

2

МОДЕЛИРОВАНИЕ И АНАЛИЗ ДАННЫХ

НАУЧНЫЙ ЖУРНАЛ

MODELLING AND DATA ANALYSIS

SCIENTIFIC JOURNAL

2025

ISSN: 2219-3758

ISSN: 2311-9454 (ONLINE)

МОДЕЛИРОВАНИЕ И АНАЛИЗ ДАННЫХ

НАУЧНЫЙ ЖУРНАЛ

2025 • Том. 15 • № 2

MODELLING AND DATA ANALYSIS

SCIENTIFIC JOURNAL

2025 • Vol. 15 • № 2



Московский государственный
психолого-педагогический университет
Moscow State University
of Psychology & Education

Моделирование и анализ данных

Главный редактор:

Л.С. Куравский ФГБОУ ВО МГППУ, Россия

Заместители главного редактора:

С.Д. Кулик МИФИ, Россия
А.В. Пантелейев МАИ, Россия
Н.И. Сельвесюк МАИ, Россия

Редакционный совет

Председатель редакционного совета:
Г.Г. Амосов МИАН, Россия

Члены редакционного совета:
В.А. Барабанчиков ФГБОУ ВО МГППУ, Россия
Питер Бентлер Калифорнийский университет
Лос-Анджелеса, США
А.В. Горбатов МИСиС, Россия
Л.С. Куравский ФГБОУ ВО МГППУ, Россия
Леонид Либкин Эдинбургский университет,
Великобритания
А.А. Марголис ФГБОУ ВО МГППУ, Россия
В.В. Рубцов ФГБОУ ВО МГППУ, Россия
Д.В. Ушаков ИП РАН, Россия
Дэвид Фрэнсис Университет Хьюстона, США

Редакционная коллегия:

К.К. Абгарян ФИЦ ИУ РАН, Россия
Г.Г. Амосов МИАН, Россия
М.В. Воронов ФГБОУ ВО МГППУ, Россия
Е.Л. Григоренко МГУ им. М.В. Ломоносова,
Россия; Йельский университет,
США
В.К. Захаров МГУ им. М.В. Ломоносова,
Россия
А.И. Кизбун МАИ, Россия
Леонид Либкин Эдинбургский университет,
Великобритания
Е.В. Ляпунцова МГТУ им. Н.Э. Баумана,
Россия
В.Р. Милов НГТУ им. Р.Е. Алексеева,
Россия
А.В. Наумов МАИ, Россия
Д.Л. Ревизников МАИ, Россия
Холлинг Хайнц Университет Мюнстера,
Германия
Дэвид Фрэнсис Университет Хьюстона,
США
К.В. Хорошенков Бордфордский университет,
Великобритания
Г.А. Юрьев ФГБОУ ВО МГППУ, Россия

Моделирование и анализ данных

Учредитель и издатель ФГБОУ ВО МГППУ

Издается с 2011 года. Периодичность: 4 раза в год.

Свидетельство регистрации СМИ: ПИ № ФС77-66444

Дата регистрации: 14.07.2016

Формат: 70×100/16

Все права защищены. Название журнала, логотип, рубрики, все тексты и иллюстрации являются собственностью ФГБОУ ВО МГППУ и защищены авторским правом. Перепечатка материалов и использование иллюстраций допускается только с письменного разрешения редакции.

© ФГБОУ ВО «Московский государственный
психологический университет», 2025, № 2

Modelling and Data Analysis

Editor-in-Chief:

L.S. Kuravsky MSUPE, Russia

Deputy Editors-in-Chief:

S.D. Kulik MEPhI, Russia
A.V. Pantelev MAI, Russia
N.I. Selvessuk MAI, Russia

The Editorial Council

Chairman of the Editorial Council:
G.G. Amosov MI RAS, Russia

The Members of the Editorial Council:

V.A. Barabanschikov MSUPE, Russia
Peter Bentler University of California,
USA
A.V. Gorbatov MISIS, Russia
L.S. Kuravsky MSUPE, Russia
Leonid Libkin University of Edinburgh,
UK
A.A. Margolis MSUPE, Russia
V.V. Rubtsov MSUPE, Russia
D.V. Ushakov IP RAS, Russia
David Francis University Of Houston, USA

The Editorial Board:

K.K. Abgaryan IU RAS, Russia
G.G. Amosov MI RAS, Russia
M.V. Voronov MSUPE, Russia
E.L. Grigorenko Lomonosov Moscow State
University, Russia;
Yale University, USA
V.K. Zakharov Lomonosov Moscow State
University, Russia
A.I. Kibzun MAI, Russia
Leonid Libkin University of Edinburgh,
UK
E.V. Lyapuntsova BMSTU, Russia
V.R. Milov NNSTU n.a. R.E. Alekseev,
Russia
A.V. Naumov MAI, Russia
D.L. Reviznikov MAI, Russia
Holling Heinz University Of Münster,
Germany
David Francis University Of Houston,
USA
K.V. Horoshenkov University of Bradford,
UK
G.A. Yuryev MSUPE, Russia

Modelling and Data Analysis

Founder & publisher MSUPE

Frequency: since 2011

Published: 4 times a year

The mass medium registration certificate:

PN № ФС77-66444

From: 14.07.2016

Format: 70×100/16

All rights reserved. Journal title, logo, rubrics,
all texts and images are the property of MSUPE and
copyrighted. Using reprints and illustrations is allowed
only with the written permission of the publisher.

© MSUPE, 2025, no. 2



◇◇◇◇◇ СОДЕРЖАНИЕ ◇◇◇◇◇

АНАЛИЗ ДАННЫХ

Антонов А.В., Стирманова Р.С.

- Сравнительный анализ мер центральности для выявления
ключевых агентов в сети региональных маркетинговых сообществ 7
Щербань П.С., Илюхин К.Н., Ераносян С.С., Карагадян А.Н.
Использование корреляционно-регрессионного
и кластерного анализа для исследования данных
по термографическим снимкам трубопроводов системы охлаждения..... 27

МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ

Пантелейев, А.В., Яковleva, A.A.

- Синтез H^∞ — наблюдателей состояния нелинейных непрерывных
динамических систем, линейных по управлению и возмущению 47
Мохначева А.А.
Построение гарантирующего по быстродействию управления
для дискретных систем с суммарными ограничениями на управление 70
Кудрявцева И.А., Петров К.С.
Применение прогнозирующих моделей для управления
движением вертолета при наличии ограничений 89

ЧИСЛОВЫЕ МЕТОДЫ

Вуксанович С.М.

- Оценка точности аппроксимации множеств
достижимости линейной системы с геометрическими
ограничениями при различных видах дискретизации 110
Загордан Н.Л., Мочалова Ю.Д., Абгарян К.К.
Современные подходы к моделированию упруго-прочностных
характеристик полимерных композиционных материалов 127
Базилевский М.П.
Идентификация параметров линейной
регрессии и математического правила для формирования
значений входящей в модель фиктивной переменной 139



КОМПЛЕКСЫ ПРОГРАММ

Левонович Н.И.

Разработка вероятностной модели поведения
многоагентной системы в трехмерном пространстве 152

Михайловский М.А., Орищенко В.А.,

Ел Саид О.С.А., Куравский Л.С., Юрьева Н.Е.

Количественная оценка навыков командной работы у операторов БПЛА 165

Катышев Д.А.

Разработка прототипа системы на основе марковских
представлений для поддержки учебного процесса в начальной школе 177



◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇CONTENTS◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇

DATA ANALYSIS

Antonov A.V., Stirmanova R.S.

- Comparative analysis of centrality measures
for identifying key agents in the network
of regional marketing communities 7

Shcherban P.S., Ilyukhin K.N., Yeranosyan S.S., Karagadyan A.N.

- Application of correlation-regression
and cluster analysis to study data based
on thermographic images of cooling system pipelines 27

OPTIMIZATION METHODS

Panteleev, A.V., Yakovleva, A.A.

- Synthesis of an H^∞ — observers of the state
of a nonlinear continuous dynamical systems,
linear in control and disturbance 47

Mokhnacheva A.A.

- The construction of the guaranteeing
control in the time-optimization problem for linear
discrete-time systems with summary control constraints 70

Kudryavtseva I.A., Petrov K.S.

- Helicopter control by nonlinear model predictive control with constraints 89

NUMERICAL METHODS

Vuksanovic S.M.

- Estimation of the accuracy of approximation
of reachable sets of a linear system with geometric
constraints for various types of discretization 110

Zagordan, N.L., Mochalova, Y.D., Abgaryan, K.K.

- Modern approaches to modeling
of elastic-strength properties of polymer composites 127

Bazilevskiy M.P.

- Identification of linear regression parameters and a mathematical
rule for generating values of a dummy variable included in the model 139



SOFTWARE PACKAGES

Levonovich N.I.

Probabilistic model of behavior multi-agent system is three-dimensional space developing 152

*Mikhailovsky M.A., Orischenko V.A.,**El Sayed O.S.A., Kuravsky L.S., Yuryeva N.E.*

Quantitative assessment of the teamwork skills for UAV operators 165

Katyshev D.A.

Development of a prototype system based on Markov representations to support the learning process in elementary school 177

АНАЛИЗ ДАННЫХ | DATA ANALYSIS

Научная статья | Original paper

УДК 519.17:316.4

Сравнительный анализ мер центральности для выявления ключевых агентов в сети региональных маркетинговых сообществ

А.В. Антонов, Р.С. Стирманова✉

Северный (Арктический) федеральный университет
имени М.В. Ломоносова, Архангельск, Российская Федерация
✉ r.s.stirmanova@gmail.com

Резюме

Контекст и актуальность. Центральность в сетях играет ключевую роль в анализе социальных взаимодействий, экономических связей и информационных потоков. Понимание распределения центральности в сетях позволяет выявлять узлы, имеющие наибольшее влияние, и оценивать устойчивость сети в различных контекстах. В современных условиях маркетинговые сообщества, особенно в онлайн-пространстве, представляют собой сложные и динамичные сети, которые требуют глубокого анализа для оптимизации коммуникационных стратегий и управления связностью.

Цель. Провести сравнительный анализ базовых мер центральности (центральность степени, близости, промежуточности, собственного вектора, PageRank, центральности по Кацу) для определения влиятельных узлов в сети региональных маркетинговых сообществ. **Гипотеза.** Узлы с высокой степенью центральности играют ключевую роль в обеспечении связности сети, а их анализ позволяет выявить группы агентов, критически важных для распространения информации и устойчивости сети. **Методы и материалы.** В исследовании использовались данные маркетинговых сообществ г. Архангельска, собранные через API платформы «ВКонтакте». Анализ включал вычисление показателей центральности и их распределений, а также визуализацию структуры сети. Для выявления ключевых узлов применялись алгоритмы кластеризации и оценки устойчивости. **Результаты.** Исследование показало, что сеть обладает выраженной кластерной структурой с наличием узлов-хабов, которые обеспечивают её связность и эффективность распространения информации.



Распределения центральности позволили идентифицировать ключевые группы узлов, влияющих на устойчивость сети. **Выводы.** Анализ центральности подтверждает важность изучения топологических характеристик сети для оптимизации её функциональности. Рекомендуется учитывать результаты анализа при разработке стратегий взаимодействия в маркетинговых сообществах для повышения эффективности коммуникаций и устойчивости сети.

Ключевые слова: социальное влияние, меры центральности, сетевой анализ, маркетинговые сообщества, анализ устойчивости сети

Для цитирования: Антонов, А.В., Стирманова, Р.С. (2025). Сравнительный анализ мер центральности для выявления ключевых агентов в сети региональных маркетинговых сообществ. Моделирование и анализ данных, 15(2), 7—26. <https://doi.org/10.17759/MDA.20251502001>

Comparative analysis of centrality measures for identifying key agents in the network of regional marketing communities

A.V. Antonov, R.S. Stirmanova✉

Northern (Arctic) Federal University named after M.V. Lomonosov,
Arkhangelsk, Russian Federation
✉ r.s.stirmanova@gmail.com

Abstract

Context and relevance. Centrality in networks plays a key role in the analysis of social interactions, economic ties, and information flows. Understanding the distribution of centrality in networks makes it possible to identify nodes with the greatest influence and assess network stability in various contexts. In modern conditions, marketing communities, especially in the online space, are complex and dynamic networks that require in-depth analysis to optimize communication strategies and manage connectivity. **Objective.** To conduct a comparative analysis of the basic measures of centrality (centrality of degree, proximity, intermediacy, eigenvector, PageRank, Katz centrality) to identify influential nodes in the network of regional marketing communities. **Hypothesis.** Nodes with a high degree of centrality play a key role in ensuring network connectivity, and their analysis makes it possible to identify groups of agents that are critical for information dissemination and network stability. **Methods and materials.** The study used data from marketing communities in Arkhangelsk, collected through the API of the VKontakte platform. The analysis included the calculation of centrality indicators and their distributions, as well as visualization of the network structure. Clustering and stability assessment algorithms were used to identify key nodes. **Results.**



The study showed that the network has a pronounced cluster structure with the presence of hub nodes, which ensure its connectivity and the effectiveness of dissemination of information. The centrality distributions made it possible to identify key groups of nodes that affect the stability of the network. **Conclusions.** The centrality analysis confirms the importance of studying the topological characteristics of the network in order to optimize its functionality. It is recommended that the results of the analysis be taken into account when developing interaction strategies in marketing communities to improve communication efficiency and network stability.

Keywords: social influence, centrality measures, network analysis, marketing communities, network resilience analysis

For citation: Antonov, A.V., Stirmanova, R.S. (2025). Comparative analysis of centrality measures for identifying key agents in the network of regional marketing communities. *Modelling and Data Analysis*, 15(1), 7—26. (In Russ.). <https://doi.org/10.17759/mda.202515021>

Введение

В различных ситуациях, требующих принятия решений, выбор, осуществляемый индивидами, часто основывается на информации, поступающей от их окружения [7]. Таким окружением может быть семья, сверстники, коллеги по работе, средства массовой информации и другие источники. Так, исследование [15] показало, что 40% старшеклассников ориентируются на мнение семьи при выборе профессии, 22% — на школу, а 13% — на сверстников.

Влияние окружения распространяется и на другие сферы, например принятие решений о покупках. Отзывы друзей, рекомендации в соцсетях и лидеры мнений могут существенно повлиять на поведение потребителей [1; 4; 6]. Это особенно важно в маркетинге, где информация о брендах и акциях формирует потребительские предпочтения. Понимание этих механизмов необходимо для разработки эффективных стратегий продвижения.

Интересный пример влияния социальной группы на индивидуальное поведение был представлен в эксперименте, описанном в работе [9], в ходе которого исследователи попросили группы испытуемых различного размера (от одного до пятнадцати человек) встать на улице и смотреть в небо. Эксперимент показал, что влияние группы на поведение усиливается с увеличением её размера: один человек, смотрящий в небо, почти не привлекал внимания, несколько человек — немного больше, а группа из 15 человек заставляла 45% прохожих остановиться и смотреть вверх.

Исследование [12] показало, что центральное положение в социальной сети, как у семьи Медичи в эпоху Возрождения, способствует успеху в политике. Их доминирование стало возможным благодаря сети брачных и деловых связей, что подчеркивает важность социальных связей для достижения влияния и успеха.



Необходимость определения влиятельных (важных) узлов в сетях возникает в различных задачах: ранжирования поисковых запросов (например, алгоритм PageRank [17], который был предложен Google в конце 1990-х годов, что вместе с развитием сети Интернет положило начало активному изучению мер центральности [21] как эффективному инструменту для анализа структуры сетей), работы рекомендательных систем [16], анализа распространения инфекций, слухов или мнений [18], а также оценки устойчивости информационных сетей [14].

В социальных сетях определение ключевых акторов имеет особое значение для понимания поведения системы и формирования эффективных стратегий взаимодействия. От этого зависит способность предсказать последствия различных действий, таких, как распространение информации, влияние на общественное мнение или реакции на маркетинговые кампании.

Целью данной работы является сравнительный анализ различных мер центральности для задачи обнаружения влиятельных агентов в сети региональных маркет-сообществ. Для достижения этой цели проводится обзор популярных метрик, таких как степень центральности, посредничество, близость, собственный вектор, PageRank и центральность по Кацу. Ожидается, что результаты анализа помогут выбрать наиболее эффективную меру центральности для выявления ключевых агентов, влияющих на распространение информации в маркет-сообществах.

Основная часть

Меры центральности

В литературе по сетевому анализу для оценки значимости узлов используются четыре базовые характеристики, каждая из которых отражает тот или иной аспект положения узла в сети [7]:

- степень узла;
- близость узла;
- промежуточность узла;
- важность соседей узла.

Степень узла отражает, насколько связан узел с соседями, близость — насколько просто некоторому узлу добраться до других в сети, промежуточность — насколько связующим является узел в сети, а важность соседей узла — насколько важны (влиятельны) его соседи.

В анализе социальных сетей очень часто для обнаружения наиболее влиятельных акторов используются индексы (меры) центральности. Существуют более 400 различных индексов центральности [21]. Некоторые из них требуют учета локальных характеристик узла для количественной оценки его важности, к таким мерам относится, например, центральность степени. Другие индексы используют глобальную информацию обо всей сети — это центральность близости, посредничества, собственного вектора, центральность по Кацу, PageRank и другие.



Центральность степени

Изначально степенная центральность возникла в теории графов. Степенью вершины в графе G называется количество ребер, инцидентных вершине v . Данная мера центральности является базовой и для ненаправленных невзвешенных сетей определяется как:

$$C_D(v) = \frac{k_v}{n-1} \quad (1)$$

где k_v — степень вершины v , n — количество узлов в графе, а $\frac{1}{n-1}$ — нормировочный множитель. Условие нормировки позволяет сравнивать центральности узлов, принадлежащих к разным сетям, независимо от их размера.

Степенная центральность распространяется и на взвешенные сети. Для ее определения во взвешенных сетях используется понятие силы узла. Сила узла s_v определяется как сумма весов ребер w_{vu} инцидентных вершине v :

$$s_v = \sum_u w_{vu} \quad (2)$$

Во взвешенных сетях степенная центральность учитывает как силу узлов s_v , так и их степень k_v и определяется как [11]:

$$C_D^{w\alpha}(v) = k_v^{(1-\alpha)} s_v^\alpha \quad (3)$$

Параметр $\alpha \in (0,1)$ в данном определении позволяет придать большую значимость степени узла, а $\alpha > 1$ придает большее значение силе. Выбор точного значения параметра зависит от конкретных требований и его определение может быть затруднено. Метод выбора оптимального значения параметра был предложен в статье [13].

Центральность близости

Центральность близости (closeness centrality) показывает, насколько удален данный узел сети от остальных. Данный индекс центральности является величиной, обратной среднему расстоянию от некоторого узла в сети до всех остальных. Для данного узла v она определяется как [5]:

$$C_C(v) = \frac{n-1}{\sum_{u, u \neq v} d(u, v)} \quad (4)$$

где d — функция расстояния в графе (количество ребер на кратчайшем пути) между узлами u и v , n — количество узлов в сети, а множитель $n-1$ нормирует размер графа. Суммирование осуществляется по всем узлам сети u за исключением v . Поскольку путь между любыми двумя вершинами u и v существует только для связных графов, то и данное определение центральности применимо только к ним. Существует



также расширение этого типа центральности на взвешенные сети. В них центральность узла v определяется как:

$$C_C^w(v) = \left[\sum_{u,u \neq v} d^w(u,v) \right]^{-1} \quad (5)$$

где v — вершина, для которой рассчитывается центральность, а $d^w(u,v)$ — кратчайшее взвешенное расстояние между узлами u и v .

Поскольку не существует путей между любой парой узлов из различных связанных компонент графа, то и функция расстояния для узлов из различных компонент не определена, а значит для использования индекса (4) в контексте несвязанных сетей можно изменить представление сети таким образом, чтобы расстояние между узлами из различных компонент было определенным. В статье [8] для описания сети помимо матрицы смежности (a_{ij}) использовалась матрица расстояний (l_{ij}) таким образом, чтобы для соответствующих элементов обоих матриц выполнялось равенство $d_{ij} \geq l_{ij}$. Элементами матрицы (l_{ij}) могут быть, например, географические расстояния между вершинами в случае транспортных сетей. В общем случае расстояния такой матрицы рассчитываются на основе дополнительной информации о той или иной предметной области, что может вызывать некоторые затруднения.

Центральность промежуточности

В основе центральности промежуточности (betweenness centrality) лежит предположение о том, что информация всегда проходит по кратчайшим путям между вершинами, а ее расчет основан на количестве таких кратчайших путей, на которых расположена вершина. Центральность промежуточности определяется как [5]:

$$C_B(v) = \sum_{s \neq v \neq t} \frac{\sigma_{st}(v)}{\sigma_{st}} \quad (6)$$

где $\sigma_{st}(v)$ — обозначает количество кратчайших путей между вершинами s и t , проходящих через вершину v , а σ_{st} — общее количество таких кратчайших путей между соответствующей парой вершин. Для нормализованного индекса центральности промежуточности будет выполняться соотношение:

$$C_B(v) = \frac{2 \sum_{s \neq v \neq t} \frac{\sigma_{st}(v)}{\sigma_{st}}}{\frac{(n-1)(n-2)}{2}} \quad (7)$$

где число в знаменателе — это максимальное количество путей в графе порядка n , проходящих через узел v .

Вычисление индекса промежуточности сопряжено с высокими вычислительными сложностями и требует времени порядка $O(n^3)$, так как для каждой пары узлов



$s, t \in V$ в графе G требуется расчет общего количества кратчайших путей, проходящих через узел $\sigma_{st}(v)$, $\forall v \in V$. Более быстрый метод вычисления данного индекса был предложен в [13] и занимает время порядка $O(nm + n^2 \log n)$ и память порядка $O(n + m)$ как для взвешенных, так и для невзвешенных сетей.

Центральности на основе собственного вектора (спектральные)

Центральность на основе собственного вектора является обобщением степенной центральности. При этом, если центральность степени назначает одинаковую важность соседям узла, что для измерения важности узлов в социальных сетях может оказаться недостаточным, то центральность собственного вектора назначает соседям узла различную значимость. Вследствие этого, узел, связанный с очень важными узлами, сам становится важным:

$$C_E(v) = \alpha \sum_{u \in \eta(v)} C_E(u) \quad (8)$$

где α — коэффициент пропорциональности, $u, v \in V$ — узлы сети, $n(v)$ — множество соседей узла v . В матричной форме данное определение вводится с использованием понятия собственного вектора [10]:

$$Ax = \lambda x \quad (9)$$

где λ — наибольшее собственное значение, а x — ведущий собственный вектор матрицы смежности A . Согласно [2] центральность $C_E(x_i)$ узла соответствует i -ому компоненту собственного вектора x .

В свою очередь, центральность по Кацу является расширением центральности собственного вектора, добавляя в выражение (10) параметр β , назначающий небольшое значение важности всем узлам:

где α — коэффициент затухания, обычно выбираемый меньше самого большого собственного значения λ матрицы смежности A (12), а β — константа смещения.

$$C_K(v) = \alpha \sum_{u \in \eta(v)} C_K(u) + \beta \quad (10)$$

$$Ax = \lambda x \quad (11)$$

$$\alpha \leq \frac{1}{\lambda} \quad (12)$$

Еще одним примером данного типа центральностей является центральность PageRank. Данный тип центральности основан на модели случайного блуждания и определяется как:

$$C_{PR}(v) = \alpha \sum_j \frac{C_{PR}(v)}{k_v^{out}} + \beta \quad (13)$$



PageRank используется в библиометрии, анализе социальных и информационных сетей, дорожных сетей и во многих других приложениях.

Материалы и методы

В работе использовались данные сети маркет-сообществ города Архангельска с аудиторией от 500 человек до 100 тыс. человек, собранные посредством API онлайн-платформы «Вконтакте». Из-за ограничений поиска на количество возвращаемых результатов, для импорта данных было определено 14 категорий ключевых слов, представленных в таблице 1. Результирующий набор данных был агрегирован в единый csv-файл и очищен от дубликатов. Сеть региональных сообществ строилась на основе графа $G(V, E)$, где V — множество маркет-сообществ города Архангельска, $E = \{(u, v) : J(u, v) > 0.01, \forall u, v \in V\}$ — связи между сообществами, оцененные с помощью коэффициента Жаккара J [20], измеряющего общность подписчиков маркет-сообществ. Следует отметить, что аналогичные исследования авторы сейчас проводят и для других регионов, что позволяет выявить особенности и различия в структуре маркет-сообществ в зависимости от географического расположения и социально-экономической специфики регионов.

Таблица 1 / Table 1

Категории ключевых слов

Keyword categories

Ключевые слова / Keywords	Количество сообществ / Number of communities
1. Магазин, товары, продажа, купить, каталог, аксессуар, прайс, опт, розница, скидки, распродажа, интернет-магазин, заказ, доставка, услуги, мастер-класс, обучение, курсы, консультация, аренда, ремонт, красота, салон / 1. Shop, goods, sale, buy, catalog, accessory, price list, wholesale, retail, discounts, sale, online store, order, delivery, services, master class, training, courses, consultation, rent, repair, beauty, salon	3409
2. Одежда, обувь, аксессуары, стиль, мода, бренд, джинсы, футболки, шубы, пальто, сумки, рюкзаки, украшения, ювелирные изделия, часы, ремни, шарфы, перчатки, одежда больших размеров, секонд-хенд, винтаж / 2. Clothing, shoes, accessories, style, fashion, brand, jeans, T-shirts, fur coats, coats, bags, backpacks, jewelry, watches, belts, scarves, gloves, plus-size clothing, second-hand, vintage	1529
3. Электроника, телефоны, смартфоны, планшеты, компьютеры, ноутбуки, бытовая техника, гаджеты, оргтехника, аксессуары для техники, наушники, телевизоры, видеокамеры, игровые консоли, игровые устройства, ремонт техники, Apple, Android / 3. Electronics, phones, smartphones, tablets, computers, laptops, household appliances, gadgets, office equipment, accessories for appliances, headphones, televisions, video cameras, game consoles, gaming devices, repair of appliances, Apple, Android	839



Ключевые слова / Keywords	Количество сообществ / Number of communities
4. Мебель, декор, интерьер, посуда, текстиль, ковры, обои, шторы, лампы, осветительные приборы, кухонные принадлежности, бытовая химия, садовая техника, сад, огород, инструменты / 4. Furniture, decor, interior, tableware, textiles, carpets, wallpaper, curtains, lamps, lighting, kitchen utensils, household chemicals, gardening equipment, garden, vegetable garden, tools	684
5. Косметика, парикмахерская, уход, макияж, парфюмерия, уход за кожей, маникюр, педикюр, волосы, витамины, спорт, фитнес, массаж, SPA, йога, плавание, бассейн, здоровый образ жизни, медицинские услуги, диета, натуральные продукты, татуировки, пирсинг / 5. Cosmetics, hairdressing, grooming, makeup, perfumes, skin care, manicure, pedicure, hair, vitamins, sports, fitness, massage, SPA, yoga, swimming, pool, healthy lifestyle, medical services, diet, natural products, tattoos, piercing	1624
6. Игрушки, коляски, детская одежда, товары для малышей, детская мебель, конструкторы, настольные игры, рюкзаки для школы, книги для детей, обучение для детей, кружки, секции, репетиторы / 6. Toys, strollers, children's clothing, baby products, children's furniture, construction kits, board games, backpacks for school, books for children, education for children, clubs, sections, tutors	1387
7. Еда, продукты, напитки, доставка еды, фермерские продукты, экотовары, выпечка, кондитерские изделия, торты на заказ, пироги, рестораны, сеть ресторанов, кафе, сеть кафе, столовая, чай, кофе, конфеты, доставка обедов, здоровое питание, пекарня, хлеб, рыба / 7. Food, groceries, drinks, food delivery, farm products, eco-products, pastries, confectionery, cakes to order, pies, restaurants, restaurant chain, cafe, cafe chain, canteen, tea, coffee, sweets, lunch delivery, healthy food, bakery, bread, fish	1138
8. Рукоделие, handmade, DIY, вязание, вышивка, шитьё, рисование, творчество, арт, декупаж, скрапбукинг, фотография, видеосъёмка, музыка, танцы, мастер-класс, вокал / 8. Needlework, handmade, DIY, knitting, embroidery, sewing, drawing, creativity, art, decoupage, scrapbooking, photography, videography, music, dancing, master class, vocals	1322
9. Спорт, спортивное питание, снаряжение, бег, тренажёры, фитнес, плавание, бассейн, велоспорт, велосипед, туризм, кемпинг, альпинизм, охота, рыбалка, спортивное снаряжение, лыжи, сноуборд, активный отдых, теннис, яхта, яхтклуб, скалолазание, ролики, волейбол, каток, коньки, скейтборд, хоккей, футбол, баскетбол, турник, брусья, гимнастика, бокс, бодибилдинг, пауэрлифтинг, настольный теннис, большой теннис, физические упражнения, горнолыжный / 9. Sports, sports nutrition, equipment, running, fitness equipment, fitness, swimming, pool, cycling, cycling, hiking, camping, mountaineering, hunting, fishing, sports equipment, skiing, snowboarding, outdoor activities, tennis, tennis, yacht, yacht club, rock climbing, roller skates, volleyball, ice rink, ice skating, skateboard, hockey, football, basketball, horizontal bar, uneven bars, gymnastics, boxing, bodybuilding, powerlifting, table tennis, lawn tennis, physical exercises, skiing	1006
10. Авто, автомобили, автозапчасти, мотоциклы, велосипеды, аксессуары для авто, аренда авто, грузоперевозки, ремонт авто, тюнинг, электросамокаты, скутеры, запчасти / 10. Auto, cars, auto parts, motorcycles, bicycles, car accessories, car rental, cargo transportation, car repair, tuning, electric scooters, scooters, spare parts	585



Ключевые слова / Keywords	Количество сообществ / Number of communities
11. Подарки, сувениры, цветы, праздничные услуги, организация мероприятий, воздушные шары, украшения, кейтеринг, фотограф, видеооператор, ведущий, тамада, фейерверк, салют, декор для праздников / 11. Gifts, souvenirs, flowers, holiday services, event management, balloons, decorations, catering, photographer, videographer, presenter, toastmaster, fireworks, holiday decor	1009
12. Обучение, курсы, репетиторство, мастер-классы, вебинары, онлайн-школы, языковые курсы, повышение квалификации, подготовка к экзаменам, карьерное консультирование, тренинги, программирование / 12. Training, courses, tutoring, workshops, webinars, online schools, language courses, advanced training, exam preparation, career counseling, trainings, programming	770
13. Зоотовары, корм для животных, аквариумы, аквариумные рыбки, аксессуары для животных, одежда для собак, уход за животными, ветеринарные услуги, дрессировка, гостиницы для животных, кошки, собаки, питомцы / 13. Pet supplies, pet food, aquariums, aquarium fish, animal accessories, dog clothes, animal care, veterinary services, training, animal hotels, cats, dogs, pets	287
14. Кино, театры, концерты, билеты, квесты, экскурсии, парки, клубы, игровые центры, настольные игры, настольки, видеогames, туризм, путешествия, квизы / 14. Movies, theaters, concerts, tickets, quests, excursions, parks, clubs, game centers, board games, board games, video games, tourism, travel, quizzes	628

Для обнаружения сообществами использовался лувенский метод. Меры центральности рассчитывались с использованием библиотеки NetworkX и языка программирования Python (версия 3.8). Визуализация сети и распределения мер центральности проводились с помощью matplotlib, seaborn и средств визуализации с открытым исходным кодом Gephi.

Результаты

Построенная нами сеть включает 2269 сообществ. Плотностью сети $G(V, E)$ является величина $|E| = \frac{|E|}{|E|_{max}}$, равная отношению количества фактических связей в исходной сети к полностью связной сети с тем же количеством узлов $|V|$. Плотность сети маркет-сообществ составляет 0.3211. Распределение весов ребер представлено на рис. 1.

Высокая плотность сети обусловлена величиной коэффициента Жаккара $J > 0.01$. Большая часть ребер имеет низкий коэффициент J . Влияние величины порога на изменение количества ребер в сети, порядка, плотности и количества сообществ в гигантской связной компоненте (ГСК) позволило определить его допустимые значения для сохранения целостности ГСК (рис. 2).

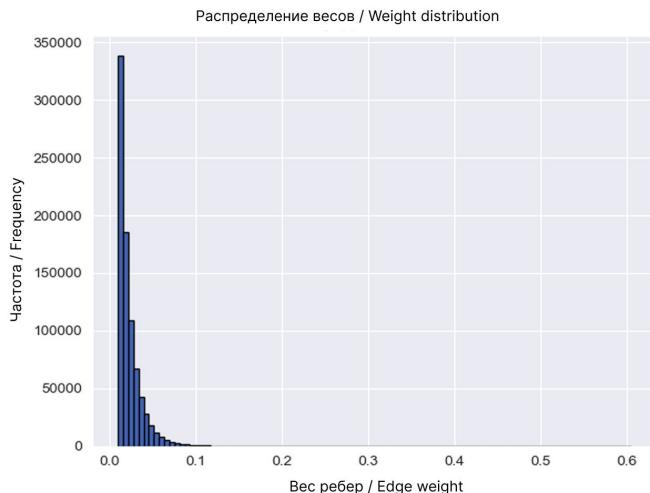


Рис. 1. Распределение весов ребер
Fig. 1. Distribution of edge weights

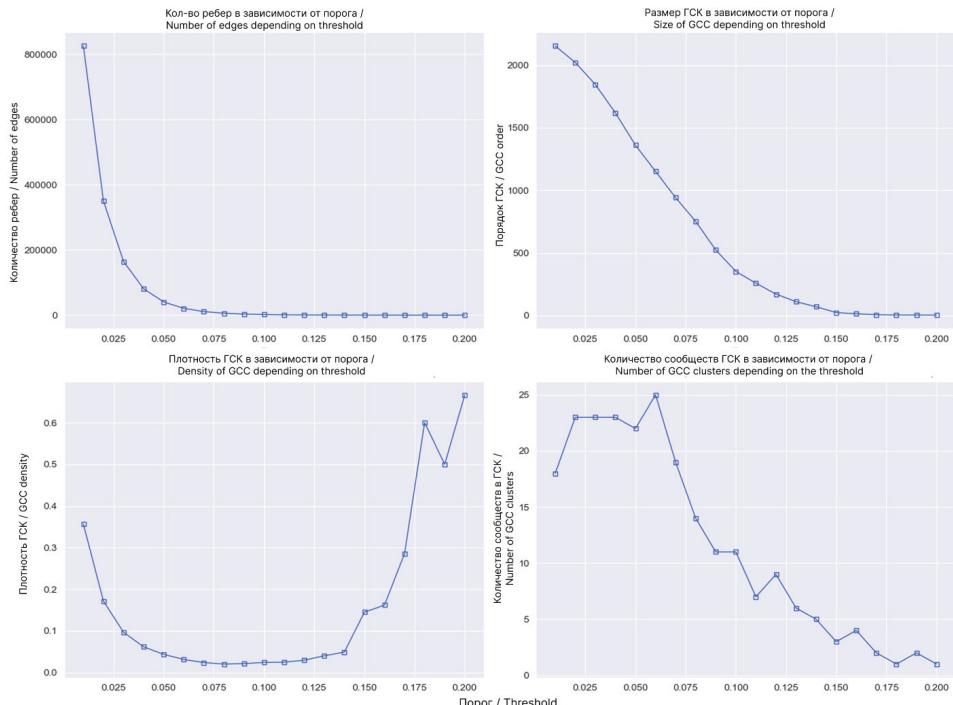


Рис. 2. Влияние порога на структуру сети
Fig. 2. The effect of the threshold on the network structure



Отметим, что связной компонентой графа G называется максимальный связный подграф $H \subset G$ графа G [19], гигантской связной компонентой — наибольший из таких подграфов $\hat{H} = \max(g)$. Для определения допустимого порога использовалось 20 значений $0.01 \leq t_i^{\hat{g} \subset G} \leq 0.2$, $t_{i+1} = t_i + 0.01$. По графикам (рис. 2) видно, что при увеличении от $0.01 \leq t_i \leq 0.1$ количество ребер уменьшается экспоненциально, порядок гигантской связной компоненты линейно, при этом на интервале $t_i \in (0.05; 0.1)$ плотность ГСК «выходит на плато». Количество сообществ, обнаруженных лувенским методом в ГСК при $0.025 \leq t_i \leq 0.07$, сохраняется на одном уровне, а после 0.07 начинает быстро убывать. Плотность ГСК при значениях порога $0.125 < t_i \leq 0.2$ начинает быстро возрастать, а количество сообществ — убывает.

