Предположим, что  $y$  – зависимая (объясняемая, выходная) переменная, а  $x_1, x_2, \dots, x_l$  – независимые (объясняющие, входные) переменные. Пусть общий объем выборки составляет  $n$  наблюдений, из них  $n_1$  наблюдений приходится на обучающую выборку, а  $n_2$  – на тестовую. По обучающей выборке с помощью МНК оцениваются неизвестные параметры  $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_l$  модели множественной линейной регрессии вида

$$y_i = \alpha_0 + \sum_{j=1}^l \alpha_j x_{ij} + \varepsilon_i, \quad i = \overline{1, n_1}, \quad (1)$$

где  $\varepsilon_i, i = \overline{1, n_1}$  – ошибки аппроксимации.

Как отмечено в [21], эффективность МНК-оценивания регрессии (1) увеличится, если все исходные переменные нормировать по правилам:

$$y_i^* = \frac{y_i - \bar{y}}{\sigma_y}, \quad i = \overline{1, n_1},$$

$$x_{ij}^* = \frac{x_{ij} - \bar{x}_j}{\sigma_{x_j}}, \quad i = \overline{1, n_1}, \quad j = \overline{1, l},$$

где  $\bar{y} = \frac{1}{n_1} \sum_{i=1}^{n_1} y_i, \bar{x}_j = \frac{1}{n_1} \sum_{i=1}^{n_1} x_{ij}, j = \overline{1, l}, \sigma_y = \sqrt{y^2 - (\bar{y})^2}, \sigma_{x_j} = \sqrt{x_j^2 - (\bar{x}_j)^2}, j = \overline{1, l}.$

Тогда модель множественной линейной регрессии (1) в стандартизованном масштабе принимает вид

$$y_i^* = \sum_{j=1}^l \beta_j x_{ij}^* + \varepsilon_i^*, \quad i = \overline{1, n_1}, \quad (2)$$



где  $\beta_1, \dots, \beta_l$  – стандартизованные коэффициенты регрессии,  $\varepsilon_i^*$ ,  $i = \overline{1, n_1}$  – ошибки аппроксимации.

Известно [21], что неизвестные коэффициенты регрессии (2) находятся в результате решения следующей системы линейных алгебраических уравнений:

$$R_{xx} \cdot \beta = R_{yx}, \quad (3)$$

где  $R_{xx} = \begin{pmatrix} 1 & r_{x_1x_2} & \dots & r_{x_1x_l} \\ r_{x_1x_2} & 1 & \dots & r_{x_2x_l} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_{x_1x_l} & r_{x_2x_l} & \dots & 1 \end{pmatrix}$ ,  $\beta = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \dots \\ \beta_l \end{pmatrix}$ ,  $R_{yx} = \begin{pmatrix} r_{yx_1} \\ r_{yx_2} \\ \dots \\ r_{yx_l} \end{pmatrix}$ , т.е.  $R_{xx}$  – матрица коэф-

фициентов корреляции между объясняющими переменными,  $\beta$  – вектор-столбец неизвестных коэффициентов,  $R_{yx}$  – вектор-столбец коэффициентов корреляции результативного признака с объясняющими переменными. Подчеркнем, что матрицы  $R_{xx}$  и  $R_{yx}$  находятся по обучающей выборке.

Альтернативная форма записи системы (3) имеет вид

$$\sum_{k=1}^l r_{x_jx_k} \cdot \beta_k = r_{yx_j}, \quad j = \overline{1, l}. \quad (4)$$

Обозначим найденные в результате решения системы (4) оценки  $\tilde{\beta}_j$ ,  $j = \overline{1, l}$ . Тогда, как отмечено в [15], с помощью этих оценок можно найти оптимальные МНК-оценки линейной регрессии (1) по формулам:

$$\tilde{\alpha}_j = \tilde{\beta}_j \frac{\sigma_y}{\sigma_{x_j}}, \quad j = \overline{1, l}, \quad (5)$$

$$\tilde{\alpha}_0 = \bar{y} - \sum_{j=1}^l \tilde{\alpha}_j \bar{x}_j. \quad (6)$$

Коэффициент детерминации  $R^2$  стандартизованной линейной регрессии (2) вычисляется по формуле

$$R^2 = \sum_{j=1}^l r_{yx_j} \cdot \tilde{\beta}_j. \quad (7)$$

Заметим, что коэффициенты детерминации регрессий (1) и (2) одинаковы.

Формализовать задачу ОИР в линейной регрессии в терминах математического программирования можно следующим образом. Введем бинарные переменные  $\delta_j$ ,  $j = \overline{1, l}$  по правилу:

$$\delta_j = \begin{cases} 1, & \text{если } j\text{-я объясняющая переменная входит в модель,} \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

С использованием этих переменных поставим на стандартизованные коэффициенты линейной регрессии следующие ограничения:

$$-\delta_j \cdot M \leq \beta_j \leq \delta_j \cdot M, \quad j = \overline{1, l}, \quad (8)$$

где  $M$  – большое положительное число. Если  $\delta_j = 1$ , то  $\beta_j \in [-M, M]$ , а если  $\delta_j = 0$ , то  $\beta_j = 0$ .

Если в линейную регрессию должно входить ровно  $m$  регрессоров, то задачу математического программирования следует дополнить ограничением

$$\sum_{j=1}^l \delta_j = m. \quad (9)$$

Как уже было отмечено, если  $\delta_j = 0$ , то  $\beta_j = 0$ , поэтому в зависимости от бинарных переменных  $\delta_j$ ,  $j = \overline{1, l}$  должна меняться конфигурация системы линейных алгебраических уравнений (4), а именно, из неё должны исключаться уравнения с номерами, совпадающими с номерами нулевых бинарных переменных  $\delta_j$ . Это может быть реализовано с помощью следующих линейных ограничений

$$-(1 - \delta_j) M \leq \sum_{k=1}^l r_{x_j x_k} \cdot \beta_k - r_{yx_j} \leq (1 - \delta_j) M, \quad j = \overline{1, l}. \quad (10)$$

Если  $\delta_j = 1$ , то  $\sum_{k=1}^l r_{x_j x_k} \cdot \beta_k - r_{yx_j} = 0$ , т.е. соответствующее уравнение включается в систему, а если  $\delta_j = 0$ , то  $\sum_{k=1}^l r_{x_j x_k} \cdot \beta_k - r_{yx_j} \in [-M, M]$ , т.е. соответствующее уравнение исключается из системы.

Оптимальной регрессией считается та, у которой значение коэффициента детерминации наибольшее. Учитывая, что коэффициент детерминации  $R^2$  находится по формуле (7), введем целевую функцию

$$\sum_{j=1}^l r_{yx_j} \cdot \beta_j \rightarrow \max. \quad (11)$$

Решение задачи ЧБЛП с целевой функцией (11) и с линейными ограничениями (8) – (10) приводит к построению по обучающей выборке объема  $n_1$  линейной регрессии с  $m$  регрессорами и с наибольшим значением  $R^2$ .

Предположим теперь, что оптимальной линейной регрессией считается не та, у которой на обучающей выборке значение  $R^2$  наибольшее, а та, у которой на тестовой выборке значение средней абсолютной ошибки  $MAE$  наименьшее. Средняя абсолютная ошибка находится по формуле:

$$MAE = \frac{1}{n_2} \sum_{i=n_1+1}^{n_2} |y_i - \tilde{y}_i|, \quad (12)$$



где  $\tilde{y}_i$ ,  $i = \overline{n_1 + 1, n_2}$  – прогнозные по линейной регрессии (1) значения зависимой переменной  $y$ . С учетом (5) и (6) эти прогнозные значения находятся по формулам:

$$\tilde{y}_i = \bar{y} + \sum_{j=1}^l \tilde{\beta}_j \frac{\sigma_y}{\sigma_{x_j}} (x_{ij} - \bar{x}_j), \quad i = \overline{n_1 + 1, n_2}. \quad (13)$$

Подставляя (13) в (12), получим, что

$$MAE = \frac{1}{n_2} \sum_{i=n_1+1}^{n_2} \left| y_i - \bar{y} - \sum_{j=1}^l \tilde{\beta}_j \frac{\sigma_y}{\sigma_{x_j}} (x_{ij} - \bar{x}_j) \right|. \quad (14)$$

Учитывая (14), введем целевую функцию

$$\sum_{i=n_1+1}^{n_2} \left| y_i - \bar{y} - \sum_{j=1}^l \beta_j \frac{\sigma_y}{\sigma_{x_j}} (x_{ij} - \bar{x}_j) \right| \rightarrow \min. \quad (15)$$

Линеаризовать функционал (15) можно с использованием известного приема, предложенного в [22]. Для этого введем неотрицательные переменные  $u_i$ ,  $v_i$ ,  $i = \overline{n_1 + 1, n_2}$  следующим образом:

$$u_i = \begin{cases} y_i - \bar{y} - \sum_{j=1}^l \beta_j \frac{\sigma_y}{\sigma_{x_j}} (x_{ij} - \bar{x}_j), & \text{если } y_i - \bar{y} - \sum_{j=1}^l \beta_j \frac{\sigma_y}{\sigma_{x_j}} (x_{ij} - \bar{x}_j) > 0, \\ 0, & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

$$v_i = \begin{cases} -y_i + \bar{y} + \sum_{j=1}^l \beta_j \frac{\sigma_y}{\sigma_{x_j}} (x_{ij} - \bar{x}_j), & \text{если } y_i - \bar{y} - \sum_{j=1}^l \beta_j \frac{\sigma_y}{\sigma_{x_j}} (x_{ij} - \bar{x}_j) < 0, \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Тогда имеют место равенства

$$\sum_{j=1}^l \beta_j \frac{\sigma_y}{\sigma_{x_j}} (x_{ij} - \bar{x}_j) + u_i - v_i = y_i - \bar{y}, \quad i = \overline{n_1 + 1, n_2}. \quad (16)$$

При этом целевая функция (15) принимает вид

$$\sum_{i=n_1+1}^{n_2} (u_i + v_i) \rightarrow \min. \quad (17)$$

Решение задачи ЧБЛП с целевой функцией (17) и с линейными ограничениями (8) – (10), (16) приводит к построению по обучающей выборке объема  $n_1$  линейной регрессии с  $m$  регрессорами и с наименьшим на тестовой выборке объема  $n_2$  значением  $MAE$ .

### 3. ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ ЭКСПЕРИМЕНТЫ

Вычислительные эксперименты, прежде всего, проводились с целью подтвердить работоспособность предложенного математического аппарата. К тому же ставилась задача выяснить экспериментально, будет ли время решения задач ЧБЛП при максимизации  $R^2$  на обучающей выборке существенно отличаться от времени решения задач при минимизации  $MAE$  на тестовой выборке.

Для проведения вычислительных экспериментов использовались статистические данные, хранящиеся в файле data7–20.gdt эконометрического пакета Gretl. В этом файле содержится информация о зарплате 56-ти игроков национальной баскетбольной ассоциации и влияющих на неё 25-ти показателей. Среди этих показателей антропометрические характеристики спортсменов, их позиции на площадке, количество набранных очков и пр. В результате предварительного анализа выборки было установлено, что первые 55 значений фиктивной переменной XPAN, обозначающей расширение команды за последние 2 сезона, равны 0. И только последнее 56-е значение равно 1. Поскольку изменчивость переменной XPAN практически нулевая, то было принято решение исключить её из рассмотрения. Итого осталось 24 показателя, которым были присвоены имена  $x_1, x_2, \dots, x_{24}$  в соответствие с порядком их следования в файле Gretl.

Вычислительные эксперименты проводились на персональном компьютере с процессором AMD Ryzen 3 4300U с тактовой частотой 2,7 ГГц и объемом оперативной памяти 16 Гб. Для решения задач ЧБЛП использовался бесплатный оптимизационный решатель LPSolve. Большое число  $M$  в задачах ЧБЛП задавалось равным 1000.

Эксперименты проводились при трёх различных делениях исходной выборки на обучающую и тестовую. В первом случае на обучающую выборку приходилось 70% наблюдений, во втором – 75%, в третьем – 80%. В каждом случае решалась задача максимизации коэффициента детерминации  $R^2$  на обучающей выборке, т.е. задача ЧБЛП (8) – (11), и задача минимизации средней абсолютной ошибки  $MAE$  на тестовой выборке, т.е. задача ЧБЛП (8) – (10), (16), (17). При этом число регрессоров  $m$  менялось в диапазоне от 1 до 5. В каждом эксперименте фиксировался состав входящих в модель регрессоров, значение  $R^2$ ,  $MAE$  и время решения задачи в LPSolve. Результаты вычислительных экспериментов приведены в табл. 1. В ней в первом столбце указан номер эксперимента, во втором – число назначенных регрессоров, в третьем, четвертом, пятом и шестом столбцах – состав регрессоров, значение  $R^2$ ,  $MAE$  и время решения задачи при максимизации  $R^2$  на обучающей выборке, в седьмом, восьмом, девятом и десятом столбцах аналогичные показатели при минимизации  $MAE$  на тестовой выборке.

Таблица 1

**Результаты вычислительных экспериментов**

№	m	Максимизация $R^2$				Минимизация $MAE$			
		Регрессоры	$R^2$	$MAE$	t, c	Регрессоры	$R^2$	$MAE$	t, c
<b>Обучающая – 70% (<math>n_1 = 39</math>), тестовая – 30% (<math>n_2 = 17</math>)</b>									
1	1	$x_{24}$	0,19039	11797,4	0,03	$x_{24}$	0,19039	11797,4	0,055
2	2	$x_{10}, x_{19}$	0,28829	13328,5	0,091	$x_3, x_{24}$	0,20567	10938,0	0,224



№	m	Максимизация R <sup>2</sup>				Минимизация MAE			
		Регрессоры	R <sup>2</sup>	MAE	t, с	Регрессоры	R <sup>2</sup>	MAE	t, с
<b>Обучающая – 70% (n<sub>1</sub> = 39), тестовая – 30% (n<sub>2</sub> = 17)</b>									
3	3	x <sub>10</sub> , x <sub>16</sub> , x <sub>19</sub>	0,38982	16451,4	0,466	x <sub>3</sub> , x <sub>14</sub> , x <sub>24</sub>	0,25024	10480,4	1,422
4	4	x <sub>6</sub> , x <sub>15</sub> , x <sub>17</sub> , x <sub>19</sub>	0,44877	15699,6	2,675	x <sub>3</sub> , x <sub>10</sub> , x <sub>14</sub> , x <sub>24</sub>	0,28966	9979,9	5,904
5	5	x <sub>6</sub> , x <sub>8</sub> , x <sub>15</sub> , x <sub>17</sub> , x <sub>19</sub>	0,50891	14889,6	9,751	x <sub>7</sub> , x <sub>8</sub> , x <sub>18</sub> , x <sub>19</sub> , x <sub>24</sub>	0,38726	9927,5	20,579
<b>Обучающая – 75% (n<sub>1</sub> = 42), тестовая – 25% (n<sub>2</sub> = 14)</b>									
6	1	x <sub>24</sub>	0,22619	9323,8	0,032	x <sub>24</sub>	0,22619	9323,8	0,057
7	2	x <sub>10</sub> , x <sub>19</sub>	0,29207	10668,6	0,099	x <sub>3</sub> , x <sub>24</sub>	0,24270	8500,0	0,274
8	3	x <sub>10</sub> , x <sub>16</sub> , x <sub>19</sub>	0,36893	13300,5	0,525	x <sub>3</sub> , x <sub>14</sub> , x <sub>24</sub>	0,27157	7897,9	1,710
9	4	x <sub>3</sub> , x <sub>14</sub> , x <sub>16</sub> , x <sub>24</sub>	0,42466	11555,5	2,650	x <sub>3</sub> , x <sub>14</sub> , x <sub>15</sub> , x <sub>24</sub>	0,33933	7355,3	7,195
10	5	x <sub>3</sub> , x <sub>14</sub> , x <sub>16</sub> , x <sub>19</sub> , x <sub>24</sub>	0,47636	11051,6	10,345	x <sub>3</sub> , x <sub>14</sub> , x <sub>15</sub> , x <sub>23</sub> , x <sub>24</sub>	0,33993	7263,1	24,417
<b>Обучающая – 80% (n<sub>1</sub> = 45), тестовая – 20% (n<sub>2</sub> = 11)</b>									
11	1	x <sub>24</sub>	0,25612	7248,1	0,03	x <sub>24</sub>	0,25612	7248,1	0,054
12	2	x <sub>19</sub> , x <sub>24</sub>	0,30327	7395,4	0,092	x <sub>3</sub> , x <sub>24</sub>	0,27518	6509,3	0,261
13	3	x <sub>10</sub> , x <sub>19</sub> , x <sub>24</sub>	0,37019	6985,8	0,480	x <sub>3</sub> , x <sub>14</sub> , x <sub>24</sub>	0,31325	6204,2	1,831
14	4	x <sub>3</sub> , x <sub>14</sub> , x <sub>16</sub> , x <sub>24</sub>	0,45369	10028,8	2,571	x <sub>3</sub> , x <sub>14</sub> , x <sub>15</sub> , x <sub>24</sub>	0,37268	5916,6	7,941
15	5	x <sub>3</sub> , x <sub>14</sub> , x <sub>16</sub> , x <sub>19</sub> , x <sub>24</sub>	0,49648	9474,7	9,668	x <sub>7</sub> , x <sub>8</sub> , x <sub>18</sub> , x <sub>19</sub> , x <sub>24</sub>	0,40417	5582,6	26,345

Прокомментируем полученные в табл. 1 результаты.

1. При решении задач минимизации MAE по тестовым выборкам, естественным образом, получены регрессии, выигравшие по этому критерию у построенных в результате максимизации R<sup>2</sup> по обучающим выборкам моделей, но проигравшие им по критерию R<sup>2</sup>. Так, при включении в обучающую выборку 70% наблюдений значение коэффициента детерминации R<sup>2</sup> снижалось в диапазоне от 0 до 0,159, а значение MAE – в диапазоне от 0 до 5971. При этом в среднем снижение значения R<sup>2</sup> составило 24,76%, а MAE – 24,8%. При включении в обучающую выборку 75% наблюдений значение R<sup>2</sup> снижалось в диапазоне от 0 до 0,136, а значение MAE – в диапазоне от 0 до 5402,6. В этом случае в среднем снижение значения R<sup>2</sup> составило 18,4%, а MAE – 26,3%. При включении в обучающую выборку 80% наблюдений значение R<sup>2</sup> снижалось в диапазоне от 0 до 0,092, а значение MAE – в диапазоне от 0 до 4112,2. В такой ситуации в среднем снижение значения R<sup>2</sup> составило 12,22%, а MAE – 21,05%.
2. Во всех случаях с ростом числа регрессоров  $m$  возрастало время решения задач ЧБЛП. При включении в обучающую выборку 70%, 75% и 80% наблюдений среднее время решения задач при минимизации MAE оказалось соответственно в 2,33, 2,58 и 2,85 раза выше, чем время решения задач при максимизации R<sup>2</sup>. При этом замечено, что с ростом числа  $m$  отношение времени решения при минимизации MAE ко времени решения при максимизации R<sup>2</sup> сначала возрастает, достигая наибольшего значения при  $m=3$ , а затем убывает. Так, при включении в обучающую выборку 70% наблюдений эти отношения составляют 1,83, 2,46, 3,05, 2,21,

2,11, при включении 75% – 1,78, 2,76, 3,25, 2,71, 2,36, при включении 80% – 1,8, 2,83, 3,81, 3,08, 2,72.

## 4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В статье сформулирована оптимизационная задача ОИР в линейных регрессиях по критерию минимизации средней абсолютной ошибки на тестовой выборке. Проведены вычислительные эксперименты, подтверждающие корректность математических выкладок. Во всех экспериментах значения средних абсолютных ошибок на тестовых выборках были снижены в большей степени, чем значения коэффициентов детерминации моделей. Время решения задач ЧБЛП при минимизации средних абсолютных ошибок на тестовых выборках оказалось в 2,33–2,85 раза больше, чем время решения задач при максимизации коэффициентов детерминации на обучающих выборках. Научный интерес вызывает внедрение предложенного метода в процедуру построения вполне интерпретируемых регрессионных моделей, которая работает значительно эффективнее метода всех возможных регрессий. К тому же открытым остается вопрос идентификации в сформулированной задаче ЧБЛП больших чисел  $M$ , влияющих на её скорость решения.

### *Литература*

1. *Раука С.* Python и машинное обучение. М.: ДМК Пресс, 2017. 418 с.
2. *Janiesch C., Zsuech P., Heinrich K.* Machine learning and deep learning // *Electronic Markets*. 2021. Vol. 31. No. 3. P. 685–695. DOI:10.1007/s12525-021-00475-2.
3. *Mhlanga D.* Artificial intelligence and machine learning for energy consumption and production in emerging markets: a review // *Energies*. 2023. Vol. 16. No. 2. P. 745. DOI:10.3390/en16020745.
4. *Xu Z., Mohsin M., Ullah K., Ma X.* Using econometric and machine learning models to forecast crude oil prices: Insights from economic history // *Resources Policy*. 2023. Vol. 83. P. 103614. DOI:10.1016/j.resourpol.2023.103614.
5. *Haug C.J., Drazen J.M.* Artificial intelligence and machine learning in clinical medicine // *New England Journal of Medicine*. 2023. Vol. 388. No. 13. P. 1201–1208. DOI:10.1056/NEJMra2302038.
6. *Kumar S., Gopi T., Harikeerthana N., Gupta M.K., Gaur V., Krolczyk G.M., Wu C.* Machine learning techniques in additive manufacturing: a state of the art review on design, processes and production control // *Journal of Intelligent Manufacturing*. 2023. Vol. 34. No. 1. P. 21–55. DOI: 10.1007/s10845-022-02029-5.
7. *Molnar C.* Interpretable machine learning. Lulu. com, 2020.
8. *Nie B., Du Y., Du J., Rao Y., Zhang Y., Zheng X., Ye N., Jin H.* A novel regression method: Partial least distance square regression methodology // *Chemometrics and Intelligent Laboratory Systems*. 2023. Vol. 237. P. 104827. DOI:10.1016/j.chemolab.2023.104827.
9. *Журавлев Ю.И., Сенько О.В., Докукин А.А., Киселева Н.Н., Саенко И.А.* Двухуровневый метод регрессионного анализа, использующий ансамбли деревьев с оптимальной дивергенцией // *Доклады Российской академии наук. Математика, информатика, процессы управления*. 2021. Т. 499. С. 63–66. DOI:10.31857/S2686954321040172.