В таблице 2 приведены основные статистические величины сети маркет-сообществ с $J \geq 0.07$. Результат обнаружения сообществ лувенским методом представлен на рис. 3. Для укладки графа использовался алгоритм ForceAtlas3D. Цвет узлов обозначает их принадлежность к обнаруженным кластерам, размер — количество подписчиков сообществ.

Таблица 2 / Table 2

Характеристики сети маркет-сообществ Characteristics of a network of market communities

Характеристики сети / Network Characteristics	Значения / Values
Модулярность / Modularity	0.53
Количество узлов / Number of nodes	942
Количество ребер / Number of edges	10648
Средняя степень / The average degree	22.607
Средняя взвешенная степень / Weighted average degree	1.957
Плотность / Density	0.024
Количество треугольников / Number of triangles	95398
Коэффициент кластеризации / Clusterization coefficient	0.436

В таблице 3 отражены доли узлов в кластерах.

Таблица 3 / Table 3

Доли узлов в кластерах Shares of nodes in clusters

Номер кластера / Cluster Number	1	2	3	4	5
Доля узлов, % / The proportion of nodes, %	27.39	22.51	16.45	14.12	11.46

Модулярность исследуемой сети составляет 0.53, что свидетельствует о наличии выраженной кластерной структуры. В сети 942 узла и 10648 рёбер. Средняя степень узлов равна 22.607, следовательно, каждое из маркет-сообществ имеет пересекающуюся аудиторию с более чем 22 другими. Средняя взвешенная степень составляет 1.957. Плотность сети, равная 0.024, говорит о её разреженности, поскольку из всех



возможных связей реализована лишь малая их часть. Сеть характеризуется высокой степенью кластеризации: коэффициент кластеризации равен 0.436, количество треугольников в сети достигает 95398, что указывает на тенденцию к триадическому замыканию, типичному для социальных сетей с сильными внутренними связями. Средняя длина пути составляет 3.722, что свидетельствует о высокой связности сети, несмотря на ее разреженность.

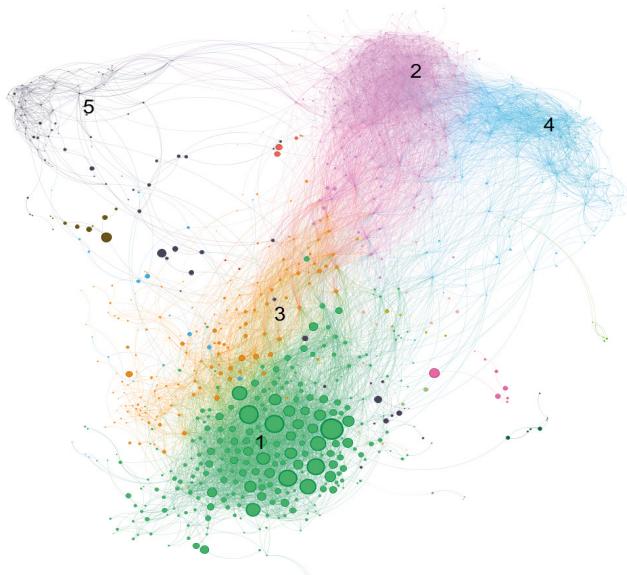


Рис. 3. Сеть маркет-сообществ
Fig. 3. Network of market communities

На рис. 4 представлены распределения значений центральности степени, собственного вектора, центральности по Кацу, промежуточности, близости и PageRank.

По распределению степенной центральности видно, что большинство узлов обладают низкой степенью, в то время как небольшое количество узлов имеет высокие значения центральности. Это свидетельствует о наличии хабов, обеспечивающих связность сети. Для центральности близости распределение имеет форму с пиком в центральной части, близкую к графику нормального распределения. Это говорит о том, что узлы сети находятся в среднем на схожем расстоянии от других, что может указывать на относительную равномерность структуры без выраженной иерархии. Центральность собственного вектора характеризуется сильным перекосом распределения, где большинство узлов имеют низкие значения. Это указывает на то, что значимыми в сети являются лишь несколько узлов, которые связаны с другими высокоцентральными узлами. Такая структура характерна для сетей с выраженным



лидерами. Распределение центральности по Кацу схоже с предыдущей метрикой и демонстрирует то, что влияние в сети сосредоточено вокруг небольшой группы узлов. Центральность промежуточности показывает крайне асимметричное распределение: подавляющее большинство узлов имеют нулевые или низкие значения, и лишь немногие выступают в роли «мостов» между различными частями сети. Наконец, центральность PageRank демонстрирует перекос, характерный для сетей с распределением с «тяжелыми хвостами».

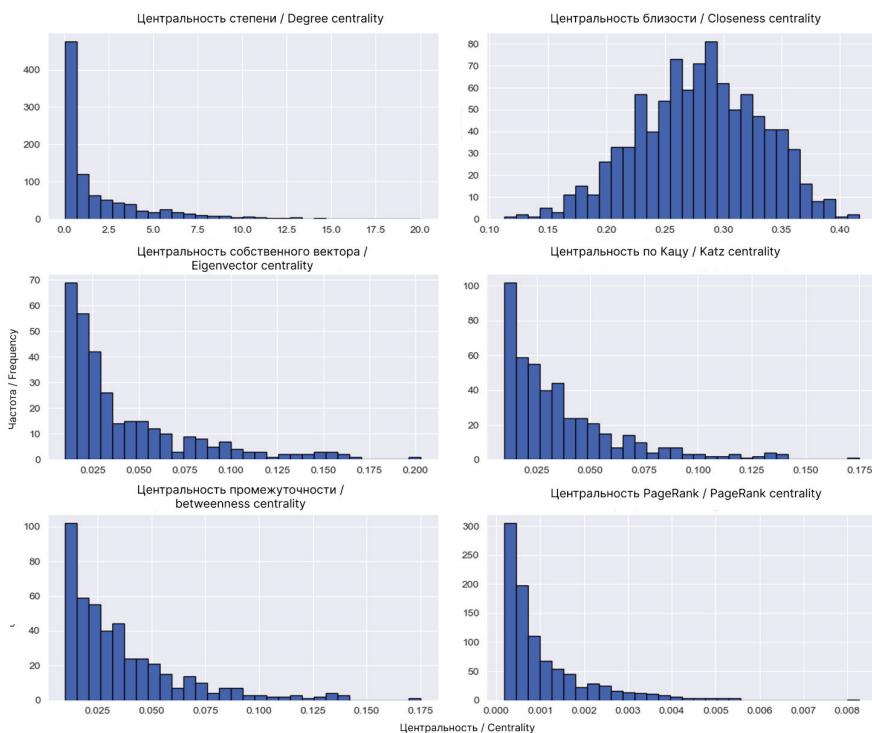


Рис. 4. Распределения индексов центральности

Fig. 4. Distributions of centrality indices

В качестве примера наиболее центральных сообществ в таблице 4 представлены результаты по пяти сообществам наиболее центральными по Кацу и PageRank.



Таблица 4 / Table 4

Показатели мер центральностей
Indicators of centrality measures

№	Название группы / Group name	Количество подписчиков / Number of subscribers	Показатель / Indicator
Центральность по Кацу / Katz centrality			
1	Ремонт ванных комнат в Архангельске «Уют Центр»	1471	0.174894
2	Фотограф Евгения Кожина Архангельск-Северодвинск	1376	0.141196
3	Superburg — бургеры, роллы, хот-доги, чиабатта	1495	0.138296
4	Натуральная косметика Savonry в Архангельске	857	0.136912
5	ТОРТ✿*♡MARY CAKE♡*✿ на заказ АРХАНГЕЛЬСК	4426	0.134763
PageRank			
1	Ремонт ванных комнат в Архангельске «Уют Центр»	1471	0.008269
2	Кафе — кондитерская «Венский пекарь»	12556	0.005481
3	ТОРТ✿*♡MARY CAKE♡*✿ на заказ АРХАНГЕЛЬСК	4426	0.005430
4	Фотограф Евгения Кожина Архангельск-Северодвинск	1376	0.005309
5	Натуральная косметика Savonry в Архангельске	857	0.005221

По данным таблицы 4 прослеживается корреляция между различными индексами центральности. Корреляционная матрица (таблица 5) отражает взаимосвязь между индексами, используемыми при выявлении ключевых агентов.

Таблица 5 / Table 5

Корреляционная матрица индексов центральности
Correlation matrix of centrality indices

Центральность / Centrality	C_D	C_C	C_B	C_E	C_{PR}	C_K
C_D	1	0.72086	0.61648	0.843130	0.95324	0.93246
C_C	0.72086	1	0.47175	0.62388	0.61611	0.70260
C_B	0.61648	0.47175	1	0.42489	0.69391	0.50089
C_E	0.84313	0.62388	0.42489	1	0.71343	0.97634
C_{PR}	0.95324	0.61611	0.69391	0.71343	1	0.81805
C_K	0.93246	0.70260	0.50089	0.97634	0.81805	1



Высокая корреляция между центральностью собственного вектора, центральностью по Кацу и PageRank указывает на высокую глобальную значимость обнаруженных маркет-сообществ в структуре сети. Эти узлы, вероятно, имеют устойчивые связи с другими важными участниками и играют ключевую роль в формировании ядра сети. Низкие значения корреляции центральности промежуточности с другими мерами (0.42—0.69) отражают её уникальность: узлы, обнаруженные данной мерой, влияют на процессы распространения информации в сети.

На основе распределений центральности проведена оценка устойчивости сети при удалении наиболее центральных узлов по сравнению со случайным удалением (рис. 5). Поскольку исходная сеть совпадает с размером ГСК, то в начальный момент ее размер совпадает со всей сетью и равен 1.0.

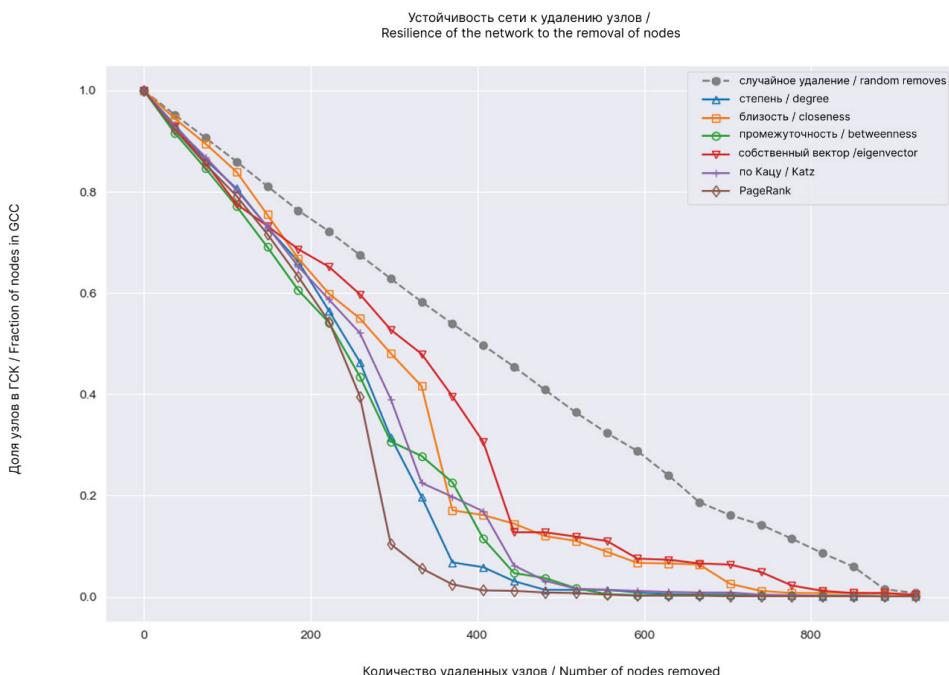


Рис. 5. Результат теста устойчивости сети маркет-сообществ

Fig. 5. The result of the stability test of the network of market communities

При рандомизированном выборе узлов для удаления — относительный размер гигантской связной компоненты линейно зависит от числа удаленных узлов. Напротив, при выборе наиболее центральных узлов сеть распадается (таблица 6).



Таблица 6 / Table 6

Устойчивость сети
Network stability

При удалении / When deleting	Network stability					
	C_D	C_C	C_B	C_E	C_{PR}	C_K
20% узлов / 20% of nodes	0.65393	0.66454	0.59660	0.68471	0.62314	0.64756
40% узлов / 40% of nodes	0.06794	0.16561	0.22399	0.38854	0.02447	0.19745

Сеть оказалась наиболее уязвимой при выборе центральных по PageRank узлов для удаления. Количество узлов в исходной сети составляло 952, а при удалении примерно 40% узлов в соответствии с центральностью степени и PageRank сеть стала почти фрагментированной. Удаление узлов в соответствии с центральностью собственного вектора меньше всего влияет на структуру сети (0.68 для 20% и 0.39 для 40%) по сравнению с остальными.

Устойчивость сети маркет-сообществ тесно связана с выбором стратегии удаления узлов. Наиболее критичными для её структуры являются более важные по PageRank узлы. Эти узлы, вероятно, играют ключевую роль в распространении информации через сеть, а их удаление значительно снижает её функциональность.

Обсуждение результатов

Ключевыми маркетинговыми сообществами, вовлеченными в распространение информации в сети, с точки зрения ее структуры оказались относительно небольшие (по количеству подписчиков) сообщества. Наиболее центральные сообщества преимущественно имеют праздничную тематику. Анализ устойчивости показал относительно высокую надежность сети (полная фрагментация достигается при удалении свыше 40% узлов), а при удалении 20% наиболее центральных узлов сохраняется от 0.59 (в случае центральности промежуточности) до 0.68 (в случае центральности собственного вектора).

Заключение

В статье проведен обзор базовых мер центральности, включающих центральность степени, близости, посредничества, собственного вектора, центральности по Кацу, PageRank. Построена сеть маркет-сообществ города Архангельска на основе данных онлайн-платформы социальных сетей ВКонтакте. Определены допустимые значения коэффициента Жаккара.

Анализ распределений центральности показал, что, как и в большинстве социальных сетей, в сети маркет-сообществ преобладают низкостепенные узлы и лишь небольшой процент узлов выступает в роли хабов. На основе распределений центральности,



проводена оценка устойчивости сети маркет-сообществ. Показано, что данная сеть оказалась наименее устойчивой при использовании центральности PageRank, а наиболее устойчивой — при использовании центральности собственного вектора.

Полученные результаты подтверждают ключевую роль хабов в социальных сетях. Оценка устойчивости сети при использовании той или иной меры центральности может быть использована для измерения степени влияния в социальных сетях. В дальнейшем исследовании предполагается использование выявленных ключевых игроков для моделирования стратегического взаимодействия в задаче дележа сети как неоднородного ресурса.

Ограничения. В исследовании рассматриваются сообщества, предоставляющие данные о подписчиках, однако, существуют сообщества, в которых подписчики скрыты — такие сообщества не учтены в сети, что может несколько исказить реальную структуру сети. При фильтрации ребер использовалась простейшая эвристика на основе связности гигантской связной компоненты, в дальнейшем можно использовать более сложные методы (например, фильтр диспаритета).

Limitations. The research considers communities that provide data on subscribers, however, there are communities in which subscribers are hidden — such communities are not taken into account in the network, which can somewhat distort the real structure of the network. When filtering edges, the simplest heuristics based on the connectivity of a giant connected component were used, in the future, more complex methods can be used (for example, a disparity filter).

Список источников / References

1. Berger, J., Milkman, K. L. (2012). What Makes Online Content Viral? *Journal of Marketing Research*, Vol. 49, № 2, 192—205.
2. Bonacich, P. F. (1987) Power and Centrality: A Family of Measures. *American Journal of Sociology*, Vol. 92, 1170—1182.
3. Brandes, U.A. (2001). Faster Algorithm for Betweenness Centrality. *Journal of Mathematical Sociology*, Vol. 25, № 2, 163—177.
4. Chevalier, J.A., Mayzlin, D. (2006). The Effect of Word of Mouth on Sales: Online Book Reviews. *Journal of Marketing Research*, Vol. 43, № 3, 345—354.
5. Freeman, L.C. (1978). Centrality in Social Networks Conceptual Clarification. *Social Networks*, Vol. 1, № 3, 215—239.
6. Iyengar, R., Van den Bulte, C., Valente, T.W. (2011). Opinion Leadership and Social Contagion in New Product Diffusion. *Marketing Science*, Vol. 30, № 2, 195—212.
7. Jackson, M. (2010). Social and Economic Networks. *Princeton: Princeton University Press*, 520 p.
8. Latora, V., Marchiori, M. (2001). Efficient Behavior of Small-World Networks. *Physical Review Letters*, Vol. 87, № 19, 198701.
9. Milgram, S., Bickman, L., Berkowitz, L. (1969). Note on the Drawing Power of Crowds of Different Size. *Journal of Personality and Social Psychology*, Vol. 13, № 2, 79—82.
10. Newman, M. (2010). Networks. *Oxford: Oxford University Press*.
11. Opsahl, T., Agneessens, F., Skvoretz, J. (2010). Node Centrality in Weighted Networks: Generalizing Degree and Shortest Paths. *Social Networks*, Vol. 32, № 3, 245—251.
12. Padgett, J.F., Ansell, C.K. (1993). Robust Action and the Rise of the Medici, 1400—1434. *American Journal of Sociology*, Vol. 98, № 6, 1259—1319.



13. Wei, D., Li, Y., Zhang, Y., Deng, Y. (2012). Degree Centrality Based on the Weighted Network. *Control and Decision Conference (CCDC), IEEE*, 3976—3979.
14. Волков, Д. В., Саенко, И. Б., Старков А.М., Султанбеков, А. Т. (2018). Оценка устойчивости сети передачи данных в условиях деструктивных воздействий. *Известия Тульского государственного университета. Технические науки*, № 12, 358—363.
Volkov, D.V., Saenko, I.B., Starkov, A.M., Sultanbekov, A.T. (2018). Assessment of network resilience under destructive impacts. *Izvestiya TulGU. Technical Sciences*, No. 12, 358—363.
15. Гегель, Л. А., Бабочкина, С. П. (2010). Влияние социальных факторов на выбор профессии учащихся старших классов общеобразовательных школ. *Социально-гуманитарные знания*, № 5, 79—85.
Gegel, L.A., Babochkina, S.P. Influence of social factors on career choice of high school students. *Social and Humanitarian Knowledge*, No. 5, 79—85.
16. Дьяконов, А.Г. (2012). Алгоритмы для рекомендательной системы: технология LENKOR. *Бизнес-информатика*, № 1(19), 32—39.
Dyakonov, A.G. (2012). Algorithms for recommendation systems: LENKOR technology. *Business Informatics*, No. 1(19), 32—39.
17. Полякова, О.С., Подлесный, А.О. (2013). PageRank. Алгоритм ссылочного ранжирования. *Наука и современность*, № 20, 154—157.
Polyakova, O.S., Podlesny, A.O. (2013). PageRank: Link ranking algorithm. *Science and Modernity*, No. 20, 154—157.
18. Утакаева, И.Х. (2020). Моделирование распространения инфекционных заболеваний в социальных сетях. *Самоуправление*, Т. 2, № 2(119), 559—564.
Utakaeva, I.Kh. (2020). Modeling the spread of infectious diseases in social networks. *Self-Governance*, Vol. 2, No. 2(119), 559—564.
19. Харари, Ф. (2003). Теория графов: пер. с англ.; ред. Гаврилов Г.П.; пер. Козырев В.П. — 2-е изд. — М.: Едиториал УРСС, 300 с.: ил. — Библиогр.: с. 268—286.
Harary, F. (2003). Graph Theory: Transl. from English; by V.P. Kozырев; edited by G.P. Gavrilov. — 2nd ed. — Moscow: Editorial URSS, 300 p. — Bibliography: Pp. 268—286.
20. Чижова, Л.А., Тутыгин, А.Г., Стирманова, Р.С. (2024). Сетевые молодежные сообщества в социокультурном пространстве северного региона: методологические и эмпирические аспекты исследования. *Вестник Российской университета дружбы народов. Серия: Социология*, Т. 24, № 4, 1033—1051.
Chizhova, L.A., Tutygin, A.G., Stirmanova, R.S. (2024). Network Youth Communities in the Socio-Cultural Space of the Northern Region: Methodological and Empirical Aspects of the Study. *Bulletin of the Russian University of Friendship of Peoples. Series: Sociology*, Vol. 24, No. 4, 1033—1051.
21. Центральность в социальных сетях [Электронный ресурс] // CentiServer. — URL: <https://centiserver.ir/centrality/list/> (дата обращения: 20.12.2024).
Centrality in Social Networks [Electronic resource] // CentiServer. — Available at: <https://centiserver.ir/centrality/list/> (accessed: 20.12.2024).

Информация об авторах

Антонов Анатолий Владимирович, магистрант кафедры высшей и прикладной математики Северного (Арктического) федерального университета имени М.В. Ломоносова (САФУ), Архангельск, Российская Федерация, ORCID: <https://orcid.org/0009-0009-0187-2410>, e-mail: s3519008@edu.narfu.ru

Стирманова Раиса Станиславовна, аспирант кафедры высшей и прикладной математики Северного (Арктического) федерального университета имени М.В. Ломоносова



(САФУ), Архангельск, Российская Федерация, ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-9819-0890>, e-mail: r.s.stirmanova@gmail.com

Information about the authors

Anatoliy V. Antonov, Master's student at the Department of Higher and Applied Mathematics, Northern (Arctic) Federal University named after M.V. Lomonosov (NArFU), Arkhangelsk, Russian Federation, ORCID: <https://orcid.org/0009-0009-0187-2410>, e-mail: s3519008@edu.narf.ru

Raisa S. Stirmanova, PhD student at the Department of Higher and Applied Mathematics, Northern (Arctic) Federal University named after M.V. Lomonosov (NArFU), Arkhangelsk, Russian Federation, ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-9819-0890>, e-mail: r.s.stirmanova@gmail.com

Вклад авторов

Стирманова Р.С. — идеи исследования; аннотирование, написание и оформление рукописи; планирование исследования; контроль за проведением исследования.

Антонов А.В. — применение статистических, математических или других методов для анализа данных; проведение эксперимента; сбор и анализ данных; визуализация результатов исследования.

Все авторы приняли участие в обсуждении результатов и согласовали окончательный текст рукописи.

Contribution of the Authors

Raisa S. Stirmanova — ideas; annotation, writing and design of the manuscript; planning of the research; control over the research.

Anatoliy V. Antonov — application of statistical, mathematical or other methods for data analysis; conducting the experiment; data collection and analysis; visualization of research results.

All authors participated in the discussion of the results and approved the final text of the manuscript.

Конфликт интересов

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Conflict of Interest

The authors declare no conflict of interest.

Декларация об этике

Исследование было рассмотрено и одобрено экспертной комиссией ФГАОУ ВО «Северный (Арктический) федеральный университет имени М.В. Ломоносова» (заключение о возможности открытого опубликования от 05.02.2025 г.).

Ethics Statement

The study was reviewed and approved by the expert commission of the Northern (Arctic) Federal University named after M.V. Lomonosov (conclusion on the possibility of open publication dated 02/05/2025).

Поступила в редакцию 18.03.2025

Received 2025.03.18

Поступила после рецензирования 21.03.2025

Revised 2025.03.21

Принята к публикации 04.04.2025

Accepted 2025.04.04

Опубликована 30.06.2025

Published 2025.06.30

Научная статья | Original paper

УДК 519.2

Использование корреляционно-регрессионного и кластерного анализа для исследования данных по термографическим снимкам трубопроводов системы охлаждения

П.С. Щербань¹✉, К.Н. Илюхин¹, С.С. Ераносян¹, А.Н. Карагадян²

¹ РТУ МИРЭА, Институт информационных технологий

² БФУ им. И. Канта, ОНК Институт высоких технологий

✉ ursa-maior@yandex.ru

Резюме

Контекст и актуальность. Среди различных методов неразрушающего контроля в последние годы активно развивается термография. Ее использование позволяет фиксировать дефекты связанные с нарушением толщины стенки, наличием трещин, выбоин, коррозии. Часто термографию применяют для обследования зданий, конструкций, машин и механизмов, это обуславливается в том числе возможностью продолжения их эксплуатации даже в процессе диагностических мероприятий. Одним из подобных устройств, остановка которого для оценки технического состояния затруднительна, является система охлаждения судовых двигателей. **Цель.** Провести корреляционно-регрессионный и кластерный анализ датасета термограмм труб системы охлаждения судового двигателя и определить характер зависимости между различными параметрами. **Гипотеза.** Представляется вероятным, что в ходе выполнения корреляционно-регрессионного и кластерного анализа будут установлены зависимости между температурными характеристиками основного металла труб системы охлаждения и температурой зон внутритрубных дефектов, а также их геометрией. **Методы и материалы.** Датасет из 210 термографических снимков труб системы охлаждения, методы кластерного анализа, методы корреляционно-регрессионного анализа, программный комплекс Loginom. **Результаты.** В результате были установлены зависимости между типом дефектов (выявленных термографическим методом), их геометрическими особенностями и изменением температурных характеристик поврежденных и целых зон труб, используемых в системах охлаждения судовых двигателей. Подтверждена возможность эффективного



использования корреляционно-регрессионного и кластерного анализов как инструментов обработки данных на основе термографических изображений труб. **Выводы.** Организациям, отвечающим за нормативно-методическое обеспечение применения методов неразрушающего контроля, следует использовать полученные результаты для обновления требований к процедурам проведения термографических исследований. В частности, необходимо актуализировать ГОСТ Р ИСО 18434-1-2013. Контроль состояния и диагностика машин. Термография. Общие методы. Обновленная терминологическая и методическая части данного стандарта должны включать указания на возможность использования корреляционно-регрессионного и кластерного анализов как инструментов обработки термографических данных.

Ключевые слова: математические виды анализа, корреляционно-регрессионный анализ, кластерный анализ, термография, диагностика, управление качеством

Благодарности. Авторы благодарят за помощь в сборе данных для исследования С.С. Мазур.

Для цитирования: Щербань, П.С., Илюхин, К.Н., Ераносян, С.С., Карагадян, А.Н. (2025). Использование корреляционно-регрессионного и кластерного анализа для исследования данных по термографическим снимкам трубопроводов системы охлаждения. *Моделирование и анализ данных*, 15(2), 27–46. <https://doi.org/10.17759/mda.2025150202>

Application of correlation-regression and cluster analysis to study data based on thermographic images of cooling system pipelines

P.S. Shcherban¹✉, K.N. Ilyukhin¹, S.S. Eranosyan¹, A.N. Karagadyan²

¹ RTU MIREA, Institute of Information Technologies

Department of Applied Mathematics, Moscow

² Baltic Federal University of Immanuel Kant, BSC “Institute of High technologies”

✉ ursa-maior@yandex.ru

Abstract

Context and relevance. Among the various methods of non-destructive testing, thermography has been actively developing in recent years. Its use allows recording defects associated with a violation of wall thickness, the presence of cracks, potholes, and corrosion. Thermography is often used to inspect buildings, structures, machines and mechanisms, which is due, among other things, to the possibility of continuing their operation even during diagnostic activities. One of such devices, the shutdown of which is difficult to assess the technical condition, is the cooling system of marine engines. **Objective.** To conduct a correlation-regression and cluster analysis of a dataset of pipes thermograms of a marine engine cooling system and to determine the nature of the relationship between various parameters. **Hypothesis.**



It seems likely that in the course of performing the correlation-regression and cluster analysis, dependencies will be established between the temperature characteristics of the base metal of the cooling system pipes and the temperature of the zones of intra-pipe defects, as well as their geometry. **Methods and materials.** A dataset of 210 thermographic images of cooling system pipes, cluster analysis methods, correlation and regression analysis methods, Loginom software package. **Results.** As a result, dependencies were established between the type of defects (detected by the thermographic method), their geometric features and changes in the temperature characteristics of damaged and intact pipe zones used in ship engine cooling systems. The possibility of effectively using correlation and regression and cluster analyses as tools for processing data based on thermographic images of pipes was confirmed. **Conclusions.** Organizations responsible for regulatory and methodological support for the use of non-destructive testing methods should use the obtained results to update the requirements for thermographic research procedures. In particular, it is necessary to update GOST R ISO 18434-1-2013. Condition monitoring and diagnostics of machines. Thermography. General methods. The updated terminology and methodological parts of this standard should include references to the possibility of using correlation and regression and cluster analyses as tools for processing thermographic data.

Keywords: mathematical types of analysis, correlation and regression analysis, cluster analysis, thermography, diagnostics, quality management

Acknowledgements. The authors are grateful for assistance in data collection Mazur S.S.

For citation: Shcherban, P.S., Ilyukhin, K.N., Yeranosyan, S.S., Karagadyan, A.N. (2025). Application of correlation-regression and cluster analysis to study data from thermographic images of cooling system pipelines. *Modelling and Data Analysis*, 15(2), 27–46. (In Russ.). <https://doi.org/10.17759/mda.2025150202>

Введение

Трубопроводы систем охлаждения судовых двигателей в процессе эксплуатации сталкиваются с рядом факторов, отрицательно влияющих на их надежность. Вибрации, перепад температур, кавитационное воздействие потока перекачиваемой жидкости, эрозия переносимыми частицами, коррозионная активность растворенных солей и серы — приводят к постепенной деградации внутренней поверхности труб (Fox, Goodhew, De Wilde, 2016). При этом подобные повреждения как правило приобретают форму точечных дефектов (раковин, выбоин, выщерблин), объемных дефектов (площадные коррозионные и эрозионные повреждения), либо протяженных дефектов (трещины, области растрескивания, области ручейковой коррозии) (Mahami, и др., 2021).

Диагностика подобных внутритрубных дефектов в системах охлаждения судовых двигателей представляет сложную задачу (Madhavan, и др., 2023). Разборные методы как правило используются редко, поскольку это требует остановки эксплуатации судна (а часто и постановки в док). Безразборные методы осложняются пространственным размещением труб (что не позволяет проводить полноценное



радиографическое обследование) либо неполнотой библиотек для интерпретации данных ультразвуковой диагностики (Wei, Xiao, 2016). В связи с этим особое значение приобретает метод термографии, тем более, что по трубопроводам системы охлаждения циркулирует жидкость, температура которой значительно отличается от температуры окружающей среды (Li, 2024).

Стоит отметить, что термографические исследования подобных систем стали выполнятся лишь в последнее время, что связано с распространением специализированной техники и ростом опыта в интерпретации термограмм. Для проведения исследования был сформирован датасет из 210 термографических снимков, полученных на грузовом судне, типа: Self Discharging Bulk Carrier. Датасет получен на основе термограмм системы охлаждения среднеоборотного, шестицилиндрового, четырехтактного, двигателя, мощностью 2500 кВт. выполненных камерой GOYOJO Handheld Thermal Imaging Camera. При этом к каждому изображению для упрощения процесса обработки данных имелась термическая и пространственная шкалы. Термограммы были взяты со следующих видов труб (с указанием количества в датасете): трубы подачи забортной воды в насосы (48), трубы подачи пресной воды в теплообменник (44), трубы подачи воды в редуктор (36), трубы подачи масла в теплообменник (30), трубы подачи и выпуска пресной воды из двигателя (52).

По каждому из полученных изображений были классифицированы протяженные, точечные и объемные дефекты. Всего было определено 172 дефектов. Часть изображений труб (46) не имело дефектов. Далее была поставлена задача, по всем обследованным типам труб провести корреляционно-регрессионный анализ и установить взаимосвязи между: изменением температуры стенки трубы вне дефекта и в месте дефекта, между изменением средней температуры трубы вне дефекта и размерами дефекта. Таким образом можно оценить насколько геометрические характеристики дефекта влияют на нагрев неповрежденных областей (Trautman, Razban, Chen, 2021). Также была поставлена задача провести кластерный анализ дефектов, по температурным характеристикам, по всем обследованным типам труб. На основе результатов корреляционно-регрессионного и кластерного анализов сделать вывод о степени износа различных труб, применяемых в системах охлаждения судового двигателя.