10. *Базилевский М.П.* Двухкритериальное оценивание линейных регрессионных моделей методами наименьших модулей и квадратов // *International Journal of Open Information Technologies*. 2024. Т. 12. № 6. С. 76–81.
11. *Базилевский М.П.* Отбор информативных операций при построении линейно-неэлементарных регрессионных моделей // *International Journal of Open Information Technologies*. 2021. Т. 9. № 5. С. 30–35.
12. *Носков С.И.* Технология моделирования объектов с нестабильным функционированием и неопределенностью в данных. Иркутск: РИЦ ГП Облформпечать, 1996. 321 с.
13. *Miller A.* Subset selection in regression. Chapman and hall/CRC, 2002.
14. *Айвазян С.А., Мхитарян В.С.* Прикладная статистика и основы эконометрики. М.: ЮНИТИ, 1998. 1005 с.
15. *Базилевский М.П.* Сведение задачи отбора информативных регрессоров при оценивании линейной регрессионной модели по методу наименьших квадратов к задаче частично-булевого линейного программирования // *Моделирование, оптимизация и информационные технологии*. 2018. Т. 6. № 1 (20). С. 108–117.
16. *Базилевский М.П.* Отбор оптимального числа информативных регрессоров по скорректированному коэффициенту детерминации в регрессионных моделях как задача частично-целочисленного линейного программирования // *Прикладная математика и вопросы управления*. 2020. № 2. С. 41–54.
17. *Базилевский М.П.* Сравнительный анализ эффективности методов построения вполне интерпретируемых линейных регрессионных моделей // *Моделирование и анализ данных*. 2023. Т. 13. № 4. С. 59–83.
18. *Шунина Ю.С.* Влияние способа формирования обучающей и тестовой выборок на качество классификации // *Вестник Ульяновского государственного технического университета*. 2015. № 2 (70). С. 43–46.
19. *Мун Д.Е., Савченко Д.Ю.* Проблемы подготовки обучающих выборок для построения системы скоринга персонала // *Современные проблемы экономического развития предприятий, отраслей, комплексов, территорий*. 2020. С. 390–394.
20. *Парасич В.А., Парасич И.В., Волович Г.И., Некрасов С.Г., Парасич А.В.* Переобучение в машинном обучении: проблемы и решения // *Вестник Южно-Уральского государственного университета*. Серия: Компьютерные технологии, управление, радиоэлектроника. 2024. Т. 24. № 2. С. 18–27. DOI:10.14529/ctcr240202.
21. *Фёрстер Э., Рёнци Б.* Методы корреляционного и регрессионного анализа. М.: Финансы и статистика, 1983. 303 с.
22. *Charnes A., Cooper W.W., Ferguson R.O.* Optimal estimation of executive compensation by linear programming // *Management science*. 1955. Vol. 1. No. 2. P. 138–151. DOI: 10.1287/mnsc.1.2.138.



# Optimization Problem of Constructing Linear Regressions with a Minimum Value of the Mean Absolute Error on Test Sets

**Mikhail P. Bazilevskiy\***

Irkutsk State Transport University (ISTU), Irkutsk, Russia,

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-3253-5697>

e-mail: [mik2178@yandex.ru](mailto:mik2178@yandex.ru)

This article is devoted to the problem of selecting a given number of the most informative regressors in linear regressions. When using the ordinary least squares method, the exact solution to this problem by the criterion of maximizing the coefficient of determination when using the entire data set can be obtained as a result of solving a specially formulated mixed 0–1 integer linear programming problem. However, in machine learning, an important stage in creating a reliable and efficient model is its construction based on the training set and checking the accuracy of its prediction based on the test set. Therefore, in this article formulates an optimization problem for subset selection in linear regressions based on the criterion of minimizing the mean absolute error on the test set. The formulation is based on a well-known technique, according to which absolute errors should be presented as the difference between two non-negative variables. Computational experiments were carried out using the statistical data on athletes' salaries stored into the Gretl package and the LPSolve optimization problem solver. For this purpose, the training set was formed from 70%, 75%, and 80% of observations. In all these cases, the average decrease in the value of the coefficient of determination of the models was 24.76%, 18.4%, and 12.22%, but the mean absolute error decreased by 24.8%, 26.3%, and 21.05%, respectively. Experiments showed that the average time to solve problems when minimizing the mean absolute error on test sets was 2.33–2.85 times higher than the time to solve problems when maximizing the coefficient of determination on training sets.

**Keywords:** machine learning, regression analysis, ordinary least squares method, subset selection in regression, coefficient of determination, mean absolute error, training set, test set, mixed 0–1 integer linear programming problem.

## For citation:

Bazilevskiy M.P. Optimization Problem of Constructing Linear Regressions with a Minimum Value of the Mean Absolute Error on Test Sets. *Modelirovanie i analiz dannykh = Modelling and Data Analysis*, 2024. Vol. 14, no. 4, pp. 91–103. DOI: <https://doi.org/10.17759/mda.2024140406> (In Russ., abstr. in Engl.).

\***Mikhail P. Bazilevskiy**, PhD (Engineering), Associate Professor, Department of Mathematics, Irkutsk State Transport University (ISTU), Irkutsk, Russia, ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-3253-5697>, e-mail: [mik2178@yandex.ru](mailto:mik2178@yandex.ru)



## References

1. Rashka S. *Python i mashinnoe obuchenie* [Python and Machine Learning]. Moscow, DMK Press, 2017. 418 p.
2. Janiesch C., Zszech P., Heinrich K. Machine learning and deep learning, *Electronic Markets*, 2021, vol. 31, no. 3, pp. 685–695. DOI:10.1007/s12525-021-00475-2.
3. Mhlanga D. Artificial intelligence and machine learning for energy consumption and production in emerging markets: a review, *Energies*, 2023, vol. 16, no. 2, pp. 745. DOI:10.3390/en16020745.
4. Xu Z., Mohsin M., Ullah K., Ma X. Using econometric and machine learning models to forecast crude oil prices: Insights from economic history, *Resources Policy*, 2023, vol. 83, pp. 103614. DOI:10.1016/j.resourpol.2023.103614.
5. Haug C.J., Drazen J.M. Artificial intelligence and machine learning in clinical medicine, *New England Journal of Medicine*, 2023, vol. 388, no. 13, pp. 1201–1208. DOI:10.1056/NEJMra2302038.
6. Kumar S., Gopi T., Harikeerthana N., Gupta M.K., Gaur V., Krolczyk G.M., Wu C. Machine learning techniques in additive manufacturing: a state of the art review on design, processes and production control, *Journal of Intelligent Manufacturing*, 2023, vol. 34, no. 1, pp. 21–55. DOI: 10.1007/s10845-022-02029-5.
7. Molnar C. *Interpretable machine learning*. Lulu. com, 2020.
8. Nie B., Du Y., Du J., Rao Y., Zhang Y., Zheng X., Ye N., Jin H. A novel regression method: Partial least distance square regression methodology, *Chemometrics and Intelligent Laboratory Systems*, 2023, vol. 237, pp. 104827. DOI:10.1016/j.chemolab.2023.104827.
9. Zhuravlev Yu.I., Sen'ko O.V., Dokukin A.A., Kiseleva N.N., Saenko I.A. Dvukhurovnevyy metod regressionnogo analiza, ispol'zuyushchiy ansambli derev'ev s optimal'noy divergentsiy [Two-level regression method using ensembles of trees with optimal divergence], *Doklady Mathematics*, 2021, vol. 499, pp. 63–66. DOI:10.31857/S2686954321040172.
10. Bazilevskiy M.P. Dvukhkriterial'noe otsenivanie lineynykh regressionnykh modeley metodami naimen'shikh moduley i kvadratov [Two-criteria estimation of linear regression models using least absolute deviations and squares], *International Journal of Open Information Technologies*, 2024, vol. 12, no. 6, pp. 76–81.
11. Bazilevskiy M.P. Otkor informativnykh operatsiy pri postroenii lineynoo-neelementarnykh regressionnykh modeley [Selection of informative operations in the construction of linear non-elementary regression models], *International Journal of Open Information Technologies*, 2021, vol. 9, no. 5, pp. 30–35.
12. Noskov S.I. *Tekhnologiya modelirovaniya ob'ektov s nestabil'nym funktsionirovaniem i neopredelennost'yu v dannykh* [Technology for modeling objects with unstable operation and uncertainty in data]. Irkutsk, RITs GP «Oblinformpechat'», 1996. 320 p.
13. Miller A. *Subset selection in regression*. Chapman and hall/CRC, 2002.
14. Ayvazyan S.A., Mkhitarjan V.S. *Prikladnaya statistika i osnovy ekonometriki* [Applied Statistics and Basics of Econometrics]. Moscow, YuNITI, 1998. 1005 p.
15. Bazilevskiy M.P. Svedenie zadachi otbora informativnykh regressorov pri otsenivanii lineynoy regressionnoy modeli po metodu naimen'shikh kvadratov k zadache chastichno-bulevogo lineynogo programmirovaniya [Reduction the problem of selecting informative regressors when estimating a linear regression model by the method of least squares to the problem of partial-Boolean linear programming], *Modeling, Optimization and Information Technology*, 2018, vol. 6, no. 1 (20), pp. 108–117.
16. Bazilevskiy M.P. Otkor optimal'nogo chisla informativnykh regressorov po skorrektirovannomu koeffitsientu determinatsii v regressionnykh modelyakh kak zadacha chastichno tselochislennogo



- lineynogo programmirovaniya [Selection an optimal number of variables in regression models using adjusted coefficient of determination as a mixed integer linear programming problem], *Applied Mathematics and Control Sciences*, 2020, no. 2, pp. 41–54.
17. Bazilevskiy M.P. Sravnitel'nyy analiz effektivnosti metodov postroeniya vpolne interpretiruemyykh lineynykh regressionnykh modeley [Comparative analysis of the effectiveness of methods for constructing quite interpretable linear regression models], *Modelling and Data Analysis*, 2023, vol. 13, no. 4, pp. 59–83.
  18. Shunina Yu.S. Vliyaniye sposoba formirovaniya obuchayushchey i testovoy vyborok na kachestvo klassifikatsii, *Bulletin of the Ulyanovsk State Technical University*, 2015, no. 2 (70), pp. 43–46.
  19. Mun D.E., Savchenko D.Yu. Problemy podgotovki obuchayushchikh vyborok dlya postroeniya sistemy skoringa personala [Problems of preparation of training samples for building a personnel scoring system], *Modern Problems of Economic Development of Enterprises, Industries, Complexes, Territories*, 2020, pp. 390–394.
  20. Parasich V.A., Parasich I.V., Volovich G.I., Nekrasov S.G., Parasich A.V. Pereobuchenie v mashinnom obuchenii: problemy i resheniya [Overfitting in machine learning: problems and solutions], *Bulletin of the South Ural State University. Ser. Computer Technologies, Automatic Control, Radio Electronics*, 2024, vol. 24, no. 2, pp. 18–27. DOI:10.14529/ctcr240202.
  21. Ferster E., Rents B. *Metody korrelyatsionnogo i regressionnogo analiza* [Methods of correlation and regression analysis]. Moscow, Finance and Statistics, 1983. 303 p.
  22. Charnes A., Cooper W.W., Ferguson R.O. Optimal estimation of executive compensation by linear programming, *Management science*, 1955, vol. 1, no. 2, pp. 138–151. DOI: 10.1287/mnsc.1.2.138.

Получена 23.09.2024

Received 23.09.2024

Принята в печать 15.11.2024

Accepted 15.11.2024

УДК 62.521

## **Формирование области начальных условий воздушных стартов беспилотного летательного аппарата**

***Ким Н.В. \****

Московский авиационный институт  
(национальный исследовательский университет) (МАИ)  
г. Москва, Российская Федерация  
ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-7443-8759>  
e-mail: [nkim2011@list.ru](mailto:nkim2011@list.ru)

***Походенко М.В. \*\****

Московский авиационный институт  
(национальный исследовательский университет) (МАИ)  
г. Москва, Российская Федерация  
ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-1579-378X>  
e-mail: [m.poxodenko@mail.ru](mailto:m.poxodenko@mail.ru)

Рассматривается воздушный старт беспилотного летательного аппарата (БЛА), транспортируемого авиационным носителем. Показано, что для выполнения допустимого старта с задаваемыми начальными условиями по высоте и скорости носителя, необходима предстартовая настройка параметров автопилота, обеспечивающая ограничение угловых скоростей БЛА в процессе прохождения им интерференционного слоя, образующегося вокруг носителя. Настраиваемыми параметрами являются коэффициенты ПИД-регуляторов в контурах стабилизации угловых скоростей БЛА. Расчет искомых коэффициентов производится разработанным алгоритмом на основе метода дифференциальной эволюции. Тестовое моделирование переходных процессов подтверждает работоспособность и применимость предлагаемого подхода. Оценка результатов расчета искомых коэффициентов ПИД-регуляторов алгоритмом дифференциальной эволюции показало возможность существенного расширения области начальных условий воздушных стартов по сравнению с начальными условиями, рассчитанными человеком-оператором.

***Ключевые слова:*** беспилотный летательный аппарат, авиационный носитель, воздушный старт, переходный процесс, коэффициенты ПИД-регулятора, алгоритм дифференциальной эволюции.

**Финансирование.** Работа выполнена в рамках государственного задания Министерства науки и высшего образования России (тема № FSFF-2024–0001).



### Для цитаты:

Ким Н.В., Походенко М.В. Формирование области начальных условий воздушных стартов беспилотного летательного аппарата // Моделирование и анализ данных. 2020. Том 14. № 1. С. 104–114. DOI: 10.17759/mda.2024140407

\*Ким Николай Владимирович, кандидат технических наук, профессор кафедры «Информационно-управляющие комплексы летательных аппаратов», Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет) (МАИ), г. Москва, Российская Федерация, ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-7443-8759>, e-mail: [nkim2011@list.ru](mailto:nkim2011@list.ru)

\*\*Походенко Михаил Владимирович, инженер кафедры «Информационно-управляющие комплексы летательных аппаратов», Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет) (МАИ), г. Москва, Российская Федерация, ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-1579-378X>, e-mail: [m.pokhodenko@mail.ru](mailto:m.pokhodenko@mail.ru)

## 1. ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время большое внимание уделяется разработкам беспилотных летательных аппаратов (БЛА) различных типов [1]. Перспективным представляется направление, когда малоразмерные БЛА транспортируются к месту выполнения целевых задач авиационными носителями [2].

Воздушные старты БЛА производятся при различных скоростях и высотах полета носителей и требует разработки эффективных методов и алгоритмов расчета областей начальных условий допустимых воздушных стартов. При этом реализуемые переходные процессы (от момента старта до выхода на необходимую траекторию полета) должны обеспечивать выполнение конкретных требований в условиях воздействия дестабилизирующих интерференционных воздушных потоков [2; 3].

Будем считать, что выполнение заданных требований к допустимым переходным процессам обеспечивается автопилотом (АП), оснащённым ПИД-регуляторами. Предстартовый расчет коэффициентов ПИД-регуляторов для различных возможных начальных условий старта является сложным и трудоемким процессом, т.к. требует оптимизации многомодальных и недифференцируемых целевых функций на основе многократного моделирования переходных процессов с использованием нелинейных моделей БЛА и АП [1; 4].

В настоящее время в основном данный процесс реализуется в операторном режиме, что приводит к высокой трудоемкости вычислений и влиянию «человеческого фактора» на надежность вычислений.

Целью работы является повышение эффективности формирования области начальных условий воздушных стартов БЛА за счет разработки алгоритма расчета коэффициентов ПИД-регулятора автопилота на предстартовом этапе.

## 2. РЕАЛИЗАЦИЯ ВОЗДУШНОГО СТАРТА БЛА

Основные варианты траекторий полета БЛА после воздушного старта схематично представлены на рис. 1:



- траектория 1 является допустимой траекторией воздушного старта, обеспечивающая штатный выход БЛА на заданную траекторию полета;
- траектории 2, 3 являются недопустимыми и характеризуются потерей управляемости.

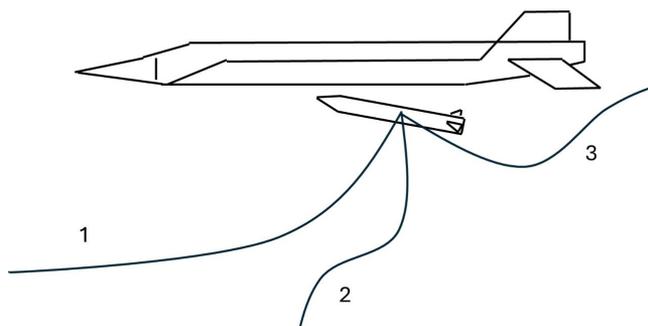


Рис. 1. Относительные траектории БЛА

При горизонтальном прямолинейном полете авиационного носителя характер переходных процессов изменяется в зависимости от начальных условий воздушного старта БЛА: высоты  $H$  и скорости полета носителя  $M$ , где  $M$  – число Маха, а также настройки регулируемых параметров АП – коэффициентов ПИД-регуляторов [5].

В исследуемом варианте регуляторы АП представляют из себя наборы ПИД-регуляторов, управляющих угловыми скоростями БЛА в каналах тангажа  $\omega_z$  и крена  $\omega_x$ . В рамках данной работы настройка проводилась по трем параметрам  $K = (K_p, K_i, K_d)^T$  в каждом из каналов –  $(K_p^z, K_i^z, K_d^z)^T$  для канала тангажа и  $(K_p^x, K_i^x, K_d^x)^T$  для канала крена.

Соответственно, необходимо обеспечение допустимого полета БЛА в окрестности носителя, при котором указанные выше условия выполняются. На основе данных требований формируется методология подхода к обеспечению допустимого полета на начальном участке воздушного старта.

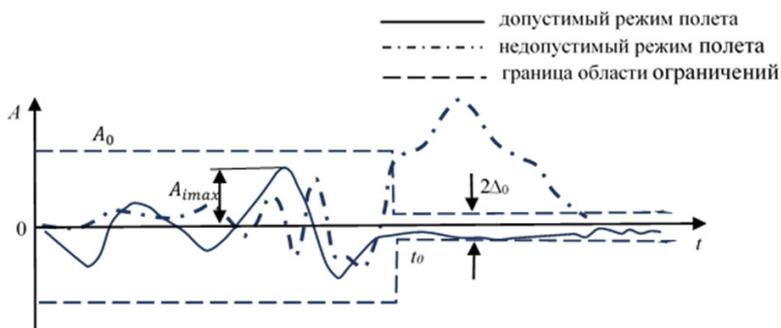


Рис. 2. Ограничения на допустимое качество переходного процесса



На рис. 2 представлены варианты допустимого (сплошная линия) и недопустимого (штрихпунктирная линия) режимов полета на этапе переходных процессов по некоторому условному управляемому параметру  $A$ .

Штриховой линией показана граница области, внутри которой переходные процессы являются допустимыми.

В общем случае требования к качеству переходного процесса задаются в виде ограничений  $(t_0, A_0, \Delta_0)^T$  на прямые оценки качества  $(t_p, A_{\max}, \Delta_{\max})^T$ , где:

$t_p \leq t_0$  – время регулирования, определяемое требуемым временем выхода на заданную траекторию полета БЛА;

$|A_{\max}| \leq A_0$  – ограничение допустимого перерегулирования процесса;

$|\Delta_{\max}| \leq \Delta_0$  – отклонение от установившегося значения управляемого параметра, определяющее допустимую ошибку при выходе БЛА на заданную траекторию полета.

Предварительные исследования показали, что для рассматриваемого типа БЛА наиболее значимыми параметрами в начальный период воздушного старта, определяющими характер переходного процесса, являются угловые скорости БЛА  $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ . Следовательно, требования к показателям качества будут иметь вид:

$$W_0 = (t_0, \omega_{x0}, \omega_{y0}, \omega_{z0}, \Delta_{x0}, \Delta_{y0}, \Delta_{z0})^T \geq W_r = (t_p, \omega_x, \omega_y, \omega_z, \Delta_x, \Delta_y, \Delta_z)^T, \quad (1)$$

где  $|\omega_x| \leq \omega_{x0}, |\omega_y| \leq \omega_{y0}, |\omega_z| \leq \omega_{z0}$  при  $t_p \leq t_0$  – ограничения на перерегулирование,

$|\Delta_x| \leq \Delta_{x0}, |\Delta_y| \leq \Delta_{y0}, |\Delta_z| \leq \Delta_{z0}$  при  $t_p > t_0$  – отклонение от установившегося значения управляемого параметра, индекс «0» определяет задаваемые параметры.

Если фактические значения параметров переходных процессов хотя бы по одному из показателей качества выходят за указанные ограничения, то переходный процесс считается недопустимым.

Будем считать, что в контурах стабилизации БЛА используются традиционные схемы ПИД-регуляторов [5].

На рис. 3 представлена схема расчета коэффициентов ПИД-регулятора для различных начальных условий воздушного старта БЛА.

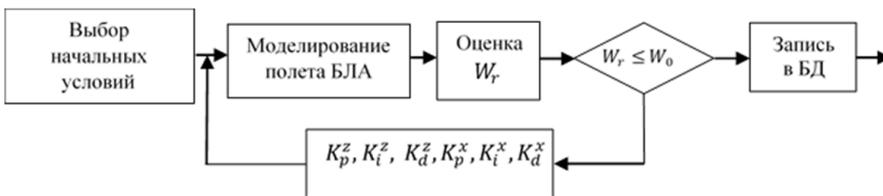


Рис. 3. Схема расчета коэффициентов ПИД-регулятора

Для каждой исследуемой точки области начальных условий проводится моделирование воздушного старта с различными значениями  $K_p^z, K_i^z, K_d^z, K_p^x, K_i^x, K_d^x$  и рассчитывается текущая оценка  $W_r$ . В исследованиях использовались традиционные модели для БЛА самолетного типа [1].



При выполнении условия (1)  $W \leq W_0$  соответствующие значения коэффициентов заносятся в базу данных (БД), в противном случае генерируются новые значения коэффициентов.

Сложность выбора искомой комбинации коэффициентов приводит к возрастанию объемов требуемых вычислений. Для выбора метода расчета был проведен анализ методов многомерной оптимизации, в частности, широкого класса метаэвристических методов. Анализ показан, что при решении исследуемой задачи наиболее перспективным является метод дифференциальной эволюции (ДЭ) [6].

Для реализации метода ДЭ при расчете коэффициентов ПИД-регуляторов необходимо ввести дополнительный критерий качества переходного процесса при воздушном старте БЛА, не предусмотренный в (1). Для этого предложено использовать квадратичную интегральную оценку (2), которая не является показателем, определяющим требуемое качество переходного процесса, но обеспечивает возможность направленного поиска искомых коэффициентов

$$J = \int_0^{t_{\max}} [\omega_{\text{уст}} - \omega(t)]^2 dt = \int_0^{t_{\max}} \omega_1^2(t) dt, \quad (2)$$

где  $\omega_{\text{уст}}$  – установившееся значение угловой скорости БЛА,  $\omega(t)$  – текущее значение угловой скорости,  $t$  – время.

Оценка  $J$  должна производиться на основе моделирования переходных процессов для различных значений коэффициентов  $K = (K_p^z, K_i^z, K_d^z, K_p^x, K_i^x, K_d^x)^T$ . При этом целью процесса не является поиск оптимальных значений коэффициентов, а только поиск значений, удовлетворяющих (1).

### 3. АЛГОРИТМ РАСЧЕТА КОЭФФИЦИЕНТОВ ПИД-РЕГУЛЯТОРА НА ОСНОВЕ МЕТОДА ДЭ

Метод дифференциальной эволюции основан на анализе эволюционных процессов. Особенностью алгоритмов ДЭ является использование различий между индивидами (значениями аргумента целевой функции), реализованное линейным оператором, называемым «дифференциацией».

На рис. 4 представлена блок-схема одного шага генерации популяции алгоритма расчета коэффициентов  $K = (K_p^z, K_i^z, K_d^z, K_p^x, K_i^x, K_d^x)^T$  на основе метода ДЭ, обеспечивающих реализацию переходного процесса заданного качества после воздушного старта из некоторой выбранной точки начальных условий.

Алгоритм ДЭ предназначен для нахождения глобального экстремума недифференцируемых, нелинейных, мультимодальных (имеющих, возможно, большое число локальных экстремумов) функций от многих переменных. Подобно другим эволюционным алгоритмам ДЭ рассматривает случайную популяцию решений.

Алгоритм ДЭ основывается на идее вычисления разностного вектора между двумя векторами и добавления этого разностного вектора к третьей особи для создания



нового кандидатного решения. На каждой итерации алгоритма индивидуумы оцениваются с помощью целевой функции (или функции приспособленности).

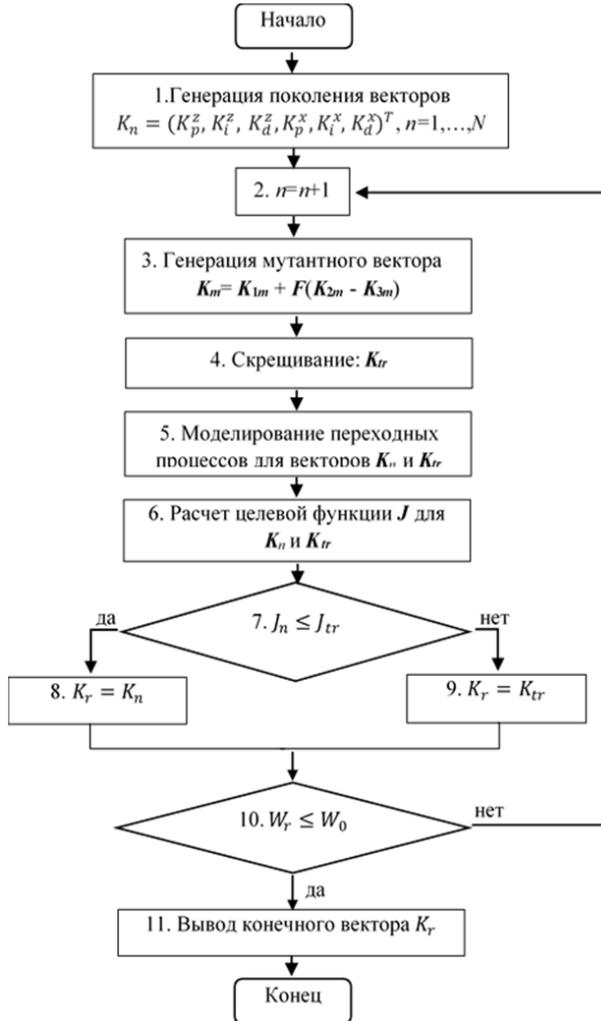


Рис. 4. Блок-схема алгоритма расчета  $K_n$

На рисунках 5, 6, 7 представлены графики переходных процессов воздушного старта (высота – 500 м, скорость – 0,9 М), реализованного при использовании коэффициентов ПИД-регуляторов.

На рис. 5 показано линейное перемещение БЛА по направлениям  $Y(X)$ ,  $Z(X)$  [м], по горизонтальной оси – перемещение по направлению  $X$ .

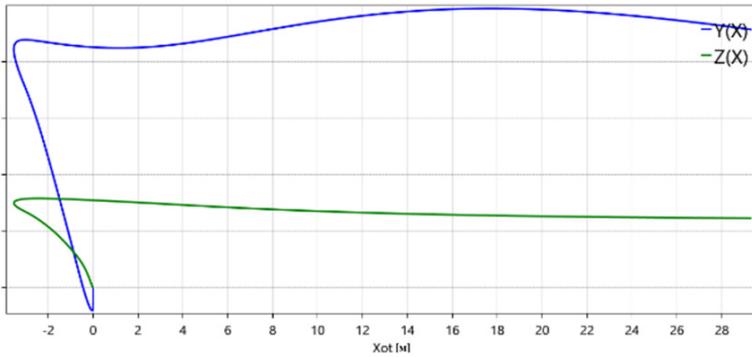


Рис. 5. линейное перемещение БЛА

На рис. 6 представлены графики изменения угловых скоростей БЛА  $\omega_y$ ,  $\omega_z$ .

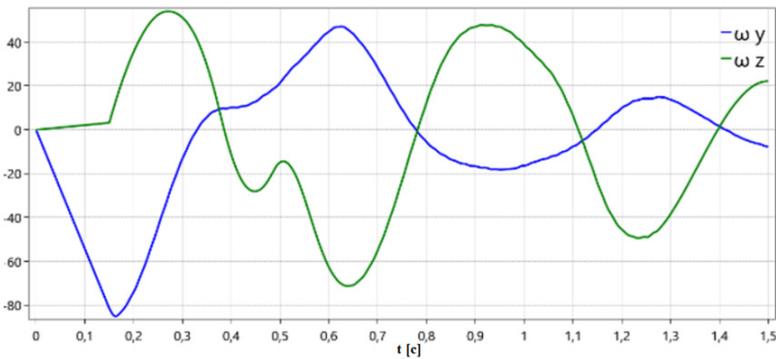


Рис. 6. Динамика изменения угловых скоростей в каналах  $\omega_y$ ,  $\omega_z$ .

На рис. 7 представлены графики изменения угловой скорости  $\omega_x$  и угла крена  $\gamma$ .

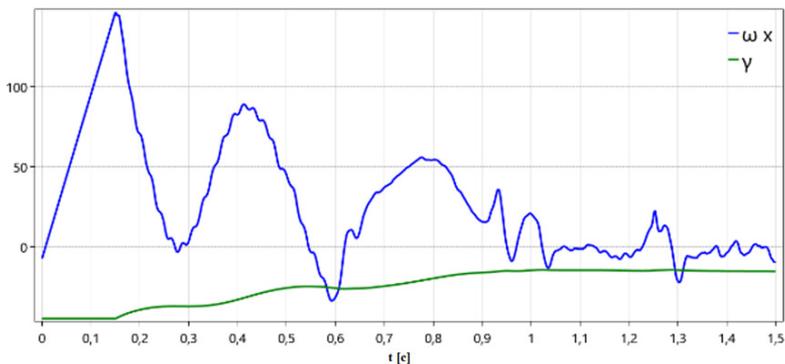


Рис. 7. Динамика изменения угловой скорости  $\omega_x$  и угла крена  $\gamma$

В данном процессе все требования (ограничение – 50 град./с) к угловым скоростям  $\omega_x$ ,  $\omega_y$ ,  $\omega_z$  выполнены и данный процесс является допустимым.

Моделирование переходных процессов для 200 начальных условий воздушных стартов в диапазоне высот 500м – 16000 м и скоростей носителя 0,5 М – 1,5 М показал высокую эффективность расчета алгоритмом ДЭ: для более 85% точек начальных условий найдены наборы коэффициентов, обеспечивающие допустимый старт БЛА.

Результаты исследований подтверждают более высокую эффективность расчетов алгоритмом ДЭ коэффициентов ПИД-регуляторов, обеспечивающих допустимые воздушные старты БЛА. по сравнению с расчетами операторного метода.

Для сравнения эффективности алгоритма ДЭ и операторного метода были проведены расчеты алгоритмом ДЭ для начальных условий, в которых операторный метод не смог найти коэффициенты, обеспечивающие допустимые переходные процессы.

Расчет эффективности (в процентах) для каждой высоты Н проводился по формуле

$$E^{\text{кор}}(H)\% = \frac{N_{\text{нд}}^{\text{ом}}(H) - N_{\text{нд}}^{\text{дэ}}(H)}{N_{\text{нд}}^{\text{ом}}(H)} 100, \quad (3)$$

где  $N_{\text{нд}}^{\text{ом}}(H)$ ,  $N_{\text{нд}}^{\text{дэ}}(H)$  – количество недопустимых переходных процессов при использовании операторного метода и алгоритма ДЭ, соответственно.

На рис. 8 представлены диаграмма эффективности алгоритма ДЭ при корректировке недопустимых переходных процессов старта на различных высотах.

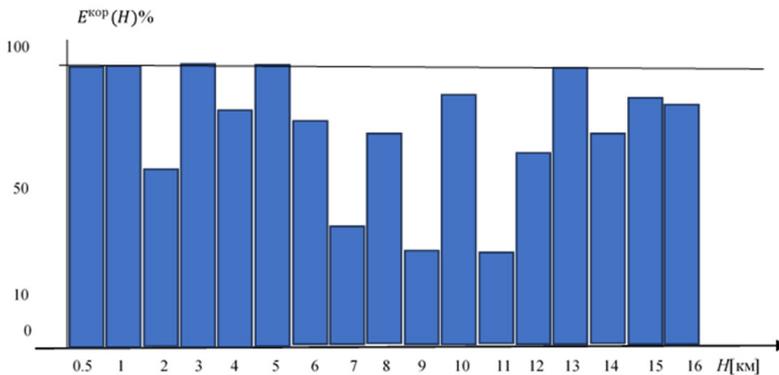


Рис. 8. Эффективность алгоритма ДЭ при корректировке недопустимых стартов

Корректировка недопустимых процессов позволила расширить область начальных условий воздушных пусков на 36% по сравнению с начальными условиями, найденными операторным методом.



## 4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Основные результаты работы состоят в следующем:

1. Разработан алгоритм ДЭ, обеспечивающий автоматический расчет коэффициентов ПИД-регуляторов, обеспечивающих реализацию допустимых стартов БЛА в широком диапазоне начальных условий старта.
2. Разработан программный комплекс моделирования, на основе которого реализован процесс расчета коэффициентов ПИД-регуляторов БЛА алгоритмом ДЭ, а также проведена оценка работоспособности алгоритма.
3. По результатам моделирования переходных процессов воздушных стартов показано, что использование предлагаемого подхода реализуемо и позволяет формировать допустимую область начальных стартов БЛА, составляющую (в тестовых расчетах) более 85% от всей обследуемой области начальных условий.

### *Литература*

1. Беспилотные летательные аппараты. Основы устройства и функционирования / Афанасьев П.П. [и др.]. 2-е изд. Москва: МАИ, 2008. 654 с.
2. Ким Н.В., Жидков В.Н., Походенко М.В. Повышение устойчивости беспилотного летательного аппарата при нестабильных условиях полёта. Актуальные проблемы и перспективы развития гражданской авиации. Сборник трудов X Международной научно-практической конференции, 2021. С. 153–160.
3. Ким Н.В., Походенко М.В. Drone stabilization during Aerial Launch. Russian Engineering Research, 2022. Published in STIN, No.12. p. 1309–1311.
4. Бесекерский В.А., Попов Е.П. Теория систем автоматического управления: учеб. пособие. СПб.: Профессия, 2003. 752 с.
5. Денисенко В.В. ПИД – регуляторы: вопросы реализации. Ч. 2. // Современные технологии автоматизации, 2008. № 1. С. 86–97.
6. Ковалевич А.А., Якимов А.И., Албкеират Д.М. Исследование стохастических алгоритмов оптимизации для применения в имитационном моделировании систем. // Информационные технологии, 2011. № 8. С. 55–60.



## Formation of the Area of Initial Conditions for Aerial Launches of an Unmanned Aerial Vehicle

**Nikolai V. Kim** \*

Moscow Aviation Institute (National Research University) (MAI), Moscow, Russia

ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-7443-8759>

e-mail: [nkim2011@list.ru](mailto:nkim2011@list.ru)

**Mikhail V. Pokhodenko** \*\*

Moscow Aviation Institute (National Research University) (MAI), Moscow, Russia

ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-1579-378X>

e-mail: [m.poxodenko@mail.ru](mailto:m.poxodenko@mail.ru)

The air launch of an unmanned aerial vehicle (UAV) transported by an aircraft carrier is considered. It is shown that in order to perform an acceptable start with the specified initial conditions for the height and speed of the carrier, it is necessary to pre-launch the autopilot parameters, which ensures the limitation of the angular velocities of the UAV during the passage of the interference layer formed around the carrier. The adjustable parameters are the coefficients of the PID controllers in the UAV angular velocity stabilization circuits. The calculation of the required coefficients is performed by the developed algorithm based on the method of differential evolution. Test modeling of transients confirms the operability and applicability of the proposed approach. The evaluation of the results of calculating the desired coefficients of PID controllers by the differential evolution algorithm showed the possibility of significantly expanding the range of initial conditions of air launches compared with the initial conditions calculated by a human operator.

**Keywords:** unmanned aerial vehicle, aircraft carrier, air launch, transition process, coefficients of the PID controller, algorithm of differential evolution.

**Funding.** The research was carried out within the state assignment of Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (theme No. № FSFF-2024–0001).

### For citation:

Kim N.V., Pokhodenko M.V. Formation of the Area of Initial Conditions for Aerial Launches of an Unmanned Aerial Vehicle. *Modelirovanie i analiz dannykh = Modelling and Data Analysis*, 2024. Vol. 14, no. 4, pp. 104–114. DOI: <https://doi.org/10.17759/mda.2024140407> (In Russ., abstr. in Engl.).

\***Nikolai V. Kim**, PhD. of Engineering Sciences, Professor of the Department “Information and control complexes of aircraft”, Moscow Aviation Institute (National Research University) (MAI), Moscow, Russia, ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-7443-8759>, e-mail: [nkim2011@list.ru](mailto:nkim2011@list.ru)

\*\***Mikhail V. Pokhodenko**, Engineer of the Department “Information and control complexes of aircraft”, Moscow Aviation Institute (National Research University) (MAI), Moscow, Russia, ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-1579-378X>, e-mail: [m.poxodenko@mail.ru](mailto:m.poxodenko@mail.ru)



### **References**

1. Afanas'ev P.P. [i dr.]. *Bespilotnye letatel'nye apparaty. Osnovy ustrojstva i funkcionirovani-ja* [Unmanned aerial vehicles. Fundamentals of device and operation]. 2-e izd. Moscow: MAI, 2008. 654 p.
2. Kim N.V., Zhidkov V.N., Pokhodenko M.V. *Povyshenie ustojchivosti bespilotnogo letatel'nogo apparata pri nestabil'nyh usloviyah poljota* [increasing the stability of an unmanned aerial vehicle under unstable flight conditions]. *Aktual'nye problemy i perspektivy razvitiya grazhdanskoj aviacii* [current problems and prospects for the development of civil aviation]. *Sbornik trudov X Mezhdunarodnoj nauchno-prakticheskoy konferencii*, 2021. pp. 153–160.
3. Kim N.V., Pokhodenko M.V. *Drone stabilization during Aerial Launch*. *Russian Engineering Research*, 2022. Published in STIN, No.12., pp. 1309–1311.
4. Besekerskij V.A., Popov E.P. *Teoriya sistem avtomaticheskogo upravlenija* [Theory of automatic control systems]: ucheb. posobie. Saint-Petersburg: Professija, 2003. 752 p.
5. Denisenko V.V. *PID – reguljatory: voprosy realizacii. Ch. 2* [PID regulators: implementation issues. Part 2]. *Sovremennye tehnologii avtomatizacii* [Modern automation technologies], 2008. № 1. pp. 86–97.
6. Kovalevich A.A., Jakimov A.I., Albkeirat D.M. *Issledovanie stohasticheskikh algoritmov optimizacii dlja primenenija v imitacionnom modelirovanii system* [research of optimization stochastic algorithms for application in simulations of systems]. *Informacionnye tehnologii* [Information technology], 2011. № 8. pp. 55–60.

Получена 28.11.2024

Принята в печать 12.12.2024

Received 28.11.2024

Accepted 12.12.2024

УДК 681.5

## Уточнение коэффициента сжатия для внешней оценки предельного множества 0-управляемости линейной дискретной системы с ограниченным управлением

*Симкина А.В.\**

Московский авиационный институт  
(национальный исследовательский университет) (МАИ)  
г. Москва, Российская Федерация  
ORCID: <https://orcid.org/0009-0008-8910-5728>  
e-mail: [abv1998@yandex.ru](mailto:abv1998@yandex.ru)

Рассматривается задача построения наилучшей внешней оценки предельного множества управляемости для линейной дискретной системы с выпуклыми ограничениями на управление. Построение оценки базируется на принципе сжимающих отображений. Оптимальные параметры оценивания определяются на основе анализа результатов численного моделирования. Приведены примеры.

**Ключевые слова:** дискретная система управления, предельное множество управляемости, предельное множество достижимости, принцип сжимающих отображений, коэффициент сжатия, выпуклое множество, полиэдральная аппроксимация.

**Для цитаты:**

*Симкина А.В.* Уточнение коэффициента сжатия для внешней оценки предельного множества 0-управляемости линейной дискретной системы с ограниченным управлением // Моделирование и анализ данных. 2024. Том 14. № 1. С. 115–128. DOI: [10.17759/mda.2024140408](https://doi.org/10.17759/mda.2024140408)

**\*Симкина Анастасия Вячеславовна**, аспирант, ассистент кафедры теории вероятностей и компьютерного моделирования, Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет) (ФГБОУ ВО МАИ), г. Москва, Российская Федерация, ORCID: <https://orcid.org/0009-0008-8910-5728>, e-mail: [abv1998@yandex.ru](mailto:abv1998@yandex.ru)



## 1. ВВЕДЕНИЕ

При решении задач управления динамическими системами нередко приходится учитывать различные ограничения, связанные с техническими аспектами изучаемой системы. Такого рода ограничения приводят к тому, что система из заданного начального состояния может быть переведена в ограниченное множество терминальных состояний даже при бесконечном временном горизонте. Данный факт делает актуальным исследование не только вопросов достижимости и управляемости различных динамических систем, но и разработку методов построения и оценивания предельных множеств достижимости и управляемости для произвольной системы управления. Кроме того, множества управляемости и достижимости могут быть использованы в ряде задач оптимального управления для формирования позиционного управления [1] для систем с дискретным временем.

На текущий момент по данной тематике можно выделить два основных направления: исследование отдельных состояний на управляемость [2–5] и геометрические методы построения множеств управляемости и достижимости [6–9]. Так, при исследовании нелинейных систем удается получить только общие свойства множеств управляемости [2] либо их оценки [8,9]. Для случая линейных уравнений динамики по состоянию и управлению оказывается возможно построение более конструктивных результатов для различных классов систем: периодических [10], переключаемых [3], с положительным управлением [6]. Наиболее строгие результаты сформулированы для случая компактных и выпуклых ограничений на значения управления [1,7], допускающие даже описание предельных множеств достижимости и управляемости [4, 5, 11].

В [12] для линейных дискретных систем со скалярным управлением, на которое наложено суммарное ограничение 1-го порядка, показано, что в случае устойчивых систем возможно явным образом найти предельное множество достижимости, представляющее собой выпуклый, симметричный относительно нуля многогранник. Для ограничений более высокого порядка описание предельных множеств достижимости и 0-управляемости получено посредством использования опорных полупространств [13].

Существенным недостатком этих методов является невозможность заранее определить точность построенных оценок. В данной статье рассматривается развитие принципиально нового подхода к численному моделированию предельных множеств управляемости на основе принципа сжимающих отображений, который был предложен в [11]. Замыкание предельного множества управляемости является неподвижной точкой сжимающего отображения заданного в пространстве Хаусдорфа, однако ранее не было способа определить оптимальное значение шага квантования, определяющего значение коэффициента сжатия. В данной статье проведён численный анализ зависимости погрешности внешней оценки предельного множества 0-управляемости от выбранного шага квантования при ограниченных вычислительных ресурсах, что позволяет определить оптимальное значение данного параметра, характеризующего наиболее точную оценку предельного множества 0-управляемости.

## 2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматривается линейная дискретная система с ограниченным управлением  $(A, \mathcal{U})$ :

$$\begin{aligned} x(k+1) &= Ax(k) + u(k), \\ x(0) &= x_0, \quad u(k) \in \mathcal{U}, \quad k \in \mathbb{N} \cup \{0\}. \end{aligned} \quad (1)$$

где  $x(k) \in \mathbb{R}^n$  – вектор состояния системы,  $u(k) \in \mathbb{R}^n$  – управляющее воздействие,  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  – матрица системы (1),  $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$  – множество допустимых значений управлений. Предполагается, что  $\mathcal{U}$  – выпуклый компакт,  $0 \in \text{int } \mathcal{U}$ .

Для произвольного  $N \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  обозначим через  $\mathcal{X}(N) \subset \mathbb{R}^n$  множество 0-управляемости системы (2) за  $N$  шагов, т.е. множество тех начальных состояний, из которых систему (1) возможно перевести в 0 за  $N$  шагов посредством выбора допустимых управляющих воздействий:

$$\mathcal{X}(N) = \begin{cases} \{x_0 \in \mathbb{R}^n : \exists u(0), \dots, u(N-1) \in \mathcal{U} : x(N) = 0\}, & N \in \mathbb{N}, \\ \{0\}, & N = 0. \end{cases} \quad (2)$$

Требуется построить наилучшую внешнюю оценку предельного множества 0-управляемости  $\mathcal{X}_\infty$  – множества тех начальных состояний, из которых систему  $(A, \mathcal{U})$  можно перевести в начало координат за любое конечное число шагов:

$$\mathcal{X}_\infty = \{x_0 \in \mathbb{R}^n : \exists N \in \mathbb{N}, u(0), \dots, u(N-1) \in \mathcal{U} : x(N) = 0\}$$

С учетом (2) также справедливо представление

$$\mathcal{X}_\infty = \bigcup_{N=0}^{\infty} \mathcal{X}(N). \quad (3)$$

## 3. ИЗВЕСТНЫЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Исследование в данной статье базируется на следующих известных утверждениях.

Обозначим через  $\mathbb{K}_n$  множество всех компактов в  $\mathbb{R}^n$ , а через  $\rho_H$  – расстояние Хаусдорфа [14]:

$$\begin{aligned} \mathbb{K}_n &= \{ \mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n \text{ – компакт} \}, \\ \rho_H(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) &= \max \left\{ \sup_{x \in \mathcal{X}} \inf_{y \in \mathcal{Y}} \|x - y\|; \sup_{y \in \mathcal{Y}} \inf_{x \in \mathcal{X}} \|x - y\| \right\} \end{aligned}$$

**Теорема 1.** [11, теорема 2] Пусть все собственные значения матрицы  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  по модулю строго больше 1, семейство  $\{\mathcal{X}(N)\}_{N=0}^{\infty}$  определяется соотношениями (2), множество  $\mathcal{X}_\infty$  определяется соотношением (3), отображение  $T : \mathbb{K}_n \rightarrow \mathbb{K}_n$  имеет вид



$$T(\mathcal{X}) = A^{-1} \mathcal{X} + (-A^{-1} \mathcal{U}). \quad (4)$$

Тогда

- 1) существует  $M \in \mathbb{N}$  такое, что отображение  $T^M = \underbrace{T \circ T \dots \circ T}_M$  является сжимающим с некоторым коэффициентом сжатия  $\alpha \in [0; 1)$ ;
- 2)  $\overline{\mathcal{X}_\infty}$  – единственная неподвижная точка отображения  $T$  в пространстве  $(\mathbb{K}_n, \rho_H)$ ;
- 3) справедлива оценка

$$\rho_H(\overline{\mathcal{X}_\infty}, \mathcal{X}(NM)) \leq \frac{\alpha^N}{1-\alpha} \rho_H(\mathcal{X}(M), \{0\}).$$

Внешняя оценка предельного множества 0-управляемости на основе принципа сжимающих отображений представлена в следующей теореме.