Установление регрессионных зависимостей между параметрами трубопроводов системы охлаждения на термограммах

При опорожнении вертикального стального резервуара, в него начинает поступать Всего в исследуемом пакете данных рассматривались пять типов труб. Трубы подачи забортной воды в насосы являлись оцинкованными, стальными, бесшовными, с nominalным наружным диаметром в 377 и 219 мм и толщиной стенки в 13 мм. Трубы подачи пресной воды в теплообменник, трубы подачи воды в редуктор, трубы подачи масла в теплообменник — являлись фосфатированными, стальными и бесшовными с nominalным наружным диаметром в 114 и 89 мм и толщиной стенки в 6,0 и 5,5 мм. Трубы



подачи и выпуска пресной воды обладали всеми теми же характеристиками, но были только одного типоразмера, с внешним диаметром 89 мм и толщиной стенки 5,5 мм.

Перед проведением регрессионного анализа, каждая из термограмм оценивалась по числу дефектов, типу дефектов, геометрии дефектов (длине и ширине), температурным характеристикам основного металла трубы и температуре дефекта. При этом для точечных дефектов температура замерялась однократно, для протяженных либо объемных температура замерялась в трех точках, после чего рассчитывалось среднее значение по дефекту. Получаемые в результате обработки изображений (Рисунок 1) данные сводились в единую таблицу. Корреляционно-регрессионный анализ данных осуществлялся в программном комплексе Loginom.

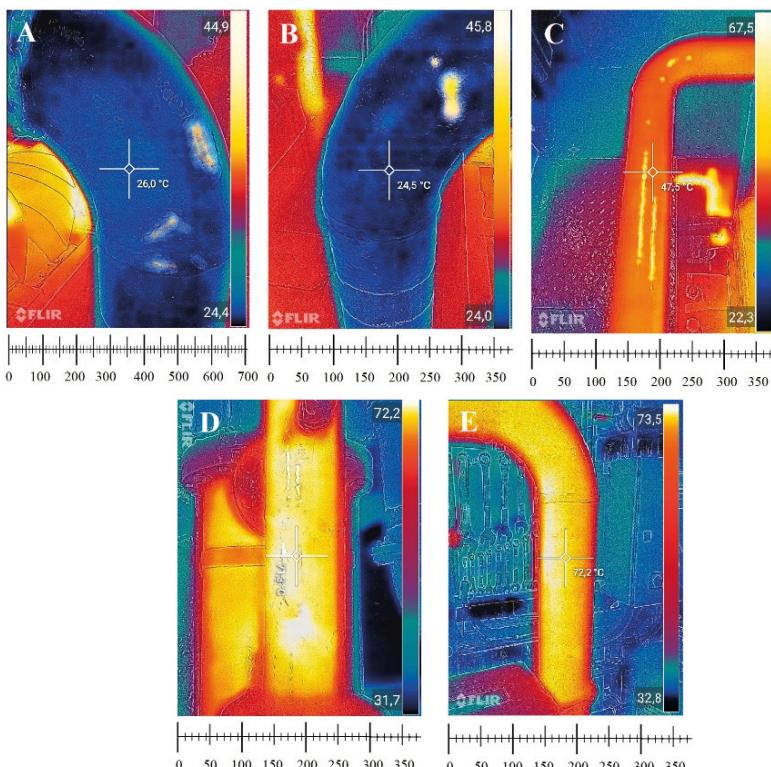


Рис. 1. Термограммы труб системы охлаждения.

А — трубы подачи забортной воды в насосы; В — трубы подачи воды в редуктор;
С — трубы подачи масла в теплообменник; Д — трубы подачи и выпуска пресной
воды из двигателя; Е — трубы подачи пресной воды в теплообменник

Fig. 1. Thermograms of cooling system pipes.

А — pipes supplying sea water to the pumps; Б — pipes supplying water to the gearbox;
С — pipes supplying oil to the heat exchanger; Д — pipes supplying and discharging fresh
water from the engine; Е — pipes supplying fresh water to the heat exchanger



В ходе проведения анализа сопоставлялись различные показатели полученных термограммам. В начале была определена взаимосвязь между средней температурой трубы вне дефекта и температурой трубы в месте точечного, протяженного или объемного дефектов (Рисунок 2). Было установлено, что во всех случаях при росте температуры в месте дефекта возрастает и средняя температура неповрежденной поверхности, при этом вид дефектов оказывает влияние на скорость нагрева неповрежденной поверхности в трубах по-разному.

Так в трубах подачи воды в редуктор, трубах подачи и выпуска пресной воды из двигателя, трубах подачи пресной воды в теплообменник скорость прироста температуры неповрежденной поверхности от протяженных и объемных дефектов выше, чем от точечных. Это выражено в более крутом наклоне прямой (Рисунок 2 б, д, е).

С физической точки зрения это может обуславливаться большей потерей металла в протяженных и объемных дефектах, чем в точечных. Такая потеря приводит к возрастанию интенсивности теплопереноса от транспортируемой жидкости, через истонченную дефектную зону к неповрежденной поверхности (Li, 2024).

В результате вокруг протяженного или объемного дефекта формируется больший ореол нагрева неповрежденной части трубы (чем вокруг точечного дефекта). Наряду с этим в трубах подачи забортной воды в насосы не выявлено подобной тенденции. Очевидно это обусловлено большей толщиной стенки, а также отличным материалом трубы. Как по точечным, так и протяженным, и объемным дефектам скорости нагрева неповрежденной поверхности в трубах подачи забортной воды в насосы в целом идентичны (Рисунок 2 а.). Характер изменения температуры трубы вне дефекта (в данном случае речь идет о средней температуре) от температуры дефектной зоны свидетельствует об особенностях тепловой усталости металла. В ряде случаев (Рисунок 2. с, д) неповрежденная поверхность в ходе изменения температурных режимов будет быстрее претерпевать износ в зонах, соприкасающихся с протяженными и объемными дефектами (скорость развития данных дефектов будет выше). Кроме того именно по данным трубам (с, д) фиксируются наибольшие температурные значения как неповрежденной части так и дефектов.

Интересно проанализировать и какие характеристики дефекта в большей степени влияют на изменение средней температуры трубы вне дефектной зоны. По рассматриваемым термограммам относительно просто судить о длине и ширине дефекта, о толщине стенки в месте дефекта говорить можно лишь косвенно, сравнивая температуру дефектной зоны с температурой транспортируемой жидкости и учитывая теплопроводные способности металла (Trautman, Razban, Chen, 2021).

Рассмотрим имеющиеся данные на предмет того как длина и ширина дефекта влияют на температуру трубы вне дефектной зоны. Для определения взаимосвязи между размером дефекта в длину и средней температурой трубы вне дефекта построим график распределения значений (Рисунок 3.). При этом будем рассматривать все виды дефектов (точечные, протяженные и объемные).

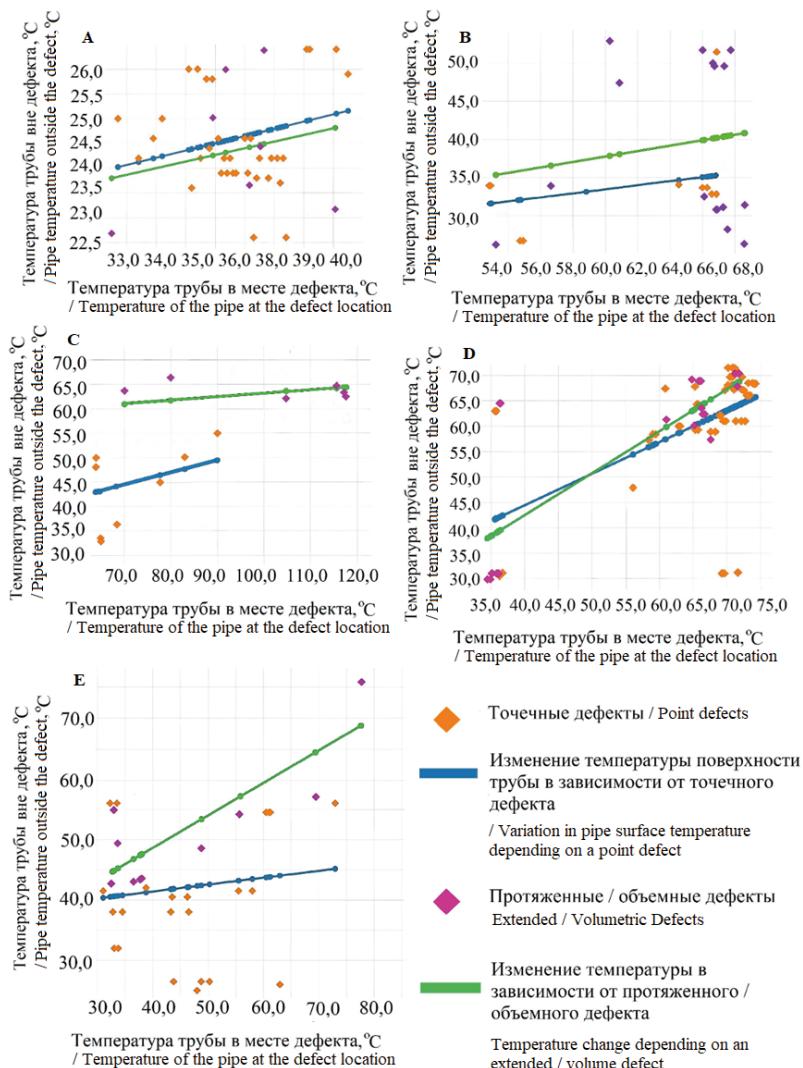


Рис. 2. Регрессионный анализ зависимости изменения средней температуры неповрежденной стенки трубы от температуры дефектов различного типа (точечного или протяженного / объемного). А — трубы подачи забортной воды в насосы; В — трубы подачи воды в редуктор; С -трубы подачи масла в теплообменник; D- трубы подачи и выпуска пресной воды из двигателя; Е — трубы подачи пресной воды в теплообменник

Fig. 2. Regression analysis of the dependence of the change in the average temperature of the intact pipe wall on the temperature of defects of different types (point or extended / volumetric). A — pipes for supplying sea water to the pumps; B — pipes for supplying water to the gearbox; C — pipes for supplying oil to the heat exchanger; D — pipes for supplying and discharging fresh water from the engine; E — pipes for supplying fresh water to the heat exchanger

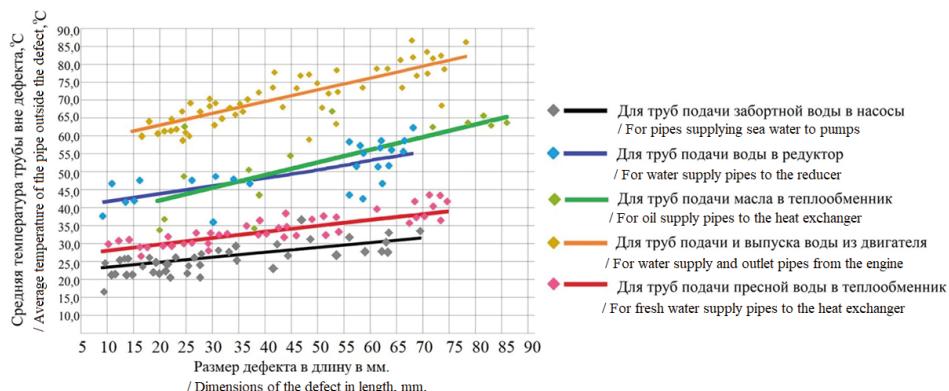


Рис. 3. Регрессионный анализ зависимости изменения средней температуры неповрежденной стенки трубы от размеров (длины) дефекта

Fig. 3. Regression analysis of the dependence of the change in the average temperature of the intact pipe wall on the size (length) of the defect

Из полученного графика видно, что по всем трубам прослеживается зависимость средней температуры трубы вне дефекта от размера дефекта. В частности, при увеличении длины дефекта возрастает и средняя температура неповрежденной поверхности (облегчается теплоперенос от транспортируемой жидкости к неповрежденным зонам поверхности).

Определение корреляционных зависимостей в сформированном массиве данных по трубопроводам системы охлаждения двигателей

Для установления характера корреляционной зависимости между средней температурой трубы вне дефекта и в месте дефекта, средней температурой трубы вне дефекта и длиной, а также шириной дефекта рассчитаем коэффициенты корреляции Пирсона, Спирмена и Кенделла (Janse, и др., 2021).

Коэффициент Пирсона используется для измерения линейной связи между двумя количественными переменными, которые распределены нормально или близко к нормальному распределению. Он позволяет установить, насколько пропорциональна изменчивость двух переменных (Janse, и др., 2021). Коэффициент Пирсона вычисляют по формуле:

$$K_n = \frac{n(\sum(xy)) - (\sum x)(\sum y)}{\sqrt{[n\sum(x^2) - (\sum x)^2][n\sum(y^2) - (\sum y)^2]}}, \quad (1)$$

где: x и y — две сравниваемые переменные; n — количество точек данных; $(\sum(xy))$ — сумма произведения парных оценок x и y ; $\sum(x^2)$ и $\sum(y^2)$ — суммы квадратов для каждой переменной.



Коэффициент корреляции Спирмена — позволяет определить фактическую степень параллелизма между двумя количественными рядами изучаемых признаков и дать оценку тесноты установленной связи с помощью количественно выраженного коэффициента (Essam, El, Ali, 2022). Рассчитывается он по следующей формуле:

$$\rho = 1 - \frac{6 * \sum_{i=1}^n d_i^2}{n(n^2 - 1)}, \quad (2)$$

где: d — разность между рангами $d_i = R(X_i) - R(Y_i)$, n — число наблюдений, по которым вычисляется коэффициент.

Коэффициент корреляции Кендалла является мерой силы и направления монотонной связи между двумя переменными. В отличие от коэффициента корреляции Пирсона, который оценивает линейную зависимость, коэффициент Кендалла применяется для оценки монотонных зависимостей, не требуя, чтобы связь между переменными была линейной. Он основывается на сравнении пар значений для каждой переменной и оценки того, насколько согласованность или несогласованность существует между ними. Коэффициент рассчитывается по следующей формуле:

$$\tau = \frac{C - D}{\frac{n(n-1)}{2}} \quad (3)$$

где: n — количество пар наблюдений, C — количество согласованных пар, D — количество несогласованных пар.

Обоснуем выбор данных коэффициентов в качестве инструмента определения корреляционной зависимости. Так коэффициент Пирсона применяется для определения силы и взаимосвязи между двумя количественными и непрерывными переменными. В рассматриваемом случае температуры дефектной и бездефектной части труб, размеры дефектов — выражаются количественно и непрерывно. Использование коэффициента Пирсона подразумевает, что как минимум одна из сравниваемых переменных распределается в выборке согласно закону нормального распределения (Janse, и др., 2021).

В проводимом исследовании априори нельзя утверждать, что распределение температурных показателей или размеров дефектов по всей выборке будет подчиняться данному закону (поэтому для оценки были привлечены критерии Спирмена и Кенделла). Также через коэффициент Пирсона оценивается характер линейных зависимостей. В целом они и получены ранее (Рисунки 2 и 3). Применение коэффициента Пирсона требует гомоскедастичности распределения. В полученных регрессионных моделях не в каждом случае наблюдается стабильность и однородности дисперсии, в связи с чем по мимо критерия Пирсона опять же были привлечены для оценки критерии Спирмена и Кенделла.

Также требуется парность наблюдений (требование соблюдено) и достаточно большой объем выборки (в различных источниках указывается на объем выборки в не менее 25 наблюдений). Данное требование соблюдается для всех случаев,



за исключением данных по трубам подачи масла в теплообменник (число выявленных в сформированном пакете термограмм с дефектами — 14).

Выявленная проблема преодолима путем определения критического значения коэффициента корреляции. Для этого можно сформулировать две гипотезы. H1 — между температурными изменениями неповрежденной поверхности труб подачи масла в теплообменник и температурой, а также размерами дефектов есть взаимосвязь. H2 — данная взаимосвязь отсутствует. Для определения критического значения коэффициента корреляции представим исходные данные полученные из термограмм дефектных труб подачи масла в теплообменник (Таблица 1).

Далее используя формулу (1) рассчитаем величину коэффициента корреляции, между параметрами AB, AC, BC. Она составит, для AB 0,705, для AC 0,839, для BC 0,822. Вычислим для рассматриваемого случая число степеней свободы (k), учитывая, что объем выборки (n) = 14 труб.

$$k = n - 2. \quad (4)$$

По специальной таблице (Essam, El, Ali, 2022) найдем критические значения коэффициента корреляции по коэффициенту Пирсона для уровней значимости $p = 0,05$ и $p = 0,01$, при $k = 12$.

Таблица / Table 1

**Определение критического значения коэффициента корреляции
для показателей труб подачи масла в теплообменник. А — средняя
температура поверхности трубы вне дефекта (oC), В — средняя температура
поверхности трубы в месте дефекте (oC), С — длина дефекта (мм)**

**Determination of the critical value of the correlation coefficient
for the parameters of oil supply pipes to the heat exchanger. A is the average
temperature of the pipe surface outside the defect (oC), B is the average temperature
of the pipe surface at the defect location (oC), C is the length of the defect (mm)**

Труба / Pipe	A	B	C	AA	BB	CC	AB	AC	BC
1	34	65	20	1156	4225	400	2210	680	1300
2	36	69	21	1296	4761	441	2484	756	1449
3	58	77	39	3364	5929	1521	4466	2262	3003
4	64	82	25	4096	6724	625	5248	1600	2050
5	65	90	45	4225	8100	2025	5850	2925	4050
6	50	60	36	2500	3600	1296	3000	1800	2160
7	65	115	82	4225	13225	6724	7475	5330	9430
8	64	116	77	4096	13456	5929	7424	4928	8932
9	66	80	53	4356	6400	2809	5280	3498	4240
10	64	70	72	4096	4900	5184	4480	4608	5040



Труба / Pipe	A	B	C	AA	BB	CC	AB	AC	BC
11	49	60	25	2401	3600	625	2940	1225	1500
12	63	108	84	3969	11664	7056	6804	5292	9072
13	64	116	86	4096	13456	7396	7424	5504	9976
14	34	61	37	1156	3721	1369	2074	1258	2257
Сумма / Summ	776	1169	702	45032	103761	43400	67159	41666	64459

Поскольку все вычисленные коэффициенты корреляции больше критического значения (0,660), то они являются статистически значимыми, следовательно, гипотеза H1 верна. В результате получим следующую область допустимых значений (Рисунок 4). Таким образом полученные зависимости по трубам подачи масла в теплообменник могут быть использованы в общем анализе выборки.

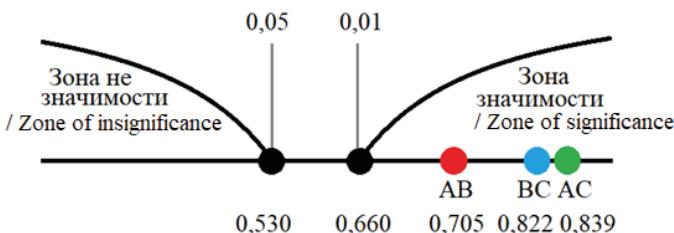


Рис. 4. Область допустимых значений на оси значимости при $k = 12$ и расположение AB, AC, BC

Fig. 4. The region of acceptable values on the significance axis for $k = 12$ and the location of AB, AC, BC

Возвращаясь к определению коэффициентов Пирсона, Спирмена и Кенделла для установления характера корреляционной зависимости между средней температурой труб вне дефекта и в месте дефекта, средней температурой труб вне дефекта и длиной, а также шириной дефекта проведем соответствующие расчеты по формулам (1, 2, 3) и сведем полученные значения в таблицу (Таблица 2).

Исходя из определения рассматриваемых коэффициентов корреляции при величинах от 0,3 до 0,7 связь между параметрами заметная или умеренно выраженная, при величинах выше 0,7 связь тесная (Shcherban, Sokolov, Abu Hamdi, 2023). В приведенной сводной таблице параметры, по которым определена заметная связь выделены желтым, параметры по которым связь тесная выделены красным.

Из полученных показателей корреляции следует, что для большинства рассматриваемых термограмм труб средняя температура поверхности трубы вне дефекта тесно или заметно коррелирует со средней температурой в месте дефекта (то есть общая температура поверхности растет с утонением стенки), также она коррелирует



с размером дефекта в длину (очевидно это обусловлено вытянутым характером большинства дефектов, даже принятых за точечные). Также есть взаимосвязь между температурой трубы в месте дефекта и размером дефекта в длину (Shcherban, Mazur, Mazur, 2022). Тесные связи по данным параметрам зафиксированы в выборках термограмм по трубам подачи воды в редуктор, по трубам подачи масла в теплообменник, по трубам подачи и выпуска пресной воды из двигателя.

Интерпретируя причины почему именно в трубах данного типа связь между параметрами оказалась более тесная, можно утверждать, что это вероятно продиктовано характером дефектов, а также большей температурой прокачиваемых жидкостей. С физической точки зрения действительно утонение стенки трубы в зонах размещения дефектов ведет к увеличению теплопереноса между внутренней полостью трубы и внешней поверхностью. Изменение температуры в дефектной зоне создает дополнительный нагрев и термическую нагрузку на окружающую дефект неповрежденную часть трубы (Shcherban, Mazur, Mazur, 2022). Таким образом корреляционно-регрессионный анализ термограмм может использоваться для оценки степени долговременной термической нагрузки дефектами на неповрежденные зоны труб. В проведенном исследовании можно утверждать, что процессы термической усталости металла будут более характерны для труб подачи воды в редуктор, труб подачи масла в теплообменник, труб подачи и выпуска пресной воды из двигателя.

Таблица / Table 2

**Результат корреляционно-регрессионного анализа
взаимосвязи температурных и геометрических параметров труб и дефектов**
**Result of correlation-regression analysis of the relationship
between temperature and geometric parameters of pipes and defects**

Трубы / Pipes	Критерий Пирсона / Pearson's criterion	Критерий Спирмена / Spearman's criterion	Критерий Кенделла / Kendall's criterion	Сравниваемые параметры / Compared parameters	
Трубы подачи забортной воды в насосы / Pipes for supplying sea water to pumps (A)	0,622	0,641	0,627	A	B
	0,524	0,446	0,411	C	D
	0,218	0,252	0,331	C	E
	0,686	0,636	0,655	A	D
Трубы подачи воды в редуктор / Water supply pipes to the reducer (B)	0,757	0,702	0,737	A	B
	0,353	0,634	0,491	C	D
	0,100	0,130	0,116	C	E
	0,619	0,634	0,577	A	D



Трубы подачи масла в теплообменник / Oil supply pipes to the heat exchanger (C)	0,705	0,752	0,682	A	B
	0,822	0,795	0,780	C	D
	0,411	0,453	0,407	C	E
	0,839	0,805	0,790	A	D
Трубы подачи и выпуска пресной воды из двигателя / Fresh water supply and outlet pipes from the engine (D)	0,645	0,609	0,617	A	B
	0,472	0,386	0,326	C	D
	0,277	0,241	0,215	C	E
	0,368	0,318	0,301	A	D
Трубы подачи пресной воды в теплообменник / Fresh water supply pipes to the heat exchanger (E)	0,328	0,358	0,309	A	B
	0,409	0,421	0,405	C	D
	0,130	0,031	0,127	C	E
	0,309	0,325	0,321	A	D

Примечание: А — Средняя температура трубы вне дефекта / Average pipe temperature outside the defect; В — Средняя температура трубы в месте дефекта / Average pipe temperature at the defect; С — Температура трубы в месте дефекта / Pipe temperature at the defect; D — Размер дефекта в длину / Defect size in length; E — Размер дефекта в ширину / Defect size in width.

Инструментарий корреляционно-регрессионного анализа таким образом позволяет нам выявлять наиболее опасные в своей динамике развития дефекты (протяженные и объемные дефекты исходя из Рисунка 2. б, г, д), а также установить в каких типах труб наиболее тесно выражена взаимосвязь между размерами дефекта и средними температурами нагрева (Таблица 2). В целом можно утверждать, что по результату анализа наименее надежными и подвергающимися наибольшему износу являются трубы подачи воды в редуктор и трубы подачи масла в теплообменник. Далее основываясь на сформированном пакете данных проведем кластерный анализ выявленных дефектов, категорируя их исходя из термических характеристик поврежденной зоны.



Кластерный анализ данных по дефектам трубопроводов системы охлаждения, выявленным на термограммах

Кластерный анализ также проводился на базе программного комплекса Loginom. Использовался метод k-means, при этом количество кластеров задавалось исходя из трех типов дефектов — точечных, протяженных и объемных. В результате было получено следующее распределение кластеров (Рисунок 5), где на каждом из изображений по оси абсцисс учитываются линейные размеры дефектов, а по оси ординат температурные характеристики.

При этом определение центра кластера производилось как среднее значение всех точек, принадлежащих кластеру. Формула для определения центра кластера (центроида) выглядит следующим образом:

$$C_k = \left(\frac{1}{|S_k|} \right)^* \sum_{x_i \in S_k} x_i \quad (5)$$

где: C_k — центр кластера k ; S_k — множество точек, принадлежащих кластеру k ; $|S_k|$ — количество точек в кластере k ; x_i — i -я точка кластера.

Среди устанавливаемых характеристик по каждому кластеру определялось также стандартное отклонение и размах. Стандартное отклонение дает возможность судить о степени разброса значений внутри кластера, что позволяет оценить степень однородности температурных характеристик дефектных зон труб. Формула для нахождения стандартного отклонения:

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \quad (6)$$

где: σ — стандартное отклонение, n — количество наблюдений в кластере, x_i — значение i -го элемента, \bar{x} — среднее значение выборки.

Чем выше значение σ , тем больше разброс значений внутри кластера, что может указывать на большую вариативность дефектов. Размах кластера позволяет установить диапазон температурных характеристик дефектов в рамках одного кластера и оценить максимальную изменчивость данных. Приведем формулу для определения размаха:

$$R = x_{max} - x_{min} \quad (7)$$

где: R — размах, x_{max} — максимальное значение в выборке, x_{min} — минимальное значение в выборке.

Размах кластера характеризует общий диапазон изменений значений температурных характеристик дефектов и помогает определить степень их неоднородности. При проведении кластеризации полученные результаты расчетов сведены в таблицу



(Таблица 3), установлены центры каждого из кластеров, рассчитано стандартное отклонение, определен размах.

Таблица / Table 3.

Результат кластерного анализа термограмм дефектов труб по температуре поверхности

Result of cluster analysis of thermograms of pipe defects by surface temperature

Трубы / Pipes	Параметр / Parameter	Кластеры / Clusters		
		Точечные дефекты / Point defects	Протяженные дефекты / Extended defects	Объемные дефекты / Volume Defects
Трубы подачи забортной воды в насосы / Pipes for supplying sea water to pumps (A)	I	36,5	37,4	38,9
	II	1,6	1,3	2,5
	III	7,8	5,7	8,2
	IV	32	5	3
Трубы подачи воды в редуктор / Water supply pipes to the reducer (B)	I	62,7	57,8	67,2
	II	6,8	3,5	0,8
	III	16,0	7,6	2,6
	IV	10	4	11
Трубы подачи масла в теплообменник / Oil supply pipes to the heat exchanger (C)	I	57,2	68,4	72,1
	II	17,2	4,5	1,3
	III	41,5	17,7	4,5
	IV	8	4	2
Трубы подачи и выпуска пресной воды из двигателя / Fresh water supply and outlet pipes from the engine (D)	I	89	83,3	110
	II	12	5,6	9,5
	III	55	18,8	24
	IV	32	14	6
Трубы подачи пресной воды в теплообменник / Fresh water supply pipes to the heat exchanger (E)	I	42,9	47,3	-
	II	5,9	9,4	-
	III	26,8	26,0	-
	IV	27	14	-

Примечание: I — Центр кластера / Cluster center; II — Стандартное отклонение / Standard deviation; III — Размах / Range; IV — Количество значений / Quantity of values.



Полученные результаты свидетельствуют, что в ряде случаев (для труб подачи забортной воды в насосы, труб подачи и выпуска пресной воды из двигателя, труб подачи пресной воды в теплообменник) температурные характеристики слабо различаются в зависимости от типа дефектов, кластеры при этом довольно плотно группируются рядом друг с другом, частично или полностью перекрывая один другой (Li, и др., 2021). В данных трубах скорее всего идет коррозионный процесс, выраженный виде внутренней, площадной или в виде питтинговой коррозии (Vanem, Brand-sæter, 2016). Коррозия при этом ведет к равномерному истончению стенки, как в точечных, так и в протяженных и объемных дефектах, в результате риски эксплуатации данных типов труб во времени (из-за более плавного деградационного процесса) ниже.

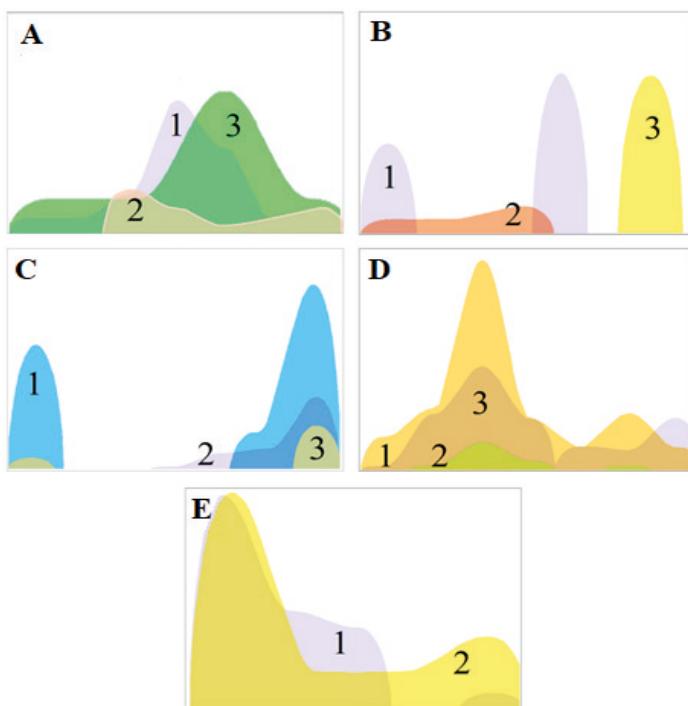


Рис. 5. Кластеризация дефектов по температуре поверхности. А — трубы подачи забортной воды в насосы; В — трубы подачи воды в редуктор; С — трубы подачи масла в теплообменник; Д — трубы подачи и выпуска пресной воды из двигателя; Е — трубы подачи пресной воды в теплообменник. 1 — кластеры точечных дефектов, 2 — кластеры протяженных дефектов, 3 — Кластеры объемных дефектов.

Fig. 5. Clustering of defects by surface temperature. A — pipes supplying sea water to the pumps; B — pipes supplying water to the gearbox; C — pipes supplying oil to the heat exchanger; D — pipes supplying and discharging fresh water from the engine; E — pipes supplying fresh water to the heat exchanger. 1 — clusters of point defects, 2 — clusters of extended defects, 3 — clusters of volumetric defects.



Возможно в тех же трубах (Рисунок 5а, д, е) идет и эрозионный процесс, под воздействием переносимых с потоком жидкости частиц. Скорее всего он выражен в виде коррозионно-эрэзионных повреждений, поскольку во всех трех случаях (Рисунок 5 а, д, е) наблюдаются крайне «размазанные» основания кластеров, что свидетельствует о наличии большого числа повреждений разной геометрии, (даже внутри выделенных трех классов).

Отдельно необходимо остановиться на результатах, полученных по трубам подачи воды в редуктор и трубы подачи масла в теплообменник. В данных двух случаях (Рисунок 5 б, с) кластеры лучше отделяются друг от друга, что свидетельствует о значительной разнице дефектов по глубине (собственно дефекты одного и того-же класса нагреваются по разному и имеют разные размеры при неизменности материала трубы).

Такая отделимость кластеров говорит о том, что в случае с трубами подачи воды в редуктор и трубы подачи масла в теплообменник скорее всего действуют не только коррозионные и эрозионные процессы, но и процессы термического растрескивания, растрескивания металла под напряжением, термической и возможно гидравлической усталости.

Кластерный анализ также подтверждает, что по результату телевизионного обследования трубы подачи воды в редуктор и трубы подачи масла в теплообменник являются наиболее изношенными. Данные части системы охлаждения требуют разборки, дефектации и замены изношенных участков.

Выходы

В заключении отметим целесообразность использования корреляционно-регрессионного и кластерного анализа в обработке термографической информации. При этом на начальном этапе необходимо распознать на термограммах искомые характеристики изучаемых объектов (определить целостные и дефектные зоны, геометрию дефектов, температуру) и в результате получить набор данных, содержащий дискретные значения по анализируемым параметрам. После чего, возможно использовать оба аналитических инструмента.

Как корреляционно-регрессионный, так и кластерный анализы достаточно селективны и позволяют по пакету обрабатываемых данных косвенно судить о ряде физико-химических процессов, протекающих в системах охлаждения двигателей. Так возможно установить регрессионную зависимость в изменении температуры неповрежденной поверхности труб и дефектных зон, установить характер нагрева дефектных зон в зависимости от типа повреждений, установить взаимосвязь между изменением температуры поверхности неповрежденной зоны и геометрией дефекта. В целом между рядом температурных и геометрических характеристик труб и дефектов устанавливается довольно тесная корреляционная связь. При этом в зависимости от типа труб и материала интенсивность связей между параметрами геометрии дефекта и температуры неповрежденной поверхности может варьировать в достаточно значительном диапазоне.



Кластерный анализ термографических данных позволяет глубже интерпретировать полученные зависимости. С его помощью можно установить выраженность (отделимость) типов дефектов внутренней поверхности труб друг от друга как в плане геометрических характеристик, так и по температурным значениям. Это позволяет косвенно судить о стадии развития дефектов, о степени влияния физико — химических процессов на целостность внутренней поверхности труб системы охлаждения.

В целом положительный опыт использования данных аналитических инструментов требует включения кластерного и корреляционно-регрессионного анализа в число методов, используемых для обработки термографических данных. В связи с этим рекомендуется указать в существующем нормативном документе по термодиагностике (ГОСТ Р ИСО 18434-1-2013. Контроль состояния и диагностика машин. Термография. Общие методы) на возможность использования рассмотренных методов в качестве инструментов обработки данных полученных по термографическим снимкам.

Список источников / References

1. Fox, M., Goodhew, S., De, Wilde, P. Building defect detection: External versus internal thermography // Building and Environment. — 2016. — T. 105. — C. 317—331.
2. Mahami A. et al. Induction motor condition monitoring using infrared thermography imaging and ensemble learning techniques // Advances in Mechanical Engineering. — 2021. — T. 13. — № . 11. — 16878140211060956.
3. Madhavan, S. et al. Thermal management analyses of induction motor through the combination of air-cooling and an integrated water-cooling system // Scientific Reports. — 2023. — T. 13. — № . 1. — 10125.
4. Wei, Y., Xiao, Y. Improving defect visibility for composites with long pulse thermography // Composite Structures. — 2024. — T. 342. — 118241.
5. Li, Z. et al. Regression predictive modeling of high-speed motorized spindle using POA-LSTM // Case Studies in Thermal Engineering. — 2024. — T. 54. — 104053.
6. Trautman, N., Razban, A., Chen, J. Overall chilled water system energy consumption modeling and optimization // Applied Energy. — 2021. — T. 299. — 117166.
7. Janse, R.J. et al. Conducting correlation analysis: important limitations and pitfalls // Clinical Kidney Journal. — 2021. — T. 14. — № . 11. — C. 2332—2337.
8. Essam, F., El, H., Ali, S.R.H. A comparison of the pearson, spearman rank and kendall tau correlation coefficients using quantitative variables // Asian J. Probab. Stat. — 2022. — C. 36—48.
9. Shcherban, P. Study of failure statistics of cavitators in the fuel oil facilities through the application of regression and cluster analysis / P. Shcherban, A. Sokolov, R.V. Abu Hamdi // Proceedings on Engineering Sciences. — 2023. — Vol. 5, No. 1. — P. 39—48. — DOI 10.24874/PES05.01.00. — EDN UWEZFA.
10. Shcherban, P.S., Mazur, E.V., Mazur, S.N. The process parameter matrix method in controlling marine engine wear dynamics. Industrial laboratory. Diagnostics of materials. 2022;88(9): 47—52. (In Russ.) <https://doi.org/10.26896/1028-6861-2022-88-9-47-52>



11. Li, X. et al. Surface Defect Detection of Seals Based on K-Means Clustering Algorithm and Particle Swarm Optimization //Scientific Programming. — 2021. — Т. 2021. — №.1. — 3965247.
12. Vanem, E., Brandsæter, A. Unsupervised anomaly detection based on clustering methods and sensor data on a marine diesel engine //Journal of Marine Engineering & Technology. — 2021. — Т. 20. — №. 4. — С. 217—234.

Информация об авторах

Щербань Павел Сергеевич, кандидат технических наук, доцент кафедры прикладной математики, Институт информационных технологий, РТУ МИРЭА, г. Москва, Российская Федерация, ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-5106-7852>, e-mail: ursa-maior@yandex.ru

Илюхин Кирилл Николаевич, студент, РТУ МИРЭА, Институт информационных технологий. Кафедра прикладной математики, г. Москва, Российская Федерация, e-mail: ilyuhin.kir@yandex.com

Ераносян Сос Самвелович, студент, РТУ МИРЭА, Институт информационных технологий. Кафедра прикладной математики, г. Москва, Российская Федерация, e-mail: alikos20001@gmail.com

Карагадян Артур Наирьевич, студент, БФУ им. И. Канта, ОНК Институт высоких технологий, г. Калининград, Российская Федерация, e-mail: a.karagadian2001@gmail.com

Information about the authors

Pavel S. Shcherban, PhD in Engineering, Associate Professor, Department of Applied Mathematics, Institute of Information Technologies, RTU MIREA, Moscow, Russian Federation, ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-5106-7852>, e-mail: ursa-maior@yandex.ru

Kirill N. Ilyukhin, student, RTU MIREA, Institute of Information Technologies. Department of Applied Mathematics, Moscow, <https://orcid.org/0009-0001-4232-9811>, e-mail: ilyuhin.kir@yandex.com

Sos S. Yeranosyan, student, RTU MIREA, Institute of Information Technologies. Department of Applied Mathematics, Moscow, <https://orcid.org/0009-0000-3573-6411>, e-mail: alikos20001@gmail.com

Artur N. Karagadyan, student, IKBFU.I. Kanta, POC Institute of High Technologies, Kaliningrad, Russia, ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-8427-8362>, e-mail: a.karagadian2001@gmail.com

Вклад авторов

Щербань П.С. — идеи исследования; аннотирование, написание и оформление рукописи; планирование исследования; контроль за проведением исследования.

Илюхин К.Н. — применение статистических, математических или других методов для анализа данных; визуализация результатов исследования.

Ераносян С.С. — обработка датасета, подготовка данных, нормализация, измерения, корректировка расчетов по корреляционно-регрессионному анализу.



Карагадян А.Н. — обработка датасета, подготовка данных, корректировка расчетов по кластеризации, перевод разделов публикации на иностранный язык.

Все авторы приняли участие в обсуждении результатов и согласовали окончательный текст рукописи.

Contribution of the authors

Shcherban P.S. — research ideas; annotation, writing and design of the manuscript; research planning; research supervision.

Ilyukhin K.N. — application of statistical, mathematical or other methods for data analysis; visualization of research results.

Yeranosyan S.S. — dataset processing, data preparation, normalization, measurements, adjustment of calculations for correlation and regression analysis.

Karagadyan A.N. — dataset processing, data preparation, adjustment of clustering calculations, translation of publication sections into a foreign language.

All authors participated in the discussion of the results and approved the final text of the manuscript.

Конфликт интересов

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Conflict of interest

The authors declare no conflict of interest.

Поступила в редакцию 13.05.2025

Received 2025.05.13

Поступила после рецензирования 15.05.2025

Revised 2025.05.15

Принята к публикации 26.05.2025

Accepted 2025.05.26

Опубликована 30.06.2025

Published 2025.06.30

МЕТОД ОПТИМИЗАЦИИ | OPTIMIZATION METHOD

Научная статья | Original paper

УДК 519.7

Синтез H^∞ – наблюдателей состояния нелинейных непрерывных динамических систем, линейных по управлению и возмущению

А.В. Пантелейев✉, А.А. Яковлева

Московский авиационный институт (НИУ МАИ), г. Москва, Российская Федерация
✉ avpantelev@inbox.ru

Резюме

Контекст и актуальность. В условиях все более обширного распространения и повсеместного использования летательных аппаратов и сложных аэрокосмических систем важное значение имеет развитие систем совместного оценивания и управления, в которых в алгоритме управления вместо вектора состояния используется его оценка по результатам накопленной информации об измерениях. В рамках современной теории управления одним из эффективных подходов к решению данной проблемы являются методы синтеза H^∞ – регуляторов и H^∞ – наблюдателей состояния. Использование H^∞ – методов позволяет построить робастные регуляторы или наблюдатели, способные функционировать в условиях внешних возмущений и помех. Одни из самых популярных способов решения таких задач связаны с использованием линейных матричных неравенств, а также частотного метода, связанного с преобразованием Фурье. Однако при рассмотрении сложных технических задач их применение бывает затруднительным. Поэтому в рамках работы предлагается приближенный метод, позволяющий решать задачу нахождения H^∞ – наблюдателя для нелинейных непрерывных динамических систем, линейных по управлению и возмущению. **Цель.** Сформулировать и доказать достаточные условия H^∞ – наблюдателя для нелинейных непрерывных динамических систем, линейных по управлению и возмущению, при наличии неопределенности задания начальных условий, ограниченных внешних воздействиях и погрешностях измерения на полубесконечном промежутке времени функционирования системы. Сформулировать приближенный метод синтеза H^∞ – наблюдателя. Проверить предложенный подход на модельном примере. **Гипотеза.** В рамках работы предлагается приближенный метод,



позволяющий решать задачу нахождения наблюдателя для динамических систем, нелинейных по состоянию, аналогичный методам, применяемым для линейных систем. Эта гипотеза возникла в результате анализа решения прикладных задач синтеза в нелинейных системах при отсутствии ограниченных внешних воздействий. Ее реализация связана с распространением методологии применения уравнений Риккати с коэффициентами, зависящими от вектора состояния, на задачи синтеза H^∞ – наблюдателя для класса нелинейных систем, линейных по управлению и возмущению. **Методы и материалы.** В данной статье сформулированы достаточные условия синтеза H^∞ – наблюдателя для нелинейных непрерывных динамических систем, линейных по управлению и возмущению, при наличии неопределенности задания начальных условий, ограниченных внешних воздействиях и погрешностях измерения на полубесконечном промежутке времени функционирования системы. При решении задачи синтеза наблюдателя предлагается искать приближенное решение по аналогии с теорией линейных систем, т.е. исходная нелинейная динамическая система посредством факторизации преобразуется к структуре, похожей на линейную, с матрицами, зависящими от вектора состояния. Для реализации разработанного метода и решения модельного примера использовался математический пакет MATLAB. **Результаты.** В результате работы решен модельный пример для проверки эффективности предложенного метода синтеза наблюдателей. Графики изменения координат вектора состояния и их оценок иллюстрируют желаемое качество переходных процессов в условиях неполной информации о состоянии объекта. **Выводы.** В результате работы сформулированы и доказаны достаточные условия H^∞ – наблюдателя для нелинейных непрерывных динамических систем, линейных по управлению и возмущению. Предложен приближенный подход для решения задачи синтеза H^∞ – наблюдателя. Предложен пошаговый алгоритм решения. Решен модельный пример и приведены графики переходных процессов и их оценок, демонстрирующий результаты численного моделирования. Анализ поведения ошибок подтверждает работоспособность предложенного метода, который может быть применен к решению прикладных задач управления аэрокосмическими системами.

Ключевые слова: H -infinity наблюдатель, нелинейная динамическая система, полубесконечный интервал времени, управление с обратной связью

Для цитирования: Пантелеев, А.В., Яковлева, А.А. (2025). Синтез H^∞ – наблюдателей состояния нелинейных непрерывных динамических систем, линейных по управлению и возмущению. *Моделирование и анализ данных*, 15(2), 47–69. <https://doi.org/10.17759/mda.2025150203>



Synthesis of an H^∞ – observers of the state of a nonlinear continuous dynamical systems, linear in control and disturbance

A.V. Panteleev[✉], A.A. Yakovleva

Moscow Aviation Institute (National Research University)

Moscow, Russian Federation

[✉] avpantelev@inbox.ru

Abstract

Context and relevance. In the context of the increasingly widespread use and distribution of aircraft and complex aerospace systems, the development of joint estimation and control systems is of great importance, in which the control algorithm uses an estimation of the state vector based on the results of accumulated measurement information instead of the state vector. In modern control theory, one of the effective approaches to solving this problem is the methods of synthesizing H^∞ – controllers and H^∞ – state observers. The use of these methods enables building a robust controllers or observers. Some of the most popular ways to solve such problems are associated with the use of linear matrix inequalities, as well as the frequency method associated with the Fourier transform. However, when considering complex engineering problems, their application often complicates the solution. Therefore, this paper proposes an approximate method for solving the problem of finding an observer for nonlinear continuous dynamical systems that are linear in control and disturbance. **Objective.** The first goal is to formulate and prove a sufficient condition for an H^∞ – observer for nonlinear continuous dynamical systems that are linear in control and disturbance, in the presence of uncertainty in the initial conditions, limited external influences and measurement errors over a semi-infinite time interval of system operation. The second goal is to formulate an approximate method for synthesis of an H^∞ – observer and test the proposed approach on a model example.

Hypothesis. The paper proposes an approximate method for solving the problem of finding an observer for dynamic systems that are nonlinear in state, similar to the methods used for linear systems. The hypothesis arose as a result of analyzing the solution of applied synthesis problems in nonlinear systems in the absence of limited external influences. Its implementation is associated with the extension of the methodology for applying Riccati equations with coefficients depending on the state vector to the problems of synthesis of an observer for a class of nonlinear systems that are linear in control and disturbance. **Methods and materials.** The sufficient conditions for synthesis of an observer for nonlinear continuous dynamical systems that are linear in control and disturbance, in the presence of uncertainty in the initial conditions, limited external influences, and measurement errors over a semi-infinite time interval of system operation are proven. When solving the observer synthesis problem, it is proposed to look for an approximate solution by analogy with the theory of linear systems, that is, the original nonlinear dynamical system is transformed by factorization to a structure similar to a linear one, with matrices depending on the



state vector. To implement the developed method and solve model examples, the MATLAB mathematical package was used. **Results.** A model example was solved to test the proposed approach. The graphs of the state vector change and its estimate demonstrate the desired quality of transient processes under conditions of incomplete information about the object's state vector. **Conclusions.** As a result, the sufficient conditions of the observer for nonlinear continuous dynamical systems that are linear in control and disturbance were formulated and proven. An approximate approach to solving the observer synthesis problem and a step-by-step solution algorithm were proposed. A model example was solved and graphs of transient processes and their estimates are presented, demonstrating the results of numerical modeling. Analysis of the error behavior confirms the operability of the proposed method.

Keywords: H -infinity observer, closed loop control, semi-infinite period of time, nonlinear dynamical system

For citation: Panteleev, A.V., Yakovleva, A.A. (2025). Synthesis of an H^∞ – observers of the state of a nonlinear continuous dynamical systems, linear in control and disturbance. *Modelling and Data Analysis*, 15(2), 47–69. (In Russ.). <https://doi.org/10.17759/MDA.2025150203>

Введение

Современная теория управления в значительной степени опирается на задачи и методы построения H^∞ – управления (Koobloch, Isidori, Flockerzi, 1993; Doyle, Francis, Tannenbaum, 1990; Skogestad, Postlethwaite, 2005; Поляк, Щербаков, 2002; Green, Limebeer, 2012; Simon, 2006). Они дополняют классические методы синтеза оптимальных законов управления, основывающихся на различных критериях. При решении обширного круга задач в данной области широко используется ряд известных методов синтеза управления, среди которых, например, стоит отметить метод пространства состояний, частотные методы, а также аппарат линейных матричных неравенств (Поляк, Хлебников, Щербаков, 2014; Хлебников, Поляк, Кунцевич, 2011; Поляк, Хлебников, Рапопорт, 2019). Задача получения робастной оценки координат вектора состояния по данным измерительной системы описана, например, в (Баландин, Коган, 2013; Shaked, Theodor, 1992; Пантелеев, Яковлева, 2023; Li, Fu, 1997). В (Пантелеев, Яковлева, 2023) с помощью применения принципа расширения доказаны достаточные условия существования H^∞ – наблюдателя для линейных систем, а также найдены соотношения, определяющие матрицу коэффициентов усиления наблюдателя, наихудшие законы изменения внешних возмущений и погрешностей измерений. Задача нахождения наблюдателя для оценки вектора состояния объекта управления также является важной, поскольку наличие хорошей оценки позволяет учесть неполноту информации о векторе состояния, неопределенность задания ограниченных внешних воздействий на объект управления, помехи в каналах измерения при синтезе замкнутой системы управления. Приложение теории построения робастных наблюдателей в задачах управления летательными аппаратами рассмотрено в (Shue, Agarwal, 1999; Lungu, Lungu, 2015).



В данной статье сформулированы достаточные условия синтеза H^∞ – наблюдателя для нелинейных непрерывных динамических систем, линейных по управлению и возмущению, при наличии неопределенности задания начальных условий, ограниченных внешних воздействиях и погрешностях измерения на полубесконечном промежутке времени функционирования системы. При решении задачи синтеза наблюдателя предлагается искать приближенное решение по аналогии с теорией линейных систем, т.е. исходная нелинейная динамическая система посредством факторизации преобразуется к структуре, похожей на линейную, с матрицами, зависящими от вектора состояния. Решение дифференциального уравнения Риккати должно выбираться с учетом поточечного выполнения условий асимптотической устойчивости замкнутой системы, образованной объектом, регулятором и наблюдателем с наихудшими ограниченными возмущениями. Сформулирован пошаговый алгоритм синтеза H^∞ – наблюдателя. С применением предложенного подхода решена задача оценивания вектора состояния для модельного примера.

Материалы и методы

Постановка задачи

Задана математическая модель объекта управления

$$\dot{x}(t) = f(x(t)) + B_1(x(t))w(t) + B_2(x(t))u(t), \quad x(0) = o, \quad (1)$$

где $x \in R^n$ – вектор состояния, $u \in R^p$ – вектор управления, $w \in R^p$ – вектор возмущения, $t \in T = [0, \infty)$ – время, $x(0)$ – вектор начального состояния, o – нулевая матрица-столбец размеров $(n \times 1)$. Заданы непрерывно-дифференцируемые вектор-функция $f(x)$ и матричные функции $B_1(x)$, $B_2(x)$ размеров $(n \times 1), (n \times p), (n \times q)$ соответственно. Уравнение модели объекта нелинейно по состоянию, но линейно по управлению и возмущению.

Модель измерительной системы задается выражением

$$y(t) = h(x(t)) + D(x(t))v(t), \quad (2)$$

где $y \in R^m$ – вектор выхода (вектор измерений), $h(x)$ – матричная непрерывно-дифференцируемая функция размеров $(m \times n)$, $v \in R^m$ – вектор ошибок и погрешностей измерений, $D(x)$ – заданная непрерывная матричная функция размеров $(m \times m)$.

Предполагается, что:

- $w(\cdot) \in L_2[0, \infty)$, $u(\cdot) \in L_2[0, \infty)$, $v(\cdot) \in L_2[0, \infty)$;
- начало координат $x \equiv o$ есть точка равновесия, т.е. $f(o) = o$;
- $B_1(x) \neq O, B_2(x) \neq O$, $h(o) = o$, где O – нулевая матрица соответствующих размеров;
- $\forall x \in R^n D(x)$ – невырожденная квадратная матрица размеров $(m \times m)$.



Выполним операцию факторизации, т.е. реализуем процесс преобразования нелинейной системы к структуре, похожей на линейную (linear-like), с матрицами, зависящими от вектора состояния.

Известно (Banks, Lewis, Tran, 2007; Cloutier, D'Souza, Mracek, 1996), что если $f(o) = o$, $f(x) \in C^1(R^n)$ и $h(o) = o$, $h(x) \in C^1(R^n)$, то существуют матричные функции $A(x)$ и $C(x)$, такие что

$$f(x) = A(x)x, \quad h(x) = C(x)x. \quad (3)$$

Заметим, что операция факторизации для $n > 1$ является неоднозначной (Banks, Lewis, Tran, 2007; Cloutier, D'Souza, Mracek, 1996).

Тогда уравнения (1) и (2) принимают вид

$$\dot{x}(t) = A(x(t))x(t) + B_1(x(t))w(t) + B_2(x(t))u(t), \quad x(0) = x_0, \quad (4)$$

$$y(t) = C(x(t))x(t) + D(x(t))v(t). \quad (5)$$

Воспользуемся аналогией с постановкой задачи синтеза H^∞ – наблюдателей для линейных систем, рассмотренной в (Пантелеев, Яковлева, 2023). В ней определены:

- математическая модель объекта управления

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B_1(t)w(t) + B_2(t)u(t), \quad x(0) = x_0, \quad (6)$$

- модель измерительной системы

$$y(t) = C(t)x(t) + D(t)v(t), \quad (7)$$

где $x \in R^n$ – вектор состояния, $w \in R^p$ – вектор возмущения, $u \in R^q$ – вектор управления, $y \in R^m$ – вектор выхода (вектор измерений), $v \in R^m$ – вектор погрешностей измерений, $t \in T = [0, \infty)$ – время. Заданы непрерывные матрицы $A(t), B_1(t), B_2(t), C(t), D(t)$ размеров $(n \times n)$, $(n \times p)$, $(n \times q)$, $(m \times n)$, $(m \times m)$ соответственно.

Предполагается, что:

- a) $w(\cdot) \in L_2[0, \infty)$, $v(\cdot) \in L_2[0, \infty)$,
- б) $m \leq n$, $\text{rg } C(t) = m \quad \forall t \in T$;
- в) $D(t)$ – невырожденная квадратная матрица.

Ставится задача о нахождении оценки $\hat{x}(t)$ вектора состояния $x(t)$ по результатам обработки накопленной информации, полученной от измерительной системы, т.е. $y'_0 = \{y(\tau), 0 \leq \tau \leq t\}$. При этом требуется минимизировать величину ошибки оценивания $\varepsilon(t) = x(t) - \hat{x}(t)$ в условиях неопределенности информации о векторе начальных состояний x_0 , законах изменения векторов возмущений и ошибок измерений.

Предполагается, что структура наблюдателя состояния описывается уравнением

$$\frac{d\hat{x}}{dt} = A(t)\hat{x}(t) + B_2(t)u(t) + K(t)[y(t) - C(t)\hat{x}(t)], \quad \hat{x}(0) = \hat{x}_0, \quad (8)$$



где $\hat{x} \in R^n$ – вектор оценок координат вектора состояния, $K(t)$ – неизвестная непрерывная матрица размеров $(n \times m)$, \hat{x}_0 – вектор начальных значений оценок координат вектора состояния, задаваемый исходя из имеющейся априорной информации о возможных начальных состояниях модели объекта управления (6). Матрица $K(t)$ выполняет функцию управления процессом наблюдения.

Получим уравнение, описывающее изменение ошибки оценивания, вычитая из уравнения (6) уравнение (8) с учетом (7) и обозначения $\varepsilon(t) = x(t) - \hat{x}(t)$:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= A(t)x(t) + B_1(t)w(t) + B_2(t)u(t), \quad x(0) = x_0, \\ \frac{d\hat{x}}{dt} &= A(t)\hat{x}(t) + B_2(t)u(t) + K(t)[C(t)x(t) + D(t)v(t) - C(t)\hat{x}(t)], \quad \hat{x}(0) = \hat{x}_0, \\ \frac{d\varepsilon}{dt} &= [A(t) - K(t)C(t)]\varepsilon(t) + B_1(t)w(t) - K(t)D(t)v(t), \quad \varepsilon(0) = x_0 - \hat{x}_0. \end{aligned} \quad (9)$$

Будем далее использовать обозначение взвешенной нормы $\|z(t)\|_{Q(t)}^2 = z^T(t)Q(t)z(t)$, где $Q(t)$ – заданная положительно полуопределенная симметрическая матрица.

Требуется обеспечить (если это возможно) выполнение неравенства

$$\begin{aligned} &\frac{\int_0^{t_1} \|\varepsilon(t)\|_{Q(t)}^2 dt}{\|\varepsilon(0)\|_{P_0^{-1}}^2 + \int_0^{t_1} [\|w(t)\|_{W^{-1}(t)}^2 + \|v(t)\|_{V^{-1}(t)}^2] dt} = \\ &= \frac{\int_0^{t_1} [\varepsilon^T(t)Q(t)\varepsilon(t)] dt}{\varepsilon^T(0)P_0^{-1}\varepsilon(0) + \int_0^{t_1} [w^T(t)W^{-1}(t)w(t) + v^T(t)V^{-1}(t)v(t)] dt} \leq \gamma^2, \end{aligned} \quad (10)$$

где $Q(t), P_0, W(t), V(t)$ – симметрические положительно определенные матрицы соответствующих размеров, $\gamma > 0$ – заданное положительное число. При этом желательно найти минимальное значение γ^* , при котором указанные свойства еще справедливы, минимизируя значение числителя дроби при одновременной максимизации знаменателя.

Иными словами, функционал качества управления наблюдателем состояния должен удовлетворять условию

$$I(K, x_0, w, v) = -\frac{1}{2}\gamma^2 \|\varepsilon(0)\|_{P_0^{-1}}^2 + \frac{1}{2} \int_0^{t_1} [\|\varepsilon(t)\|_{Q(t)}^2 - \gamma^2 \|w(t)\|_{W^{-1}(t)}^2 - \gamma^2 \|v(t)\|_{V^{-1}(t)}^2] dt \leq 0, \quad (11)$$

которое будет выполняться при минимизации затрат на управление процессом оценивания при наихудшем влиянии возмущений, начального состояния и ошибок измерений. Множитель $\frac{1}{2}$ добавлен для уменьшения громоздкости записи после дифференцирования.



Требуется найти наилучшую матрицу $K(t)$ наблюдателя (8), наихудшие законы управления внешним воздействием $w(t)$ и погрешностью измерений $v(t)$, наихудший вектор начальных состояний x_0 , обеспечивающие выполнение условия (11).

Решение поставленной задачи имеет вид (Пантелеев, Яковлева, 2023):

$$\dot{P} = AP + PA^T - PC^T \tilde{V}^{-1} CP + B_1 W B_1^T + \frac{1}{\gamma^2} P Q P, \quad P(0) = P_0, \quad (12)$$

$$K^* = PC^T \underbrace{(D^{-1})^T V^{-1} D^{-1}}_{\tilde{V}^{-1}}, \quad w^* = WB_1^T P^{-1} \varepsilon, \quad (13)$$

$$\begin{aligned} v^* &= -VD^T K^T P^{-1} \varepsilon = -VD^T (PC^T \underbrace{(D^{-1})^T V^{-1} D^{-1}}_{\tilde{V}^{-1}})^T P^{-1} \varepsilon = -VD^T ((D^{-1})^T V^{-1} D^{-1})^T C \underbrace{PP^{-1}}_E \varepsilon = \\ &= -V \underbrace{D^T (D^{-1})^T}_{(D^{-1}D)^T} V^{-1} D^{-1} C \varepsilon = -D^{-1} C \varepsilon. \end{aligned} \quad (14)$$

Для решения задачи синтеза наблюдателя состояния системы (1), (2) предлагается применить субоптимальный подход, связанный с переходом к структуре, похожей на линейную, вида (4), (5) методом факторизации (Banks, Lewis, Tran, 2007; Cloutier, D'Souza, Mracek, 1996). Далее использовать аналогию с задачей синтеза H^∞ – наблюдателей для линейных систем, рассмотренной в (Пантелеев, Яковлева, 2023). Ее решение представлено соотношениями (12)–(14). Поскольку модель (4), (5) описывается матрицами, зависящими от вектора состояния, предлагается применить технологию SDRE (State Dependent Riccati Equations), т.е. уравнений Риккати с коэффициентами, также зависящими от вектора состояния. При этом ставится задача получения основных соотношений, задающих структуру наблюдателя, и нахождения условий, при выполнении которых ошибка оценивания стремится к нулю, т.е. наблюдатель является асимптотическим.

Синтез субоптимального асимптотического наблюдателя состояния

Используя математическую модель (4),(5) и известный подход, связанный с применением SDRE, представим решение задачи о субоптимальном H^∞ – асимптотическом наблюдателе в форме

$$\frac{d\hat{x}}{dt} = A(\hat{x}(t))\hat{x}(t) + B_2(\hat{x}(t))u(t) + K(\hat{x}(t))[y(t) - C(\hat{x}(t))\hat{x}(t)], \quad \hat{x}(0) = x_0^*, \quad (15)$$

где $K(\hat{x})$ – матрица коэффициентов усиления наблюдателя размеров $(n \times m)$, x_0^* – столбец, содержащий априорную информацию о начальном состоянии.

Матрица $K(\hat{x}(t))$ может быть найдена по формуле, аналогичной (13):

$$K(\hat{x}(t)) = P(\hat{x}(t))C^T(\hat{x}(t)) \underbrace{[D^{-1}(\hat{x}(t))^T V^{-1}(t) D^{-1}(\hat{x}(t))]}_{\tilde{V}^{-1}(\hat{x}(t))}, \quad (16)$$



где $P(\hat{x}(t))$ – положительно-определенная симметрическая матрица, являющаяся решением дифференциального уравнения Риккати, коэффициенты которого зависят от вектора оценок координат вектора состояния:

$$\begin{aligned} \dot{P}(\hat{x}(t)) = & A(\hat{x}(t))P(\hat{x}(t)) + P(\hat{x}(t))A^T(\hat{x}(t)) - P(\hat{x}(t))C^T(\hat{x}(t))\tilde{V}^{-1}(\hat{x}(t))C(\hat{x}(t))P(\hat{x}(t)) + \\ & + B_1(\hat{x}(t))W(t)B_1^T(\hat{x}(t)) + \frac{1}{\gamma^2}P(\hat{x}(t))Q(t)P(\hat{x}(t)), \end{aligned} \quad (17)$$

$$P(\hat{x}(0)) = P_0. \quad (18)$$

Наихудшее внешнее воздействие и погрешность измерений могут быть найдены по формулам, следующим из (13),(14):

$$w^*(t) = W(t)B_1^T(x(t))P^{-1}(\hat{x}(t))\varepsilon(t), \quad v^*(t) = -D^{-1}(x(t))C(x(t))\varepsilon(t), \quad (19)$$

где $\varepsilon(t) = x(t) - \hat{x}(t)$.

Далее принимаются следующие допущения (Belkzadeh, Taghirad, 2012).

1. $\exists k_A, k_B, k_C > 0$, что $\forall x^1, x^2 \in R^n$ справедливо:

$$\|A(x^1) - A(x^2)\| \leq k_A \|x^1 - x^2\|, \text{ если } \|x^1 - x^2\| \leq \varepsilon_A,$$

$$\|B_2(x^1) - B_2(x^2)\| \leq k_B \|x^1 - x^2\|, \text{ если } \|x^1 - x^2\| \leq \varepsilon_B,$$

$$\|C(x^1) - C(x^2)\| \leq k_C \|x^1 - x^2\|, \text{ если } \|x^1 - x^2\| \leq \varepsilon_C.$$

2. $\exists \rho, \sigma, \bar{c}, \bar{q}, \bar{w}, \bar{b}_1 > 0$, что $\|Q(t)\| \leq \bar{q}$, $\|W(t)\| \leq \bar{w}$, $\|C(x(t))\| \leq \bar{c}$, $\|x(t)\| \leq \sigma$, $\|u(t)\| \leq \rho$, $\|B_1(x(t))\| \leq \bar{b}_1 \quad \forall t \in T$.
3. $\forall t \in T$ справедливы оценки $V(t) \geq \underline{y}E$, $D(x(t)) \geq \underline{d}E$.
4. Решение уравнения (17) ограничено:

$$\underline{p}E \leq P(\hat{x}(t)) \leq \bar{p}E,$$

где $\underline{p}, \bar{p} > 0$.

Теорема 1 (достаточные условия существования асимптотического наблюдателя).

Если выполняются допущения 1–4 для системы управления (4),(5), то наблюдатель, удовлетворяющий уравнению (15) с учетом (16)–(19), является асимптотическим, т.е. $\varepsilon(t) = x(t) - \hat{x}(t) \rightarrow o$ при $t \rightarrow +\infty$.

Доказательство.