**Теорема 2.** [11, теорема 3]. Пусть все собственные значения матрицы  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  по модулю строго больше 1, семейство  $\{\mathcal{X}(N)\}_{N=0}^\infty$  определяется соотношениями (2), множество  $\mathcal{X}_\infty$  определяется соотношением (3), величина  $M \in \mathbb{N}$  выбрана так, чтобы  $T^M$  было сжимающим отображением с коэффициентами сжатия  $\alpha_1, \alpha_\infty \in [0; 1)$ , которые ассоциированы с нормами  $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_\infty$  в пространстве  $\mathbb{R}^n$  соответственно. Тогда

$$\mathcal{X}_\infty \subset \mathcal{X}(NM) + \text{conv}\{\underbrace{0, \dots, 0}_i, r, 0, \dots, 0\}^T : r \in \{-R_1, R_1\}, i = \overline{0, n-1},$$

$$\mathcal{X}_\infty \subset \mathcal{X}(NM) + \{x \in \mathbb{R}^n : \max_{i=\overline{1, n}} |x_i| \leq R_\infty\},$$

$$R_p = \frac{\alpha_p^N}{1-\alpha_p} \max_{x \in \mathcal{X}(M)} \|x\|_p, p \in \{1, \infty\}, N \in \mathbb{N}.$$

Теорема позволяет строить оценки с любой наперёд заданной точностью  $R_p$ . Погрешность зависит от выбора шага квантования  $M$  и параметра  $p$  пространства  $\mathbb{R}_p^n$ , который определяет норму, ассоциированную с нормой пространства Хаусдорфа  $\mathbb{K}_n$ . В качестве параметров  $p$  рассматриваем 1 и  $\infty$ , так как в этом случае оценки будут представлять собой многогранники. Параметр  $M$  влияет на подсчёт коэффициента сжатия  $\alpha_p$  и  $\max_{x \in \mathcal{X}(M)} \|x\|_p$ . Коэффициент сжатия  $\alpha_p$  рассчитывается как операторная норма матрицы  $A^{-M}$  и зависит от выбора шага квантования  $M$ :

$$\alpha_p = \|A^{-M}\| = \sup_{\|x\|_p \leq 1} \|A^{-M}x\|_p$$

$$A^{-M} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad (5)$$

Известны три аналитические формулы вычисления коэффициентов сжатия  $\alpha_1, \alpha_\infty$  [14]:

$$\alpha_1 = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^n |a_{ij}|, \quad \alpha_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|.$$

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|, \quad \|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|.$$

Зафиксируем значение  $N_{max} \in \mathbb{N}$ . Целью работы является минимизация погрешности внешней оценки предельного множества 0-управляемости от параметра  $M$  при ограничении  $NM \leq N_{max}$ , то есть следует решить следующую оптимизационную задачу:

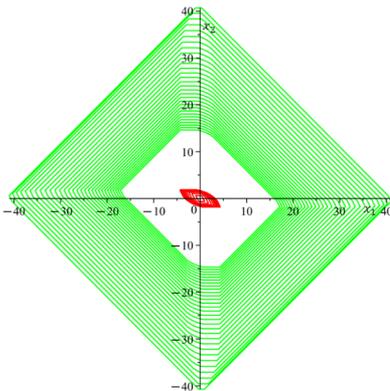
$$\frac{\alpha^N}{1-\alpha} \rho_H(\mathcal{X}(M), \{0\}) \rightarrow \min_{M, N: NM \leq N_{max}}. \quad (6)$$

## 4. АНАЛИЗ РЕЗУЛЬТАТОВ ЧИСЛЕННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

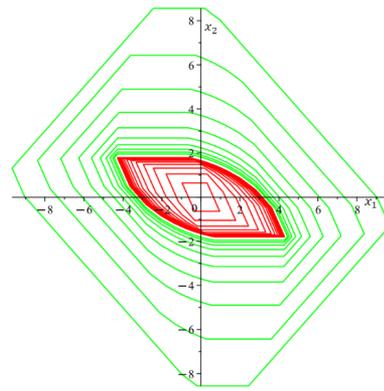
В общем случае решить задачу (6) не представляется возможным. По этой причине выбор оптимального значения  $M$  будем осуществлять на основе анализа экспериментальных данных.

Рассмотрим на примере двумерной системы с собственным значением 1.56 кратности 2 актуальность поставленной задачи (6), сравнив оценки для различных значений параметра  $M$ . Пусть

$$A = \begin{pmatrix} 1.56 & 0.78 \\ 0 & 1.56 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{U} = \text{conv} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$



а)  $p=1, M=1, \alpha_1=0.9615, N_{max}=30$



б)  $p=1, M=3, \alpha_\infty=0.6585, N_{max}=30$

Рис. 1. Внутренняя оценка  $\mathcal{X}_\infty$  красным цветом,  
внешняя оценка  $\mathcal{X}_\infty$  зелёным цветом



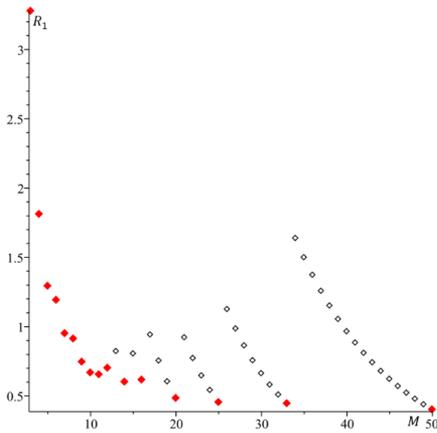
Как видно из Рис. 1, выбор значения  $M$  влияет на погрешность внешних оценок предельного множества 0-управляемости. Истинное предельное множество 0-управляемости лежит в зазоре между внутренней оценкой (множества 0-управляемости за  $N$  шагов) и внешней оценкой. При  $M=3$  точность оценивания оказывается значительно выше, чем при  $M=1$ , что определяет целесообразность решения задачи (6).

Рассмотрим системы разной размерности с различными типами собственных значений матрицы системы.

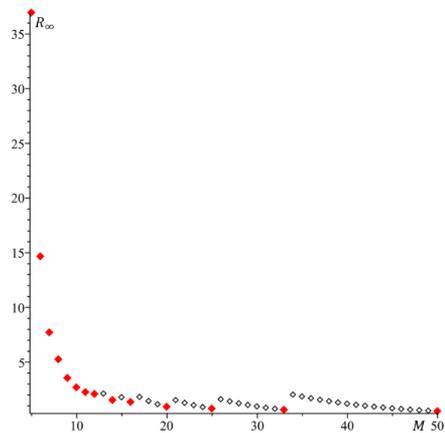
**Пример 1.** Пусть

$$A_1 = \begin{pmatrix} 5.22 & 0.27 \\ 0.82 & 1.09 \end{pmatrix}, \mathcal{U}_1 = \text{conv} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Матрица  $A_1$  имеет действительные собственные значения  $\lambda_1=5.27$  и  $\lambda_2=1.04$ . Рассмотрим зависимость погрешности  $R_p$  от выбора значения  $M=1, 50$  при  $N_{max}=100$ .



а)  $p=1, M=1, \alpha_1=0.997$



б)  $p=\infty, M=4, \alpha_\infty=0.992$

Рис. 2. Зависимость  $R_p$  от выбора  $M$  для  $(A_1, \mathcal{U}_1)$

В случае с  $p=1$  отображение  $T^M$  становится сжимающим, начиная с  $M=1$ , а в случае  $p=\infty$  – начиная с  $M=4$ . Следовательно, для Рис. 2(б) параметры  $M < 4$  исключены. Для Рис. 2(а) для сохранения масштаба исключены из рассмотрения параметры  $M=1$  и  $M=2$ .

Проверим, есть ли зависимость результатов численного моделирования от выбора множества допустимых значений управлений  $\mathcal{U}$ . Для этого рассмотрим при той же матрице  $A_1$  следующее множество  $\mathcal{U}_2$ :

$$\mathcal{U}_2 = \text{conv} \left\{ \begin{pmatrix} -0.43 \\ 0.86 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -0.93 \\ 0.31 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -0.73 \\ -0.59 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -0.51 \\ -1.1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0.42 \\ -0.86 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0.93 \\ -0.31 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0.74 \\ 0.59 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0.52 \\ 1.1 \end{pmatrix} \right\} \quad (6)$$

Аналогичные численные расчеты представлены на Рис. 3.

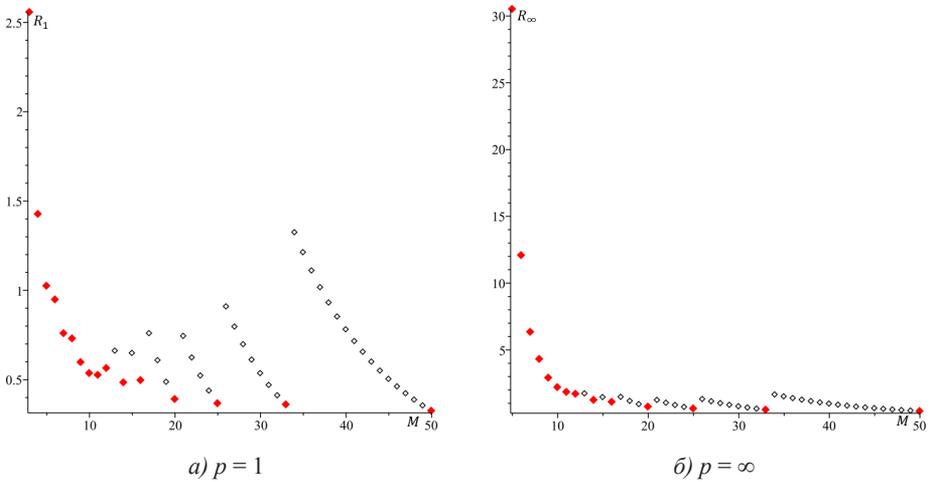


Рис. 3. Зависимость  $R_p$  от выбора  $M$  для  $(A_1, \mathcal{U}_2)$

Результаты для системы  $(A_1, \mathcal{U}_2)$  идентичны результатам для системы  $(A_1, \mathcal{U}_1)$ .

**Пример 2.** Пусть

$$A_2 = \begin{pmatrix} -0.55 & 1.21 \\ -1.21 & -0.55 \end{pmatrix}, \mathcal{U}_1 = \text{conv} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Матрица  $A_2$  имеет комплексно-сопряженные собственные значения  $\lambda_1 = -0.55 + 1.21i$  и  $\lambda_2 = -0.55 - 1.21i$ . Рассмотрим зависимость погрешности  $R_p$  от выбора значения  $M = \overline{1, 50}$ , где  $N_{\max} = 100$ .

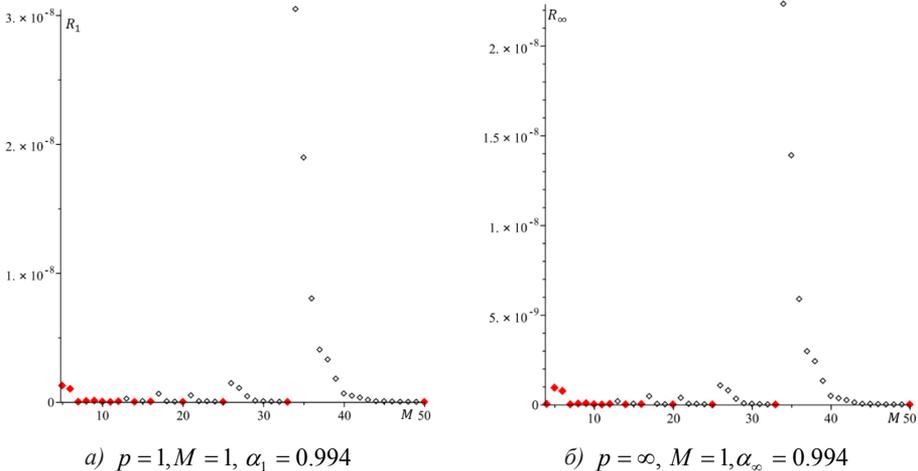


Рис. 4. Зависимость  $R_p$  от выбора  $M$  для  $(A_2, \mathcal{U}_1)$



В случае с  $p=1$  и  $p=\infty$  отображение  $T^M$  становится сжимающим, начиная с  $M=1$ . Для сохранения масштаба на Рис. 4(а) параметры  $M < 4$  исключены, а для Рис. 4(б) для сохранения масштаба исключены из рассмотрения параметры  $M=1, M=2, M=3$ .

Проверим, есть ли зависимость результатов численного моделирования от выбора множества допустимых значений управлений  $\mathcal{U}$ . Для этого рассмотрим при той же матрице  $A_2$  множество управляющих воздействий  $\mathcal{U}_2$  (7).

Аналогичные численные расчеты представлены на Рис. 5.

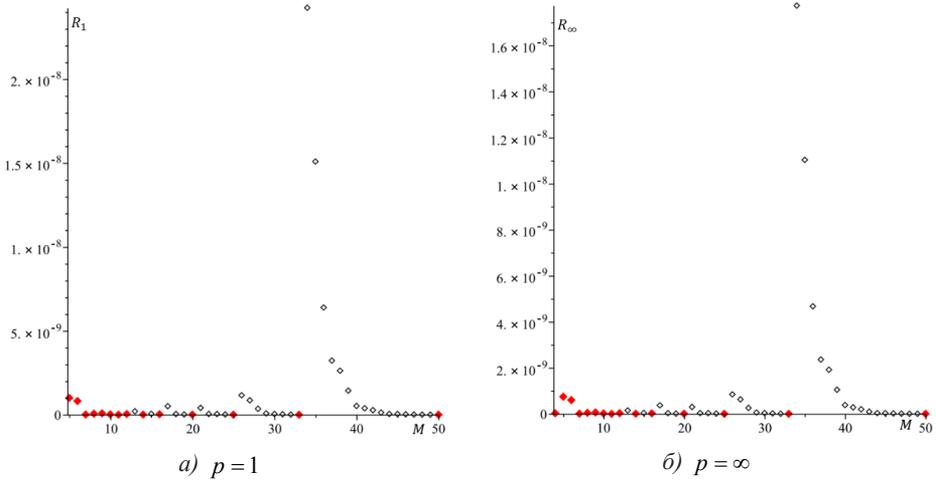


Рис. 5. Зависимость  $R_p$  от выбора  $M$  для  $(A_2, \mathcal{U}_2)$

Результаты для системы  $(A_2, \mathcal{U}_2)$  идентичны результатам для системы  $(A_2, \mathcal{U}_1)$ .

**Пример 3.** Пусть

$$A_3 = \begin{pmatrix} 1.51 & 0 \\ 0.75 & 1.51 \end{pmatrix}, \mathcal{U}_1 = \text{conv} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Матрица  $A_3$  имеет единственное собственное значение кратности 2  $\lambda_1 = 1.51$ . Рассмотрим зависимость погрешности  $R_p$  от выбора значения  $M = \overline{1, 50}$ , где  $N_{\max} = 100$ .

В случае с  $p=1$  и  $p=\infty$  отображение  $T^M$  становится сжимающим, начиная с  $M=1$ . Для сохранения масштаба на Рис. 6 параметры  $M < 4$  исключены.

Проверим, есть ли зависимость результатов численного моделирования от выбора множества допустимых значений управлений  $\mathcal{U}$ . Для этого рассмотрим при той же матрице  $A_3$  множество управляющих воздействий  $\mathcal{U}_2$  (7).

Аналогичные численные расчеты представлены на Рис. 7.

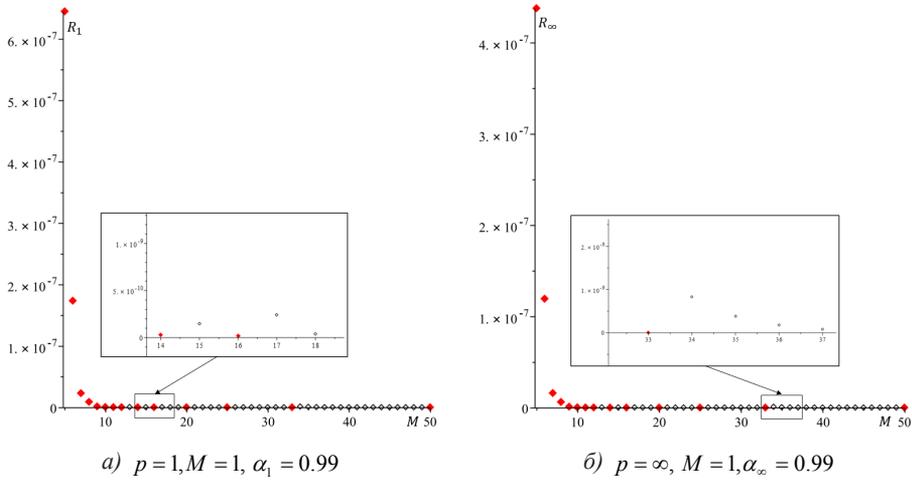


Рис. 6. Зависимость  $R_p$  от выбора  $M$  для  $(A_3, \mathcal{U}_1)$

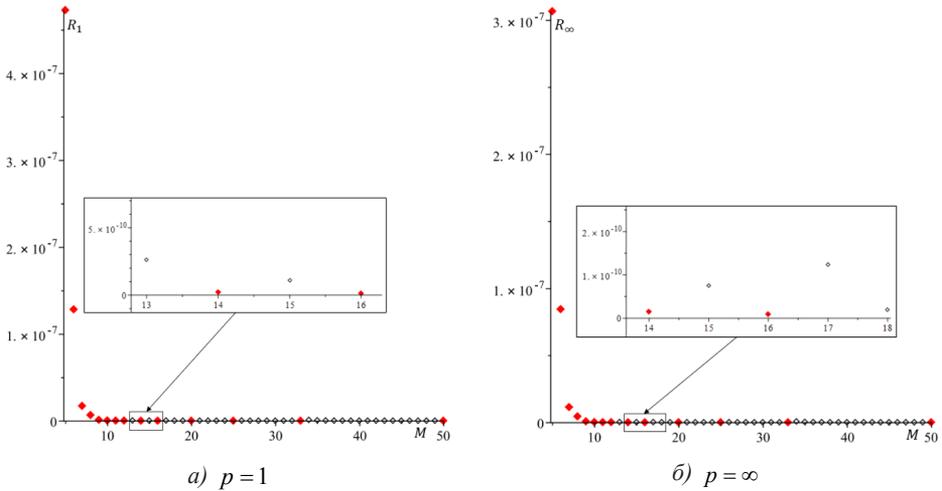


Рис. 7. Зависимость  $R_p$  от выбора  $M$  для  $(A_3, \mathcal{U}_2)$

Результаты для системы  $(A_3, \mathcal{U}_2)$  идентичны результатам для системы  $(A_3, \mathcal{U}_1)$ .

**Пример 4.** Рассмотрим трёхмерную систему. Пусть

$$A_4 = \begin{pmatrix} -0.553 & 0 & 1.208 \\ 0 & 1.33 & 0 \\ -1.208 & 0 & -0.553 \end{pmatrix}, \mathcal{U}_3 = \text{conv} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$



Матрица  $A_4$  имеет собственные значения  $\lambda_1 = -0.55 + 1.2I$ ,  $\lambda_2 = -0.55 - 1.2I$ ,  $\lambda_3 = 1.33$ . Рассмотрим зависимость погрешности  $R_p$  от выбора значения  $M = 1, 35$ , где  $N_{\max} = 36$ .

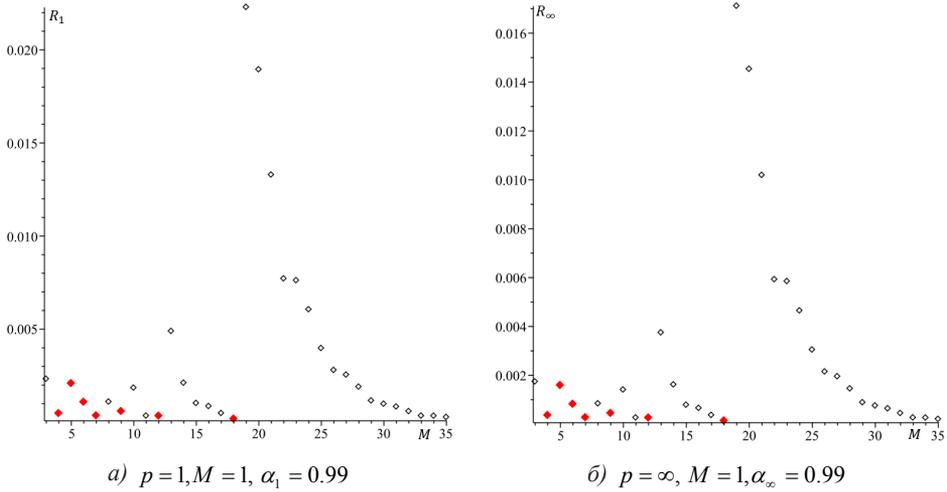


Рис. 8. Зависимость  $R_p$  от выбора  $M$  для  $(A_4, \mathcal{U}_3)$

Проверим, есть ли зависимость результатов численного моделирования от выбора множества допустимых значений управлений  $\mathcal{U}$ . Для этого рассмотрим при той же матрице  $A_3$  множество управляющих воздействий  $\mathcal{U}_4$ .

$$\mathcal{U}_4 = \text{conv} \left\{ \begin{pmatrix} 1.15 \\ 1.03 \\ -1.09 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1.74 \\ 1.68 \\ -2.97 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1.73 \\ 0.55 \\ -0.24 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1.15 \\ -1.03 \\ 1.09 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1.73 \\ -0.55 \\ 0.24 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1.74 \\ -1.68 \\ 2.97 \end{pmatrix} \right\}$$

Аналогичные численные расчеты представлены на Рис. 9.

Из графиков примеров видно, что скачкообразный рост возникает при уменьшении значения целой части  $\frac{N_{\max}}{M}$ . Например, на Рис. 9 при переходе от  $M = 18$  к  $M = 19$  погрешность  $R_p$  растет. Связано это с тем, что оптимальное значение  $N$  при решении задачи (6) имеет вид

$$N = \left\lceil \frac{N_{\max}}{M} \right\rceil M.$$

Т.е. последнее множество 0-управляемости, используемое для построения внешней оценки предельного множества, имеет номер  $N$ , а множества с номерами  $N+1, \dots, N_{\max}$  фактически никак не используются.

Значения  $M$ , после которых происходит изменение целой части  $\frac{N_{\max}}{M}$ , выделены красным цветом. Начиная с некоторого  $M_0$  красные точки начинают монотонно убывать, в связи с чем для минимизации погрешности нужно брать самое большое значение  $M$ , на которое  $N_{\max}$  делится нацело, для примеров 1–3 это 50, для примера 4 это 18.

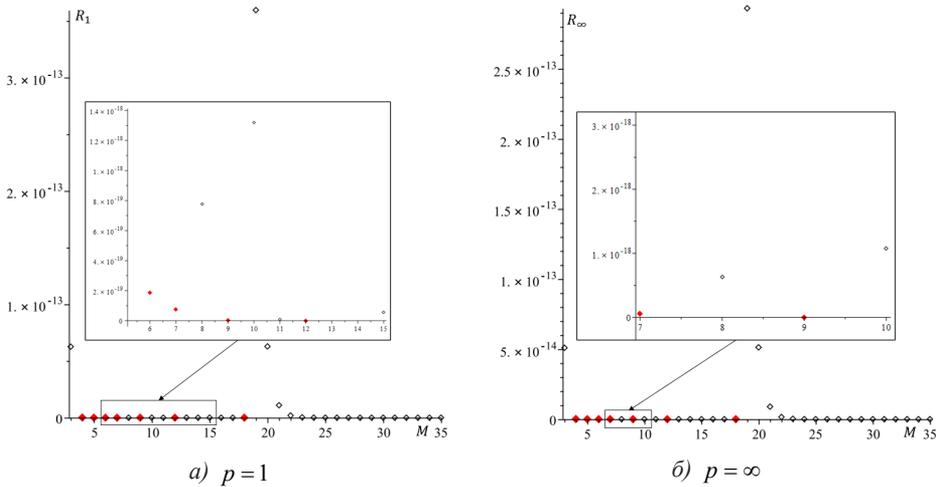


Рис. 9. Зависимость  $R_p$  от выбора  $M$  для  $(A_4, U_4)$

## 5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В статье рассмотрена задача выбора шага квантования внешней оценки предельного множества 0-управляемости линейной дискретной системы с ограниченным управлением.