Вычитая из уравнения (4) уравнение (15) с учетом (5), получаем

$$\dot{\varepsilon}(t) = A(x(t))x(t) + B_1(x(t))w(t) + B_2(x(t))u(t) - A(\hat{x}(t))\hat{x}(t) - B_2(\hat{x}(t))u(t) -$$



$$-K(\hat{x}(t))[C(x(t))x(t) + D(x(t))v(t) - C(\hat{x}(t))\hat{x}(t)].$$

Добавим к правой части и вычтем $A(\hat{x}(t))x(t)$, а к выражению в квадратных скобках $C(\hat{x}(t))x(t)$:

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}(t) = & \underbrace{A(\hat{x}(t))x(t) - A(\hat{x}(t))\hat{x}(t)}_{A(\hat{x}(t))\varepsilon(t)} + A(x(t))x(t) - A(\hat{x}(t))x(t) + B_1(x(t))w(t) + \\ & + [B_2(x(t)) - B_2(\hat{x}(t))]u(t) - K(\hat{x}(t))\underbrace{[C(\hat{x}(t))x(t) - C(\hat{x}(t))\hat{x}(t)]}_{C(\hat{x}(t))\varepsilon(t)} - \\ & - K(\hat{x}(t))[C(x(t))x(t) - C(\hat{x}(t))x(t)] - K(\hat{x}(t))D(x(t))v(t) + B_1(x(t))w(t). \\ \dot{\varepsilon}(t) = & [A(\hat{x}(t)) - K(\hat{x}(t))C(\hat{x}(t))]\varepsilon(t) + \varphi(x(t), \hat{x}(t), u(t)) - K(\hat{x}(t))\Phi(x(t), \hat{x}(t)) + \\ & + \Psi(x(t), \hat{x}(t), v(t), w(t)), \end{aligned} \quad (20)$$

В результате получаем

где

$$\begin{aligned} \varphi(x(t), \hat{x}(t), u(t)) &= [A(x(t)) - A(\hat{x}(t))]x(t) + [B_2(x(t)) - B_2(\hat{x}(t))]u(t), \\ \Phi(x(t), \hat{x}(t)) &= [C(x(t)) - C(\hat{x}(t))]x(t), \\ \Psi(x(t), \hat{x}(t), v(t), w(t)) &= -K(\hat{x}(t))D(x(t))v(t) + \underbrace{B_1(x(t))w(t)}_{\Psi_1(x(t), \hat{x}(t), v(t))} - \underbrace{B_1(x(t))w(t)}_{\Psi_2(x(t), \hat{x}(t), w(t))}. \end{aligned}$$

Тогда, учитывая п. 1 допущений, получаем

$$\begin{aligned} \|\varphi(x(t), \hat{x}(t), u(t))\| &\leq \| [A(x(t)) - A(\hat{x}(t))]x(t) \| + \| [B_2(x(t)) - B_2(\hat{x}(t))]u(t) \| \leq \\ &\leq \| [A(x(t)) - A(\hat{x}(t))] \| \|x(t)\| + \| [B_2(x(t)) - B_2(\hat{x}(t))] \| \|u(t)\| \leq (k_A\sigma + k_B\rho) \|x(t) - \hat{x}(t)\| \\ &\forall x(t), \hat{x}(t) : \|x(t) - \hat{x}(t)\| \leq \min\{\varepsilon_A, \varepsilon_B\}; \\ \|\Phi(x(t), \hat{x}(t))\| &= \| [C(x(t)) - C(\hat{x}(t))]x(t) \| \leq \| [C(x(t)) - C(\hat{x}(t))] \| \|x(t)\| \leq k_C\sigma \|x(t) - \hat{x}(t)\| \\ &\forall x(t), \hat{x}(t) : \|x(t) - \hat{x}(t)\| \leq \varepsilon_C. \end{aligned}$$

Получим оценку с использованием наихудшего закона управления внешним возмущением (19), учитывая п. 2 допущений:

$$-\Psi_1(x(t), \hat{x}(t), v(t)) = -D(x(t))v^*(t) = D(x(t))D^{-1}(x(t))C(x(t))[x(t) - \hat{x}(t)] = C(x(t))[x(t) - \hat{x}(t)];$$

$$\|-\Psi_1(x(t), \hat{x}(t), v(t))\| = \|C(x(t))[x(t) - \hat{x}(t)]\| \leq \|C(x(t))\| \|x(t) - \hat{x}(t)\| \leq \bar{c} \|x(t) - \hat{x}(t)\|.$$

Получим оценку с использованием наихудшего закона управления помехой (19), учитывая п. 2 допущений и следствие п. 4, т.е. $\|P^{-1}(\hat{x}(t))\| \leq \frac{1}{p}$:



$$\begin{aligned} \|\Psi_2(x(t), \hat{x}(t), w(t))\| &= \|B_1(x(t))w^*(t)\| = \|B_1(x(t))W(t)B_1^T(x(t))P^{-1}(\hat{x}(t))\varepsilon(t)\| \leq \\ &\leq \bar{b}_1^2 \bar{w} \frac{1}{p} \|x(t) - \hat{x}(t)\|. \end{aligned}$$

Введем в рассмотрение матрицу $\Pi(\hat{x}(t)) = P^{-1}(\hat{x}(t))$, тогда

$$\begin{aligned} \Pi(\hat{x}(t))K(\hat{x}(t)) &= \underbrace{\Pi(\hat{x}(t))P(\hat{x}(t))}_{E} C^T(\hat{x}(t)) \underbrace{[D^{-1}(\hat{x}(t))^T V^{-1}(t) D^{-1}(\hat{x}(t))]}_{V^{-1}(\hat{x}(t))} = \\ &= C^T(\hat{x}(t)) D^{-1}(\hat{x}(t))^T V^{-1}(t) D^{-1}(\hat{x}(t)). \end{aligned}$$

Найдем оценку выражения

$$\begin{aligned} \Delta &= \|(x(t) - \hat{x}(t))^T \Pi(\hat{x}(t))\varphi(x(t), \hat{x}(t), u(t)) - (x(t) - \hat{x}(t))^T \Pi(\hat{x}(t))K(\hat{x}(t)) \Phi(x(t), \hat{x}(t)) - \\ &\quad - (x(t) - \hat{x}(t))^T \Pi(\hat{x}(t))K(\hat{x}(t))\Psi_1(x(t), \hat{x}(t), v(t)) + (x(t) - \hat{x}(t))^T \Pi(\hat{x}(t))\Psi_2(x(t), \hat{x}(t), w(t))\| \leq \\ &\leq \|(x(t) - \hat{x}(t))^T \Pi(\hat{x}(t))\varphi(x(t), \hat{x}(t), u(t))\| + \|(x(t) - \hat{x}(t))^T \Pi(\hat{x}(t))K(\hat{x}(t)) \Phi(x(t), \hat{x}(t))\| + \\ &\quad + \|(x(t) - \hat{x}(t))^T \Pi(\hat{x}(t))K(\hat{x}(t))\Psi_1(x(t), \hat{x}(t), v(t))\| + \|(x(t) - \hat{x}(t))^T \Pi(\hat{x}(t))\Psi_2(x(t), \hat{x}(t), w(t))\| \leq \\ &\leq \|x(t) - \hat{x}(t)\| \|\Pi(\hat{x}(t))\| \|\varphi(x(t), \hat{x}(t), u(t))\| + \\ &\quad + \|x(t) - \hat{x}(t)\| \|C^T(\hat{x}(t))D^{-1}(\hat{x}(t))^T V^{-1}(t)D^{-1}(\hat{x}(t))\| \|\Phi(x(t), \hat{x}(t))\| + \\ &\quad + \|x(t) - \hat{x}(t)\| \|C^T(\hat{x}(t))D^{-1}(\hat{x}(t))^T V^{-1}(t)D^{-1}(\hat{x}(t))\| \|\Psi_1(x(t), \hat{x}(t), v(t))\| + \\ &\quad + \|x(t) - \hat{x}(t)\| \|\Pi(\hat{x}(t))\| \|\Psi_2(x(t), \hat{x}(t), w(t))\|. \end{aligned}$$

Поскольку $\|\Pi(\hat{x}(t))\| \leq \frac{1}{p}$, согласно п. 3 допущений $\|D^{-1}(\hat{x}(t))\| \leq \frac{1}{d}$ и $\|V^{-1}(t)\| \leq \frac{1}{v}$, то

$$\begin{aligned} \Delta &= \|x(t) - \hat{x}(t)\| \frac{1}{p} (k_A \sigma + k_B \rho) \|x(t) - \hat{x}(t)\| + \|x(t) - \hat{x}(t)\| \frac{\bar{c}}{\underline{d}^2 v} k_C \sigma \|x(t) - \hat{x}(t)\| + \\ &\quad + \|x(t) - \hat{x}(t)\| \frac{\bar{c}}{\underline{d}^2 v} \bar{c} \|x(t) - \hat{x}(t)\| + \|x(t) - \hat{x}(t)\| \frac{1}{p} \bar{b}_1^2 \bar{w} \frac{1}{p} \|x(t) - \hat{x}(t)\| = \\ &= \underbrace{\left[\frac{1}{p} (k_A \sigma + k_B \rho) + \frac{\bar{c}}{\underline{d}^2 v} k_C \sigma + \frac{\bar{c}^2}{\underline{d}^2 v} + \bar{b}_1^2 \bar{w} \frac{1}{p^2} \right]}_{\eta} \|x(t) - \hat{x}(t)\|^2 = \eta \|x(t) - \hat{x}(t)\|^2. \end{aligned}$$

Для доказательства устойчивости введем функцию Ляпунова

$$V(t, \varepsilon(t)) = \varepsilon^T(t) \Pi(t) \varepsilon(t), \quad (21)$$



причем справедливы оценки

$$\frac{1}{\bar{p}} \|\varepsilon(t)\|^2 \leq V(t, \varepsilon(t)) \leq \frac{1}{p} \|\varepsilon(t)\|^2. \quad (22)$$

С учетом уравнения для ошибки оценивания

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}(t) = & [A(\hat{x}(t)) - K(\hat{x}(t))C(\hat{x}(t))] \varepsilon(t) + \varphi(x(t), \hat{x}(t), u(t)) - K(\hat{x}(t)) \Phi(x(t), \hat{x}(t)) - \\ & - K(\hat{x}(t)) \Psi_1(x(t), \hat{x}(t), v(t)) + \Psi_2(x(t), \hat{x}(t), w(t)) \end{aligned}$$

найдем полную производную в силу системы:

$$\begin{aligned} \dot{V}(t, \varepsilon(t)) = & \dot{\varepsilon}^T(t) \Pi(t) \varepsilon(t) + \varepsilon^T(t) \dot{\Pi}(t) \varepsilon(t) + \varepsilon^T(t) \Pi(t) \dot{\varepsilon}(t) = \\ = & \varepsilon^T(t) \{ [\dot{\Pi}(t) + \Pi(t)[A(\hat{x}(t)) - K(\hat{x}(t))C(\hat{x}(t))]]\} \varepsilon(t) + \\ & + \varepsilon^T(t) [A(\hat{x}(t)) - K(\hat{x}(t))C(\hat{x}(t))]^T \Pi(t) \varepsilon(t) + \\ & + 2\varepsilon^T(t) \Pi(t) [\varphi(x(t), \hat{x}(t), u(t)) - K(\hat{x}(t)) \Phi(x(t), \hat{x}(t)) - K(\hat{x}(t)) \Psi_1(x(t), \hat{x}(t), v(t)) + \\ & + \Psi_2(x(t), \hat{x}(t), w(t))]. \end{aligned}$$

Заметим, что

$$\begin{aligned} \Pi(\hat{x}(t))K(\hat{x}(t))C(\hat{x}(t)) &= \underbrace{P^{-1}(\hat{x}(t))P(\hat{x}(t))}_E C^T(\hat{x}(t)) \tilde{V}^{-1}(\hat{x}(t))C(\hat{x}(t)) = \\ &= C^T(\hat{x}(t)) \tilde{V}^{-1}(\hat{x}(t))C(\hat{x}(t)), \\ [K(\hat{x}(t))C(\hat{x}(t))]^T \Pi(\hat{x}(t)) &= C^T(\hat{x}(t))K^T(\hat{x}(t)) \Pi(\hat{x}(t)) = \\ &= C^T(\hat{x}(t)) \tilde{V}^{-1}(\hat{x}(t))C(\hat{x}(t)) \underbrace{P(\hat{x}(t)) \Pi(\hat{x}(t))}_E. \end{aligned}$$

Поэтому справедливо неравенство

$$\dot{V}(t, \varepsilon(t)) \leq \varepsilon^T(t) [\dot{\Pi}(\hat{x}(t)) + \Pi(\hat{x}(t))A(\hat{x}(t)) + A^T(\hat{x}(t))\Pi(\hat{x}(t)) - 2C^T(\hat{x}(t)) \tilde{V}^{-1}(\hat{x}(t))C(\hat{x}(t))] \varepsilon(t) + 2\eta \|\varepsilon(t)\|^2.$$

Поскольку $\Pi P = P \Pi = E$ то $\dot{\Pi}P + P\dot{\Pi} = 0$ и $\dot{\Pi} = -\Pi \dot{P} \Pi$ (аргументы для простоты опущены). Так как

$$\dot{P} = AP + PA^T - PC^T \tilde{V}^{-1} CP + B_1 WB_1^T + \frac{1}{\gamma^2} P Q P,$$



то справедливо

$$\begin{aligned}\dot{\Pi} &= -\Pi \dot{\Pi} = -\Pi \underbrace{A \Pi}_{E} - \underbrace{\Pi P}_{E} A^T \Pi + \underbrace{\Pi P}_{E} C^T \tilde{V}^{-1} C \underbrace{\Pi}_{E} - \Pi B_1 W B_1^T \Pi - \frac{1}{\gamma^2} \underbrace{\Pi P}_{E} Q \underbrace{\Pi}_{E} = \\ &= -\Pi A - A^T \Pi + C^T \tilde{V}^{-1} C - \Pi B_1 W B_1^T \Pi - \frac{1}{\gamma^2} Q.\end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned}\dot{V}(t, \varepsilon(t)) &\leq \varepsilon^T(t) [C^T \tilde{V}^{-1} C - \Pi B_1 W B_1^T \Pi - \frac{1}{\gamma^2} Q - 2C^T \tilde{V}^{-1} C] \varepsilon(t) + \\ &+ 2\eta \|\varepsilon(t)\|^2 \leq -\left[\frac{\bar{c}^2}{d^2 v} + \frac{\bar{b}_1^2 \bar{w}}{p^2} + \frac{1}{\gamma^2} \bar{q} - 2\eta \right] \|\varepsilon(t)\|^2.\end{aligned}$$

Если справедливо неравенство $\left[\frac{\bar{c}^2}{d^2 v} + \frac{\bar{b}_1^2 \bar{w}}{p^2} + \frac{1}{\gamma^2} \bar{q} - 2\eta \right] > 0$, то производная $\dot{V}(t, \varepsilon(t))$ является локально отрицательно определенной. Согласно методу Ляпунова

тривиальное решение $\varepsilon(t) \equiv o$ является асимптотически устойчивым.

Доказательство завершено.

Замечание

Аналогично (Belkzadeh, Taghirad, 2012) можно сформулировать задачу о синтезе экспоненциального наблюдателя, для которого решение $\varepsilon(t) \equiv o$ является асимптотически устойчивым, и существуют константы $\varepsilon, \eta, \theta > 0$, при которых ошибка оценивания удовлетворяет условию

$$\|\varepsilon(t)\| \leq \eta \|\varepsilon(0)\| e^{-\frac{t}{\theta}} \quad \forall t \geq 0 \quad (23)$$

для всех решений уравнения (20) с начальными условиями $\|\varepsilon(0)\| \leq \varepsilon$. Параметр θ определяет скорость убывания ошибки оценивания.

Для дополнительного влияния на процесс оценивания, как и в (Belkzadeh, Taghirad, 2012), введем дополнительные члены в правую часть уравнения (17) с параметром $\alpha > 0$:

$$\begin{aligned}\dot{P}(\hat{x}(t)) &= [A(\hat{x}(t)) + \alpha E] P(\hat{x}(t)) + P(\hat{x}(t)) [A^T(\hat{x}(t)) + \alpha E] - \\ &- P(\hat{x}(t)) C^T(\hat{x}(t)) \tilde{V}^{-1}(\hat{x}(t)) C(\hat{x}(t)) P(\hat{x}(t)) + B_1(\hat{x}(t)) W(t) B_1^T(\hat{x}(t)) + \\ &+ \frac{1}{\gamma^2} P(\hat{x}(t)) Q(t) P(\hat{x}(t)),\end{aligned} \quad (24)$$

$$P(\hat{x}(0)) = P_0. \quad (25)$$



Предположим, что справедлив п. 4 допущений теоремы 1, т.е. $\underline{p}E \leq P(\hat{x}(t)) \leq \bar{p}E$, где $\underline{p}, \bar{p} > 0$. С учетом отличий уравнений (24) и (17) получаем

$$\begin{aligned}\dot{\Pi} = -\Pi \dot{P} \Pi &= -\Pi \underbrace{2\alpha}_{\underline{E}} \underbrace{P \Pi}_{\bar{E}} - \Pi \underbrace{A}_{\underline{E}} \underbrace{P \Pi}_{\bar{E}} - \underbrace{\Pi P}_{\underline{E}} A^T \Pi + \underbrace{\Pi P C^T \tilde{V}^{-1} C}_{\bar{E}} \underbrace{P \Pi}_{\underline{E}} - \Pi B_1 W B_1^T \Pi - \\ &- \frac{1}{\gamma^2} \underbrace{\Pi P Q}_{\underline{E}} \underbrace{P \Pi}_{\bar{E}} = -2\alpha \Pi - \Pi A - A^T \Pi + C^T \tilde{V}^{-1} C - \Pi B_1 W B_1^T \Pi - \frac{1}{\gamma^2} Q.\end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned}\dot{V}(t, \varepsilon(t)) &\leq -2\alpha \varepsilon^T(t) \Pi \varepsilon(t) + \varepsilon^T(t) [C^T \tilde{V}^{-1} C - \Pi B_1 W B_1^T \Pi - \frac{1}{\gamma^2} Q - 2C^T \tilde{V}^{-1} C] \varepsilon(t) + \\ &+ 2\eta \|\varepsilon(t)\|^2 \leq -2\alpha V(t, \varepsilon(t)) - \left[\frac{\bar{c}^2}{\underline{d}^2 \underline{v}} + \frac{\bar{b}_1^2 \bar{w}}{\underline{p}^2} + \frac{1}{\gamma^2} \bar{q} - 2\eta \right] \|\varepsilon(t)\|^2.\end{aligned}$$

С учетом $V(t, \varepsilon(t)) = \varepsilon^T(t) \Pi(t) \varepsilon(t)$ и $\frac{1}{\bar{p}} \|\varepsilon(t)\|^2 \leq V(t, \varepsilon(t)) \leq \frac{1}{\underline{p}} \|\varepsilon(t)\|^2$ получаем

$$-\|\varepsilon(t)\|^2 \leq -\underline{p} V(t, \varepsilon(t)) \leq -\frac{\underline{p}}{\bar{p}} \|\varepsilon(t)\|^2. \text{ Отсюда}$$

$$\dot{V}(t, \varepsilon(t)) \leq - \left[2\alpha + \frac{\bar{c}^2 \underline{p}}{\underline{d}^2 \underline{v}} + \frac{\bar{b}_1^2 \bar{w}}{\underline{p}} + \frac{p}{\gamma^2} \bar{q} - 2\eta \underline{p} \right] V(t, \varepsilon(t)). \quad (26)$$

Если справедливо неравенство $\left[2\alpha + \frac{\bar{c}^2 \underline{p}}{\underline{d}^2 \underline{v}} + \frac{\bar{b}_1^2 \bar{w}}{\underline{p}} + \frac{p}{\gamma^2} \bar{q} - 2\eta \underline{p} \right] > 0$, то производная $\dot{V}(t, \varepsilon(t))$ является локально отрицательно определенной. Согласно методу Ляпунова тривиальное решение $\varepsilon(t) \equiv 0$ является асимптотически устойчивым.

Разделяя переменные и интегрируя в (26), имеем

$$V(t, \varepsilon(t)) \leq V(0, \varepsilon(0)) \exp \left[- \left(2\alpha + \frac{\bar{c}^2 \underline{p}}{\underline{d}^2 \underline{v}} + \frac{\bar{b}_1^2 \bar{w}}{\underline{p}} + \frac{p}{\gamma^2} \bar{q} - 2\eta \underline{p} \right) t \right]. \quad (27)$$

Из условия $\frac{1}{\bar{p}} \|\varepsilon(t)\|^2 \leq V(t, \varepsilon(t)) \leq \frac{1}{\underline{p}} \|\varepsilon(t)\|^2$ находим $\|\varepsilon(t)\|^2 \leq \bar{p} V(t, \varepsilon(t)) \leq \frac{\bar{p}}{\underline{p}} \|\varepsilon(t)\|^2$ и

$$\|\varepsilon(t)\|^2 \leq \frac{\bar{p}}{\underline{p}} \|\varepsilon(0)\|^2 \exp \left[- \left(2\alpha + \frac{\bar{c}^2 \underline{p}}{\underline{d}^2 \underline{v}} + \frac{\bar{b}_1^2 \bar{w}}{\underline{p}} + \frac{p}{\gamma^2} \bar{q} - 2\eta \underline{p} \right) t \right],$$

или

$$\|\varepsilon(t)\| \leq \sqrt{\frac{\bar{p}}{\underline{p}}} \|\varepsilon(0)\| \exp \left[- \left(\alpha + \frac{\bar{c}^2 \underline{p}}{2\underline{d}^2 \underline{v}} + \frac{\bar{b}_1^2 \bar{w}}{2\underline{p}} + \frac{p}{2\gamma^2} \bar{q} - \eta \underline{p} \right) t \right].$$



Сравнивая с (23), находим $\eta = \sqrt{\frac{\bar{p}}{p}}$, $\theta^{-1} = \left(\alpha + \frac{\bar{c}^2 p}{2d^2 v} + \frac{\bar{b}_1^2 \bar{w}}{2p} + \frac{p}{2\gamma^2} \bar{q} - \eta \underline{p} \right)$.

Желаемые асимптотические свойства наблюдателя выполняются, если параметры α и γ выбирается из условия

$$\left[2\alpha + \frac{\bar{c}^2 p}{d^2 v} + \frac{\bar{b}_1^2 \bar{w}}{p} + \frac{p}{\gamma^2} \bar{q} - 2\eta \underline{p} \right] > 0,$$

т.е. величина $\alpha > 0$ должна быть достаточно большой.

Алгоритм приближенного синтеза H^∞ – наблюдателей состояния нелинейных динамических систем, линейных по управлению и возмущению

Шаг 1. Для системы (1),(2) выполнить операцию факторизации (3).

Шаг 2. Для полученной системы (4),(5) задать матрицы $P_0 > 0$, $Q(t) > 0$, $W(t) > 0$, $V(t) > 0$, число $\gamma > 0$, априорную информацию о начальном состоянии, представленную вектором x_0^* .

Шаг 3. Решить совместно систему

$$\dot{x}(t) = A(x(t))x(t) + B_1(x(t))w(t) + B_2(x(t))u(t), \quad x(0) = x_0,$$

$$y(t) = C(x(t))x(t) + D(x(t))v(t),$$

$$\frac{d\hat{x}}{dt} = A(\hat{x}(t))\hat{x}(t) + B_2(\hat{x}(t))u(t) + K(\hat{x}(t))[y(t) - C(\hat{x}(t))\hat{x}(t)], \quad \hat{x}(0) = x_0^*,$$

$$\dot{P}(\hat{x}(t)) = A(\hat{x}(t))P(\hat{x}(t)) + P(\hat{x}(t))A^T(\hat{x}(t)) - P(\hat{x}(t))C^T(\hat{x}(t))\tilde{V}^{-1}(\hat{x}(t))C(\hat{x}(t))P(\hat{x}(t)) +$$

$$+ B_1(\hat{x}(t))W(t)B_1^T(\hat{x}(t)) + \frac{1}{\gamma^2}P(\hat{x}(t))Q(t)P(\hat{x}(t)), \quad P(\hat{x}(0)) = P_0,$$

$$w^*(t) = W(t)B_1^T(x(t))P^{-1}(\hat{x}(t))\varepsilon(t), \quad v^*(t) = -D^{-1}(x(t))C(x(t))\varepsilon(t),$$

где $\varepsilon(t) = x(t) - \hat{x}(t)$.

Шаг 4. Если переходные процессы по переменной $\varepsilon(t) = x(t) - \hat{x}(t)$ удовлетворяют требованиям, процедуру синтеза завершить. Иначе продолжить подбор параметров P_0 , $Q(t)$, $W(t)$, $V(t)$, γ , переходя к шагу 2.

Результаты

Приведем решение модельного примера.

Модель объекта управления (1) задана в форме

$$\dot{x}_1(t) = 0,01x_1(t) - x_2(t) + w(t),$$

$$\dot{x}_2 = x_1(t) - 0.003x_2^2(t).$$



Модель измерительной системы (2) задается выражением

$$y(t) = x_1(t) + v(t).$$

Таким образом, матрицы, описывающие систему (4), (5), принимают вид

$$A(x) = \begin{pmatrix} 0,01 & -1 \\ 1 & -0,003x_1 \end{pmatrix}, \quad B_1(x) = B_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad C(x) = C = (1 \quad 0), \quad D(x) = D = 1.$$

В качестве внешних воздействий $w(t)$ и погрешности измерений $v(t)$ можно выбрать как наихудшие воздействия, описываемые выражением (19), так и произвольные ограниченные (их структура приведена в табл. 1). Матрицы Q , W , V и P_0 в (10) подбираются таким образом, чтобы обеспечивать корректный синтез наблюдателя, а также желаемый вид переходных процессов в системе. Подобранные матрицы представлены в табл. 1.

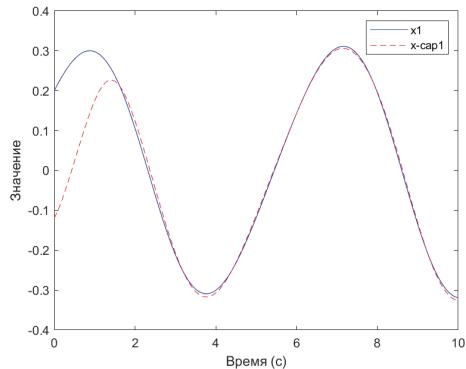
Таблица 1 / Table 1

Параметры моделирования
Numerical simulation parameters

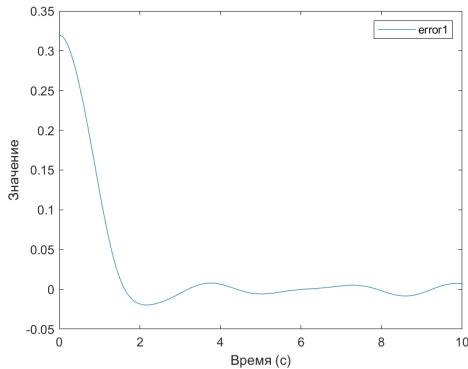
Q	$0,1 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
V	10
W	1
P_0	$10 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
γ	5
T	[0;10]
$w(t)$	$\frac{3}{100} [\sin 2t + \cos \frac{\pi}{4} t]$
$v(t)$	$\frac{1}{400} \left[\sin t + \cos \frac{\pi}{4} t \right]$

На рис. 1–6 отражены результаты моделирования системы управления совместно с наблюдателем состояния при различных начальных условиях и графики изменения величины ошибки оценивания координат вектора состояния для каждого тестового запуска.

Моделирование процесса на рис. 1–2 выполнено при начальных условиях: системы $x(0) = (0,2 \quad -0,2)^T$ и наблюдателя $\hat{x}(0) = (-0,12 \quad 0,12)^T$.



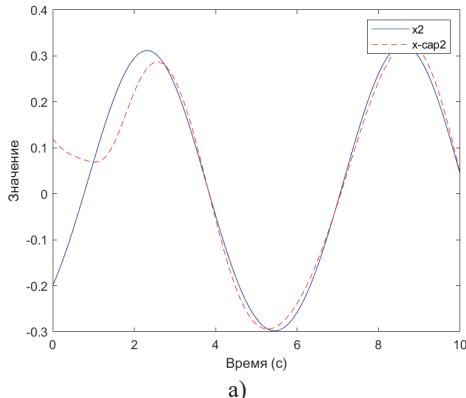
a)



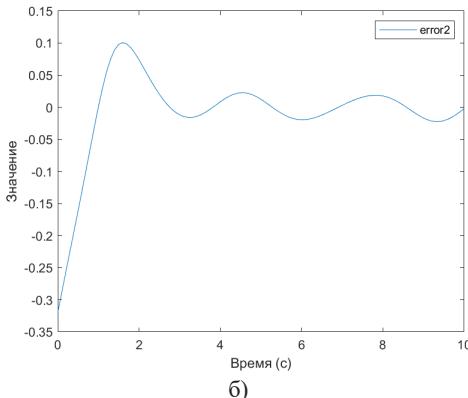
б)

Рис. 1. а) Переходные процессы для координаты x_1 и ее оценки \hat{x}_1
б) Ошибка оценивания координаты x_1

Fig. 1. a) Transient processes for x_1 and its estimate \hat{x}_1
b) Coordinate estimation error of x_1



a)



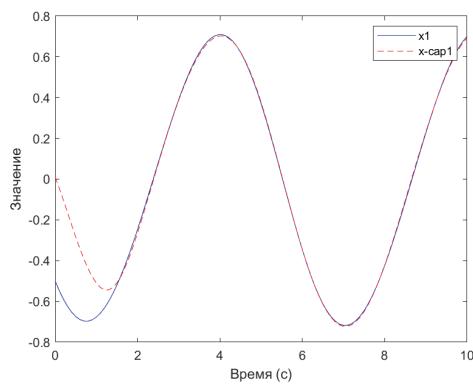
б)

Рис. 2. а) Переходные процессы для координаты x_2 и ее оценки \hat{x}_2
б) Ошибка оценивания координаты x_2

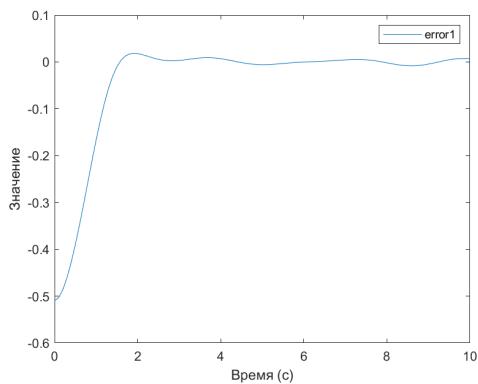
Fig. 2. a) Transient processes for x_2 and its estimate \hat{x}_2
b) Coordinate estimation error of x_2

Моделирование процесса на рис. 3–4 выполнено при начальных условиях:

$$x(0) = \begin{pmatrix} -0.5 & 0.5 \end{pmatrix}^T, \quad \hat{x}(0) = \begin{pmatrix} 0.01 & 0.01 \end{pmatrix}^T.$$



a)



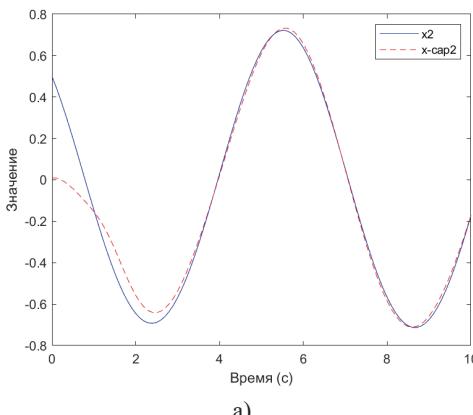
6)

Рис. 3. а) Переходные процессы для координаты x_1 и ее оценки \hat{x}_1

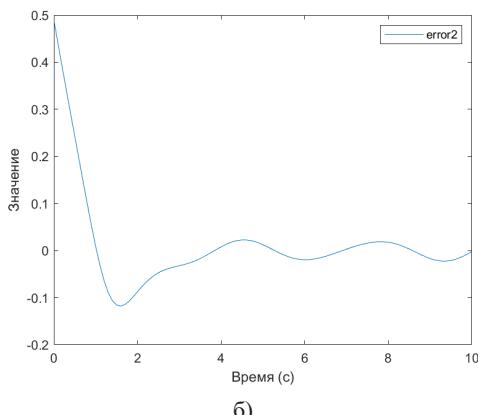
б) Ошибка оценивания координаты x_1

Fig. 3. a) Transient processes for x_1 and its estimate \hat{x}_1

b) Coordinate estimation error of x_1



a)



6)

Рис. 4. а) Переходные процессы для координаты x_2 и ее оценки \hat{x}_2

б) Ошибка оценивания координаты x ,

Fig. 4. a) Transient processes for x_2 , and its estimate \hat{x}_2 ,

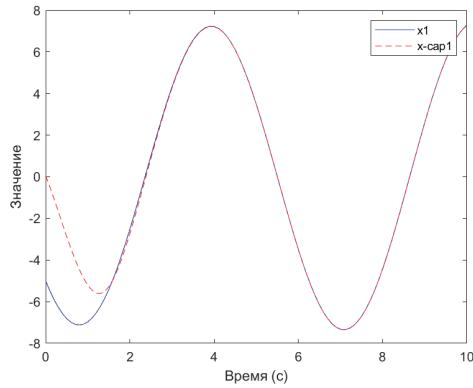
b) Coordinate estimation error of x_2

Моделирование процесса на рис. 5–6 выполнено при начальных условиях:

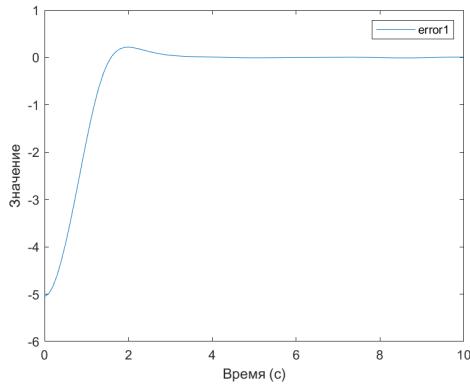
$$x(0) = \begin{pmatrix} -5 & 5 \end{pmatrix}^T, \quad \hat{x}(0) = \begin{pmatrix} 0,05 & 0,05 \end{pmatrix}^T.$$



Для произведения вычислений и моделирования использовалась система компьютерной математики MATLAB.



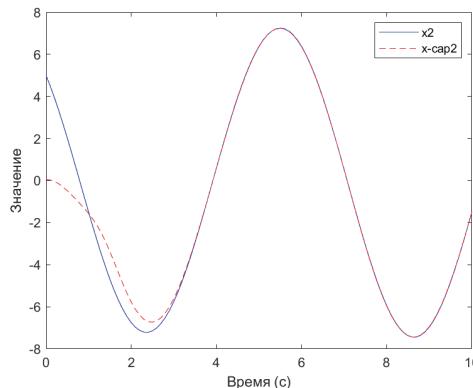
а)



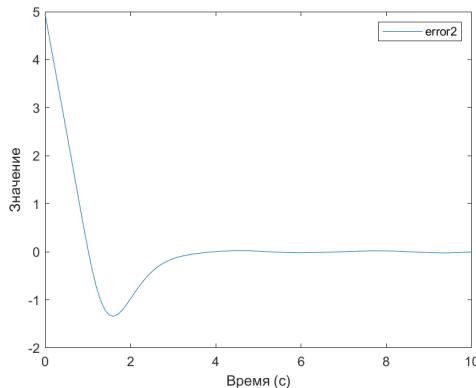
б)

Рис. 5. а) Переходные процессы для координаты x_1 и ее оценки \hat{x}_1
б) Ошибка оценивания координаты x_1

Fig. 5. а) Transient processes for x_1 and its estimate \hat{x}_1
б) Coordinate estimation error of x_1



а)



б)

Рис. 6. а) Переходные процессы для координаты x_2 и ее оценки \hat{x}_2
б) Ошибка оценивания координаты x_2

Fig. 6. а) Transient processes for x_2 and its estimate \hat{x}_2
б) Coordinate estimation error of x_2



Обсуждение результатов

На основании результатов, отраженных на рис. 1–6, можно сделать вывод, что предложенный подход к синтезу наблюдателя для нелинейной системы позволяет получить достаточно точную оценку координат вектора состояния и желаемое качество переходных процессов в условиях неполной информации о состоянии объекта, ограниченных начальных условиях, внешних воздействиях и погрешностях измерений. Значение ошибок оценивания стремится к нулю за достаточно короткий промежуток времени. Даже при значительном различии начальных значений координат вектора состояния и их оценок предложенный подход позволяет получить удовлетворительные результаты.

Заключение

В статье сформулированы и доказаны достаточные условия существования H^∞ – наблюдателя для нелинейных систем, линейных по управлению и возмущению. Получены соотношения для нахождения параметров наблюдателя и наихудших законов изменения внешних воздействий и погрешностей измерений. Решен модельный пример оценивания состояния по результатам неполных и неточных измерений. На основании полученных результатов можно сделать вывод, что предложенный подход к синтезу H^∞ – наблюдателя для нелинейной системы позволяет получить достаточно точную оценку вектора состояния даже при значительном различии начальных значений состояния и оценки вектора состояния. Полученный H^∞ – наблюдатель обеспечивает желаемое качество переходных процессов и асимптотическую устойчивость системы в условиях неполной информации. Предложенный метод оценивания вектора состояния может быть применен к различным задачам управления, например, при проектировании автопилотов или систем автоматической навигации летательных аппаратов. Для реализации вычислений сформирован комплекс программ в среде MATLAB.

Ограничения. Предлагаемый подход к синтезу наблюдателей применим только для рассмотренного класса нелинейных непрерывных систем управления.

Limitations. The proposed approach to the synthesis of observers is applicable only to the considered class of nonlinear control systems.

Список источников / References

1. Koobloch, H.W., Isidori, A., Flockerzi, D. (1993). Topics in control theory. DMV-Seminar; Bd. 22, Basel; Springer.
2. Doyle, J., Francis, B., Tannenbaum, A. (1990). Feedback Control Theory. Macmillan Publishing Co.
3. Skogestad, S., Postlethwaite, I. (2005). Multivariable Feedback Control: Analysis and Design. John Wiley and sons.
4. Поляк, Б.Т., Щербаков, П.С. (2002). Робастная устойчивость и управление. М.: Наука.



- Polyak, B.T., Shcherbakov, P.S. (2002). Robastnaya ustoychivost' i upravleniye [Robust stability and control]. Nauka, Moscow. (In Russ.).
5. Green, M., Limebeer, D.J.N. (2012). Linear Robust Control. Dover Publications.
 6. Simon, D. Optimal State Estimation. (2006). Kalman, H_∞ and Nonlinear Approaches. John Wiley and sons.
 7. Поляк, Б.Т., Хлебников, М.В., Щербаков, П.С. (2014). Управление линейными системами при внешних возмущениях: Техника линейных матричных неравенств. М.: URSS/ЛЕНАНД. Polyak, B.T., Khlebnikov, M.V., Shcherbakov, P.S. (2014). Upravleniye lineynymi sistemami pri vnesennikh vozmushcheniyakh: Tekhnika lineynykh matrichnykh neravenstv [Control of linear systems under external disturbances: Technique of linear matrix inequalities]. URSS/LENAND, Moscow. (In Russ.).
 8. Хлебников, М.В., Поляк, Б.Т., Кунцевич, В.М. (2011). Оптимизация линейных систем при ограниченных внешних возмущениях (техника инвариантных эллипсоидов). *Автоматика и телемеханика*, № 11, 9—59.
Khlebnikov, M.V., Polyak, B.T., Kuntsevich, V.M. (2011). Optimization of linear systems subject to bounded exogenous disturbances: The invariant ellipsoid technique. *Autom. Remote Control*, 72(11), 2227—2275.
 9. Поляк, Б.Т., Хлебников, М.В., Рапопорт, Л.Б. (2019). Математическая теория автоматического управления. М.: URSS/ЛЕНАНД.
Polyak, B.T., Khlebnikov, M.V., Rapoport, L.B. (2019). Matematicheskaya teoriya avtomaticheskogo upravleniya [Mathematical theory of automatic control]. URSS/LENAND, Moscow. (In Russ.).
 10. Баландин, Д.В., Коган, М.М. (2013). Минимаксная фильтрация: γ_0 -оптимальные наблюдатели и обобщенные H_∞ -оптимальные фильтры. *Автоматика и телемеханика*, № 4, 43—58.
Balandin, D.V., Kogan, M.M. (2013). Minimax filtering: γ_0 -optimal observers and generalized H_∞ -optimal filters. *Autom. Remote Control*, 74(4), 575—587.
 11. Shaked, U., Theodor, Y. (1992). H_1 -optimal estimation: a tutorial. *Proc. 31st IEEE Conf. Decision Contr.*, vol.2 (pp. 2278—2286), New York, NY, USA.
 12. Пантелеев, А.В., Яковлева, А.А. (2023). Достаточные условия существования H^∞ наблюдателя состояния линейных непрерывных динамических систем. *Моделирование и анализ данных*, 13(2), 36—63. <https://doi.org/10.17759/mda.2023130202>
Panteleev, A.V., Yakovleva, A.A. (2023). Sufficient Conditions for the Existence of a H-infinity State Observer for Linear Continuous Dynamical Systems. *Modelling and Data Analysis*, 13(2), 36—63. (In Russ., abstr. in Engl.). <https://doi.org/10.17759/mda.2023130202>
 13. Li, H., Fu, M. (1997) A linear matrix inequality approach to robust H1 filtering. *IEEE Trans. Signal Processing*, 45(9), 2338—2350.
 14. Shue, S., Agarwal, R.K. (1999). Design of automatic H_∞ landing systems using mixed H_2 / H_∞ control. *J. of Guidance, Control and Dynamics*, 22, 103—114.
 15. Lungu, R., Lungu, M. (2015) Control of the aircraft lateral-directional motion during landing using the H_∞ control and the dynamic inversion. *Proc. of the Romanian Academy. Ser. A.* (pp. 547—555), V. 16, № 64.



Пантелейев А.В., Яковлева А.А. (2025)

Синтез H^∞ — наблюдателей состояния нелинейных непрерывных динамических систем, линейных...

Моделирование и анализ данных, 2025. 15(2), 47–69.

Panteleev A.V., Yakovleva A.A. (2025)

Synthesis of an H^∞ — observers of the state of a nonlinear continuous dynamical systems, linear in control and ...

Modelling and Data Analysis, 2025. 15(2), 47–69.

16. Banks, H.T., Lewis, B.M., Tran, H.T. (2007). Nonlinear feedback controllers and compensators: A state-dependent Riccati equation approach. *Computational Optimization and Applications*, 37(2), 177—218.
17. Cloutier, J.R., D'Souza, C.N., Mracek, C.P. (1996). Nonlinear regulation and nonlinear H -infinity control via the state-dependent Riccati equation technique. Part 1, theory; Part 2, Examples. In *Proceedings of the 1st International Conference on Nonlinear Problems in Aviation and Aerospace* (pp. 117—141), Daytona Beach, USA.
18. Belkzadeh, H., Taghirad, H.D. (2012). Observer based on the differential state-dependent Riccati equation. *Int. J. Automation and Computing*, 9(4), 358—368. DOI: 10.1007/s11633-012-0656-y

Информация об авторах

Пантелейев Андрей Владимирович, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой «Математическая кибернетика» института «Компьютерные науки и прикладная математика», Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет) (МАИ (НИУ)), Москва, Российская Федерация, ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-2493-3617>, e-mail: avpanteleev@inbox.ru

Яковлева Александра Алексеевна, аспирант, Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет) (МАИ (НИУ)), Москва, Российская Федерация, ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-1544-9105>, e-mail: ayakovleva982@gmail.com

Information about the authors

Andrei V. Panteleev, D. Sc. (Physical and Mathematical Sciences), Full Professor, Head of the Department of Mathematics and Cybernetics, Institute of Computer Science and Applied Mathematics, Moscow Aviation Institute, Moscow, Russian Federation, ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-2493-3617>, e-mail: avpanteleev@inbox.ru

Aleksandra A. Yakovleva, Postgraduate Student, Moscow Aviation Institute, Moscow, Russian Federation, ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-1544-9105>, e-mail: ayakovleva982@gmail.com

Вклад авторов

Пантелейев А.В. — разработка концепции, научное руководство, разработка методологии, написание рукописи — рецензирование и редактирование.

Яковлева А.А. — разработка методологии, разработка программного обеспечения, написание черновика рукописи, визуализация.

Все авторы приняли участие в обсуждении результатов и согласовали окончательный текст рукописи.

Contribution of the authors

Andrei V. Panteleev — Conceptualization, Supervision, Methodology, Writing — Original Draft Preparation.

Aleksandra A. Yakovleva — Methodology, Software, Writing — Original Draft Preparation, Visualization.

All authors participated in the discussion of the results and approved the final text of the manuscript.



Пантелеев А.В., Яковлева А.А. (2025)

Синтез H^∞ – наблюдателей состояния нелинейных
непрерывных динамических систем, линейных...

Моделирование и анализ данных, 2025. 15(2), 47–69.

Panteleev A.V., Yakovleva A.A. (2025)

Synthesis of an H^∞ – observers of the state of a nonlinear
continuous dynamical systems, linear in control and ...

Modelling and Data Analysis, 2025. 15(2), 47–69.

Конфликт интересов

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Conflict of interest

The authors declare no conflict of interest.

Поступила в редакцию 06.05.2025

Поступила после рецензирования 13.05.2025

Принята к публикации 25.05.2025

Опубликована 30.06.2025

Received 2025.05.06

Revised 2025.05.13

Accepted 2025.05.25

Published 2025.06.30

Научная статья | Original paper

УДК 517.977:517.938

Построение гарантирующего по быстродействию управления для дискретных систем с суммарными ограничениями на управление

А.А. Мохначева

Московский Авиационный Институт (Национальный исследовательский университет)

Москва, Российская Федерация

✉ arinamokh14@gmail.com

Резюме

Контекст и актуальность. В работе решается задача быстродействия для линейной стационарной системы с дискретным временем и суммарными ограничениями на управление первого порядка. **Цель.** Продемонстрировать возможность построения гарантирующего по быстродействию управления.

Гипотеза. Гарантирующее решение, найденное при применении алгоритма полиэдральной аппроксимации, будет сходиться к оптимальному.

Методы и материалы. Данная задача обладает рядом особенностей, которые осложняют её решение с помощью таких стандартных методов, как динамическое программирование и принцип максимума. По этой причине предлагается использовать для решения задачи быстродействия геометрический подход и аппарат множеств 0-управляемости. **Результаты.** Для случая, когда суммарные ограничения являются кусочно-линейными, доказано, что все множества 0-управляемости представляют собой многогранники, что позволяет свести исходную задачу управления к решению ряда задач линейного программирования. Для произвольных выпуклых суммарных ограничений показана возможность построения гарантирующего решения в смысле времени быстродействия на основе методов полиэдральной аппроксимации. **Выводы.** Исследована сходимость гарантирующего решения к оптимальному: доказано, что она будет выполнена за конечное число итераций, если используемый алгоритм полиэдральной аппроксимации гарантирует сходимость в смысле метрики Хаусдорфа. Разработанные теоретические результаты продемонстрированы на численном примере.

Ключевые слова: линейная дискретная система, задача быстродействия, суммарные ограничения на управление, гарантирующее решение, полиэдральная аппроксимация



Для цитирования: Мохначева, А.А. (2025). Построение гарантирующего по быстродействию управления для дискретных систем с суммарными ограничениями на управление. *Моделирование и анализ данных*, 15(2), 70–88. <https://doi.org/10.17759/mda.2025150204>

The construction of the guaranteeing control in the time-optimization problem for linear discrete-time systems with summary control constraints

A.A. Mokhnacheva

Moscow Aviation Institute (National Research University), Moscow, Russian Federation

✉ arinamokh14@gmail.com

Abstract

Context and relevance. The time-optimization problem is solved for a linear stationary system with discrete-time and summary first-order constraints on control.

Objective. Demonstrate the possibility of constructing the guaranteeing control in the time-optimization problem. **Hypothesis.** The guaranteed solution found by applying the polyhedral approximation algorithm will converge to the optimal one.

Methods and materials. This task has a number of features that complicate its solution using standard methods such as dynamic programming and the maximum principle. For this reason, it is proposed to use a geometric approach and an apparatus of null-controllable sets to solve the time-optimization problem. **Results.** For the case when the summary constraints are piecewise-linear, it is proved that all null-controllable sets are polyhedrons, which makes it possible to reduce the initial control problem to solving a number of linear programming problems. For arbitrary convex summary constraints, the possibility of constructing a guaranteeing solution in terms of time-optimization problem based on polyhedral approximation methods is shown.

Conclusions. The convergence of the guaranteeing solution to the optimal one is investigated: it is proved that it will be completed in a finite number of iterations if the polyhedral approximation algorithm used guarantees convergence in the sense of the Hausdorff metric. The developed theoretical results are demonstrated using a numerical example.

Keywords: linear discrete-time system, time-optimization problem, summary control constraints, guaranteeing solution, polyhedral approximation

For citation: Mokhnacheva, A.A. (2025). The construction of the guaranteeing control in the time-optimization problem for linear discrete-time systems with summary control constraints. *Modelling and Data Analysis*, 15(2), 70–88. (In Russ.). <https://doi.org/10.17759/mda.2025150204>



Введение

Первое упоминание задачи быстродействия относится к этапу формирования математической теории оптимального управления как научной дисциплины. Во многом это связано с естественным функционалом качества — временем, необходимым для перевода системы из заданного начального состояния в начало координат. Для случая систем с непрерывным временем решение может быть получено при помощи стандартных подходов, таких как принцип максимума (Понтрягин и др., 1969) или метод динамического программирования (Беллман, 1960). Однако для систем с дискретным временем общего подхода к решению задачи быстродействия выработано не было. Это связано с нерегулярностью экстремума почти для всех начальных состояний и дискретным функционалом качества, что отмечено как в классических монографиях (Болтянский, 1973), (Пропой, 1973), так и в современных работах (Ибрагимов, 2019).

Известные результаты, посвященные задаче быстродействия для систем с дискретным временем, представлены крайне небольшим набором статей и в основном исследуют различные частные постановки. В работе Мороза А.И. (Мороз, 1965) обсуждаются только трехмерные системы со скалярным управлением, Desoer C.A., Wing J., Lin W.-S. (Desoer, Wing, 1961), (Lin, 1986) рассматривают уже системы произвольной размерности, но все еще со скалярным управлением. Bashein G., Vlieger J.H., Verbruggen H.B., Bruijn P.M. (Bashein, 1971), (Vlieger, Verbruggen, Bruijn, 1982) сосредоточены на численных методах построения оптимального управления на основе линейного программирования. В статьях Lasserre J.B., Stamnes O.N., Callafon R.A. (Lasserre, 1993), (Stamnes, Callafon, 2007) управление предполагается векторным, но исключительно с ограничениями в форме зонотопов. В свою очередь Kolev L.V. (Kolev, 1978) и Scott M. (Scott, 1986) предлагают регуляризацию задачи быстродействия при помощи введения дополнительного критерия качества. Работы Blanchini F. и Ukovich W. (Blanchini, Ukovich, 1993) допускают уже геометрические полиэдральные ограничения на управление. В (Keerthi, Gilbert, 1987) Keerthi S., Gilbert E. предполагают смешанные полиэдральные ограничения, накладываемые одновременно на управление и состояние. Данные методы, базирующиеся на средствах линейного программирования, развиваются в современных статьях (Abdelhak, Rachik, 2010), (Amato и др., 2022), (Chen, Bako, Lecoeuche, 2012), (Lee, Haddad, 2022), (Yang, Xia, Geng, 2019), (Leomanni, Costante, Ferrante, 2022), (Бортаковский, 2023).

Обобщением выше приведенных результатов может считаться геометрический подход к решению задачи быстродействия, использующий аппарат множеств 0-управляемости и достижимости (Ибрагимов, 2019), (Ибрагимов, Новожилкин, Порцева, 2021). Описание в терминах данных множеств функции Беллмана позволяет сформулировать конструктивные достаточные условия оптимальности управления. В частности, в случае линейных ограничений на управление, множества 0-управляемости являются многогранниками, а метод динамического программирования сводится к ряду задач линейного программирования (Мороз 1965), (Lin, 1986),



(Bashein, 1971), (Vlieger, Verbruggen, Bruijn, 1982), (Lasserre, 1993), (Stamnes, Callafon, 2007). Для систем, обладающих произвольными выпуклыми ограничениями, на основе алгоритмов полиэдральной аппроксимации (Каменев, 2010) возможно получить гарантирующее решение аналогичным образом. В (Ибрагимов, Новожилкин, Порцева, 2021) исследована сходимость гарантирующего решения к оптимальному.

Тем не менее, все приведенные выше результаты относятся к системам с геометрическими ограничениями на управление, которыми на практике моделируются предельно допустимые по амплитуде значения управляющих воздействий. В данной статье предлагается обобщение развитого в (Ибрагимов, Новожилкин, Порцева, 2021) подхода на случай систем с дискретным временем и суммарными ограничениями на управление. Посредством такого типа ограничений могут быть описаны суммарные запасы ресурса, расходуемого на управление. Например, общий объем топлива в задаче наискорейшей коррекции орбиты космического аппарата. В частности, в статье исследовано при каких условиях для такого класса систем множество 0-управляемости будут являться многогранниками, получено их описание в общем виде. Основной целью является определение условий сходимости гарантировующего решения, построенного при помощи аппроксимационных алгоритмов, к оптимальному.

Постановка задачи

Рассматривается линейная стационарная система с дискретным временем и суммарными ограничениями на векторное управление (A, \mathcal{U}, t):

$$x(k+1) = Ax(k) + u(k), k \in N \cup \{0\}, \#(1)$$

$$x(0) = x_0, \sum_{k=0}^{\infty} \mu(u(k), \mathcal{U}) \leq t,$$

где $x(k) \in \mathbb{R}^n$ — вектор состояния системы, $u(k) \in \mathbb{R}^n$ — вектор управления, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ — матрица системы, $t > 0$ — запас ресурса управления, $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ — выпуклое и компактное множество, определяющее ограничение на управление. Предполагается, что $\det A \neq 0$ и $0 \in ri\mathcal{U}$. Через $\mu(x, \mathcal{X})$ для $x \in \mathbb{R}^n$ и выпуклого $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n$, содержащего 0, обозначен функционал Минковского (Колмогоров, Фомин, 2012, разд. 3, § 2, Гл. III):

$$\mu(x, \mathcal{X}) = \inf\{\alpha > 0 : x \in \alpha X\}. \#(2)$$

Под $ri\mathcal{U}$ понимается относительная внутренность множества \mathcal{U} — множество внутренних точек \mathcal{U} , если рассматривать данное множество как подмножество его аффинной оболочки (Рокафеллар, 1973, § 6, Гл. II).

Для системы (1) решается задача быстродействия, т.е. требуется перевести систему из заданного начального состояния x_0 в начало координат за минимальное



число шагов N_{\min} . Процедура решения задачи быстродействия для дискретных систем состоит из двух этапов, первым из которых является вычисление N_{\min} :

$$N_{\min} = \min \left\{ N \in \mathbb{N} \cup \{0\} : -A^N x_0 = \sum_{k=0}^{N-1} A^k u(N-k-1), \sum_{k=0}^{N-1} \mu(u(k), \mathcal{U}) \leq t \right\}. \#(3)$$

Второй этап заключается в построении процесса управления $\{x^*(k), u^*(k-1), x_0\}_{k=1}^{N_{\min}}$, удовлетворяющего условию $x^*(N_{\min}) = 0$. Такой процесс будем называть оптимальным.

Использование функционала Минковского множества \mathcal{U} для описания ограничений на управление является целесообразным, поскольку для решения поставленной задачи используется геометрический подход, предполагающий в большей степени работу с множествами. Также далее будет продемонстрировано, что в терминах множества \mathcal{U} может быть получено более простое и конструктивное описание множеств 0-управляемости. С другой стороны, выбранный подход не снижает общности постановки задачи. Продемонстрируем данный факт на следующем примере.

Пример 1. Рассмотрим систему управления с суммарными ограничениями на управление

$$x(k+1) = Ax(k) + u(k), k \in \mathbb{N} \cup \{0\}, x(0) = x_0, \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=1}^n |u_i(k)| \leq t.$$

Данная система будет эквивалентна системе (1), если выбрать \mathcal{U} следующим образом:

$$\mathcal{U} = \left\{ u \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^n |u_i| \leq 1 \right\}.$$

Множества 0-управляемости и критерий оптимальности в случае линейных ограничений

Обозначим через $\{\mathcal{X}_t(N)\}_{N=0}^{\infty}$ класс множеств 0-управляемости системы (1), где $\mathcal{X}_t(N)$ представляет собой множество тех начальных состояний, из которых можно перевести систему (1) в начало координат за $N \in \mathbb{N}$ шагов посредством выбора допустимого управления при суммарном ресурсе управления t :

$$\mathcal{X}_t(N) = \left\{ x_0 \in \mathbb{R}^n : -A^N x_0 = \sum_{k=0}^{N-1} A^k u(N-k-1), \sum_{k=0}^{N-1} \mu(u(k), \mathcal{U}) \leq t \right\}. \#(4)$$

Также будем считать, что $\mathcal{X}_t(0) = \{0\}$.

С учетом (4) величину N_{\min} можно определить следующим образом:

$$N_{\min} = \min \left\{ N \in \mathbb{N} \cup \{0\} : x_0 \in \mathcal{X}_t(N) \right\}. \#(5)$$



В силу (5) решение первого этапа задачи быстродействия сводится к последовательному построению множеств 0-управляемости и проверки принадлежности им начального состояния системы.

Также условие разрешимости задачи быстродействия $N_{\min} < \infty$ можно свести к включению

$$x_0 \in \mathcal{X}_{t,\infty} = \bigcup_{N=0}^{\infty} \mathcal{X}_t(N).$$

Более подробно вопросы построения и оценивания предельных множеств 0-управляемости $\mathcal{X}_{t,\infty}$ рассматриваются в (Ибрагимов и др., 2022).

Справедлив критерий оптимальности по быстродействию процесса управления.

Лемма 1 (Ибрагимов, 2024). Пусть класс множеств $\{\mathcal{X}_t(N)\}_{N=0}^{\infty}$, определяется согласно (4). Тогда процесс управления $\{x^*(k), u^*(k-1), x_0\}_{k=1}^{N_{\min}}$ оптimalен по быстродействию для системы (1) тогда и только тогда, когда для некоторого $t_0 \leq t$ выполняются соотношения

$$Ax^*(k) + u^*(k) \in \mathcal{X}_{t_{k+1}}(N_{\min} - k - 1),$$

$$t_{k+1} = t_k - \mu(u^*(k), \mathcal{U}) \geq 0, \quad k = \overline{0, N_{\min} - 1}.$$

Справедливо следующее представление для множеств 0-управляемости.

Теорема 1. Пусть класс множеств $\{\mathcal{X}_t(N)\}_{N=0}^{\infty}$ определяется согласно (4) $\det A \neq 0$. Тогда для любых $N \in \mathbb{N}$ верно представление

$$\mathcal{X}_t(N) = -t \operatorname{conv} \bigcup_{k=1}^N A^{-k} \mathcal{U}.$$

Доказательство. Пусть $x_0 \in \mathcal{X}_t(N)$. По определению (4) данное включение равносильно условиям

$$\begin{cases} -A^N x_0 = \sum_{k=0}^{N-1} A^k u(N-k-1), \\ \sum_{k=0}^{N-1} \mu(u(k), \mathcal{U}) \leq t. \end{cases}$$

Рассмотрим первое равенство из системы. В силу того, что $\det A \neq 0$, допустимо эквивалентное преобразование

$$x_0 = -A^{-N} \sum_{k=0}^{N-1} A^k u(N-k-1) = -\sum_{k=0}^{N-1} A^{-(N-k)} u(N-k-1) = -\sum_{k=1}^{N-1} A^{-k} u(k-1).$$



Таким образом, включение $x_0 \in \mathcal{X}_t(N)$ равносильно условиям

$$\begin{cases} x_0 = -\sum_{k=1}^N A^{-k} u(k-1), \\ \sum_{k=0}^{N-1} \mu(u(k), U) \leq t. \end{cases}$$

Введем обозначения:

$$u^k = f(x) = \begin{cases} \frac{u(k-1)}{\mu(u(k-1), U)}, & u(k-1) \neq 0, \\ 0, & u(k-1) = 0, \end{cases} \quad \lambda_k = \frac{\mu(u(k-1), U)}{t} \geq 0. \#(7)$$

По определению функционала Минковского $u^k \in \mathcal{U}$, $\lambda_k \geq 0$. Верно равенство

$$\sum_{k=1}^N \lambda_k = \frac{1}{t} \sum_{k=1}^N \mu(u(k-1), U). \#(8)$$

Таким образом, при обозначениях (7) в силу равенства (8) эквивалентны включения

$$x_0 \in \mathcal{X}_t(N), \quad x_0 \in -t \operatorname{conv} \bigcup_{k=1}^N A^{-k} \mathcal{U}.$$

Следовательно,

$$\mathcal{X}_t(N) = -t \operatorname{conv} \bigcup_{k=1}^N A^{-k} \mathcal{U}.$$

Теорема 1 доказана.

В случае, когда множество \mathcal{U} является многогранником, т.е. существуют $u^1, \dots, u^M \in \mathbb{R}^n$ такие, что

$$U = \operatorname{conv}\{u^1, \dots, u^M\}, \#(9)$$

можно получить более конструктивное описание множеств 0-управляемости.

Следствие 1. Пусть класс множеств $\{\mathcal{X}_t(N)\}_{N=0}^\infty$ определяется согласно (4), $\det A \neq 0$ и верно (9). Тогда для любых $N \in \mathbb{N}$

1. верно представление

$$\mathcal{X}_t(N) = \operatorname{conv} \left\{ -t A^{-k} u^j : j = \overline{1, M}, k = \overline{1, N} \right\};$$



2. справедлива оценка для множества вершин

$$\text{Ext } \mathcal{X}_t(N) \subset \left\{ -tA^{-k}u^j : j = \overline{1, M}, k = \overline{1, N} \right\};$$

3. справедлива оценка для числа вершин

$$\text{card Ext } \mathcal{X}_t(N) = L(N) \leq MN.$$

Доказательство. В силу теоремы (1) и $A^{-k}\mathcal{U} = \text{conv}\{A^{-k}u^1, \dots, A^{-k}u^M\}$, получим представление

$$\mathcal{X}_t(N) = -t \bigcup_{k=1}^N \text{conv}\{A^{-k}u^1, \dots, A^{-k}u^M\} = \text{conv}\{-tA^{-k}u^j : j = \overline{1, M}, k = \overline{1, N}\}.$$

В силу (Циглер, 2014, утв. 2.2, § 2.1, Гл. 2) верно включение и оценка числа вершин

$$\text{Ext } \mathcal{X}_t(N) \subset \text{conv}\{-tA^{-k}u^j : j = \overline{1, M}, k = \overline{1, N}\}, \text{card Ext } \mathcal{X}_t(N) \leq MN.$$

Следствие 1 доказано.

На основе критерия оптимальности из леммы 1 и результатов следствия 1 удается построить конструктивный метод решения задачи быстродействия для системы (1) в случае (9), который сводится к решению ряда задач линейного программирования.

Теорема 2. (Ибрагимов, 2024, Теорема 1). Пусть в системе (1) выполнено включение $x_0 \in \mathcal{X}_t(N_{\min}) \setminus \mathcal{X}_t(N_{\min} - 1)$, $\det A \neq 0$, справедливы представления

$$\mathcal{U} = \text{conv}\{u^1, \dots, u^M\}, \quad \mathcal{X}_1(N) = \text{conv}\{x^1(N), \dots, x^{L(N)}(N)\}, \quad N \in \mathbb{N},$$

наборы $\{u^*(k)\}_{k=0}^{N_{\min}-1}$, $\{x^*(k)\}_{k=0}^{N_{\min}}$, $\{t_k\}_{k=0}^{N_{\min}}$ определяются соотношениями

$$x^*(k+1) = Ax^*(k) + u^*(k),$$

$$u^*(k) = \sum_{j=1}^M \mu_j^* u^j,$$

$$t_{k+1} = t_k - \sum_{j=1}^M \mu_j^*, \quad k = \overline{0, N_{\min} - 1},$$

$$x^*(0) = x_0, \quad t_0 = \mu(x_0, \mathcal{X}_1(N_{\min})),$$

где на каждом шаге $k = \overline{0, N_{\min} - 1}$ числа μ_1^*, \dots, μ_M^* определяются из решения задачи линейного программирования



$$\sum_{j=1}^M \mu_j \rightarrow \min_{\lambda, \mu},$$

$$Ax^*(k) + \sum_{j=1}^M \mu_j u^j = \sum_{i=1}^{L(N_{\min}-k-1)} \lambda_i x^i(N_{\min}-k-1), \#(10)$$

$$t_k - \sum_{j=1}^M \mu_j = \sum_{i=1}^{L(N_{\min}-k-1)} \lambda_i,$$

$$\lambda_1, \dots, \lambda_{L(N_{\min}-k-1)}, \mu_1, \dots, \mu_M \geq 0.$$

Тогда $\{x^*(k), u^*(k-1), x_0\}_{k=0}^{N_{\min}-1}$ — оптимальный по быстродействию процесс.

Теорема 2 позволяет построить оптимальное по быстродействию управление для систем вида (1) с ограничениями первого порядка (9). Для произвольных выпуклых множеств \mathcal{U} аналогичный подход может быть применим, если предварительно провести их полиэдральную аппроксимацию (Каменев, 2010), как это было предложено в (Ибрагимов, Новожилкин, Порцева, 2021). Однако в этом случае возникает вопрос об оптимальности результирующего процесса. Целью данной работы является разработка подхода к решению поставленной задачи при помощи методов полиэдральной аппроксимации, а также указание условий, при которых можно добиться оптимальности гарантирующего процесса.

Постановка задачи об аппроксимации

При использовании аппроксимационных методов для решения задачи быстродействия справедливы следующие оценки времени быстродействия.

Лемма 2. Пусть справедливо включение $\underline{\mathcal{U}} \subset \mathcal{U} \subset \bar{\mathcal{U}}$, где $\underline{\mathcal{U}}, \mathcal{U}, \bar{\mathcal{U}} \subset \mathbb{R}^n$ — выпуклые и компактные множества, содержащие 0 в качестве относительно внутренней точки, задача быстродействия для $x_0 \in \mathbb{R}^n$ разрешима для систем $(A, \underline{\mathcal{U}}, t), (A, \mathcal{U}, t), (A, \bar{\mathcal{U}}, t)$, а величины $\overline{N_{\min}}, N_{\min}, \underline{N_{\min}}$ — время быстродействия для данных систем соответственно. Тогда

$$\overline{N_{\min}} \leq N_{\min} \leq \underline{N_{\min}}.$$

Доказательство. Рассмотрим множества $\mathcal{U} \subset \bar{\mathcal{U}}$, систем $(A, \mathcal{U}, t), (A, \bar{\mathcal{U}}, t)$ и соответствующие им величины $N_{\min}, \overline{N_{\min}}$. Для N_{\min} согласно определению (3), находятся такие $u(0), \dots, u(N_{\min}-1) \in \mathbb{R}^n$, что справедливы соотношения

$$0 = A^{N_{\min}} x_0 + \sum_{k=0}^{N_{\min}-1} A^k u(N_{\min}-k-1), \sum_{k=0}^{N_{\min}-1} \mu(u(k), \mathcal{U}) \leq t.$$



Используя определение (2) и компактность \mathcal{U} , проведем следующие преобразования для произвольного $u \in \mathbb{R}^n$:

$$\begin{aligned}\mu(u, \mathcal{U}) &= \inf \{\alpha > 0 : u \in \alpha \mathcal{U}\}, \\ u \in \mu(u, \mathcal{U}) \mathcal{U} &\subset \mu(u, \mathcal{U}) \bar{\mathcal{U}}, \\ \mu(u, \mathcal{U}) &\in \{\alpha > 0 : u \in \alpha \bar{\mathcal{U}}\}, \\ \mu(u, \mathcal{U}) &\geq \inf \{\alpha > 0 : u \in \alpha \bar{\mathcal{U}}\} = \mu(u, \bar{\mathcal{U}}).\end{aligned}$$

Тогда справедливо неравенство

$$\sum_{k=0}^{N_{\min}-1} \mu(u(k), \bar{\mathcal{U}}) \leq \sum_{k=0}^{N_{\min}-1} \mu(u(k), \mathcal{U}) \leq t.$$

Отсюда следует, что

$$N_{\min} \in \left\{ N \in \mathbb{N} \cup \{0\} : 0 = A^N x_0 + \sum_{k=0}^{N-1} u(N-k-1), \sum_{k=0}^{N-1} \mu(u(k), \bar{\mathcal{U}}) \leq t \right\}.$$

Тогда для системы $(A, \bar{\mathcal{U}}, t)$ по определению (3) выполняется соотношение

$$N_{\min} \geq \min \left\{ N \in \mathbb{N} \cup \{0\} : 0 = A^N x_0 + \sum_{k=0}^{N-1} u(N-k-1), \sum_{k=0}^{N-1} \mu(u(k), \bar{\mathcal{U}}) \leq t \right\} = \overline{N_{\min}}.$$

Аналогично получается соотношение $N_{\min} \leq \underline{N_{\min}}$ для случая $\underline{\mathcal{U}} \subset \mathcal{U}$. Лемма 2 доказана.

Задача об аппроксимации может быть сформулирована следующим образом. Пусть последовательности компактов $\{\underline{\mathcal{U}}_m\}_{m \in \mathbb{N}}, \{\bar{\mathcal{U}}_m\}_{m \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^n$ удовлетворяют включению

$$\underline{\mathcal{U}}_m \subset \mathcal{U} \subset \bar{\mathcal{U}}_m, m \in \mathbb{N}.$$

Для всех $m \in \mathbb{N}$ величины $\overline{N_{\min}}(m), \underline{N_{\min}}(m)$ являются оптимальными значениями критерия в задаче быстродействия для систем $(A, \underline{\mathcal{U}}_m, t), (A, \bar{\mathcal{U}}_m, t)$ соответственно. Требуется определить, какими свойствами должны обладать последовательности $\{\underline{\mathcal{U}}_m\}_{m \in \mathbb{N}}, \{\bar{\mathcal{U}}_m\}_{m \in \mathbb{N}}$, чтобы для всех или почти для всех x_0 выполнялись соотношения

$$\overline{N_{\min}}(m) \xrightarrow{m \rightarrow \infty} N_{\min},$$

$$\underline{N_{\min}}(m) \xrightarrow{m \rightarrow \infty} N_{\min}.$$



Предельные свойства множеств 0-управляемости

Для рассмотрения вопросов сходимости исследуемые множества будем предполагать элементами метрического пространства компактов (\mathbb{K}_n, ρ_H) наделенного метрикой Хаусдорфа:

$$\mathbb{K}_n = \left\{ \mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n : \mathcal{X} - \text{компакт} \right\},$$

$$\rho_H(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) = \max \left\{ \supinf_{x \in \mathcal{X}} y \in \mathcal{Y} x - y, \supinf_{y \in \mathcal{Y}} x \in \mathcal{X} x - y \right\}.$$

Тогда справедлива следующая лемма.

Лемма 3. Пусть последовательность $\{\mathcal{U}_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ сходится к множеству \mathcal{U} системы (1):

$$\rho_H(\mathcal{U}_m, \mathcal{U}) \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0.$$

Тогда для любых $N \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ множества 0-управляемости $\{\mathcal{X}_t^{(m)}(N)\}_{N=0}^\infty$ и $\{\mathcal{X}_t(N)\}_{N=0}^\infty$ для систем (A, \mathcal{U}_m, t) и (A, \mathcal{U}, t) соответственно удовлетворяют соотношению.

$$\rho_H(\mathcal{X}_t^{(m)}(N), \mathcal{X}_t(N)) \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0.$$

Доказательство. Выберем произвольные $N_m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ и $\varepsilon > 0$.

По определению сходимости из $\rho_H(\mathcal{U}_m, \mathcal{U}) \rightarrow 0$ следует, что для любого $\delta > 0$ найдется $m \in \mathbb{N}$ такой, что $\rho_H(\mathcal{U}_m, \mathcal{U}) < \delta$.

В силу непрерывности оператора A^{-k} в пространстве компактов для всех $k = \overline{1, N}$ выберем $\delta_k > 0$ так, чтобы при $m \geq M$ для некоторого $M \in \mathbb{N}$ из $\rho_H(\mathcal{U}_m, \mathcal{U}) < \delta_k$, следовало бы неравенство

$$\rho_H(A^{-k}\mathcal{U}_m, A^{-k}\mathcal{U}) < \frac{\varepsilon}{t} \cdot \#(11)$$

Для доказательства $\rho_H(\mathcal{X}_t^{(m)}(N), \mathcal{X}_t(N)) \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0$ необходимо показать, что существует номер $M \in \mathbb{N}$ такой, что для любого $m \geq M$ выполняется неравенство $\rho_H(\mathcal{X}_t^{(m)}(N), \mathcal{X}_t(N)) < \varepsilon$ для любого $\varepsilon > 0$.