Множество допустимых значений управлений предполагается выпуклым компактом, содержащим начало координат. Структура предельного множества 0-управляемости зависит от нормальной жордановой формы и собственных значений матрицы системы, в связи с чем были рассмотрены системы с тремя типами собственных значений. Для каждого типа было получено экспериментальное подтверждение выбора оптимального значения шага квантования  $M$ . Решение поставленной задачи было произведено на основе анализа экспериментальных данных, полученных в ходе численного моделирования. Приведены графики зависимости погрешности  $R_p$  построения внешних оценок на основе метода сжимающих отображения от шага квантования  $M$ . Погрешность  $R_p$  монотонно убывает на каждом множестве тех  $M$ , для которых  $\left\lfloor \frac{N_{\max}}{M} \right\rfloor = \text{const}$ . Следует рассматривать только те  $M$ , для которых  $\left\lfloor \frac{N_{\max}}{M} \right\rfloor < \left\lfloor \frac{N_{\max}}{M+1} \right\rfloor$ . При рассмотрении таких  $M$  погрешность  $R_p$ , как правило, демонстрирует монотонное убывание, начиная с некоторого  $M_0$ .



### Литература

1. *Ибрагимов Д.Н.* О задаче быстродействия для класса линейных автономных бесконечномерных систем с дискретным временем, ограниченным управлением и вырожденным оператором // *Автоматика и Телемеханика*. 2019. № 3. С. 3–25.
2. *Colonius F.* Controllability Properties and Invariance Pressure for Linear Discrete-Time Systems // *Journal of Dynamics and Differential Equations*. 2022. № 34. P. 5–28.
3. *Ge S.S.* Reachability and controllability of switched linear discrete-time systems // *IEEE Transactions on Automatic Contr l*. 2001. V.46, No. 9. P. 1437–1441.
4. *Heemels W.P.* Null controllability of discrete-time linear systems with input and state constraints // *47th IEEE Conference on Decision and Control*. Cancun. – 2008. – P. 3487–3492.
5. *Kaba M.D.* A spectral characterization of controllability for linear discrete-time systems with conic constraints // *SIAM Journal on Control and Optimization*. 2015. Vol. 53, No. 4. P. 2350–2372.
6. *Benvenuti L.* The geometry of the reachability set for linear discrete-time systems with positive controls // *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*. 2006. Vol. 28, No. 2. P. 306–325.
7. *Darup M.S.* On general relations between nullcontrollable and controlled invariant sets for linear constrained systems // *53rd IEEE Conference on Decision and Control*. Los Angeles. 2014. P. 6323–6328.
8. *Точилин П.А.* О построении невыпуклых аппроксимаций множеств достижимости кусочно-линейных систем // *Дифференциальные уравнения*. 2015. Т. 51, № 11. С. 1503–1515.
9. *Kuntsevich V.M.* Attainability Domains for Linear and Some Classes of Nonlinear Discrete Systems and Their Control // *J. Autom. Inform. Sci.* 2010. V. 42, No. 1. P. 1–18.
10. *Fucheng L.* Optimal preview control for linear discrete-time periodic systems // *Mathematical Problems in Engineering*. 2019. P. 1–11.
11. *Берендакова А.В., Ибрагимов Д.Н.* О методе построения внешних оценок предельного множества управляемости для линейной дискретной системы с ограниченным управлением // *Автоматика и телемеханика*. 2023. № 2. С. 3–34.
12. *Ибрагимов Д.Н., Осокин А.В., Сиротин А.Н., Сыпало К.И.* О свойствах предельных множеств управляемости для класса неустойчивых линейных систем с дискретным временем и  $L_1$ -ограничениями // *Изв. РАН. ТиСУ*. 2022. № 4. С. 3–21.
13. *Ибрагимов Д.Н., Сиротин А.Н.* О некоторых свойствах множеств ограниченной управляемости для стационарных линейных дискретных систем с суммарным ограничением на управление // *Изв. РАН. ТиСУ*. 2023. № 6. С. 3–32.
14. *Колмогоров А.Н., Фомин С.В.* Элементы теории функций и функционального анализа // М.: Физматлит, 2012.

# Refinement of the Compression Ratio for an External Estimation of the Limit 0-Controllable Set of a Linear Discrete-Time System with Bounded Control

*Anastasiya V. Simkina\**

Moscow Aviation Institute (national research university) (MAI), Moscow, Russia

ORCID: <https://orcid.org/0009-0008-8910-5728>

e-mail: [abv1998@yandex.ru](mailto:abv1998@yandex.ru)

The problem of constructing an optimal external estimate of the limit controllable set for a linear discrete-time system with convex control constraints is considered. The estimation is based on the principle of contraction mappings. The optimal estimation parameters are determined based on the analysis of the results of numerical modeling. Examples are given.

**Keywords:** discrete-time system, limit controllable set, limit achievable set, principle of contraction mappings, compression ratio, convex set, polyhedral approximation.

## For citation:

Simkina A.V. Refinement of the Compression Ratio for an External Estimation of the Limit 0-Controllable Set of a Linear Discrete-Time System with Bounded Control. *Modelirovanie i analiz dannykh = Modelling and Data Analysis*, 2024. Vol. 14, no. 4, pp. 115–128. DOI: <https://doi.org/10.17759/mda.2024140408> (In Russ., abstr. in Engl.).

## References

1. Ibragimov D.N. O zadache bystrodeystviya dlya klassa lineynych avtonomnykh beskonечноmernykh system c diskretnym vremenem, ogranichennym upravleniem I vyroždennym operatorom [On the problem of speed for a class of linear autonomous infinite-dimensional systems with discrete time, limited control and a degenerate operator] *Autom. Remote Control* 2019. № 3. С. 3–25. (In Russ.).
2. Colonius F. Controllability Properties and Invariance Pressure for Linear Discrete-Time Systems. *Journal of Dynamics and Differential Equations*. 2022. № 34. P. 5–28.
3. Ge S.S. Reachability and controllability of switched linear discrete-time systems. *IEEE Transactions on Automatic Contr* l. 2001. V.46, No. 9. P. 1437–1441.
4. Heemels W.P. Null controllability of discrete-time linear systems with input and state constraints. *47th IEEE Conference on Decision and Control. Cancun.* – 2008. – P. 3487–3492.
5. Kaba M.D. A spectral characterization of controllability for linear discrete-time systems with conic constraints. *SIAM Journal on Control and Optimization*. 2015. Vol. 53, No. 4. P. 2350–2372.

\**Anastasiya V. Simkina*, Postgraduate student, assistant professor at the Department of Probability Theory and Computer Modeling, Moscow Aviation Institute (national research university) (MAI), Moscow, Russia, ORCID: <https://orcid.org/0009-0008-8910-5728>, e-mail: [abv1998@yandex.ru](mailto:abv1998@yandex.ru)



6. Benvenuti L. The geometry of the reachability set for linear discrete-time systems with positive controls. *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*. 2006. Vol. 28, No. 2. P. 306–325.
7. Darup M.S. On general relations between nullcontrollable and controlled invariant sets for linear constrained systems. *53rd IEEE Conference on Decision and Control*. Los Angeles. 2014. P. 6323–6328.
8. Tochilin P.A. O postroenii nevyuklykh approksimacii mnogestv dostigimosti kusochno-lineynich sistem [On the construction of non-convex approximations of sets of attainability of piecewise linear systems] *Differential equations*. 2015. Vol. 51, No. 11. pp. 1503–1515. (In Russ.).
9. Kuntsevich V.M. Attainability Domains for Linear and Some Classes of Nonlinear Discrete Systems and Their Control *J. Autom. Inform. Sci.* 2010. V. 42, No. 1. P. 1–18. (In Russ.).
10. Fucheng L. Optimal preview control for linear discrete-time periodic systems. *Mathematical Problems in Engineering*. 2019. P. 1–11.
11. Berendakova A.V., Ibragimov D.N. O metode postroeniya vneschnykh otsenok predelnogo mnogestva upravlyaemosti dlya lineynoy diskretnoy sistemy s ogranichennym upravleniem [On the method of constructing external estimates of the limit set of controllability for a linear discrete system with bounded control] *Automat. Remote Control*. 2023. No. 2. С. 3–34. (In Russ.).
12. Ibragimov D.N., Osokin A.V., Sirotin A.N., Sypalo K.I. O svoistvah predelnykh mnogestv upravlyaemosti dlya klassa neustoichivyykh lineynykh sistem s diskretnym vremenem [On the properties of limit sets of controllability for a class of unstable linear systems with discrete time and  $l_1$  constraints] *Izv. RAS. TiSU*. 2022. No. 4. pp. 3–21. (In Russ.).
13. Ibragimov D.N., Sirotin A.N. O nekotorykh svoistvah mnogestv ogranichennoy upravlyaemosti dlya statsionarnykh lineynykh diskretnykh sistem s summarnym ogranicheniem na upravlenie [On some properties of limited controllability sets for stationary linear discrete systems with a total control constraint] *Izv. RAS. TiSU*. 2023. No. 6. pp. 3–32. (In Russ.).
14. Kolmogorov A.N., Fomin. S.V. Elementy teorii funktsii i funkcionalnogo analiza [Elements of the theory of functions and functional analysis] *Moscow: Fizmatlit*, 2012. (In Russ.).

Получена 29.10.2024

Received 29.10.2024

Принята в печать 11.11.2024

Accepted 11.11.2024

## ◆◆◆◆◆ МЕТОДИКА ПРЕПОДАВАНИЯ ◆◆◆◆◆

УДК 378.1

### Подготовка разработчиков свободного программного обеспечения

**Лукин В.Н.\***

Московский государственный психолого-педагогический университет  
(ФГБОУ ВО МГППУ), г. Москва, Российская Федерация  
Московский авиационный институт  
(национальный исследовательский университет) (МАИ)  
г. Москва, Российская Федерация  
ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-8906-2686>  
e-mail: [lukinvn@list.ru](mailto:lukinvn@list.ru)

**Чернышов Л.Н.\*\***

Московский авиационный институт  
(национальный исследовательский университет) (МАИ)  
г. Москва, Российская Федерация  
Финансовый университет при правительстве РФ (ФУ)  
г. Москва, Российская Федерация  
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-1512-4052>  
e-mail: [levchern@gmail.com](mailto:levchern@gmail.com)

Производство свободного программного обеспечения (ПО) – тенденция развития современных информационных технологий. Одна из задач вуза – это подготовка студентов, способных создавать подобные программные продукты. На государственном уровне обращают внимание на необходимость подобной подготовки, но образовательные программы несколько отстают. Предлагается в существующих дисциплинах, связанных с разработкой ПО, повысить внимание качеству создаваемого программного кода для возможности его свободного использования. Навык создания качественного кода проще всего вырабатывается при командной работе над проектом.

**Ключевые слова:** свободное программное обеспечение, программная инженерия, проектное обучение.

#### Для цитаты:

Лукин В.Н., Чернышов Л.Н. Подготовка разработчиков свободного программного обеспечения // Моделирование и анализ данных. 2024. Том 14. № 4. С. 129–137.  
DOI: <https://doi.org/10.17759/mda.2024140409>



\***Лукин Владимир Николаевич**, кандидат физико-математических наук, профессор, Московский государственный психолого-педагогический университет (ФГБОУ ВО МГППУ), г. Москва, Российская Федерация, ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-8906-2686>, e-mail: [lukinvn@list.ru](mailto:lukinvn@list.ru)

\*\***Чернышов Лев Николаевич**, кандидат физико-математических наук, доцент, Московский авиационный институт – национальный исследовательский университет (МАИ), г. Москва, Российская Федерация Финансовый университет при правительстве РФ (ФУ), г. Москва, Российская Федерация, ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-1512-4052>, e-mail: [levchern@gmail.com](mailto:levchern@gmail.com)

Свободное программное обеспечение (СПО) в последнее время вызывает всё больший интерес российского программистского сообщества. За рубежом развитие СПО диктуется, в основном, вопросами эффективности разработки программных продуктов, в России добавляется фактор импортнезависимости [1]. Правда, порой даже у профессиональных программистов нет чёткого представления, в чем различие между свободным, открытым и бесплатным программным обеспечением, каковы тенденции развития этого направления, какие существуют проблемы в этой области.

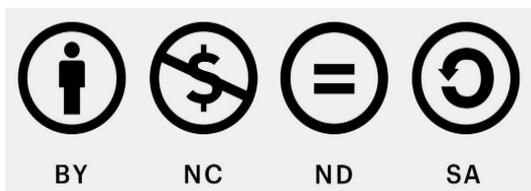
Под бесплатным ПО понимается продукт, за который пользователь не платит, под открытым такое, исходный код которого можно посмотреть, со свободным же можно делать что угодно, но не закрывать.

СПО – это программное обеспечение, распространяемое на условиях свободного лицензионного договора. На его основании пользователь получает право использовать программу в любых не запрещенных законом целях. Он может получать доступ к исходным текстам программы как в целях её изучения и адаптации, так и для переработки, вносить в неё изменения, распространять программу (бесплатно или за плату).

Лицензия определяет, что можно делать с программой. В неё включается следующее:

- можно ли модифицировать код без указания автора (BY);
- если кто-то взял код за основу, то должен ли он использовать ту же самую лицензию (SA);
- можно ли зарабатывать на этом коде (NC);
- можно ли вообще модифицировать этот код или нужно использовать его только в исходном виде (ND);
- какие организации могут пользоваться кодом.

Аббревиатуры в описаниях условий лицензий общеприняты, они имеют стандартные символичные обозначение:





Отметим некоторые популярные лицензии.

GNU GPL (GNU General Public License) – универсальная общедоступная лицензия. По ней пользователь получает четыре свободы:

- запускать программу с любой целью;
- изучать и изменять её исходный код;
- распространять как исходный код, так и программу;
- улучшать программу и выкладывать её для всех, но под той же лицензией.

Похожая на GPL лицензия для продуктов Mozilla: Mozilla Public License. Но она имеет существенное отличие: код под этой лицензией можно использовать вместе с закрытым кодом, права на которые есть только у его разработчика.

Лицензия Apache разрешает делать с кодом что угодно, главное – указать всех авторов и все патенты, которые использовались при разработке.

Использование СПО позволяет решать следующие задачи [2]:

- импортозамещение проприетарных компонентов информационных систем;
- стимулирование развития отечественной отрасли разработки программ для ЭВМ;
- расширение участия отечественных разработчиков в государственных проектах;
- обеспечение высокого уровня технологической независимости;
- уменьшение числа нарушений правовой защиты программ.

Преимуществами СПО являются защищенность и безопасность ИТ-инфраструктуры, высокое качество программного кода, широкий выбор аппаратных платформ, возможность быстрой адаптации к текущим потребностям бизнеса, открытые форматы.

Переход на СПО – мировая тенденция. По результатам опроса на Stack Overflow (70 тысяч разработчиков) в 2022 году Linux как основную операционную систему использовало около 40% специалистов. (в 2018 году 23%). По экспертным оценкам объем рынка разработки программного обеспечения с открытым кодом к 2026 году составит 37 млрд. \$, а сервисов на его основе – 66 млрд. \$. На смену противостоянию открытого и закрытого ПО приходит конвергенция обоих подходов к разработке и распространению ПО. Корпорации используют каждый из подходов там, где он наиболее выгоден. Развитие по открытой модели наиболее интенсивно идёт в области системного и кроссотраслевого ПО, в то время как в области прикладного и узкоспециального профессионального ПО преобладают проприетарные продукты.

Со стороны Правительства РФ принимались определенные усилия, направленные на развитие СПО, но, к сожалению, они не всегда приводили к успеху. Так, в 2008 году была предложена концепция развития разработки и использования СПО, но на этапе практического внедрения стали возникать затруднения, связанные с нехваткой грамотных сотрудников, дефицитом информации, недостаточной популяризацией и т. п. В 2009 году была создана РАСПО (Российская ассоциация СПО), которая просуществовала до 2016 года. План перехода государственных органов и федеральных бюджетных учреждений на СПО 2010 года выполнен не был. В 2011 году был объявлен конкурс на создание прототипа Национальной программной платформы (НПП) [3]. Но уже в 2012 году результаты создания прототипов базовых компонент НПП были засекречены, а сам проект был безрезультатно закрыт в 2015 году.



ПО с открытым исходным кодом становится все более востребованным и в российских компаниях. Здесь сообщество разработчиков Open Source достаточно сильное: по данным JetBrains, на РФ приходится 7% поставщиков международных проектов с открытым кодом (ОПО), 5 место в мире после США, Китая, Индии и Японии. GitHub к 2030 году ожидают увеличение влияния российских разработчиков на сообщество. Доля продуктов с Open Source-элементами в реестре отечественного ПО может достигнуть 85%. К 2026 году 92% российских компаний будут использовать решения на базе Open Source.

Тем не менее, распространение СПО в России могло бы быть и большим. Сдерживающие причины следующие:

- недостаточная осведомленность российского ИТ-сообщества о продуктах с открытым исходным кодом, его возможностях и особенностях;
- непонимание руководителями механизмов развития открытых продуктов и связанное с этим недоверие к ним;
- привычка к определённым проприетарным продуктам и незнание юридических аспектов использования открытого ПО;
- отсутствие практики создания отраслевого СПО с использованием возможностей его функционала для сокращения бюджетных расходов.

Конечно, разработка СПО – не такая простая задача. В работе Карла Фогеля [5] отмечается, что лишь 5–10% всех проектов СПО завершается успешно. «Когда проект по разработке свободного ПО садится на мель, причиной тому чаще всего будет неумение разработчиков (или менеджеров) учитывать специфические проблемы разработки открытого ПО, хотя к проблемам, присущим разработке коммерческого ПО, они могут быть основательно подготовлены». Замечено, что чаще всего в проекте распадается коллектив разработчиков. Но если вести проект в учебном заведении, где ядро коллектива составляют опытные преподаватели, есть реальный шанс поддержать проект в течение всего цикла разработки за счёт привлечения все новых заинтересованных студентов.

Ситуацию может улучшить внедрение тематики разработки СПО в учебные программы. В октябре 2021 года Минцифры и АНО «Цифровая экономика» представили НКО Russian Open Source Foundation, на базе которой разработан проект «Стратегия развития программного обеспечения с открытым кодом в России» [4]. В одном из разделов этого проекта предложены меры по усилению кадрового потенциала, которые напрямую касаются высшей школы. Среди них указаны такие:

- преимущественное использование продуктов с открытым программным обеспечением (ОПО) в учебных заведениях, организация доступа к национальному облачному сервису публичных репозиторий;
- грантовая поддержка преподавателей, кафедр и лабораторий, которые разрабатывают учебные курсы и другие образовательные продукты на основе ОПО;
- разработка программ переподготовки преподавателей для обучения их использованию ОПО, а также организация переподготовки, включая её грантовую поддержку;



- стимулирование участия ИТ-компаний в образовательных учреждениях для преподавания практических аспектов программных технологий и для руководства студенческими проектами в области разработки ОПО;
- возможность представления ВКР в качестве вклада в продукт ОПО или результата работы в отечественных ИТ-компаниях;
- включение метрик, связанных с участием в разработках ОПО, в КПЭ вузов технической направленности и установление критериев получения преподавателями надбавок за академическую деятельность;
- разработка и внедрение образовательных материалов по открытой модели разработки, основам организации сообществ программных продуктов с открытым кодом и ведения бизнеса на базе таких продуктов;
- проведение общенациональных мероприятий по привлечению студентов в разработку ПО с открытым кодом под эгидой представителей отечественных компаний.

Итак, если есть необходимость в развитии этого направления, следует привлекать к разработке СПО больше программистов из студенческой среды, разъяснять все вопросы, связанные с СПО.

Учебная дисциплина, призванная подготовить студентов для решения этих задач, – это «Программная инженерия», которая входит в большинство учебных планов вузов, где есть направление «Прикладная информатика». Именно она даёт возможность получить на выходе качественного специалиста.

Что конкретно мы хотим видеть в результате обучения?

1. Главное – умение и стремление создавать качественный код: стиль написания, комментарии, документированность для возможности его развития.
2. Умение читать чужой код, разбираться в нем, модифицировать и документировать его.
3. Владение инструментальными средствами разработки.
4. Способность работать в коллективе разработчиков.

Мы проанализировали рабочие программы (РПД) некоторых вузов на соответствие требуемому профессиональному уровню, и оказалось, что внимание именно к этим аспектам было недостаточным.

В некоторых РПД указываются подходящие компетенции. Например,

- (ОК-3) способен работать в коллективе, нести ответственность за поддержание партнерских, доверительных отношений;
- (ПК-14) способен принимать участие в реализации профессиональных коммуникаций в рамках проектных групп, презентовать результаты проектов и обучать пользователей ИС.

Посмотрим на главное: умение создавать качественный код. Здесь мы не говорим об отсутствии ошибок, обратим внимание на качество текста. К сожалению, именно этот фактор проходит мимо внимания преподавателя. Действительно, если студент сдаёт программу, то пусть она хотя бы не падает и выдаёт правильный ответ. В результате мы получаем юного гения, который гордится, что его изделие работает, а никто не может понять, почему. И кому нужен такой код, даже открытый, если его невозможно развить?



На самом деле, качество текста – понятие достаточно простое, которое практически всегда обеспечивается стилем. Можно заранее задать некоторый стиль, который обеспечит лёгкость понимания текста не только преподавателем, но и коллегами-студентами. И тут мы переходим к другому аспекту подготовки специалистов в области СПО – коллективной разработке.

Обратим внимание, что требуется выработать умение работать в коллективе, причём, коллектив должен быть именно производственным, способным к совместной реализации программного проекта. И вот здесь появляются существенные трудности. Мало того, что программисты слывут необщительными людьми, но и сама система обучения направлена на индивидуальный подход: студент сам выполняет лабораторную и курсовую работу, сам сдаёт экзамен, сам защищает диплом... А в жизни так не бывает: проект – дело коллективное, каждый участник играет определённую роль. Понятно, что бывший студент чувствует себя неуютно, несмотря даже на хорошую профессиональную подготовку.

Профессиональные разработчики, волею судеб оказавшиеся в роли вузовских преподавателей, прекрасно знают эту проблему и стараются по мере возможности её решить. Приведём пару примеров. В Высшей школе экономики широко используют проектное обучение, в ходе которого формируются группы бакалавров, которыми руководит магистрант. Студенты совместно работают над курсовыми проектами и ВКР. Очень интересным был опыт коллективных работ в Гусевском стекольном колледже. Это даже не вуз, но его учащиеся со своими программными проектами успешно выступали на крупных конференциях.

Что мы можем предложить?

Студенческие проекты представляют собой важную составляющую учебного процесса: они позволяют студентам применять теоретические знания на практике, развивать навыки командной работы и самоорганизации, изучать новые технологии и методологии. Но в обычной практике дипломные и курсовые проекты разрабатываются студентом в одиночку, хотя и с научным руководителем. Значит, весьма важные для программиста командные навыки просто не смогут сформироваться, не говоря уж об опыте командной работы над проектом. О столь полезном навыке, как руководство проектом, и говорить не приходится. Особенно ярко это проявляется при реализации крупных проектов в области создания программного обеспечения. Отсутствие навыков работы в команде сказывается и на производительности молодого сотрудника, и на его адаптации к рабочему процессу.

Первое, что приходит в голову – давайте разделим студентов на команды, дадим им проекты, и пусть работают. Но студенческие проекты характеризуются рядом особенностей, которые необходимо учитывать при разработке системы управления ими. Они, например, имеют ограниченные ресурсы, не производственные, а образовательные цели, излишнюю изменчивость требований и, конечно же, необходимость поддержки конструктивного взаимоотношения участников проекта.

Большая проблема – неподготовленность и отсутствие опыта руководства групповыми проектами у преподавателей. Методические материалы, касающиеся ведения



курсовых и выпускных работ, не содержат разделов, в которых были бы какие-то указания по вопросам групповых работ. В таких разделах в первую очередь должны найти отражение следующие вопросы: виды и состав команды, характеристики ролей, методика реализации проекта, использование инструментальных средств коллективной работы, требования к характеру и сложности создаваемых программных средств.

В команде должны быть представлены основные роли исполнителей: руководитель проекта, архитектор, программист, тестировщик. Каждую из ролей может исполнять как один человек, так и несколько. Роль руководителя, естественно, играет не только преподаватель, но один из членов команды. Он должен отвечать за весь проект. Оптимальный размер студенческой команды – три-четыре человека. Может быть, конечно и два, и пять, но в первом случае взаимодействие участников слишком упрощено, а во втором команда из новичков может быть трудно управляемой. В случае двух человек им можно предложить роли разработчиков клиентской и серверной частей приложения.

Выбор технологии разработки может быть свободным, но должна быть одна из систем контроля версий (например, Github).

Второе предложение касается продолжения работы над неоконченными интересными проектами. Студенты выкладывают свои разработки в открытый доступ, но потом это никем не используется. Преподаватели дают похожие темы из года в год, как правило, никак не учитывая предыдущие наработки. Причина понятна: документация невысокого качества, стиль тоже, да и руководство с подозрением смотрит на повторяющиеся темы.

Третье предложение – стараться организовать студентов для участия в реальных проектах СПО.

### *Литература*

1. Свободное программное обеспечение в госорганах. [Электронный ресурс] URL: <https://digital.gov.ru/ru/activity/directions/106/> (дата обращения 28.8.2023).
2. От Open Source к ОПО? Факторы развития свободного программного обеспечения в России. [Электронный ресурс] URL: <https://www.comnews.ru/digital-economy/content/217248/2021-11-08/2021-w45/open-source-k-opo-factory-razvitiya-svobodnogo-programmnogo-obespecheniya-rossii/> (дата обращения 28.8.2023).
3. Национальная программная платформа (НПП). [Электронный ресурс] URL: [https://www.tadviser.ru/index.php/Продукт:Национальная\\_программная\\_платформа](https://www.tadviser.ru/index.php/Продукт:Национальная_программная_платформа) (дата обращения 28.8.2023).
4. Стратегия развития программного обеспечения с открытым кодом в России до 2024 года. [Электронный ресурс] URL: [https://d-russia.ru/wp-content/uploads/2021/10/proekt\\_strategii\\_oro\\_30\\_09\\_21.pdf](https://d-russia.ru/wp-content/uploads/2021/10/proekt_strategii_oro_30_09_21.pdf) (дата обращения 28.8.2023).
5. Карл Фогель. Создание Свободного Программного Обеспечения. Как вести успешный открытый проект. [Электронный ресурс] URL: <https://producingoss.com/ru/index.html> (дата обращения 28.8.2023).



## Training of Free Software Developers

**Vladimir N. Lukin\***

Moscow State University of Psychology and Education (MSUPE),

Moscow Aviation Institute (National Research University) (MAI), Moscow, Russia

ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-8906-2686>

e-mail: [lukinvn@list.ru](mailto:lukinvn@list.ru)

**Lev N. Chernyshov \*\***

Moscow Aviation Institute (National Research University) (MAI)

Financial University under the Government of the Russian Federation (FU)

Moscow, Russia

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-1512-4052>

e-mail: [levchern@gmail.com](mailto:levchern@gmail.com)

The production of free software is a trend in the development of modern information technologies. One of the university's tasks is to train students who can create such software products. At the state level, attention is being paid to the need for such training, but educational programs are somewhat lagging. It is proposed that in the existing disciplines related to software development to increase attention to the quality of the created program code for the possibility of its free use. The skill of creating high-quality code is most easily developed when working on a project in a team.

**Keywords:** free software, software engineering, project training.

### For citation:

Lukin V.N., Chernyshov L.N. Training of Free Software Developers. *Modelirovanie i analiz dannykh = Modelling and Data Analysis*, 2024. Vol. 14, no. 4, pp. 129–137. DOI: <https://doi.org/10.17759/mda.2024140409> (In Russ., abstr. in Engl.).

### References

1. Svobodnoe programmnoe obespechenie v gosorganakh. [Elektronnyi resurs] URL: <https://digital.gov.ru/ru/activity/directions/106/> (data obrashcheniya 28.8.2023).

\***Vladimir N. Lukin**, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Moscow State University of Psychology and Education (MSUPE), Moscow Aviation Institute (National Research University) (MAI), Moscow, Russia, ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-8906-2686>, e-mail: [lukinvn@list.ru](mailto:lukinvn@list.ru)

\*\***Lev N. Chernyshov**, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Moscow Aviation Institute (National Research University) (MAI), Financial University under the Government of the Russian Federation (FU), Moscow, Russia, ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-1512-4052>, e-mail: [levchern@gmail.com](mailto:levchern@gmail.com)



2. Ot Open Source k OPO? Faktory razvitiya svobodnogo programmno obespecheniya v Rossii. [Elektronnyi resurs] URL: <https://www.comnews.ru/digital-economy/content/217248/2021-11-08/2021-w45/open-source-k-opo-factory-razvitiya-svobodnogo-programmnogo-obespecheniya-rossii/> (data obrashcheniya 28.8.2023).
3. Natsional'naya programmnaya platforma (NPP). [Elektronnyi resurs] URL: [https://www.tadviser.ru/index.php/Produkt: Natsional'naya\\_ programmnaya\\_ platforma](https://www.tadviser.ru/index.php/Produkt:Natsional'naya_programmnaya_platforma) (data obrashcheniya 28.8.2023).
4. Strategiya razvitiya programmno obespecheniya s otkrytym kodom v Rossii do 2024 goda. [Elektronnyi resurs] URL: [https://d-russia.ru/wp-content/uploads/2021/10/proekt\\_strategii\\_ opo\\_30\\_09\\_21.pdf](https://d-russia.ru/wp-content/uploads/2021/10/proekt_strategii_opo_30_09_21.pdf) (data obrashcheniya 28.8.2023).
5. Karl Fogel'. Sozdanie Svobodnogo Programmno Obespecheniya. Kak vesti uspešnyy otkrytyy proekt. [Elektronnyi resurs] URL: <https://producingoss.com/ru/index.html> (data obrashcheniya 28.8.2023).

Получена 27.09.2024

Received 27.09.2024

Принята в печать 15.10.2024

Accepted 15.10.2024

УДК 372.851

## Вычислительный эксперимент в преподавании высшей математики. Геометрия

**Куланин Е.Д.\***

Московский государственный психолого-педагогический университет  
(ФГБОУ ВО МГППУ), г. Москва, Российская Федерация  
ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-6093-7012>  
e-mail: [lucas03@mail.ru](mailto:lucas03@mail.ru)

**Степанов М.Е.\*\***

Московский государственный психолого-педагогический университет  
(ФГБОУ ВО МГППУ), г. Москва, Российская Федерация  
ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-4803-8211>  
e-mail: [mestepanov@yandex.ru](mailto:mestepanov@yandex.ru)

Статья продолжает цикл ([1] – [13]) методических разработок авторов. В ней обсуждаются некоторые проблемы, связанные с путями повышения культуры математического мышления студентов-математиков. Авторы опираются на опыт работы на факультете информационных технологий МГППУ.

**Ключевые слова:** высшее образование, методика преподавания математики, аналитическая геометрия, аффинная геометрия, проективная геометрия, геометрические преобразования, неевклидова геометрия, сферическая геометрия, кривые второго порядка.

**Для цитаты:**

Куланин Е.Д., Степанов М.Е. Вычислительный эксперимент в преподавании высшей математики. Геометрия. // Моделирование и анализ данных. 2024. Том 14. № 4. С. 138–162. DOI: <https://doi.org/10.17759/mda.2024140410>

\***Куланин Евгений Дмитриевич**, кандидат физико-математических наук, профессор, Московский государственный психолого-педагогический университет (ФГБОУ ВО МГППУ), г. Москва, Российская Федерация, ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-6093-7012>, e-mail: [lucas03@mail.ru](mailto:lucas03@mail.ru)

\*\***Степанов Михаил Евграфович**, кандидат педагогических наук, доцент, Московский государственный психолого-педагогический университет (ФГБОУ ВО МГППУ), г. Москва, Российская Федерация, ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-4803-8211>, e-mail: [mestepanov@yandex.ru](mailto:mestepanov@yandex.ru)



## 1. ВВЕДЕНИЕ

Данная статья в некотором смысле продолжает и дополняет статью авторов «Вычислительный эксперимент. Теория чисел» [13].

Создание Декартом метода координат привело к систематическому внедрению вычислительных методов в геометрию. Сила вычислений оказалась настолько велика, что с этого момента началось фактическое создание математики Нового времени. При этом математики, склонные к традиционной форме геометрии (синтетическая геометрия) часто активно препятствовали триумфальному шествию аналитической геометрии. Однако универсальность и способность приходить к результату без сложных и узко специализированных рассмотрений геометрических проблем привела к тому, что синтетическая геометрия оказалась в роли изгоя.

При этом развитие математики в последнее время демонстрирует некоторое торжество. Возможно, это связано с тем, что при изучении математических теорий упор делается на освоении вычислительных подходов к математическим задачам вообще и геометрии в частности. Более правильным представляется гармоничное сочетание синтетических и аналитических подходов к решению геометрических задач. Размышления и вычисления должны помогать друг другу. По крайней мере, к этому необходимо стремиться в учебном процессе.

## 2. СФЕРИКА

Современные геометрические теории многочисленны и часто неотделимы от вычислительных методов. Однако в данной статье будет рассмотрен круг вопросов, связанных с геометрией на сфере. Этот раздел геометрической науки всегда был востребован в астрономии. С соответствующей тематикой в её традиционной форме можно познакомиться по книге [14]. При этом геометрия на сфере долгое время рассматривалась как раздел евклидовой стереометрии.

Но на границе семнадцатого и восемнадцатого веков стали актуальными новые для того времени исследования, приведшие в итоге к созданию новых геометрических теорий, таких как проективная геометрия и неевклидовы геометрии. Математики постепенно начали понимать, что геометрия на сфере может рассматриваться как особая теория, в чём-то подобная планиметрии Евклида, но без параллельных линий. Более того, Иоганн Ламберт высказал мысль о том, что если бы существовала сфера с отрицательным радиусом, то на ней выполнялась бы теория, которая в дальнейшем будет названа геометрией Лобачевского.

После оформления и признания неевклидовых геометрий и проективной геометрии, многие результаты того времени, связанные со сферической геометрией, были забыты. В частности, речь идёт о теории кривых на сфере, которые являются аналогами кривых второго порядка. Мы рассмотрим некоторые теоремы, связанные с этой тематикой. Но сначала дадим краткие исторические сведения о так называемой **сферике** – учении о геометрических образах, на поверхности шара [15].



Сферика активно разрабатывалась в Петербургской академии наук. Работали в этом направлении академики Леонард Эйлер и Андрей Иванович Лексель, родившийся в Швеции. Но наибольших результатов в этом направлении достиг уроженец Швейцарии Николай Иванович Фусс, который по приглашению Леонарда Эйлера переехал в Россию, чтобы быть его бессменным секретарём. Кроме того, Фусс стал зятем Эйлера. Во времена нашествия Наполеона академик Фусс фактически руководил Академией. Естественно, что большинство его работ было связано с работами Л. Эйлера. Сферика в этом отношении не является исключением. Однако Фусс продвинулся в развитии соответствующей тематики дальше своих предшественников.

В частности, Фусс пришёл к мысли рассмотреть геометрическое место точек, сумма расстояний которых от двух данных точек постоянна, и исследовать ее свойства. Фактически это был шаг к созданию аналитической геометрии сферы. Кроме того, Фусс рассматривал аналоги циклоидальных кривых на сфере, но в данной статье будут рассмотрены только сферические аналоги эллипсов, гипербол и парабол.

Поясним, по каким причинам рассмотрение этих вопросов может представить интерес.

- Сферическая геометрия очень наглядна.
- Сферическая геометрия связана с эллиптической геометрией Римана и проективной геометрией на плоскости.
- Ряд теорем сферической геометрии очень просты, и их доказательство доступно для студентов.
- Некоторые факты сферической геометрии наоборот достаточно сложны и требуют для своего доказательства кропотливых алгебраических преобразований.
- Визуализация на экране объектов сферической геометрии требует овладения сложными вычислительными алгоритмами.

### 3. АНАЛОГИ КРИВЫХ ВТОРОГО ПОРЯДКА НА СФЕРЕ

Начнём с перечисления наиболее важных геометрических объектов на сфере. Прежде всего, следует назвать **плоские сечения** сферы, которые **являются окружностями евклидовой плоскости**. С каждым плоским сечением связан перпендикулярный ему диаметр сферы, который мы будем называть **сопряжённым соответствующему сечению**. Концы любого диаметра являются полюсами сферы. Если секущая плоскость проходит через центр сферы, то сечение называется **линией большого круга**.

Расстояние между двумя точками А и В на сфере можно определить как величину угла АОВ, где О – центр сферы. Фактически та же метрика (с точностью до множителя) будет получена, если расстоянием считать длину дуги линии большого круга, соединяющей точки А и В. При таком определении расстояния кратчайшими линиями, соединяющей две точки на сфере, являются линии большого круга. Таким образом, **роль прямых на сфере играют линии большого круга**. **Остальные плоские сечения сферы являются окружностями**, центрами которых являются полюса сопряжённого сечению диаметра.



Расстояние на сфере между концами любого диаметра постоянно и равно длине меридиана данной сферы. Обозначим эту длину через  $m$ .

Рассматривая сферу как метрическое пространство, можно определить на сфере **аналоги кривых второго порядка**.

**Эллипс** – это множество точек на сфере, сумма расстояний от каждой из которых до двух фиксированных точек, называемых фокусами, постоянна.

**Гипербола** – это множество точек на сфере, разность расстояний от каждой из которых до двух фиксированных точек, называемых фокусами, постоянна.

**Парабола** – это множество точек на сфере, расстояния от которой до фиксированной точки, называемой фокусом, и до сферической прямой, называемой директрисой, одинаковы.

Сразу следует указать на особенность этого метрического пространства. Если точки  $A$  и  $B$  являются концами диаметра сферы, то сумма расстояний от них до любой точки на сфере постоянна и равна длине меридиана. Получается, что любая кривая на сфере может рассматриваться как сферический эллипс. По этой причине в определении эллипса должно быть внесено ограничение на выбор фокусов – они не должны быть концами одного диаметра. Риман именно на этом основании модифицировал сферическое пространство, отождествив диаметрально противоположные точки. Итак, в дальнейшем предполагается, что фокусы аналогов кривых второго порядка на сфере не являются диаметрально противоположными точками на сфере.

**Задание 1.** Доказать, что **любой сферический эллипс с фокусами  $F_1$  и  $F_2$  одновременно является сферической гиперболой с фокусами  $P_1$  и  $F_2$ , где  $P_1$  является точкой, диаметрально противоположной фокусу  $F_1$ .**

*Решение.* Пусть  $M$  точка на эллипсе, удовлетворяющая равенству  $F_1M + MF_2 = 2a$ . Расстояние между точками  $F_1$  и  $P_1$  равно длине меридиана  $m$ . Таким образом,  $F_1M + MP_1 = m$ . Из этого следует, что  $F_1M = m - MP_1$ . После подстановки этого выражения в исходное равенство получаем, что  $m - MP_1 + MF_2 = 2a$ . В итоге получаем уравнение гиперболы:  $MF_2 - MP_1 = 2a - m$ .

**Задание 2.** Доказать, что **любая сферическая гипербола одновременно является сферическим эллипсом**.

**Задание 3.** Доказать, что **любая сферическая парабола одновременно является сферическим эллипсом**.

*Решение.* Пусть  $M$  точка на сферической параболе, равноудалённая от фокуса  $F$  и от сферической прямой с полюсом  $P$ , лежащим на одной полусфере с точкой  $M$ . Проведём через точку  $M$  и диаметр сферы с концом  $P$  плоскость, которая пересекает директрису в точке  $A$ . Тогда уравнение, задающее сферическую параболу, имеет вид:  $AM = MF$ . Расстояние  $AP$  равно половине длины меридиана  $\frac{m}{2}$ . Значит,  $AM + MP = \frac{m}{2}$ . Отсюда следует, что  $MF + MP = \frac{m}{2}$ .

**Задание 4.** Описать все **сферические параболы**.

*Решение.* В предыдущем задании, отправляясь от общего определения сферической параболы, мы получили уравнение эллипса, которым является данная



парабола. При этом сумма расстояний до фокусов, оказалась равной половине длины меридиана. Таким образом, было получено необходимое условие для того, чтобы сферический эллипс являлся одновременно параболой. Теперь нужно проверить достаточность этого условия. Итак, пусть задан сферический эллипс с фокусами  $F_1$  и  $F_2$ , описываемый условием  $F_1M + MF_2 = \frac{m}{2}$ . Рассмотрим точку  $P$ , диаметрально противоположную фокусу  $F_2$  и линию большого круга, лежащую в плоскости, перпендикулярной диаметру  $PF_2$ . Эта линия большого круга должна оказаться директрисой. Проверим это.

Проведём через точку  $M$  и диаметр  $PF_2$  плоскость, которая пересекает предполагаемую директрису в точке  $A$ . Тогда  $AM + MF_2 = \frac{m}{2}$ . Таким образом,  $MF_2 = \frac{m}{2} - AM$ . Из этого следует, что  $F_1M + \frac{m}{2} - AM = \frac{m}{2}$ , а в итоге получаем, что  $F_1M = AM$ . Это и есть условие, задающее сферическую параболу.

Отметим, что вместо фокуса  $F_2$  можно было с тем же успехом рассмотреть и фокус  $F_1$ . Из этого следует, что у сферической параболы две директрисы.

**Задание 5.** Доказать, что **любая линия большого круга на сфере одновременно является прямой, окружностью и эллипсом.**

*Указание.* Для доказательства того, что линия большого круга является эллипсом, нужно провести плоскость через сопряжённый диаметр  $AB$ . Полученное таким образом сечение сферы очерчено двумя меридианами. На каждом из них выберем по точке  $F_1$  и  $F_2$ . При этом необходимо соблюсти условие  $AF_1 = AF_2$ . Теперь нужно доказать, что точки  $F_1$  и  $F_2$  являются фокусами линия большого круга.

Для рассмотренных выше сферических аналогов кривых второго порядка можно разработать сходные с методом Роберваля приёмы построения касательных к сферическим эллипсам. И на сфере этот подход основан на кинематических соображениях и состоит в том, что касательная и нормаль к эллипсу являются биссектрисами углов между фокальными радиусами. Таким образом, касательные к сферическим эллипсам являются биссектрисами углов между фокальными радиусами.

**Задание 6.** Доказать, что если на сфере заданы две точки  $F_1$  и  $F_2$ , а точка  $F_3$  является диаметрально противоположной к точке  $F_1$ , то любой сферический эллипс с фокусами  $F_1$  и  $F_2$  ортогонален любому сферическому эллипсу с фокусами  $F_2$  и  $F_3$ .

*Указание.* Нужно использовать результаты задания 1.

Следствием последнего задания является тот факт, что семейства эллипсов с фокусами  $F_1$  и  $F_2$  и эллипсов с фокусами  $F_2$  и  $F_3$  взаимно ортогональны. Это позволяет строить на сфере эффектные семейства кривых. К вопросу о построении изображений аналогов кривых второго порядка на сфере мы и перейдём.

## 4. ПОСТРОЕНИЕ КРИВЫХ НА СФЕРЕ

Если до сих пор удавалось обходиться без сколь-нибудь сложных вычислений, то далее будут производиться достаточно пространственные вычисления. Математической основой этих вычислений будет следующий круг понятий.



- Формулы аффинных преобразований трёхмерного пространства.
- Аксонометрия, как средство построения на плоскости объёмных изображений.
- Сферическая система координат.
- Скалярное произведение векторов, которое позволяет, отправляясь от сферических координат двух точек, вычислить расстояние между ними, выражаемое в угловой мере.
- Векторное произведение векторов, которое позволяет строить ортонормированные базисы в пространстве.

**Задание 7.** Построить на экране изображение сферы с прочерченной сетью параллелей и меридианов.

*Решение.* Далее приведена программа построения сферы. Результаты её работы показаны на рисунке 1.

```
pi = Math.Pi
GraphicsWindow.Width = 700
GraphicsWindow.Height = 700
'Координаты центра сферы, радиус и единичный отрезок
x0 = 350
y0 = 350
ed = 100
r = 2
'Базис аксонометрической системы координат
k = .25
u0 = pi/6
x1 = x0 + r*ed* Math.Cos(u0)
y1 = y0 - r*ed*k* Math.Sin(u0)
x2 = x0 + r*ed* Math.Cos(u0+pi/2)
y2 = y0 - r*ed*k* Math.Sin(u0+pi/2)
x3 = x0
y3 = y0 - r*ed
'Построение параллелей на сфере
For u1 = 0 To 2*pi Step pi/1000
For u2 = -pi/2 To pi/2 Step pi/10
p = Math.Cos(u1)*Math.Cos(u2)
q = Math.Sin(u1)*Math.Cos(u2)
w = Math.Sin(u2)
'Аффинные преобразования
x = x0 + p*(x1 - x0) + q*(x2 - x0) + w*(x3 - x0)
y = y0 + p*(y1 - y0) + q*(y2 - y0) + w*(y3 - y0)
GraphicsWindow.SetPixel(x, y,"")
EndFor
EndFor
'Построение меридианов на сфере
For u1 = 0 To 2*pi Step pi/10
For u2 = -pi/2 To pi/2 Step pi/1000
p = Math.Cos(u1)*Math.Cos(u2)
```



```
q = Math.Sin(u1)*Math.Cos(u2)
w = Math.Sin(u2)
x = x0 + p*(x1 - x0) + q*(x2 - x0) + w*(x3 - x0)
y = y0 + p*(y1 - y0) + q*(y2 - y0) + w*(y3 - y0)
GraphicsWindow.SetPixel(x, y, "")
EndFor
EndFor
```

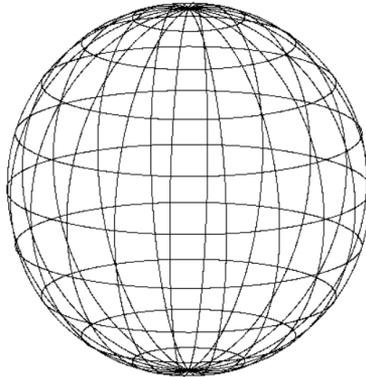


Рис. 1

**Задание 8.** Выделить на сфере область, ограниченную сферическим эллипсом.

*Решение.* Используем следующий способ. После построения объёмного изображения сферы следует задать сферические координаты фокусов эллипса и вычислить координаты векторов, соединяющих центр сферы с этими фокусами. Далее начинается сканирование точек сферы. Вычисляются косинусы углов, которые образуют фокальные вектора с вектором, соединяющим текущую точку с центром сферы. Наконец вычисляется косинус суммы этих углов, и производится проверка того, превосходит ли он косинус заданного суммарного угла, определяющего эллипс. Если он больше, то текущая точка является внутренней точкой эллиптической области. Её следует отметить на сфере.