Пусть $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2, \mathcal{Y}_1, \mathcal{Y}_2 \in \mathbb{K}_n$. Тогда верны соотношения

$$\begin{aligned} \sup_{x \in \text{conv}\{\mathcal{X}_1 \cup \mathcal{X}_2\}} \inf_{y \in \text{conv}\{\mathcal{Y}_1 \cup \mathcal{Y}_2\}} x - y &= \sup_{\substack{x_1 \in \mathcal{X}_1, \\ x_2 \in \mathcal{X}_2, \\ \lambda \in [0;1]}} \inf_{\substack{y_1 \in \mathcal{Y}_1, \\ y_2 \in \mathcal{Y}_2, \\ \mu \in [0;1]}} \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 - \mu y_1 - (1-\mu)y_2 \leq \\ &\leq \sup_{\substack{x_1 \in \mathcal{X}_1, \\ x_2 \in \mathcal{X}_2, \\ \lambda \in [0;1]}} \inf_{\substack{y_1 \in \mathcal{Y}_1, \\ y_2 \in \mathcal{Y}_2}} \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 - \lambda y_1 - (1-\lambda)y_2 \leq \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 & \leq \sup_{\lambda \in [0:1]} \inf_{\substack{x_1 \in \mathcal{X}_1, y_1 \in \mathcal{Y}_1 \\ x_2 \in \mathcal{X}_2, y_2 \in \mathcal{Y}_2 \\ \lambda \in [0:1]}} (\lambda x_1 - y_1 + (1-\lambda)x_2 - y_2) = \\
 & = \sup_{\lambda \in [0:1]} \left(\lambda \sup_{x_1 \in \mathcal{X}_1} \inf_{y_1 \in \mathcal{Y}_1} x_1 - y_1 + (1-\lambda) \sup_{x_2 \in \mathcal{X}_2} \inf_{y_2 \in \mathcal{Y}_2} x_2 - y_2 \right) = \\
 & = \max \left\{ \sup_{x_1 \in \mathcal{X}_1} \inf_{y_1 \in \mathcal{Y}_1} x_1 - y_1, \sup_{x_2 \in \mathcal{X}_2} \inf_{y_2 \in \mathcal{Y}_2} x_2 - y_2 \right\}.
 \end{aligned}$$

Отсюда в силу определения расстояния Хаусдорфа следует неравенство

$$\rho_H(\text{conv}\{\mathcal{X}_1 \cup \mathcal{X}_2\}, \text{conv}\{\mathcal{Y}_1 \cup \mathcal{Y}_2\}) \leq \max\{\rho_H(\mathcal{X}_1, \mathcal{Y}_1), \rho_H(\mathcal{X}_2, \mathcal{Y}_2)\}.$$

С учетом метода математической индукции можно перейти к более общему соотношению для любых $\mathcal{X}_1, \dots, \mathcal{X}_N, \mathcal{Y}_1, \dots, \mathcal{Y}_N \in \mathbb{K}_n$:

$$\rho_H\left(\text{conv}\left(\bigcup_{k=1}^N \mathcal{X}_k\right), \text{conv}\left(\bigcup_{k=1}^N \mathcal{Y}_k\right)\right) \leq \max_{k=1, N}\{\rho_H(\mathcal{X}_k, \mathcal{Y}_k)\}.$$

Тогда из (11) и теоремы 1 следует, что

$$\begin{aligned}
 \rho_H(\mathcal{X}_t^{(m)}(N), \mathcal{X}_t(N)) &= \rho_H\left(-t \text{conv}\left(\bigcup_{k=1}^N A^{-k} \mathcal{U}_m\right), \text{conv}\left(\bigcup_{k=1}^N A^{-k} \mathcal{U}\right)\right) = \\
 &= \rho_H\left(\text{conv}\left(\bigcup_{k=1}^N A^{-k} \mathcal{U}_m\right), \text{conv}\left(\bigcup_{k=1}^N A^{-k} \mathcal{U}\right)\right) \leq t \max_{k=1, N}\{\rho_H(A^{-k} \mathcal{U}_m, A^{-k} \mathcal{U})\} < t \frac{\varepsilon}{t} = \varepsilon
 \end{aligned}$$

Лемма 3 доказана.

На основе данной леммы и свойств метрики Хаусдорфа можно предложить следующее решение задачи об аппроксимации.

Теорема 3. Пусть последовательность выпуклых компактов $\{\underline{\mathcal{U}}_m\}_{m \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{K}_n$, удовлетворяет условиям

$$\underline{\mathcal{U}}_m \subset \mathcal{U}, m \in \mathbb{N},$$

$$\rho_H(\underline{\mathcal{U}}_m, \mathcal{U}) \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0.$$

Тогда почти для всех $x_0 \in \mathbb{R}^n$, для которых $N_{\min} < \infty$ существует $m_1 \in \mathbb{N}$ такое, что

$$N_{\min} = \underline{N}_{\min}(m_1),$$

$\underline{N}_{\min}(m)$ — оптимальное значение критерия в задаче быстродействия для системы $(A, \underline{\mathcal{U}}_m, t)$.



Доказательство. Обозначим через $\mathcal{X}_t^{(m)}(N)$ множество 0-управляемости системы $(A, \underline{\mathcal{U}}_m, t)$. По теореме 1 для всех $m \in \mathbb{N}$ справедливо включение $\mathcal{X}_t^{(m)}(N_{\min}) \subset \mathcal{X}_t(N_{\min})$. Из леммы 3 следует, что $\rho_H(\mathcal{X}_t(N_{\min}), \mathcal{X}_t^{(m)}(N_{\min})) \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0$.

Для любого $x_0 \in \text{int } \mathcal{X}_t(N_{\min})$ найдется $\varepsilon > 0$ такое, что выполняется $\mathcal{B}_{\text{a}}(x_0) \subset \mathcal{X}_t(N_{\min})$ и существует $m_1 \in \mathbb{N}$ такое, что $\rho_H(\mathcal{X}_t(N_{\min}), \mathcal{X}_t^{(m)}(N_{\min})) \leq \varepsilon$. Тогда в силу (Ибрагимов, Новожилкин, Порцева, 2021, лемма 5) $x_0 \in \mathcal{X}_t^{(m)}(N_{\min})$. Это с учетом (5) приводит к соотношениям

$$\begin{aligned} N_{\min} &\in \left\{ N \in \mathbb{N} \cup \{0\} : x_0 \in \mathcal{X}_t^{(m)}(N) \right\}, \\ N_{\min} &\geq \min \left\{ N \in \mathbb{N} \cup \{0\} : x_0 \in \mathcal{X}_t^{(m)}(N) \right\} = \underline{N_{\min}}(m_1). \end{aligned}$$

С другой стороны, согласно лемме 2 $N_{\min} \leq \underline{N_{\min}}(m_1)$. Тогда $N_{\min} = \underline{N_{\min}}(m_1)$. Теорема 3 доказана.

Теорема 4. Пусть последовательность выпуклых компактов $\{\bar{\mathcal{U}}_m\}_{m \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{K}_n$, удовлетворяет условиям

$$\begin{aligned} \mathcal{U} &\subset \bar{\mathcal{U}}_m, m \in \mathbb{N}, \\ \rho_H(\bar{\mathcal{U}}_m, \mathcal{U}) &\xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0. \end{aligned}$$

Тогда для всех $x_0 \in \mathbb{R}^n$, для которых $N_{\min} < \infty$ существует $m_2 \in \mathbb{N}$ такое, что $N_{\min} = \overline{N_{\min}}(m_2)$, $\overline{N_{\min}}(m)$ — оптимальное значение критерия в задаче быстродействия для системы $(A, \bar{\mathcal{U}}_m, t)$.

Доказательство. Обозначим через $\mathcal{X}_t^{(m)}(N)$ множество 0-управляемости системы $(A, \bar{\mathcal{U}}_m, t)$. Принадлежность $x_0 \in \mathcal{X}_t(N_{\min}) \setminus \mathcal{X}_t(N_{\min}-1)$ означает, что существует $\varepsilon > 0$ такое, что $\mathcal{B}_{\text{a}}(x_0) \cap \mathcal{X}_t(N_{\min}-1) = \emptyset$.

По теореме 1 для всех $m \in \mathbb{N}$ справедливо включение $\mathcal{X}_t(N_{\min}-1) \subset \mathcal{X}_t^{(m)}(N_{\min}-1)$. Из леммы 3 следует, что $\rho_H(\mathcal{X}_t^{(m)}(N_{\min}-1), \mathcal{X}_t(N_{\min}-1)) \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0$, то есть найдется $m_2 \in \mathbb{N}$ такой, что $\rho_H(\mathcal{X}_t^{(m)}(N_{\min}-1), \mathcal{X}_t(N_{\min}-1)) < \varepsilon$.

Тогда в силу (Ибрагимов, Новожилкин, Порцева, 2021, лемма 6) $x_0 \notin \mathcal{X}_t^{(m_2)}(N_{\min}-1)$. Это с учетом (5) приводит к соотношениям

$$N_{\min}-1 < \min \left\{ N \in \mathbb{N} \cup \{0\} : x \in \mathcal{X}_t^{(m_2)}(N) \right\} = \overline{N_{\min}}(m_2).$$

С другой стороны, согласно лемме 2 $N_{\min} \geq \overline{N_{\min}}(m_2)$. Тогда $N_{\min} = \overline{N_{\min}}(m_2)$. Теорема 4 доказана.

Следствие 2. Пусть выполняются условия теорем 3 и 4 одновременно. Тогда существует $m_0 \in \mathbb{N}$ такое, что

$$\overline{N_{\min}}(m_0) = N_{\min} = \underline{N_{\min}}(m_0).$$



Доказательство. Следствие вытекает из теорем 3 и 4, если выбрать $m_0 = \max\{m_1, m_2\}$.

Из теорем 3 и 4 следует, что если метод полиэдральной аппроксимации гарантирует сходимость в смысле расстояния Хаусдорфа к аппроксимируемому множеству, то почти для всех начальных состояний гарантирующее решение окажется также и оптимальным по быстродействию за конечное число итераций аппроксимационного алгоритма. Таким образом, можно считать задачу об аппроксимации решенной. Оптимальный по быстродействию процесс в системе $(A, \underline{\mathcal{U}}_m, t)$, с одной стороны, может быть построен при помощи теоремы 2 за счет средств исключительно линейного программирования, с другой стороны, он также является оптимальным процессом в исходной системе (A, \mathcal{U}, t) .

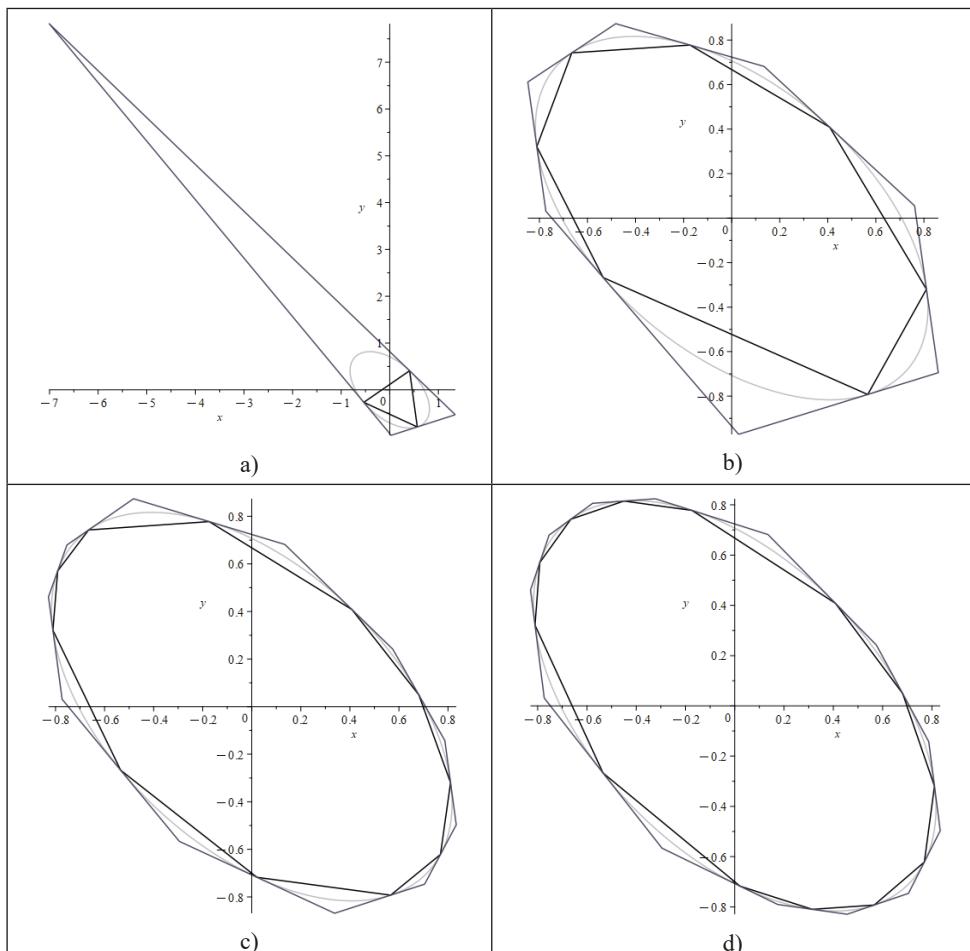


Рис. 1. Аппроксимации $\bar{\mathcal{U}}_m, \underline{\mathcal{U}}_m$ для $m=3(a)$, $m=7(b)$, $m=11(c)$, $m=13(d)$.

Fig. 1. Approximation $\bar{\mathcal{U}}_m, \underline{\mathcal{U}}_m$ for $m=3(a)$, $m=7(b)$, $m=11(c)$, $m=13(d)$.



Пример

Приведем пример использования теорем 3 и 4 . Пусть

$$A = \begin{pmatrix} 0.9 & 0 \\ 0 & 0.9 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{U} = \left\{ u \in \mathbb{R}^2 : u^T \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} u \leq 1 \right\}, \quad t=1, \quad x_0 = \begin{pmatrix} -0.5 \\ 1.2 \end{pmatrix}.$$

Последовательности $\{\bar{\mathcal{U}}_m\}_{m=3}^\infty$, $\{\underline{\mathcal{U}}_m\}_{m=3}^\infty$ будут строиться с помощью метода сближающих многогранников (Каменев, 2010, § 4.3, Гл. 4), где m — число вершин в аппроксимирующем многограннике. Результаты аппроксимаций на разных шагах алгоритма представлены на рис. 1.

Поиск времени быстродействия N_{\min} осуществляется путем построения множеств 0-управляемости до тех пор, пока одно из них не начнет включать в себя начальное состояние x_0 . В качестве множества \mathcal{U} используются найденные аппроксимации $\bar{\mathcal{U}}_m, \underline{\mathcal{U}}_m$. Полученные значения $\overline{N_{\min}}(m), \underline{N_{\min}}(m)$ представлены в таблице 1. После 11-го шага алгоритма значения $\overline{N_{\min}}(13), \underline{N_{\min}}(13)$ совпали в соответствии со следствием 2 . Для построения оптимального процесса можно использовать $\underline{\mathcal{U}}_{13}$. Результат сходимости алгоритма в смысле теорем 3 и 4 представлен на рис. 2, где показана принадлежность начального состояния x_0 множеству 0-управляемости за $N_{\min} = 4$ шага.

Таблица 1/ Table 1

Вычисление $\overline{N_{\min}}(m)$ и $\underline{N_{\min}}(m)$

Calculation $\overline{N_{\min}}(m)$ and $\underline{N_{\min}}(m)$

m	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
$\overline{N_{\min}}$	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4
$\underline{N_{\min}}$	6	6	6	6	6	5	5	5	5	5	4

Покажем сходимость метода для той же системы, но для других начальных состояний. Результат приведен в таблице 2 . Для каждого состояния было найдено время быстродействия и соответствующее ему число вершин в аппроксимирующих многогранниках.

Таблица 2/ Table 2

Сходимость метода для различных начальных состояний

Convergence of the method for different initial states

x_0	$(-0.3 \ 2)^T$	$(2 \ 0.1)^T$	$(-2 \ -2)^T$	$(2 \ 2)^T$	$(1 \ -1.5)^T$
$\overline{N_{\min}} = \underline{N_{\min}}$	9	10	15	15	5
m_0	8	14	4	32	21

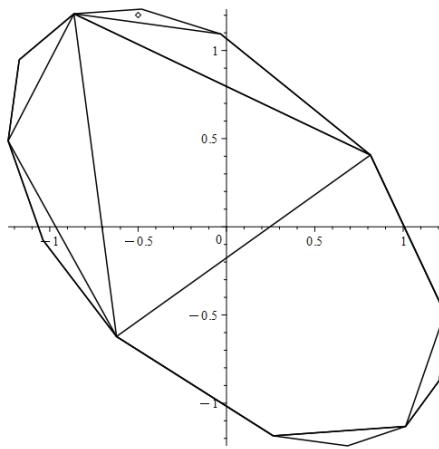


Рис. 2. Множества 0-управляемости за $N_{\min} = 4$ шага,
построенные по внутренней аппроксимации $\underline{\mathcal{U}}_m$ для $m \in \{3, 7, 11, 13\}$.

Fig. 2. Null-controllable sets for $N_{\min} = 4$ steps,
constructed by internal approximation $\underline{\mathcal{U}}_m$ for $m \in \{3, 7, 11, 13\}$.

Заключение

В работе разработан метод, который позволяет на основе алгоритмов полиэдральной аппроксимации формировать оптимальное по быстродействию управление для линейных стационарных систем с дискретным временем и суммарными ограничениями на управление первого порядка за счет средств линейного программирования. Доказана сходимость гарантирующего решения к оптимальному за конечное число шагов. Описанный метод является обобщением подхода из (Ибрагимов, Новожилкин, Порцева, 2021).

Важно отметить, что в рамках данной статьи допускается использование довольно широкого класса алгоритмов полиэдральной аппроксимации. Для построения оптимального решения на основе гарантирующего достаточно выбрать алгоритм, сходящийся в метрике Хаусдорфа, что является сравнительно мягким ограничением.

В качестве направления дальнейших исследований можно предложить обобщение разработанного подхода на случай нестационарных систем или систем со смешанными геометрическими и суммарными ограничениями.

Список источников / References

1. Понtryагин, Л.С., Болтянский, В.Г., Гамкрелидзе, Р.В., Мищенко, Б.Ф. (1969) *Математическая теория оптимальных процессов*. М.: Наука.
Pontryagin, L.S., Boltyanskiy, V.G., Gamkrelidze, R.V., Mishchenko, B.F. (1969) *Mathematical theory of optimal processes*. Moscow: Science (In Russ.).



2. Беллман, Р. (1960) *Динамическое программирование*. М.: ИИЛ.
Bellman, R. (1960) *Dynamic programming*. Moscow: IIL. (In Russ.).
3. Болтынский, В.Г. (1973) *Оптимальное управление дискретными системами*. М.: Наука.
Boltyanskiy, V.G. (1973) *Optimal control of discrete systems*. Moscow: Science. (In Russ.).
4. Пропой, А.И. (1973) *Элементы теории оптимальных дискретных процессов*. М.: Наука.
Propoy, A.I. (1973) *Elements of the theory of optimal discrete processes*. Moscow: Science. (In Russ.).
5. Ибрагимов, Д.Н. (2019) О задаче быстродействия для класса линейных автономных бесконечномерных систем с дискретным временем, ограниченным управлением и вырожденным оператором. *Автоматика и Телемеханика*. (3), 3—25. <https://doi.org/10.1134/S0005231019030012>
Ibragimov, D.N. (2019) On the Optimal Speed Problem for the Class of Linear Autonomous Infinite-Dimensional Discrete-Time Systems with Bounded Control and Degenerate Operator. *Autom. Remote Control.* 80 (3), 393—412. <https://doi.org/10.1134/S0005117919030019>
6. Мороз, А.И. (1965) Синтез оптимального по быстродействию управления для линейного дискретного объекта третьего порядка. *Автоматика и Телемеханика*. (2), 193—207.
Moroz, A.I. (1965) Synthesis of Time-Optimal Control for Linear Discrete Objects of the Third Order. *Autom. Remote Control.* 25 (9), 193—206.
7. Desoer, C.A., Wing, J. (1961) The Minimal Time Regulator Problem for Linear Sampled-Data Systems: General Theory. *J. Franklin Inst.* 272 (3), 208—228. [https://doi.org/10.1016/0016-0032\(61\)90784-0](https://doi.org/10.1016/0016-0032(61)90784-0)
8. Lin, W.-S. (1986) Time-Optimal Control Strategy for Saturating Linear Discrete Systems. *Int. J. Control.* 43 (5), 1343—1351. <https://doi.org/10.1080/00207178608933543>
9. Bashein, G. (1971) A Simplex Algorithm for On-Line Computation of Time Optimal Controls. *IEEE Transactions on Automatic Control*. 16 (5), 479—482. <https://doi.org/10.1109/TAC.1971.1099776>
10. Vlieger, J.H., Verbruggen, H.B., Bruijn, P.M. (1982) A Time-Optimal Control Algorithm for Digital Computer Control. *Automatica*. 18 (2), 239—244. [https://doi.org/10.1016/0005-1098\(82\)90111-x](https://doi.org/10.1016/0005-1098(82)90111-x)
11. Lasserre, J.B. (1993) Reachable, Controllable Sets and Stabilizing Control of Constrained Linear Systems. *Automatica*. 29 (2), 531—536. [https://doi.org/10.1016/0005-1098\(93\)90152-J](https://doi.org/10.1016/0005-1098(93)90152-J)
12. Stamnes, O.N., Callafon, R.A. (2007) Time-Optimal Input Shaping for Discrete-Time LTI Systems with Application to Seek Profiles of a HDD System. In: *Proc. ASME ISPS Conf.* (pp. 146—148).
13. Kolev, L.V. (1978) Minimum-Fuel Minimum-Time Control of Linear Discrete Systems. *International Journal of Control.* 27 (1), 21—29. <https://doi.org/10.1080/00207177808922344>
14. Scott, M. (1986) Time/Fuel Optimal Control of Constrained Linear Discrete Systems. *Automatica*. 22 (6), 711—715. [https://doi.org/10.1016/0005-1098\(86\)90008-7](https://doi.org/10.1016/0005-1098(86)90008-7)
15. Blanchini, F., Ukovich, W. (1993) Linear Programming Approach to the Control of Discrete-Time Periodic Systems with Uncertain Inputs. *Journal of Optimization Theory and Applications*. 78 (3), 523—539. <https://doi.org/10.1007/bf00939880>
16. Keerthi, S., Gilbert, E. (1987) Computation of Minimum-Time Feedback Control Laws for Discrete-Time Systems with State-Control Constraints. *IEEE Transactions on Automatic Control*. 32 (5), 432—435. <https://doi.org/10.1109/tac.1987.1104625>



Мохначева А.А. (2025)

Построение гарантирующего по быстродействию
управления для дискретных систем...

Моделирование и анализ данных, 2025. 15(2), 70–88.

Mokhnacheva A.A (2025)

The construction of the guaranteeing control in the time-
optimization problem for linear discrete-time systems...

Modelling and Data Analysis, 2025. 15(2), 70–88.

17. Abdelhak, A., Rachik, M. (2010) The Linear Quadratic Minimum-Time Problem for a Class of Discrete Systems. *J. Math. Programming and Operations Research*. 59 (4), 575–587. <https://doi.org/10.1080/02331930801954672>
18. Amato, F., Cosentino, C., Tommasi, G. D., Pironti, A., Romano, M. (2022) Input–Output Finite-Time Stabilization of Linear Time-Varying Discrete-Time Systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*. 67 (9), 4438–4450. <https://doi.org/10.1109/TAC.2022.3161374>
19. Chen, D., Bako, L., Lecoeuche, S. (2012) The Minimum-Time Problem for Discrete-Time Linear Systems: A Non-Smooth Optimization Approach. In: *Proceedings of the IEEE International Conference on Control Applications*. (pp. 196–201). <https://doi.org/10.1109/CCA.2012.6402693>
20. Lee, J., Haddad, W.M. (2022) Fixed Time Stability and Optimal Stabilisation of Discrete Autonomous Systems. *International Journal of Control*. 96 (9), 2341–2355. <https://doi.org/10.1080/0207179.2022.2092557>
21. Yang, H., Xia, Y., Geng, Q. (2019) Stabilization on Null Controllable Region. In: *Analysis and Synthesis of Delta Operator Systems with Actuator Saturation. Studies in Systems, Decision and Control*. V. 193. (pp. 39–65). https://doi.org/10.1007/978-981-13-3660-7_3
22. Leomanni, M., Costante, G., Ferrante, F. (2022) Time-Optimal Control of a Multidimensional Integrator Chain With Applications. *IEEE Control Systems Letters*. 6, 2371–2376. <https://doi.org/10.1109/LCSYS.2022.3154351>
23. Бортаковский, А.С. (2023) Быстродействие группы управляемых объектов. *Известия РАН. Теория и системы управления*. (5), 16–42. <https://doi.org/10.31857/S000233882305004>
Bortakovskii, A.S. (2023) Speed of Performance of a Group of Controlled Objects. *Journal of Computer and Systems Sciences International*. 62 (5), 774–799. <https://doi.org/10.1134/S1064230723050040>
24. Ибрагимов, Д.Н., Новожилкин, Н.М., Порцева, Е.Ю. (2021) О достаточных условиях оптимальности гарантировующего управления в задаче быстродействия для линейной нестационарной дискретной системы с ограниченным управлением. *Автоматика и Телемеханика*. (12), 48–72. <https://doi.org/10.31857/S0005231021120047>
Ibragimov, D.N., Novozhilin, N.M., Portseva, E.Yu. (2021) On Sufficient Optimality Conditions for a Guaranteed Control in the Speed Problem for a Linear Time-Varying Discrete-Time System with Bounded Control. *Autom. Remote Control*. 82 (12), 2076–2096. <https://doi.org/10.1134/S000511792112002X>
25. Каменев, Г.К. (2010) Численное исследование эффективности методов полиэдralной аппроксимации выпуклых тел. М.: Вычислительный центр РАН.
Kamenev, G.K. (2010) *Numerical study of the effectiveness of methods for polyhedral approximation of convex bodies*. Moscow: Computing Center of the Russian Academy of Sciences. (In Russ.).
26. Колмогоров, А.Н., Фомин, С.В. (2012) Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Физматлит.
Kolmogorov, A.N., Fomin, S.V. (2012) *Elements of function theory and functional analysis*. Moscow: Fizmatlit. (In Russ.).
27. Рокафеллар, Р. (1973) Выпуклый анализ. М.: Мир.
Rokafellar, R. (1973) *Convex analysis*. Moscow: Mir. (In Russ.).
28. Ибрагимов, Д.Н., Осокин, А.В., Сиротин, А.Н., Сыпало, К.И. (2022) О свойствах предельных множеств управляемости для класса неустойчивых линейных систем с дискретным



Мохначева А.А. (2025)

Построение гарантирующего по быстродействию
управления для дискретных систем...

Моделирование и анализ данных, 2025. 15(2), 70–88.

Mokhnacheva A.A (2025)

The construction of the guaranteeing control in the time-
optimization problem for linear discrete-time systems...

Modelling and Data Analysis, 2025. 15(2), 70–88.

- временем и l_1 ограничениями. *Известия РАН. Теория и системы управления*. (4), 3—21. <https://doi.org/10.31857/S0002338822040102>
- Ibragimov, D.N., Osokin, A.V., Sirotin, A.N., Sypalo, K.I. (2022) On the Properties of the Limit Control Sets for a Class of Unstable Linear Systems with Discrete Time and l_1 – Restrictions. *Journal of Computer and Systems Sciences International*. 61 (4), 467—484. <https://doi.org/10.1134/S1064230722040104>
29. Ибрагимов, Д.Н. (2024) О решении задачи быстродействия для линейной системы с дискретным временем и суммарным ограничением на векторное управление. В: *SCDG2024*. (с. 137—141).
- Ibragimov, D.N. (2024) On the Solution to the Speed-in-Action Problem for a Linear Discrete-Time System with Summary Constraint on Vector Control. In: *SCDG2024*. (pp. 137—141).
30. Циглер, Г.М. (2014) *Теория многогранников*. М.: МЦНМО.
- Tsigler, G.M. (2014) *Theory of polyhedron*. Moscow: MTSNMO. (In Russ.).

Информация об авторах

Мохначева Арина Александровна, студентка кафедры «Математическая кибернетика», Московский Авиационный Институт (Национальный исследовательский университет), Москва, Российская Федерация, ORCID: <https://orcid.org/0009-0008-2003-2743>, e-mail: arinamokh14@gmail.com

Information about the authors

Arina A. Mokhnacheva, student of the Department of Mathematical Cybernetics, Moscow Aviation Institute (National Research University), Moscow, Russian Federation, ORCID: <https://orcid.org/0009-0008-2003-2743>, e-mail: arinamokh14@gmail.com

Конфликт интересов

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Conflict of Interest

The authors declare no conflict of interest.

Поступила в редакцию 06.03.2025

Received 2025.03.06

Поступила после рецензирования 13.03.2025

Revised 2025.03.13

Принята к публикации 16.04.2025

Accepted 2025.16.04

Опубликована 30.06.2025

Published 2025.06.30

Научная статья | Original paper

УДК 517.925

Применение прогнозирующих моделей для управления движением вертолёта при наличии ограничений

И.А. Кудрявцева✉, К.С. Петров

Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет),
Москва, Российская Федерация
✉ kudryavtseva.irina.a@gmail.com

Резюме

Контекст и актуальность. В статье рассматривается задача синтеза управления вертолётом при наличии ограничений на управление. Исследуется нелинейная модель движения, включающая уравнения состояния, соответствующие модели динамики с шестью степенями свободы, и уравнения измерений. Введены интервальные ограничения на управление, требующие сдерживать управляющие воздействия в заданном диапазоне. **Цель.** Требуется найти управление, позволяющее достичь заданной траектории за конечное время. **Гипотеза.** Учет нелинейности модели и ограничений влияет на характер переходных процессов и требует дополнительного внимания к настройке параметров системы. **Методы и материалы.** Для решения данной задачи предлагается метод, использующий подход на основе нелинейной прогнозирующей модели с последовательной линеаризацией (Nonlinear Model Predictive Control with Successive Linearization, NMPC-SL). **Результаты.** Для анализа эффективности рассматриваемого подхода разработано программное обеспечение, с использованием которого проведены серии вычислительных экспериментов для британского многоцелевого вертолёта с двумя двигателями Westland Lynx. **Выводы.** Разработанный алгоритм продемонстрировал свою эффективность для решения поставленной задачи при условии надлежащей настройки отдельных параметров системы.

Ключевые слова: нелинейные системы управления, управление с прогнозирующими моделями, ограничения на управление, управление вертолётом, нелинейная динамика вертолёта

Для цитирования: Кудрявцева, И.А., Петров, К.С. (2025). Применение прогнозирующих моделей для управления движением вертолёта при наличии ограничений. *Моделирование и анализ данных*, 15(2), 89–109. <https://doi.org/10.17759/mda.2025150205>



Helicopter control by nonlinear model predictive control with constraints

I.A. Kudryavtseva✉, K.S. Petrov

Moscow Aviation Institute, Moscow, Russian Federation

✉ kudryavtseva.irina.a@gmail.com

Abstract

Context and relevance. The paper presents the controller synthesis problem for a helicopter moving under constraints. Helicopter dynamics is described by 6 DoF model that is complimented by the measurement equations. The problem is being solved supposing that the hard control constraints are imposed to specify technical characteristics of the controller. **Objective.** The goal is to find the control input to achieve a required target output over a finite time period. **Hypothesis.** Taking the nonlinearity of the model and constraints into account affects the nature of transients and requires additional attention to setting system parameters. **Methods and materials.** To solve the problem, the method based on the Nonlinear Predictive Control Model with Successive Linearization (NMPC-SL) is proposed. **Results.** To analyze the effectiveness of the considered approach, series of computational calculations have been performed for the British multi-purpose helicopter Westland Lynx with two engines. **Conclusions.** The developed algorithm has demonstrated its effectiveness for solving the problem, provided that the individual system parameters are properly configured.

Keywords: nonlinear control systems, model predictive control, helicopter control, nonlinear helicopter dynamics, Nonlinear Model Predictive Control with Successive Linearization

For citation: Kudryavtseva, I.A., Petrov, K.S. (2025). Helicopter control by nonlinear model predictive control with constraints. *Modelling and Data Analysis*, 15(2), 89–109 (In Russ.). <https://doi.org/10.17759/mda.2025150205>

Введение

Вертолет является сложной динамической системой, что обусловлено вариативностью режимов полета, большим количеством степеней свободы, требующих учета при описании движения и наличием сложных взаимосвязей между элементами системы. Отличительной особенностью движения вертолета является его способность к осуществлению таких маневров как висение, вертикальный набор высоты и снижение с выравниванием и выдерживанием (Leishman, 2006; Padfield, 2007). Упомянутые режимы являются особо трудными в управлении. Кроме того, возможно наличие ограничений, связанных с конструктивными особенностями управляющих устройств.



Как следствие, разработка эффективных методов управления при обозначенных условиях является актуальной задачей.

Одним из современных подходов решения задачи поиска управления является управление с прогнозирующими моделями (Model Predictive Control, MPC) (Camacho, Bordons, 1999; Wang, 2009).

Несмотря на то, что MPC можно достаточно естественно обобщить на случай нелинейной модели и учета ограничений, возникают сложности с эффективной практической реализацией, поскольку метод предполагает итеративное решение задачи оптимизации функционала качества для синтеза управления.

В данной работе предлагается использовать нелинейную модификацию подхода на основе управления с прогнозирующими моделями (Faulwasser, Grüne, Müller, 2018; Grüne, Pannek, 2011; Henson, 1998; Maciejowski, 2002), учитывающую ограничения на управления, для решения задачи управления вертолётом.