Приведённые ниже строки программы следует добавить к программе из предыдущего задания. Результат работы показан на рисунке 2.

```
'Первый фокус эллипса
fpu1 = pi + pi/3
fmu1 = 0
pf1 = Math.Cos(fpu1)*Math.Cos(fmu1)
qf1 = Math.Sin(fpu1)*Math.Cos(fmu1)
wfl = Math.Sin(fmu1)
x = x0 + pf1*(x1 - x0) + qf1*(x2 - x0) + wfl*(x3 - x0)
y = y0 + pf1*(y1 - y0) + qf1*(y2 - y0) + wfl*(y3 - y0)
GraphicsWindow.FillEllipse(x-5, y-5,10,10)
```

```

'Второй фокус эллипса
fpu2 = fpu1 + 2*pi/7
fmu2 = 0
pf2 = Math.Cos(fpu2)*Math.Cos(fmu2)
qf2 = Math.Sin(fpu2)*Math.Cos(fmu2)
wf2 = Math.Sin(fmu2)
x = x0 + pf2*(x1 - x0) + qf2*(x2 - x0) + wf2*(x3 - x0)
y = y0 + pf2*(y1 - y0) + qf2*(y2 - y0) + wf2*(y3 - y0)
GraphicsWindow.FillEllipse(x-5, y-5,10,10)
'Сумма расстояний от фокусов до любой точки на эллипсе
a = Math.Cos(2*pi/5)
'Сканирование сферы
For u1 = pi To 2*pi Step pi/400
For u2 = -pi/2 To pi/2 Step pi/400
'Радиус, направленный в текущую точку
p = Math.Cos(u1)*Math.Cos(u2)
q = Math.Sin(u1)*Math.Cos(u2)
w = Math.Sin(u2)
'Скалярные произведения текущего и фокальных радиусов
cs1 = pf1*p+qf1*q+wf1*w
sn1 = Math.SquareRoot(1 - cs1*cs1)
cs2 = pf2*p+qf2*q+wf2*w
sn2 = Math.SquareRoot(1 - cs2*cs2)
'Косинус суммы углов между текущим и фокальными радиусами
sum = cs1*cs2 - sn1*sn2
If sum > a Then
'Аффинные преобразования
x = x0 + p*(x1 - x0) + q*(x2 - x0) + w*(x3 - x0)
y = y0 + p*(y1 - y0) + q*(y2 - y0) + w*(y3 - y0)
GraphicsWindow.SetPixel(x, y,"red")
EndIf
EndFor
EndFor
  
```

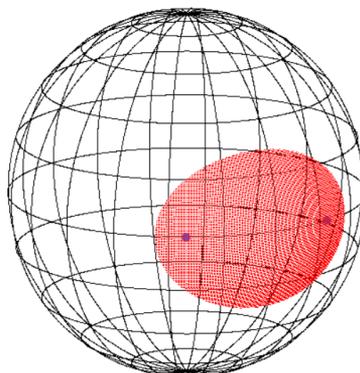


Рис. 2



Рассмотренный выше способ визуализации кривых на сфере обладает рядом недостатков. По этой причине необходимо найти более эффективные пути построения подобных кривых. Начнём с построения линий большого круга.

**Задание 9.** Пусть на сфере задана точка  $P$ . Построить линию большого круга, для которой эта точка является полюсом.

*Решение.* Зададим полюс  $P_1$  сферическими координатами и вычислим координаты вектора  $OP_1 = V_1 = (p; q; w)$ , соединяющего центр сферы с этим полюсом. Искомая линия большого круга лежит в плоскости, перпендикулярной этому вектору. Уравнение этой плоскости имеет вид  $p \cdot x + q \cdot y + w \cdot z = 0$ . Если  $w = 0$ , то линия большого круга является одной из параллелей. Её построение не составляет труда. Если же  $w$  не равно нулю, то плоскость  $p \cdot x + q \cdot y + w \cdot z = 0$  пересекается с горизонтальной плоскостью по прямой  $p \cdot x + q \cdot y = 0$ . Вдоль этой прямой направлен единичный вектор  $OP_2 = V_2 = \left( -\frac{q}{\sqrt{p^2 + q^2}}; \frac{p}{\sqrt{p^2 + q^2}}; 0 \right)$ . Найдём векторное произведение векторов  $V_1$  и  $V_2$  и получим вектор  $OP_3 = V_3$ , лежащий в плоскости линии большого круга. Если в базисе  $V_2$  и  $V_3$  построить окружность с помощью параметрических уравнений, то это и будет искомая линия большого круга. Остаётся добавить, что

$$V_3 = \left( \begin{array}{c|c|c} \frac{q}{\sqrt{p^2 + q^2}} & w & \frac{p}{\sqrt{p^2 + q^2}} \\ \hline \frac{p}{\sqrt{p^2 + q^2}} & 0 & \frac{q}{\sqrt{p^2 + q^2}} \\ \hline \frac{p}{\sqrt{p^2 + q^2}} & 0 & \frac{q}{\sqrt{p^2 + q^2}} \end{array} \right) = \left( -\frac{pw}{\sqrt{p^2 + q^2}}; -\frac{qw}{\sqrt{p^2 + q^2}}; \sqrt{p^2 + q^2} \right).$$

Приведённые ниже строки программы, как и ранее, следует добавить к программе из задания 7. Результат работы показан на рисунке 3.

*‘Центр сферы*

GraphicsWindow.BrushColor = «black»

GraphicsWindow.FillEllipse(x0-5, y0-5,10,10)

*‘Полюс и базисные вектора*

u1 = 3\*pi/2

u2 = pi/3

p1 = Math.Cos(u1)\*Math.Cos(u2)

q1 = Math.Sin(u1)\*Math.Cos(u2)

w1 = Math.Sin(u2)

x = x0 + p1\*(x1 - x0) + q1\*(x2 - x0) + w1\*(x3 - x0)

y = y0 + p1\*(y1 - y0) + q1\*(y2 - y0) + w1\*(y3 - y0)

GraphicsWindow.FillEllipse(x-5, y-5,10,10)

GraphicsWindow.DrawLine(x, y, x0, y0)

d = Math.Sqrt(p1\*p1 + q1\*q1)



```
p2 = -q1/d
q2 = p1/d
w2 = 0
x = x0 + p2*(x1 - x0) + q2*(x2 - x0) + w2*(x3 - x0)
y = y0 + p2*(y1 - y0) + q2*(y2 - y0) + w2*(y3 - y0)
GraphicsWindow.FillEllipse(x-5, y-5,10,10)
GraphicsWindow.DrawLine(x, y, x0, y0)
p3 = -p1*w1/d
q3 = -q1*w1/d
w3 = d
x = x0 + p3*(x1 - x0) + q3*(x2 - x0) + w3*(x3 - x0)
y = y0 + p3*(y1 - y0) + q3*(y2 - y0) + w3*(y3 - y0)
GraphicsWindow.FillEllipse(x-5, y-5,10,10)
GraphicsWindow.DrawLine(x, y, x0, y0)
'Линия большого круга
For ug = 0 To 2*pi Step pi/1000
t1 = p2 * Math.Cos(ug) + p3 * Math.Sin(ug)
t2 = q2 * Math.Cos(ug) + q3 * Math.Sin(ug)
t3 = w2 * Math.Cos(ug) + w3 * Math.Sin(ug)
x = x0 + t1*(x1 - x0) + t2*(x2 - x0) + t3*(x3 - x0)
y = y0 + t1*(y1 - y0) + t2*(y2 - y0) + t3*(y3 - y0)
GraphicsWindow.FillEllipse(x-1, y-1,2,2)
EndFor
```

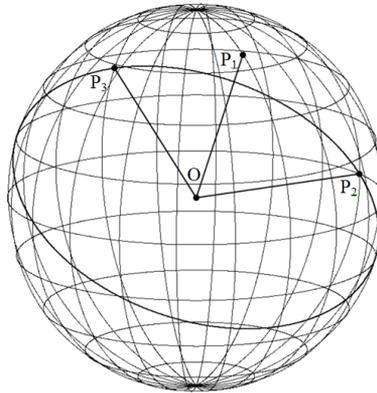


Рис. 3

**Задание 10.** Построить линию большого круга, проходящую через две точки А и В на сфере.

*Указание.* Нужно в плоскости АОВ, где О – центр сферы, построить вектор ОС, перпендикулярный вектору АО. Затем в базисе АО и СО по аналогии с предыдущим заданием строится либо линия большого круга, либо дуга АВ.



Построенная в задании 9 система координат из трёх векторов позволяет именно к ней привязывать сферические координаты. Рассмотрение группы преобразований трёхмерного пространства с неподвижной точкой  $O$ , как раз и связана с переходом от одного базиса к другому. Параллельное использование сферических координат позволяет описать группу движений сферической геометрии. Легко понять, что эта тематика позволяет поставить перед студентом ряд интересных и содержательных заданий. Мы же ограничимся только одним заданием.

**Задание 11.** Используя базис из задания 9, построить привязанную к нему систему параллелей и меридианов на сфере.

*Решение.* Положение текущей точки на сфере определяется сферическими координатами и тем базисом, к которому привязаны сферические координаты. Итак, сначала вычисляются три сферические координаты  $(s_1; s_2; s_3)$ . Затем эти координаты рассматриваются в базисе  $V_2, V_2$  и  $V_3$  и переводятся в координаты аксонометрической системы  $(t_1; t_2; t_3)$ . Наконец, аксонометрические координаты преобразуются в экранные. Результат работы программы показан на рисунке 4.

```
pi = Math.Pi
GraphicsWindow.Width = 700
GraphicsWindow.Height = 700
'Координаты центра сферы, радиус и единичный отрезок
x0 = 350
y0 = 350
ed = 300
'Базис аксонометрической системы координат
k = .25
u0 = pi/6
x1 = x0 + ed* Math.Cos(u0)
y1 = y0 - ed*k* Math.Sin(u0)
x2 = x0 + ed* Math.Cos(u0+pi/2)
y2 = y0 - ed*k* Math.Sin(u0+pi/2)
x3 = x0
y3 = y0 - ed
'Центр сферы
GraphicsWindow.BrushColor = "black"
GraphicsWindow.FillEllipse(x0-5, y0-5,10,10)
'Полус P1 и базисные вектора
u1 = 3*pi/2
u2 = pi/3
p1 = Math.Cos(u1)*Math.Cos(u2)
q1 = Math.Sin(u1)*Math.Cos(u2)
w1 = Math.Sin(u2)
x = x0 + p1*(x1 - x0) + q1*(x2 - x0) + w1*(x3 - x0)
y = y0 + p1*(y1 - y0) + q1*(y2 - y0) + w1*(y3 - y0)
GraphicsWindow.FillEllipse(x-5, y-5,10,10)
GraphicsWindow.DrawLine(x, y, x0, y0)
```



```
d = Math.SquareRoot(p1*p1 + q1*q1)
p2 = -q1/d
q2 = p1/d
w2 = 0
x = x0 + p2*(x1 - x0) + q2*(x2 - x0) + w2*(x3 - x0)
y = y0 + p2*(y1 - y0) + q2*(y2 - y0) + w2*(y3 - y0)
GraphicsWindow.FillEllipse(x-5, y-5, 10, 10)
GraphicsWindow.DrawLine(x, y, x0, y0)
p3 = -p1*w1/d
q3 = -q1*w1/d
w3 = d
x = x0 + p3*(x1 - x0) + q3*(x2 - x0) + w3*(x3 - x0)
y = y0 + p3*(y1 - y0) + q3*(y2 - y0) + w3*(y3 - y0)
GraphicsWindow.FillEllipse(x-5, y-5, 10, 10)
GraphicsWindow.DrawLine(x, y, x0, y0)
'Построение параллелей на сфере
For u1 = 0 To 2*pi Step pi/1000
For u2 = -pi/2 To pi/2 Step pi/10
'Сферические координаты
s1 = Math.Cos(u1)*Math.Cos(u2)
s2 = Math.Sin(u1)*Math.Cos(u2)
s3 = Math.Sin(u2)
'Координаты в наклонной системе координат
t1 = p1 * s1 + p2 * s2 + p3 * s3
t2 = q1 * s1 + q2 * s2 + q3 * s3
t3 = w1 * s1 + w2 * s2 + w3 * s3
'Экранные координаты
x = x0 + t1*(x1 - x0) + t2*(x2 - x0) + t3*(x3 - x0)
y = y0 + t1*(y1 - y0) + t2*(y2 - y0) + t3*(y3 - y0)
GraphicsWindow.SetPixel(x, y, "")
EndFor
EndFor
'Построение меридианов на сфере
For u1 = 0 To 2*pi Step pi/10
For u2 = -pi/2 To pi/2 Step pi/1000
'Сферические координаты
s1 = Math.Cos(u1)*Math.Cos(u2)
s2 = Math.Sin(u1)*Math.Cos(u2)
s3 = Math.Sin(u2)
'Координаты в наклонной системе координат
t1 = p1 * s1 + p2 * s2 + p3 * s3
t2 = q1 * s1 + q2 * s2 + q3 * s3
t3 = w1 * s1 + w2 * s2 + w3 * s3
'Экранные координаты
x = x0 + t1*(x1 - x0) + t2*(x2 - x0) + t3*(x3 - x0)
y = y0 + t1*(y1 - y0) + t2*(y2 - y0) + t3*(y3 - y0)
GraphicsWindow.SetPixel(x, y, "")
EndFor
EndFor
```

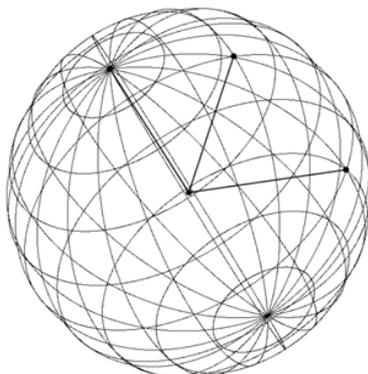


Рис. 4

Перейдём к вопросу о достаточно эффективном способе построения сферических эллипсов. Немецкий математик, занимавшийся проективной геометрией, Людвиг Иммануил Магнус показал, что **сферический эллипс является линией пересечения шара с конусом второго порядка, вершина которого лежит в центре шара**. Именно это обстоятельство можно использовать при построениях. Однако начнём с доказательства приведённого выше утверждения.

Построения будем проводить, отправляясь от сферы единичного радиуса с центром в точке  $H$ . Расстояние между двумя точками  $P$  и  $Q$  будет задаваться величиной центрального угла  $\angle PHQ$ .

Пусть сферический эллипс определяется следующими параметрами (рисунок 5). Расстояние от центра  $O$  до каждого из фокусов определяется углом  $\varphi$ . Полуось сферического эллипса определяется углом  $\alpha$ . С помощью центральной проекции отобразим сферический эллипс на горизонтальную плоскость. При этом на данный момент можно говорить только о положении некоторых точек и длине некоторых отрезков.

Перечислим эти точки. Отрезок  $OH$  перпендикулярен горизонтальной плоскости и имеет единичную длину. Полуось сферического эллипса отображается в отрезок  $OA$ . Угол  $\angle AHO$  равен  $\alpha$ . Из этого следует, что полуось  $OA = a$  плоского эллипса, в который был отображён эллипс сферический, равна  $tg \alpha$ . Фокусы сферического эллипса отображаются в точки  $F_1$  и  $F_2$ . Углы  $\angle F_1HO$  и  $\angle F_2HO$  равны  $\varphi$ . Расстояние от центра плоского эллипса до каждой из проекций  $F_1$  и  $F_2$  фокусов сферического эллипса равно  $tg \varphi$ . Что касается длины проекции  $OB$  на плоскость второй полуоси сферического эллипса, то её нужно вычислять.

Пусть угол  $\angle OHB$  равен  $\beta$  и  $OB = b = tg \beta$ . Выразим тангенс  $\beta$  через значения  $\alpha$  и  $\varphi$ . Возникающее по первому впечатлению предположение о том, что точки  $F_1$  и  $F_2$  являются фокусами плоского эллипса, является неверным. Дело в том, что речь идёт не о постоянстве суммы двух длин, а о постоянстве суммы двух углов. В частности  $\angle AHF_1 + \angle AHF_2 = 2\alpha$  и  $\angle BHF_1 + \angle BHF_2 = 2\alpha$ . Именно этот факт позволяет вычислить  $tg \beta$ .

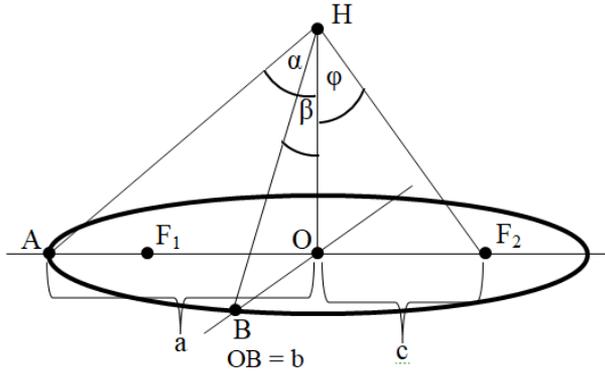


Рис. 5

По теореме Пифагора  $F_1H = \frac{1}{\cos \varphi}$ ,  $HB = \frac{1}{\cos \beta}$  и  $F_1B^2 = tg^2 \varphi + tg^2 \beta$ . Применим теорему косинусов к треугольнику  $BHF_1$  и в итоге получим, что  $\cos \beta = \frac{\cos \alpha}{\cos \varphi}$ . Далее получаем, что  $\sin \beta = \frac{\sqrt{\cos^2 \varphi - \cos^2 \alpha}}{\cos \varphi}$  и, наконец,  $tg \beta = \frac{\sqrt{\cos^2 \varphi - \cos^2 \alpha}}{\cos \alpha}$ .

Теперь мы можем предположить, что при перемещении точки  $M$  по плоскому эллипсу с полуосями  $a = tg \alpha$  и  $b = tg \beta$ , сумма углов  $u_1 = \angle MHF_1$  и  $u_2 = \angle MHF_2$  постоянна и равна  $2\alpha$  (рисунок 6). Именно этот факт и необходимо проверить.

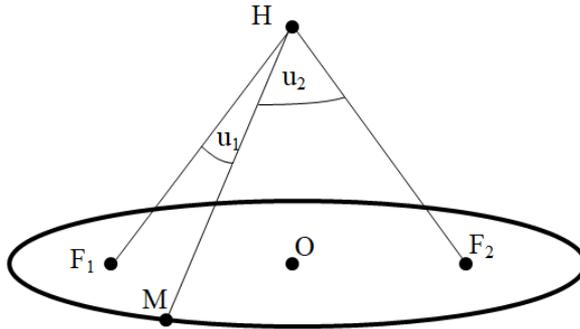


Рис. 6

Приступим к выражению этого утверждения в виде формулы. Введём обозначения для основных углов:  $\angle MHF_1 = u_1$  и  $\angle MHF_2 = u_2$ . Нужно доказать, что  $u_1 + u_2 = 2\alpha$ . Поскольку вычисление углов более затруднено, чем вычисление их тригонометрических функций, будем доказывать, что  $\cos(u_1 + u_2) = \cos 2\alpha$ .

Чтобы вычислить  $\cos u_1$  и  $\cos u_2$  используем скалярные произведения векторов  $\overline{HF_1} \cdot \overline{HM}$  и  $\overline{HF_2} \cdot \overline{HM}$ . Прежде всего,  $\overline{HF_1} = (-tg\varphi; 0; 1)$  и  $\overline{HF_2} = (tg\varphi; 0; 1)$ .



По нашему предположению точка  $M$  лежит на плоском эллипсе с полуосями  $a = tg \alpha$  и  $b = tg \beta$ . Таким образом, её координаты на плоскости можно задать параметрическими уравнениями  $x = a \cdot \cos u$  и  $y = b \cdot \sin u$ . Значит,  $\overline{HM} = (a \cdot \cos u; b \cdot \sin u; 1)$ . Теперь можно выразить  $\cos u_1$  и  $\cos u_2$  через тригонометрические функции углов  $\alpha$  и  $\varphi$ . Опуская достаточно простую цепочку преобразований, дадим окончательные выражения этих косинусов:

$$\cos u_1 = \frac{\cos \varphi \cdot \cos \alpha - \sin \varphi \cdot \sin \alpha \cdot \cos u}{\sqrt{\cos^2 u + \cos^2 \varphi \cdot \sin^2 u}}, \quad \cos u_2 = \frac{\cos \varphi \cdot \cos \alpha + \sin \varphi \cdot \sin \alpha \cdot \cos u}{\sqrt{\cos^2 u + \cos^2 \varphi \cdot \sin^2 u}}.$$

Эти формулы заставляют сделать предположение, что доказательство формулы  $\cos(u_1 + u_2) = \cos 2\alpha$  будет достаточно сложным. При этом пока нет полной уверенности, что исходная гипотеза верна. По этой причине её желательно проверить с помощью предварительных вычислений.

**Задание 12.** Написать программу, которая позволяет проверить истинность формулы  $\cos(u_1 + u_2) = \cos 2\alpha$  для конкретных значений  $\alpha$  и  $\varphi$ .

*Решение.* Результат работы программы показан на рисунке 7. Он показывает, что предположение верно.

```

pi = Math.Pi
r = 100
'Полуось a
al = pi/5
ca = Math.Cos(al)
ta = Math.Sqrt(1 - ca*ca)/ca
a = r*ta
'Параметр c
fi = pi/7
cf = Math.Cos(fi)
tf = Math.Sqrt(1 - cf*cf)/cf
c = r*tf
'Полуось b
cb = ca/cf
tb = Math.Sqrt(1 - cb*cb)/cb
b = r*tb
'Длина векторов FH
mv = Math.Sqrt(c*c + r*r)
i = 20
c2al = Math.Cos(2*al)
'Изменение параметра u
For u = 0 To 2*pi step pi/8
'Вектор MH
x = a* Math.Cos(u)
y = b* Math.Sin(u)
mt = Math.Sqrt(x*x + y*y + r*r)

```



```
'Вычисление косинуса и синуса угла u1  
c1 = (r*r - c*x)/(mv*mt)  
s1 = Math.Sqrt(1 - c1*c1)  
'Вычисление косинуса и синуса угла u2  
c2 = (r*r + c*x)/(mv*mt)  
s2 = Math.Sqrt(1 - c2*c2)  
'Вычисление косинуса угла u1 + u2  
csum = c1*c2 - s1*s2  
'Вычисление разности косинуса угла u1 + u2 и косинуса угла 2*a1  
GraphicsWindow.DrawText(50, i, csum - c2a1)  
i = i + 20  
EndFor
```

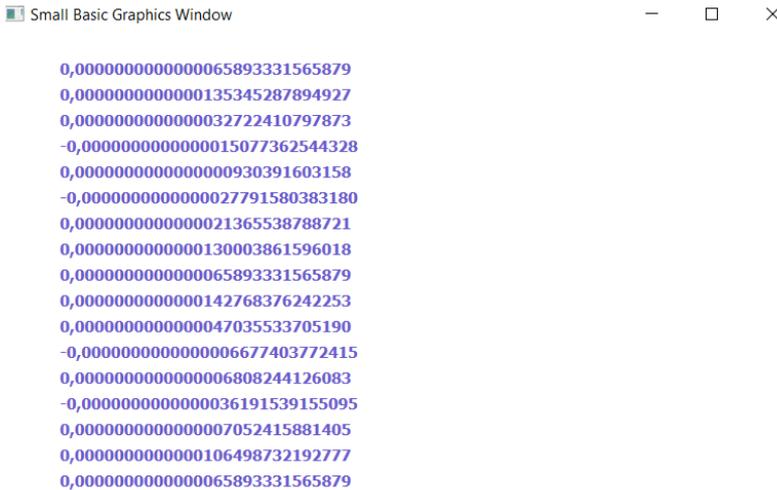


Рис. 7

Теперь можно перейти к доказательству формулы  $\cos(u_1 + u_2) = \cos 2\alpha$ . Но сначала отметим, что проверочное вычисление было полезным, поскольку вселило в нас уверенность в правильности исходной гипотезы. Если у приверженцев чисто теоретических методов работы с математическими проблемами возникнет пренебрежительное отношение к прагматической вычислительной проверке некоторых фактов, напомним им о методах Архимеда. Он не стеснялся вырезать из фольги геометрические фигуры и взвешивать их. Сейчас для сходных целей можно использовать компьютер.

Проведём необходимые для доказательства преобразования, опуская некоторые детали. Отправляясь от формулы  $\cos u_1 = \frac{\cos \varphi \cdot \cos \alpha - \sin \varphi \cdot \sin \alpha \cdot \cos u}{\sqrt{\cos^2 u + \cos^2 \varphi \cdot \sin^2 u}}$ , преобразуем выражение под корнем в знаменателе:



$$\begin{aligned} & \cos^2 u + \cos^2 \varphi \cdot \sin^2 u = \\ & = \cos^2 u + \cos^2 \varphi \cdot \sin^2 u + \sin^2 \varphi \cdot \sin^2 u - \sin^2 \varphi \cdot \sin^2 u = \\ & = \cos^2 u + \sin^2 u - \sin^2 \varphi \cdot \sin^2 u = 1 - \sin^2 \varphi \cdot \sin^2 u. \end{aligned}$$

Введём краткие обозначения для тригонометрических выражений, входящих в формулы для  $\cos u_1$  и  $\cos u_2$ :

$$p = \cos \varphi \cdot \cos \alpha - \sin \varphi \cdot \sin \alpha \cdot \cos u,$$

$$q = \cos \varphi \cdot \cos \alpha + \sin \varphi \cdot \sin \alpha \cdot \cos u,$$

$$r = 1 - \sin^2 \varphi \cdot \sin^2 u.$$

В этих обозначениях  $\cos u_1 = \frac{p}{\sqrt{r}}$  и  $\cos u_2 = \frac{q}{\sqrt{r}}$ . Далее  $\sin u_1 = \frac{\sqrt{r-p^2}}{\sqrt{r}}$  и  $\sin u_2 = \frac{\sqrt{r-q^2}}{\sqrt{r}}$ . Отсюда следует, что  $\cos(u_1 + u_2) = \frac{pq}{r} - \frac{\sqrt{(r-p^2)(r-q^2)}}{r}$ . Доказать нужно формулу  $\frac{pq}{r} - \frac{\sqrt{(r-p^2)(r-q^2)}}{r} = \cos 2\alpha$ .

Избавимся от радикалов и дробей и получим уравнение

$$(r-p^2)(r-q^2) = (pq - r \cos 2\alpha)^2.$$

После преобразований перейдём к уравнению

$$r \sin^2 2\alpha + 2pq \cos 2\alpha - p^2 - q^2 = 0.$$

Прибавив и отняв от левой части уравнения выражения член  $2pq$ , получим уравнение  $r \sin^2 2\alpha - (p+q)^2 + 2pq(1 + \cos 2\alpha) = 0$ . Теперь можно подставить исходные значения переменных  $p$ ,  $q$  и  $r$ :

$$\begin{aligned} & (1 - \sin^2 \varphi \cdot \sin^2 u) \cdot \sin^2 2\alpha - 4 \cdot \cos^2 \varphi \cdot \cos^2 \alpha + \\ & + 4 \cdot (\cos^2 \varphi \cdot \cos^2 \alpha - \sin^2 \varphi \cdot \sin^2 \alpha \cdot \cos^2 u) = 0 \end{aligned}$$

Доказательство этого тождества проводится без труда. Но отметим, что проверку правильности проведённых к определённому моменту преобразований с помощью вычисления выражений при конкретных значениях переменных можно было проводить несколько раз.

Итак, теорема Магнуса доказана. Более того, показано, что фокусы сферического и плоского эллипса друг в друга не проецируются. Наконец, получены формулы, позволяющие построить плоский эллипс, связанный с эллипсом сферическим.

Перейдём к вопросам, связанным с эффективным методом построения сферического эллипса.

**Задание 13.** Разработать алгоритм построения сферического эллипса в аксонометрической проекции.

*Решение.* Исходными данными для построения сферического эллипса являются:



- Сферические координаты фокусов эллипса.
- Угловая мера  $\alpha$  полуоси эллипса.

Построение будет начато с получения изображения сферы с центром  $H$  (смотри задание 7). Далее необходимо провести ряд вычислений.

1. Вычислить координаты фокусов сферического эллипса  $\Phi_1$  и  $\Phi_2$  в трёхмерном пространстве и отобразить их на экране.
2. Вычислить координаты центра сферического эллипса  $O$  и отобразить её на экране.
3. Вычислить координаты вектора  $HO$ .
4. Получить уравнение плоскости, проходящей через точку  $O$  перпендикулярно вектору  $HO$ .
5. Определить координаты первого базисного вектора  $OP$  на этой плоскости, нормируя вектор  $\Phi_1\Phi_2$ .
6. Определить координаты второго базисного вектора  $OT$  на этой плоскости, как векторное произведение  $OH$  и  $OP$ .
7. Если нужно, построить изображение плоскости  $POT$ .
8. Определить полуоси плоского эллипса на плоскости  $POT$ .
9. С помощью параметрического уравнения вычислить координаты текущей точки  $M$  на плоском эллипсе.
10. Нормируя вектор  $HM$  построить соответствующую точку  $M_1$  сферического эллипса.

**Задание 14.** Написать программу построения сферического эллипса.

*Решение.* Результат работы программы показан на рисунке 8.

```
pi = Math.Pi
GraphicsWindow.Width = 700
GraphicsWindow.Height = 700
'Координаты центра сферы, радиус и единичный отрезок
x0 = 350
y0 = 350
ed = 200
'Базис аксонометрической системы координат
k = .25
u0 = pi/6
x1 = x0 + ed* Math.Cos(u0)
y1 = y0 - ed*k* Math.Sin(u0)
x2 = x0 + ed* Math.Cos(u0+pi/2)
y2 = y0 - ed*k* Math.Sin(u0+pi/2)
x3 = x0
y3 = y0 - ed
'Построение параллелей на сфере
For u1 = 0 To 2*pi Step pi/1000
For u2 = -pi/2 To pi/2 Step pi/10
p = Math.Cos(u1)*Math.Cos(u2)
q = Math.Sin(u1)*Math.Cos(u2)
```



```
w = Math.Sin(u2)
'Аффинные преобразования
x = x0 + p*(x1 - x0) + q*(x2 - x0) + w*(x3 - x0)
y = y0 + p*(y1 - y0) + q*(y2 - y0) + w*(y3 - y0)
GraphicsWindow.SetPixel(x, y,"")
EndFor
EndFor
'Построение меридианов на сфере
For u1 = 0 To 2*pi Step pi/10
For u2 = -pi/2 To pi/2 Step pi/1000
p = Math.Cos(u1)*Math.Cos(u2)
q = Math.Sin(u1)*Math.Cos(u2)
w = Math.Sin(u2)
'Аффинные преобразования
x = x0 + p*(x1 - x0) + q*(x2 - x0) + w*(x3 - x0)
y = y0 + p*(y1 - y0) + q*(y2 - y0) + w*(y3 - y0)
GraphicsWindow.SetPixel(x, y,"")
EndFor
EndFor
'Центр сферы
GraphicsWindow.BrushColor = "black"
GraphicsWindow.FillEllipse(x0-5, y0-5,10,10)
'Первый фокус
u11 = .6*pi
u21 = 0
p1 = Math.Cos(u11)*Math.Cos(u21)
q1 = Math.Sin(u11)*Math.Cos(u21)
w1 = Math.Sin(u21)
x = x0 + p1*(x1 - x0) + q1*(x2 - x0) + w1*(x3 - x0)
y = y0 + p1*(y1 - y0) + q1*(y2 - y0) + w1*(y3 - y0)
GraphicsWindow.FillEllipse(x-5, y-5,10,10)
GraphicsWindow.DrawLine(x, y, x0, y0)
'Второй фокус
u12 = 1*pi
u22 = .2
p2 = Math.Cos(u12)*Math.Cos(u22)
q2 = Math.Sin(u12)*Math.Cos(u22)
w2 = Math.Sin(u22)
x = x0 + p2*(x1 - x0) + q2*(x2 - x0) + w2*(x3 - x0)
y = y0 + p2*(y1 - y0) + q2*(y2 - y0) + w2*(y3 - y0)
GraphicsWindow.FillEllipse(x-5, y-5,10,10)
GraphicsWindow.DrawLine(x, y, x0, y0)
'Центр эллипса
p0 = p1 + p2
q0 = q1 + q2
w0 = w1 + w2
d = Math.Sqrt(p0*p0 + q0*q0 + w0*w0)
```



```
p0 = p0/d
q0 = q0/d
w0 = w0/d
x = x0 + p0*(x1 - x0) + q0*(x2 - x0) + w0*(x3 - x0)
y = y0 + p0*(y1 - y0) + q0*(y2 - y0) + w0*(y3 - y0)
GraphicsWindow.FillEllipse(x-5, y-5,10,10)
GraphicsWindow.DrawLine(x, y, x0, y0)
'Первый базисный вектор на плоскости
pb1 = p2 - p1
qb1 = q2 - q1
wb1 = w2 - w1
d = Math.Sqrt(pb1*pb1 + qb1*qb1 + wb1*wb1)
pb1 = pb1/d
qb1 = qb1/d
wb1 = wb1/d
x = x0 + p0*(x1 - x0) + q0*(x2 - x0) + w0*(x3 - x0)
y = y0 + p0*(y1 - y0) + q0*(y2 - y0) + w0*(y3 - y0)
GraphicsWindow.FillEllipse(x-5, y-5,10,10)
GraphicsWindow.DrawLine(x, y, x0, y0)
'Второй базисный вектор на плоскости
pb2 = q0*wb1 - qb1*w0
qb2 = -(p0*wb1 - pb1*w0)
wb2 = p0*qb1 - pb1*q0
x = x0 + pb2*(x1 - x0) + qb2*(x2 - x0) + wb2*(x3 - x0)
y = y0 + pb2*(y1 - y0) + qb2*(y2 - y0) + wb2*(y3 - y0)
GraphicsWindow.FillEllipse(x-5, y-5,10,10)
GraphicsWindow.DrawLine(x, y, x0, y0)
'Построение плоскости
For t1 = -2 To 2 Step .01
For t2 = -1 To 1 Step .1
tt1 = p0 + pb1*t1 + pb2*t2
tt2 = q0 + qb1*t1 + qb2*t2
tt3 = w0 + wb1*t1 + wb2*t2
x = x0 + tt1*(x1 - x0) + tt2*(x2 - x0) + tt3*(x3 - x0)
y = y0 + tt1*(y1 - y0) + tt2*(y2 - y0) + tt3*(y3 - y0)
GraphicsWindow.SetPixel(x, y,"")
EndFor
EndFor
For t1 = -2 To 2 Step .25
For t2 = -1 To 1 Step .01
tt1 = p0 + pb1*t1 + pb2*t2
tt2 = q0 + qb1*t1 + qb2*t2
tt3 = w0 + wb1*t1 + wb2*t2
x = x0 + tt1*(x1 - x0) + tt2*(x2 - x0) + tt3*(x3 - x0)
y = y0 + tt1*(y1 - y0) + tt2*(y2 - y0) + tt3*(y3 - y0)
GraphicsWindow.SetPixel(x, y,"")
EndFor
```



```
EndFor
```

```
  'Построение плоского и сферического эллипсов
```

```
  cf = p0*p1 + q0*q1 + w0*w1
```

```
  fu = Math.ArcCos(cf)
```

```
  al = fu + .1
```

```
  ca = Math.Cos(al)
```

```
  a = Math.Tan(al)
```

```
  b = Math.Sqrt(cf*cf - ca*ca)/ca
```

```
  For ug = 0 To 2*pi Step pi/1000
```

```
    'Точка на плоском эллипсе
```

```
    t1 = a * Math.Cos(ug)
```

```
    t2 = b * Math.Sin(ug)
```

```
    tt1 = p0 + pb1*t1 + pb2*t2
```

```
    tt2 = q0 + qb1*t1 + qb2*t2
```

```
    tt3 = w0 + wb1*t1 + wb2*t2
```

```
    x = x0 + tt1*(x1 - x0) + tt2*(x2 - x0) + tt3*(x3 - x0)
```

```
    y = y0 + tt1*(y1 - y0) + tt2*(y2 - y0) + tt3*(y3 - y0)
```

```
    GraphicsWindow.FillEllipse(x-1, y-1,2,2)
```

```
    'Точка на сферическом эллипсе
```

```
    d = Math.Sqrt(tt1*tt1 + tt2*tt2 + tt3*tt3)
```

```
    tt1 = tt1/d
```

```
    tt2 = tt2/d
```

```
    tt3 = tt3/d
```

```
    x = x0 + tt1*(x1 - x0) + tt2*(x2 - x0) + tt3*(x3 - x0)
```

```
    y = y0 + tt1*(y1 - y0) + tt2*(y2 - y0) + tt3*(y3 - y0)
```

```
    GraphicsWindow.FillEllipse(x-2, y-2,4,4)
```

```
  EndFor
```

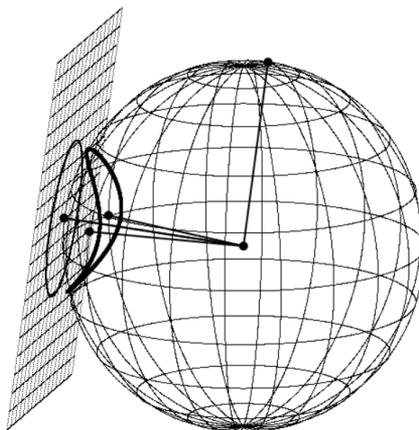


Рис. 8



### **Темы для самостоятельной работы студентов, связанные со сферикой.**

1. На сфере заданы три точки  $A$ ,  $B$  и  $C$ . Построить сферический треугольник  $ABC$ .
2. Построить описанную окружность сферического треугольника  $ABC$ .
3. Построить вписанную окружность сферического треугольника  $ABC$ .
4. Построить на сфере аналог спирали Архимеда.
5. Построить изображения икосаэдра и додекаэдра.
6. Построить на сфере семейство софокусных эллипсов.
7. Построить на сфере семейство софокусных эллипсов и семейство ортогональных к ним гипербол.
8. Разработать программу управления аналогом черепашки из языка Лого на сфере.

### **Темы для самостоятельной работы студентов, связанные с построением объёмных изображений.**

1. Разработать программу построения изображения плоскости по трём точкам в пространстве.
2. Написать программы для построения поверхностей, описываемых функциями от двух переменных.
3. Построить изображение тора.
4. Построить изображение листа Мёбиуса.
5. Построить изображение бутылки Клейна.
6. Разработать методы построения различных поверхностей второго порядка.
7. Написать программы, создающие анимационные эффекты с объёмными изображениями, например, вращение пирамид и призм.

## **5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ**

Что касается вопросов, связанных с вычислениями в различных областях геометрии, то здесь открывается широчайший круг для методических разработок. Тем не менее, авторы надеются, что и методические идеи, изложенные в данной статье и связанные с достаточно специфичной проблематикой, могут пригодиться молодым преподавателям и помочь в их нелёгкой работе. Предполагается написание ещё ряда статей, связанных с вычислениями в различных областях математики.

### ***Литература***

1. Куланин Е.Д., Нуркаева И.М. О двух геометрических задачах на экстремум. Математика в школе. 2019. № 4. С. 35–40.
2. Куланин Е.Д., Нуркаева И.М. Еще раз о задаче Мавло. Математика в школе. 2020. № 2. С. 76–79.
3. Куланин Е.Д., Степанов М.Е., Нуркаева И.М. Пропедевтика решения экстремальных задач в школьном курсе математики. Моделирование и анализ данных. 2019. № 4. С. 127–144.
4. Куланин Е.Д., Нгуен Ву Куанг, Степанов М.Е. Осозаемая предметность с компьютерной поддержкой. Моделирование и анализ данных. Научный журнал. 2019. № 4. С. 145–156.
5. Куланин Е.Д., Степанов М.Е., Нуркаева И.М. Роль образного мышления в научном мышлении. Моделирование и анализ данных. 2020. Т. 10. № 2 С. 110–128.



6. Куланин Е.Д., Степанов М.Е., Нуркаева И.М. О различных подходах к решению экстремальных задач. Моделирование и анализ данных. 2020. Т. 11. № 1. С. 40–60.
7. Лунгу К.Н., Норин В.П., Письменный Д.Т., Шевченко Ю.А., Куланин Е.Д. Сборник задач по высшей математике с контрольными работами. Москва, 2013. Том 2 (8-е издание).
8. Степанов М.Е. Некоторые вопросы методики преподавания высшей математики. Моделирование и анализ данных. 2017. № 1. С. 54–94.
9. Куланин Е.Д., Степанов М.Е. Из опыта работы в режиме дистанционного обучения Моделирование и анализ данных. 2022. Т. 12. № 3. С. 58–70.
10. Куланин Е.Д., Степанов М.Е. Всестороннее рассмотрение математических понятий как методический прием. Моделирование и анализ данных. 2022. Т. 12. № 4. С. 67–84.
11. Куланин Е.Д., Степанов М.Е. О визуализации решений некоторых экстремальных задач. Моделирование и анализ данных. 2022. Т. 12. № 4. С. 94–104.
12. Куланин Е.Д., Степанов М.Е., Панфилов А.Д., Потоньшев И.С. Системный подход к методике тифлопедагогики на примере задач математического анализа. 2022. Т. 12. № 2. С. 34–82.
13. Куланин Е.Д., Степанов М.Е. Вычислительный эксперимент в преподавании высшей математики на примере теории чисел. Моделирование и анализ данных. 2024. Т. 14. № 1. С. 170–195.
14. Энциклопедия элементарной математики. Книга четвёртая. Геометрия. М., Гос. изд. физ.-мат. лит., 1963.
15. Лысенко В.И. Николай Иванович Фусс, М., Наука, 1975.



## Computational Experiment in Teaching Higher Mathematics. Geometry

***Yevgeny D. Kulanin\****

Moscow State University of Psychology & Education (MSUPE), Moscow, Russia

ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-6093-7012>

e-mail: [lucas03@mail.ru](mailto:lucas03@mail.ru)

***Mikhail E. Stepanov\*\****

Moscow State University of Psychology & Education (MSUPE), Moscow, Russia

ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-4803-8211>

e-mail: [mestepanov@yandex.ru](mailto:mestepanov@yandex.ru)

The article continues the cycle ([1] – [13]) of methodological developments of the authors. It discusses some problems related to ways to improve the culture of mathematical thinking of mathematics students. The authors rely on their work experience at the Faculty of Information Technology of MSUPE.

**Keywords:** higher education, methods of teaching mathematics, analytical geometry, affine geometry, projective geometry, geometric transformations, non-Euclidean geometry, spherical geometry, second-order curves.

### **For citation:**

Kulanin Y.D., Stepanov M.E. A Computational Experiment in Teaching Higher Mathematics. Geometry. *Modelirovanie i analiz dannykh = Modelling and Data Analysis*, 2024. Vol. 14, no. 4, pp. 138–162. DOI: <https://doi.org/10.17759/mda.2024140410> (In Russ., abstr. in Engl.).

### **References**

1. Kulanin E.D., Nurkaeva I.M. On two geometric extremum problems. *Mathematics at school*. 2019. No. 4. pp. 35–40.
2. Kulanin E.D., Nurkaeva I.M. Once again about the Mavlo task. *Mathematics at school*. 2020. No. 2. pp. 76–79.
3. Kulanin E.D., Stepanov M.E., Nurkaeva I.M. Propaedeutics of solving extreme problems in the school mathematics course. *Data modeling and analysis*. 2019. No. 4. pp. 127–144.
4. Kulanin E.D., Nguyen Wu Quang, Stepanov M.E. Tangible objectivity with computer support. *Data modeling and analysis. Scientific journal*. 2019. No. 4. pp. 145–156.

\****Yevgeny D. Kulanin***, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Moscow State University of Psychology & Education (MSUPE), Moscow, Russia, ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-6093-7012>, e-mail: [lucas03@mail.ru](mailto:lucas03@mail.ru)

\*\****Mikhail E. Stepanov***, Candidate of Pedagogical Sciences, Associate Professor, Moscow State University of Psychology & Education (MSUPE), Moscow, Russia, ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-4803-8211>, e-mail: [mestepanov@yandex.ru](mailto:mestepanov@yandex.ru)



5. Kulanin E.D., Stepanov M.E., Nurkaeva I.M. The role of imaginative thinking in scientific thinking. *Data modeling and analysis*. 2020. Vol.10. No. 2 pp. 110–128.
6. Kulanin E.D., Stepanov M.E., Nurkaeva I.M. On various approaches to solving extreme problems. *Data modeling and analysis*. 2020. Vol. 11. No.1. pp. 40–60.
7. Lungu K.N., Norin V.P., Pisman D.T., Shevchenko Yu.A., Kulanin E.D. Collection of problems in higher mathematics with control papers. Moscow, 2013. Volume 2 (8th edition).
8. Stepanov M.E. Some questions of the methodology of teaching higher mathematics. *Data modeling and analysis*. 2017. No.1. pp. 54–94.
9. Kulanin E.D., Stepanov M.E. From the experience of working in remote mode Learning Modeling and data analysis. 2022. Vol. 12. No. 3. pp. 58–70.
10. Kulanin E.D., Stepanov M.E. Comprehensive consideration of mathematical concepts as a methodological technique. *Data modeling and analysis*. 2022. Vol. 12. No.4. pp.67–84.
11. Kulanin E.D., Stepanov M.E. On visualization of solutions to some extreme problems. *Data modeling and analysis*. 2022. Vol.12. No.4. pp. 94–104.
12. Kulanin E.D., Stepanov M.E., Panfilov A.D., Potonyshchev I.S. A systematic approach to the methodology of typhlopedagogy on the example of mathematical analysis problems. 2022. Vol. 12. No. 2. pp. 34–82.
13. Kulanin E.D., Stepanov M.E. Computational experiment in teaching higher mathematics by the example of number theory. *Data modeling and analysis*. 2024. vol. 14. No.1. pp. 170–195.
14. *Encyclopedia of Elementary Mathematics. The fourth book. Geometry.* M., State Publishing House of Physics and Mathematics lit., 1963.
15. Lysenko V.I. *Nikolay Ivanovich Fuss*, M., Nauka, 1975.

Получена 09.10.2024

Принята в печать 06.11.2024

Received 09.10.2024

Accepted 06.11.2024

**Моделирование и анализ данных 2024. Том 14. № 4.**

Научный журнал

Издаётся с 2011 года

Учредитель

Федеральное государственное бюджетное  
образовательное учреждение высшего образования  
«Московский государственный психолого-педагогический университет»

Адрес редколлегии:

г. Москва, ул. Сретенка, 29, факультет информационных технологий

Тел.: +7 (499) 167-66-74

E-mail: mad.mgppu@gmail.com

Журнал зарегистрирован в Государственном комитете РФ по печати.

Свидетельство о регистрации средств массовой информации

ПИ № ФС77-66444 от 14 июля 2016 года

ISSN: 2219-3758

ISSN: 2311-9454 (online)

Подписано в печать: 18.12.2024.

Формат: 70\*100/16. Гарнитура Times.

Усл. печ. п. 10,1. Усл.-изд. л. 8,7.

Печать по требованию. Электронное издание.