Постановка задачи

Пусть движение вертолёта описывается следующей системой уравнений (Padfield, 2007; Abbeel, Coates, Ng, 2010):

$$\begin{aligned}
 \dot{u} &= -wq + ur - g \sin \theta + X, \\
 \dot{v} &= -ur + wp - g \cos \theta \cdot \cos \varphi + Y, \\
 \dot{w} &= -vp + uq + g \cos \theta \cdot \sin \varphi + Z, \\
 J_{xx} \dot{p} &= (J_{yy} - J_{zz})qr - J_{xy}pq + L, \\
 J_{yy} \dot{q} &= (J_{zz} - J_{xx})rp + J_{xy}qr + M, \\
 J_{zz} \dot{r} &= (J_{xx} - J_{yy})pq - J_{xy}(p^2 - q^2) + N, \\
 \dot{\varphi} &= p - (q \cos \varphi - r \sin \varphi) \operatorname{tg} \theta, \\
 \dot{\theta} &= q \sin \varphi + r \cos \varphi, \\
 \dot{\psi} &= \frac{q \cos \varphi - r \sin \varphi}{\cos \theta}, \\
 \dot{x} &= u \cos \psi \cos \theta + v(\sin \varphi \sin \psi - \cos \psi \cos \varphi \sin \theta) + w(\cos \varphi \sin \psi + \cos \psi \sin \varphi \sin \theta), \\
 \dot{y} &= u \sin \theta + v \cos \psi \cos \theta - w \sin \psi \cos \theta, \\
 \dot{z} &= -u \sin \psi \cos \theta + v(\sin \varphi \cos \psi + \sin \psi \sin \theta \cos \varphi) + w(\cos \varphi \cos \psi - \sin \psi \sin \theta \sin \varphi).
 \end{aligned} \tag{1}$$

Представленную систему можно переписать в виде:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)), \tag{2}$$

где $\mathbf{x} = (u, v, w, p, q, r, \varphi, \theta, \psi, x, y, z)^\top$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $n = 12$ — вектор состояния; $\mathbf{u} = (\theta_0, \theta_{ls}, \theta_{lc}, \theta_{0T})^\top$, $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$, $m = 4$ — вектор управления; u, v, w — компоненты скорости движения центра масс; p, q, r — компоненты угловой скорости; φ, θ, ψ — углы Эйлера;



x, y, z — координаты вертолёта в неподвижной системе координат; θ_0 — общий шаг несущего винта; θ_{ls} — продольный циклический шаг; θ_{lc} — поперечный циклический шаг; θ_{lt} — общий шаг рулевого винта; X, Y, Z — компоненты внешних сил, приложенных к вертолёту; L, M, N — компоненты внешних моментов, приложенных к вертолёту; $J_{xx}, J_{yy}, J_{zz}, J_{xy}$ — моменты инерции относительно соответствующих осей связанной системы координат.

Предполагается, что начальное состояние системы $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}^0$ и управление в начальный момент времени $\mathbf{u}(t_0) = \mathbf{u}^0$ известно.

На управление накладываются ограничения

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^{min} \leq \mathbf{u}(t) \leq \mathbf{u}^{max}, \quad \forall t \in [t_0, t_0 + T_p], \\ \mathbf{u}^{min} = (u_i^{min}), \mathbf{u}^{max} = (u_i^{max}), u_i^{min}, u_i^{max} = \text{const}, i = 1, \dots, m. \end{aligned} \quad (3)$$

где t_0 — начальный момент времени, T_p — горизонт прогнозирования непрерывной системы.

Осуществляется переход от заданной непрерывной системы к дискретной введением сетки:

$$t_j = t_0 + j \cdot \Delta t, \quad j = 0, 1, \dots,$$

где Δt — шаг дискретизации.

Вводятся величины N_p и N_c — горизонты прогнозирования и управления дискретной системы, такие, что $N_c \leq N_p$. При этом $N_p = \left[\frac{T_p - t_0}{\Delta t} \right]$, где $[\cdot]$ — целая часть числа.

Далее получение разностных уравнений выполняется согласно методу Эйлера (Kudryavtseva, Petrov, 2022):

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{j+1} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}_j, \mathbf{u}_j) \cdot \Delta t + \mathbf{x}_j, \\ \mathbf{x}_j &= \mathbf{x}(t_j), \mathbf{u}_j = \mathbf{u}(t_j), t_j = t_0 + j \cdot \Delta t, \quad j = 0, 1, \dots, \end{aligned} \quad (4)$$

Переобозначения правой части системы (4) приводят к системе вида

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{j+1} &= \tilde{\mathbf{f}}(\mathbf{x}_j, \mathbf{u}_j), \mathbf{x}_0 = \mathbf{x}^0, \mathbf{u}_0 = \mathbf{u}^0 \\ \mathbf{u}^{min} \leq \mathbf{u}_j \leq \mathbf{u}^{max}, \quad j &= 0, 1, \dots \end{aligned} \quad (5)$$

Полученная система дополняется уравнением измерений:

$$\mathbf{y}_j = \mathbf{C} \mathbf{x}_j, \quad j = 1, 2, \dots$$

где \mathbf{C} — заданная матрица размерности $s \times n$.

Введем в рассмотрение векторы приращений $\Delta \mathbf{u}_j = \mathbf{u}_j - \mathbf{u}_{j-1}$, $j = 1, 2, \dots$.

Функционал качества для некоторого момента времени k имеет вид:

$$J(k) = \sum_{j=k}^{k+N_p} (\bar{\mathbf{r}} - \mathbf{y}_j)^\top (\bar{\mathbf{r}} - \mathbf{y}_j) + \sum_{j=k}^{k+N_c-1} \Delta \mathbf{u}_j^\top Q \Delta \mathbf{u}_j \rightarrow \min_{\Delta \mathbf{u}_k, \dots, \Delta \mathbf{u}_{k+N_c-1}}, \quad (6)$$



где Q — положительно определенная симметрическая матрица, $\bar{\mathbf{r}} \in \mathbb{R}^s$ — заданный вектор выхода.

Требуется найти управление $\{\mathbf{u}_k, \dots, \mathbf{u}_{k+N_c-1}\}$ для текущего момента времени k , где $\mathbf{u}_j = \mathbf{u}_{j-1} + \Delta \mathbf{u}_j, j = k, \dots, k + N_c - 1$, а последовательность приращений управления $\{\Delta \mathbf{u}_k, \dots, \Delta \mathbf{u}_{k+N_c-1}\}$ является решением задачи минимизации (6) с учетом приведения рассматриваемой динамической системы к заданному выходу $\bar{\mathbf{r}}$ в течение горизонта прогнозирования N_p и выполнения ограничений на управление.

Для решения задачи предлагается применить метод на основе нелинейной прогнозирующей модели с последовательной линеаризацией (Nonlinear Model Predictive Control with Successive Linearization, NMPC-SL) (Faulwasser, Grüne, Müller, 2018; Grüne, Pannek, 2011; Henson, 1998; Пономарев, 2014). (Faulwasser, Grüne, Müller, 2018; Grüne, Pannek, 2011; Henson, 1998; Пономарев, 2014). Согласно данной методологии при моделировании поведения системы (5) в текущий момент времени k используется только первый элемент \mathbf{u}_k последовательности $\{\mathbf{u}_k, \dots, \mathbf{u}_{k+N_c-1}\}$, а для следующего момента времени с учетом обновленного вектора состояния системы процесс вычислений повторяется.

Метод решения задачи

Метод нахождения управления \mathbf{u} , позволяющего привести данную систему к заданному состоянию $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^n$, сводится к линеаризации этой системы и синтезу управления с помощью линейной прогнозирующей модели. Для этого движение вертолёта представляется в виде суммы невозмущённого движения и возмущений. При этом невозмущённым движением с точки зрения состояния считается \mathbf{r} , а с точки зрения управления — управление на предыдущем шаге \mathbf{u}_{k-1} (Padfield, 2007; Grüne, Pannek, 2011; Henson, 1998):

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_k &= \mathbf{r} + \delta \mathbf{x}_k, \\ \mathbf{u}_k &= \mathbf{u}_{k-1} + \delta \mathbf{u}_k. \end{aligned} \tag{7}$$

Следовательно, уравнения в возмущениях будут выглядеть следующим образом:

$$\delta \mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{A}_k \cdot \delta \mathbf{x}_k + \mathbf{B}_k \cdot \delta \mathbf{u}_k, \tag{8}$$

где

$$\mathbf{A}_k = \left. \left(\frac{\partial \tilde{\mathbf{f}}(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k)}{\partial \mathbf{x}_k} \right) \right|_{\substack{\mathbf{x}_k=\mathbf{r} \\ \mathbf{u}_k=\mathbf{u}_{k-1}}}, \quad \mathbf{B}_k = \left. \left(\frac{\partial \tilde{\mathbf{f}}(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k)}{\partial \mathbf{u}_k} \right) \right|_{\substack{\mathbf{x}_k=\mathbf{r} \\ \mathbf{u}_k=\mathbf{u}_{k-1}}}. \tag{9}$$

Обратимся к уравнению измерений:

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{C} \mathbf{x}_k. \tag{10}$$



В силу того, что линеаризация проводится относительно управления на предыдущем шаге \mathbf{u}_{k-1} , возмущение управления на предыдущем шаге нулевое: $\delta\mathbf{u}_{k-1} = \mathbf{0}$. Следовательно, справедливы соотношения:

$$\begin{aligned}\delta\mathbf{x}_{k+1} - \delta\mathbf{x}_k &= (\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{r}) - (\mathbf{x}_k - \mathbf{r}) = \mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}_k, \\ \delta\mathbf{u}_k - \delta\mathbf{u}_{k-1} &= (\mathbf{u}_k - \mathbf{u}_{k-1}) - \mathbf{0} = \mathbf{u}_k - \mathbf{u}_{k-1}, \\ \delta\mathbf{x}_{k+1} - \delta\mathbf{x}_k &= \mathbf{A}_k(\delta\mathbf{x}_k - \delta\mathbf{x}_{k-1}) + \mathbf{B}_k(\delta\mathbf{u}_k - \delta\mathbf{u}_{k-1}) = \\ &= \mathbf{A}_k(\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_{k-1}) + \mathbf{B}_k(\mathbf{u}_k - \mathbf{u}_{k-1}) = \mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}_k.\end{aligned}\tag{11}$$

Последнее можно переписать в следующем виде:

$$\Delta\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{A}_k\Delta\mathbf{x}_k + \mathbf{B}_k\Delta\mathbf{u}_k,\tag{12}$$

где $\Delta\mathbf{x}_k = \mathbf{x}_k - \mathbf{x}_{k-1}$, $\Delta\mathbf{u}_k = \mathbf{u}_k - \mathbf{u}_{k-1}$.

Можно заметить, что

$$\mathbf{y}_{k+1} - \mathbf{y}_k = \mathbf{C}\Delta\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{C}\mathbf{A}_k\Delta\mathbf{x}_k + \mathbf{C}\mathbf{B}_k\Delta\mathbf{u}_k.$$

Формируется расширенный вектор состояния (Wang, 2009; Kudryavtseva, Petrov, 2022):

$$\mathbf{X}_k = \begin{pmatrix} \Delta\mathbf{x}_k \\ \mathbf{y}_k \end{pmatrix}.\tag{13}$$

В результате получается расширенная модель:

$$\begin{aligned}\mathbf{X}_{k+1} &= \mathbf{A}'_k\mathbf{X}_k + \mathbf{B}'_k\Delta\mathbf{u}_k, \\ \mathbf{y}_k &= \mathbf{C}'\mathbf{X}_k,\end{aligned}\tag{14}$$

где

$$\mathbf{A}'_k = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_k & \mathbf{0}_{s \times n}^\top \\ \mathbf{C}\mathbf{A}_k & \mathbf{E}_{s \times s} \end{pmatrix}, \mathbf{B}'_k = \begin{pmatrix} \mathbf{B}_k \\ \mathbf{C}\mathbf{B}_k \end{pmatrix}, \mathbf{C}' = \begin{pmatrix} \mathbf{0}_{s \times n} & \mathbf{E}_{s \times s} \end{pmatrix},\tag{15}$$

$\mathbf{0}_{s \times n}$ — нулевая матрица размерности $s \times n$, $\mathbf{E}_{s \times s}$ — единичная матрица размерности $s \times s$.

Полагая, что текущее состояние равно \mathbf{X}_k , вычисляются состояния на горизонте прогнозирования:

$$\begin{aligned}\mathbf{X}_{k+1|k} &= \mathbf{A}'_k\mathbf{X}_k + \mathbf{B}'_k\Delta\mathbf{u}_k, \\ \mathbf{X}_{k+2|k} &= \mathbf{A}'_k\mathbf{X}_{k+1|k} + \mathbf{B}'_k\Delta\mathbf{u}_{k+1} = \mathbf{A}'^2_k\mathbf{X}_k + \mathbf{A}'_k\mathbf{B}'_k\Delta\mathbf{u}_k + \mathbf{B}'_k\Delta\mathbf{u}_{k+1}, \\ &\vdots \\ \mathbf{X}_{k+N_p|k} &= \mathbf{A}'^{N_p}_k\mathbf{X}_k + \mathbf{A}'^{N_p-1}_k\mathbf{B}'_k\Delta\mathbf{u}_k + \cdots + \mathbf{A}'^{N_p-N_c}_k\mathbf{B}'_k\Delta\mathbf{u}_{k+N_c-1}.\end{aligned}\tag{16}$$



Прогнозируемые значения вектора выхода вычисляются из прогнозируемых значений вектора состояния:

$$\begin{aligned}\mathbf{y}_{k+1|k} &= \mathbf{C}'\mathbf{A}'_k \mathbf{X}_k + \mathbf{C}'\mathbf{B}'_k \Delta \mathbf{u}_k, \\ \mathbf{y}_{k+2|k} &= \mathbf{C}'\mathbf{A}'^2 \mathbf{X}_k + \mathbf{C}'\mathbf{A}'_k \mathbf{B}'_k \Delta \mathbf{u}_k + \mathbf{C}'\mathbf{B}'_k \Delta \mathbf{u}_{k+1}, \\ &\vdots \\ \mathbf{y}_{k+N_p|k} &= \mathbf{C}'\mathbf{A}'^{N_p} \mathbf{X}_k + \mathbf{C}'\mathbf{A}'^{N_p-1} \mathbf{B}'_k \Delta \mathbf{u}_k + \cdots + \mathbf{C}'\mathbf{A}'^{N_p-N_c} \mathbf{B}'_k \Delta \mathbf{u}_{k+N_c-1}.\end{aligned}\quad (17)$$

Последняя система может быть представлена в матричной форме:

$$\mathbf{Y}_k = \mathbf{F}_k \mathbf{X}_k + \Phi_k \Delta \mathbf{U}_k, \quad (18)$$

где

$$\mathbf{Y}_k = \begin{pmatrix} \mathbf{y}_{k+1|k} & \dots & \mathbf{y}_{k+N_p|k} \end{pmatrix}^\top, \Delta \mathbf{U}_k = \begin{pmatrix} \Delta \mathbf{u}_k & \dots & \Delta \mathbf{u}_{k+N_c-1} \end{pmatrix}^\top$$

$$\mathbf{F}_k = \begin{pmatrix} \mathbf{C}'\mathbf{A}'_k \\ \vdots \\ \mathbf{C}'\mathbf{A}'^{N_p} \end{pmatrix}, \Phi_k = \begin{pmatrix} \mathbf{C}'\mathbf{B}'_k & \mathbf{0}_{s \times m} & \mathbf{0}_{s \times m} & \dots & \mathbf{0}_{s \times m} \\ \mathbf{C}'\mathbf{A}'_k \mathbf{B}'_k & \mathbf{C}'\mathbf{B}'_k & \mathbf{0}_{s \times m} & \dots & \mathbf{0}_{s \times m} \\ \mathbf{C}'\mathbf{A}'^2 \mathbf{B}'_k & \mathbf{C}'\mathbf{A}'_k \mathbf{B}'_k & \mathbf{C}'\mathbf{B}'_k & \dots & \mathbf{0}_{s \times m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{C}'\mathbf{A}'^{N_p-1} \mathbf{B}'_k & \mathbf{C}'\mathbf{A}'^{N_p-2} \mathbf{B}'_k & \mathbf{C}'\mathbf{A}'^{N_p-3} \mathbf{B}'_k & \dots & \mathbf{C}'\mathbf{A}'^{N_p-N_c} \mathbf{B}'_k \end{pmatrix}. \quad (19)$$

Критерий качества J записывается в виде:

$$J = (\mathbf{R}' - \mathbf{Y}_k)^\top (\mathbf{R}' - \mathbf{Y}_k) + \Delta \mathbf{U}_k^\top \mathbf{Q} \Delta \mathbf{U}_k \rightarrow \min_{\Delta \mathbf{U}_k}, \quad (20)$$

где

$$\mathbf{R}' = \mathbf{R} \bar{\mathbf{r}},$$

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} \mathbf{E}_{s \times s} \\ \vdots \\ \mathbf{E}_{s \times s} \end{pmatrix} \Bigg\} N_p,$$

$$\mathbf{Q} = \rho \mathbf{E}_{m \cdot N_c \times m \cdot N_c}$$

$\rho \geq 0$ — параметр настройки системы, $\bar{\mathbf{r}}$ — уставка.

В силу того, что рассматривается линеаризованная система, включающая уравнения в возмущениях, то, можно положить, что состояние \mathbf{x}_k является отклонением от невозмущённого движения \mathbf{r} , которое требуется подавить. Как следствие уставка в функционале полагается нулевой: $\bar{\mathbf{r}} = \mathbf{0}$.

Таким образом, вид функционала упрощается:



$$J = \mathbf{Y}_k^\top \mathbf{Y}_k + \Delta \mathbf{U}_k^\top \mathbf{Q} \Delta \mathbf{U}_k \rightarrow \min_{\Delta \mathbf{U}_k} \quad (22)$$

Из вида функционала вытекает, что первое слагаемое отвечает за минимизацию ошибки между прогнозируемыми значениями вектора выхода и требуемым значением уставки, а второе слагаемое — за минимизацию приращений вектора управления. При этом за счёт выбора параметра настройки системы можно отрегулировать вес приращений вектора управления $\Delta \mathbf{U}_k$ в функционале.

С учётом ранее введённых обозначений функционал можно записать в расширенном виде:

$$J = (\mathbf{F}_k \mathbf{X}_k)^\top \mathbf{F}_k \mathbf{X}_k + 2\Delta \mathbf{U}_k^\top \Phi_k^\top \mathbf{F}_k \mathbf{X}_k + \Delta \mathbf{U}_k^\top (\Phi_k^\top \Phi_k + \mathbf{Q}) \Delta \mathbf{U}_k \rightarrow \min_{\Delta \mathbf{U}_k}. \quad (23)$$

Первое слагаемое можно опустить, так как происходит минимизация функционала по $\Delta \mathbf{U}_k$.

Учёт ограничений на управление происходит следующим образом.

Заданные ограничения на управление можно переписать в виде (Wang, 2009; Maciejowski, 2002):

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^{min} \leq \mathbf{u}_k &= \mathbf{u}_{k-1} + \Delta \mathbf{u}_k \leq \mathbf{u}^{max}, \\ \mathbf{u}^{min} - \mathbf{u}_{k-1} &\leq \Delta \mathbf{u}_k \leq \mathbf{u}^{max} - \mathbf{u}_{k-1}, \end{aligned} \quad (24)$$

откуда

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{u}_k &\leq \mathbf{u}^{max} - \mathbf{u}_{k-1}, \\ -\Delta \mathbf{u}_k &\leq -\mathbf{u}^{min} + \mathbf{u}_{k-1}. \end{aligned} \quad (25)$$

Эти условия должны выполняться на всём горизонте управления, поэтому они обобщаются:

$$\mathbf{M} \Delta \mathbf{U}_k \leq \gamma_k, \quad (26)$$

где

$$\mathbf{M} = \left\{ \begin{array}{cccc} \mathbf{E}_{m \times m} & \mathbf{0}_{m \times m} & \cdots & \mathbf{0}_{m \times m} \\ \mathbf{E}_{m \times m} & \mathbf{E}_{m \times m} & \cdots & \mathbf{0}_{m \times m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \mathbf{E}_{m \times m} & \mathbf{E}_{m \times m} & \cdots & \mathbf{E}_{m \times m} \\ -\mathbf{E}_{m \times m} & \mathbf{0}_{m \times m} & \cdots & \mathbf{0}_{m \times m} \\ -\mathbf{E}_{m \times m} & -\mathbf{E}_{m \times m} & \cdots & \mathbf{0}_{m \times m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -\mathbf{E}_{m \times m} & -\mathbf{E}_{m \times m} & \cdots & -\mathbf{E}_{m \times m} \end{array} \right\} 2N_c, \quad \gamma_k = \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{u}^{max} - \mathbf{u}_k \\ \vdots \\ \mathbf{u}^{max} - \mathbf{u}_k \\ -\mathbf{u}^{min} + \mathbf{u}_k \\ \vdots \\ -\mathbf{u}^{min} + \mathbf{u}_k \end{array} \right\} 2N_c. \quad (27)$$



Формируется следующая двойственная задача оптимизации:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \Delta \mathbf{U}_k^\top \cdot \mathbf{G}_k \cdot \Delta \mathbf{U}_k + \Delta \mathbf{U}_k^\top \cdot \mathbf{S}_k &\rightarrow \min_{\Delta \mathbf{U}_k}, \\ \mathbf{M} \Delta \mathbf{U}_k &\leq \gamma_k. \end{aligned} \quad (28)$$

где

$$\mathbf{G}_k = 2(\Phi_k^\top \Phi_k + \mathbf{Q}), \quad \mathbf{S}_k = 2\Phi_k^\top \mathbf{F}_k \mathbf{X}_k. \quad (29)$$

Аналитическое решение имеет вид:

$$\Delta \mathbf{U}_k = -\mathbf{G}_k^{-1}(\mathbf{S}_k + \mathbf{M}^\top \lambda),$$

где λ — вектор множителей Лагранжа.

Для решения поставленной задачи используется итерационный алгоритм, представляющий модификацию алгоритма Гаусса-Зейделя для решения систем линейных алгебраических уравнений, предложенный Хилдретом (Кюнци, Крелле, 1965). (Kuntz, Krelle, 1965). Согласно алгоритму, на каждой итерации изменяется только одна координата вектора λ , вычисляемая в результате минимизации целевой функции по данной изменяемой компоненте при условии, что остальные полагаются равными полученным значениям на предыдущей итерации. Вычислительный процесс представлен формулами (31)–(32):

$$\begin{aligned} \lambda_{k(j)}^{l+1} &= \max(0, b_j^{l+1}), j = \overline{1, 2mN_c}, \\ b_j^{l+1} &= -\frac{1}{\mathbf{H}_{k(jj)}} \left(\mathbf{T}_{k(j)} + \sum_{i=1}^{j-1} \mathbf{H}_{k(ji)} \lambda_{k(i)}^{l+1} + \sum_{i=j+1}^{2mN_c} \mathbf{H}_{k(ji)} \lambda_{k(i)}^l \right), \end{aligned} \quad (30)$$

где

$$\mathbf{H}_k = \mathbf{M} \mathbf{G}_k^{-1} \mathbf{M}^\top, \quad \mathbf{T}_k = \gamma_k + \mathbf{M} \mathbf{G}_k^{-1} \mathbf{S}_k. \quad (31)$$

Итерационный процесс продолжается, пока $\lambda_k^{l+1} \neq \lambda_k^l$ или не будет достигнуто максимальное наперёд заданное число итераций l_{max} .

Если λ_k^* — решение, получаемое в результате этого процесса, то

$$\Delta \mathbf{U}_k = -\mathbf{G}_k^{-1}(\mathbf{S}_k + \mathbf{M}^\top \lambda_k^*). \quad (32)$$

Несмотря на то, что полученное изменение вектора управления $\Delta \mathbf{U}_k$ содержит в себе изменения управления на протяжении горизонта управления, т. е. $\Delta \mathbf{u}_k, \Delta \mathbf{u}_{k+1}, \dots, \Delta \mathbf{u}_{k+N_c-1}$, в соответствии с принципом управления отступающим горизонтом реализуется только первый член этой последовательности — $\Delta \mathbf{u}_k$, а остальные члены отбрасываются:



$$\Delta \mathbf{u}_k = -\left(\mathbf{E}_{m \times m} \quad \mathbf{0}_{m \times m \cdot (N_c-1)}\right) \mathbf{G}_k^{-1} (\mathbf{S}_k + \mathbf{M}^\top \lambda_k^*), \quad (33)$$
$$\mathbf{u}_k = \mathbf{u}_{k-1} + \Delta \mathbf{u}_k.$$

В следующий момент времени $k+1$ для расчёта нового изменения вектора управления используется уже новый вектор состояния \mathbf{x}_{k+1} , получаемый из модели системы с использованием управления \mathbf{u}_k . Эта процедура повторяется на каждом временном шаге, задавая закон управления на удаляющемся горизонте.

Алгоритм решения поставленной задачи

Алгоритм строится в соответствии с изложенным методом решения поставленной задачи.

На вход алгоритма подаётся начальное значение вектора состояния \mathbf{x}^0 и вектор уставки \mathbf{r} . Кроме того, задаются верхняя и нижняя границы в ограничениях на управление \mathbf{u}^{max} и \mathbf{u}^{min} . Начальное управление полагается нулевым: $\mathbf{u}^0 = \mathbf{0}$. Выбираются горизонты прогнозирования и управления N_p и N_c , шаг дискретизации Δt , параметр настройки системы ρ , предельное количество итераций по времени N . Задается максимальное число итераций I_{max} для итерационного алгоритма (30).

Непосредственно алгоритм заключается в следующих шагах:

1. Дискретизировать систему по формуле (4).
2. Линеаризовать систему, т. е. рассчитать матрицы в соответствии с формулой (9).
3. Построить матрицы расширенной модели согласно формуле (15), а также матрицу \mathbf{Q} по формуле (21).
4. Построить матрицы \mathbf{F}_k и Φ_k согласно формуле (19), матрицу \mathbf{M} согласно формуле (27), матрицу \mathbf{G}_k согласно формуле (29) и матрицу \mathbf{H}_k по формуле (31).
5. Построить вектор \mathbf{X}_k по формуле (13), вектор γ_k согласно формуле (27), вектор \mathbf{S}_k согласно формуле (29) и вектор \mathbf{T}_k по формуле (31).
6. Выполнить итерационный процесс (30).
7. Найти управление по формуле (33).
8. Найти новое состояние в соответствии с моделью системы (5).
9. Шаги 2—8 выполняются до достижения заданного N .

Результаты моделирования

Разработанный алгоритм решения поставленной задачи был реализован в виде программного продукта. Он позволяет настраивать различные параметры системы и метода, а в качестве выхода получать последовательность управляющих воздействий вместе с соответствующей последовательностью состояний и представлять их в виде графиков.

Программное обеспечение написано на языке программирования Python версии 3.10. При этом использовались следующие библиотеки:

- NumPy версии 1.24.3 — для проведения матричных вычислений;
- SymPy версии 1.12 — для аналитического вычисления производных при линеаризации системы;



- Matplotlib версии 3.8.0 — для построения графиков.

С помощью разработанной программы проведено моделирование динамики вертолёта Westland Lynx Mk.7 и изучено влияние на его поведение различных параметров модели и метода, таких как:

- величина начальных отклонений \mathbf{x}^0 или уставки \mathbf{r} ;
- максимальное число итераций l_{max} ;
- величины горизонтов прогнозирования и управления N_p и N_c ;
- шаг дискретизации Δt .

Рисунок 1 иллюстрирует работу алгоритма для случая демпфирования начальных возмущений и приведения траекторий к установившемуся режиму.

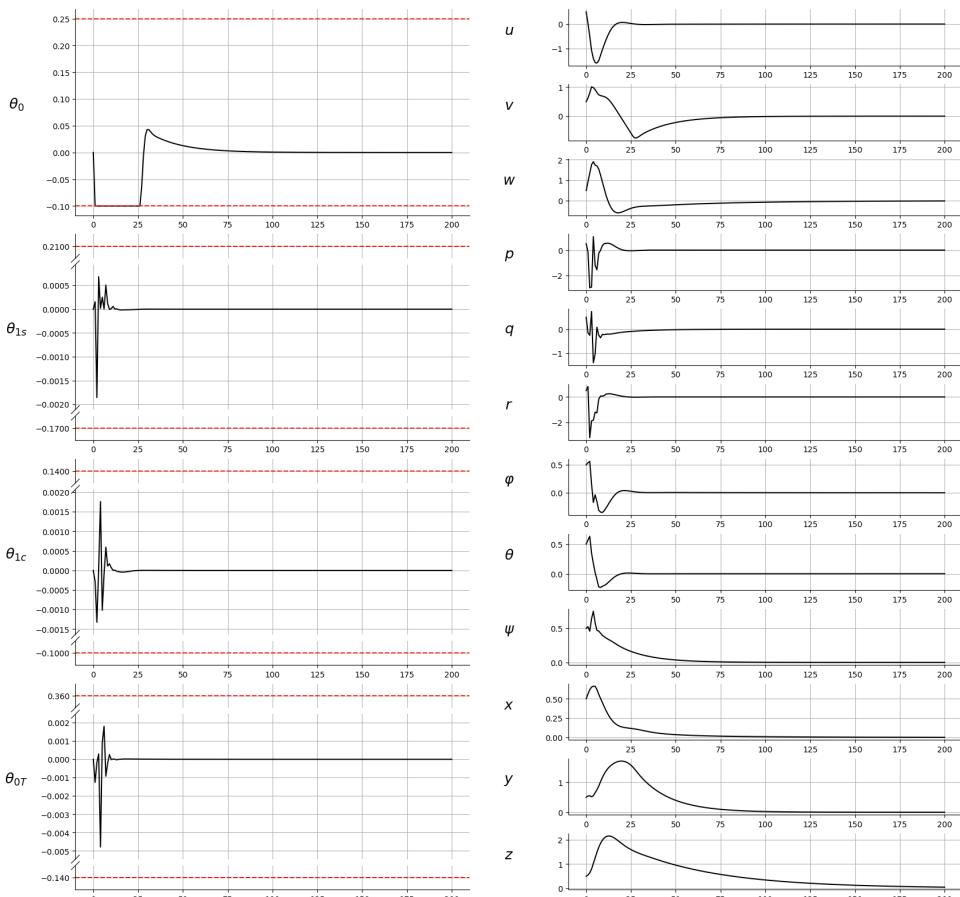


Рис. 1. Траектории координат управления и состояния при $\mathbf{x}^0 = (0.5 \dots 0.5)^\top$, $\mathbf{r} = (0 \dots 0)^\top$, $N_p = N_c = 8$, $\Delta t = 0.1$, $l_{max} = 100$

Fig. 1. Control and state components trajectories at $\mathbf{x}^0 = (0.5 \dots 0.5)^\top$, $\mathbf{r} = (0 \dots 0)^\top$, $N_p = N_c = 8$, $\Delta t = 0.1$, $l_{max} = 100$



На рисунке 2 показано, как происходит движение вертолёта из начальной (нулевой) точки в точку с ненулевыми пространственными координатами (x, y, z). Это служит демонстрацией того, что алгоритм способен обеспечить перемещение вертолёта из одной пространственной точки в другую.

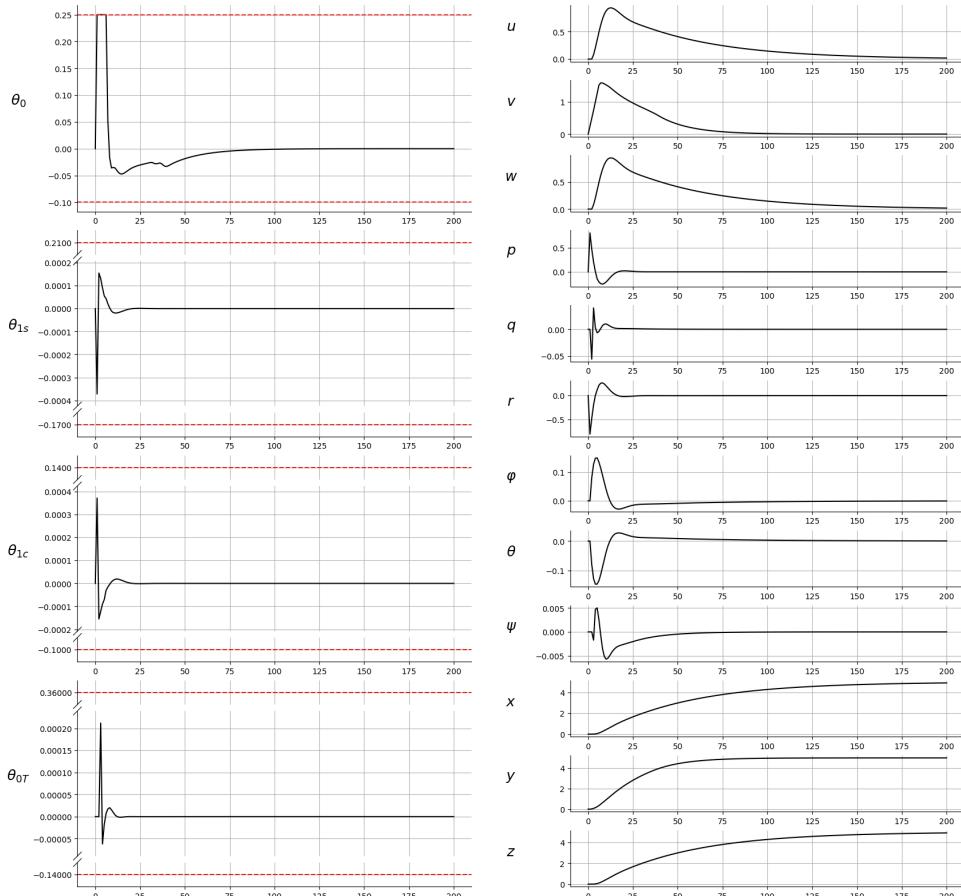


Рис. 2. Траектории координат управления и состояния при
 $\mathbf{x}^0 = (0 \dots 0)^T, \mathbf{r} = (5 \dots 5)^T, N_p = N_c = 8, \Delta t = 0.1, l_{max} = 100$

Fig. 2. Control and state components trajectories at
 $\mathbf{x}^0 = (0 \dots 0)^T, \mathbf{r} = (5 \dots 5)^T, N_p = N_c = 8, \Delta t = 0.1, l_{max} = 100$

Рисунок 3 изображает динамику при уменьшении максимального числа итераций l_{max} (остальные параметры совпадают со случаем, которому соответствует рисунок 1). Видно, что, несмотря на стабилизацию движения, ограничения на управление не были учтены. Следовательно, остановка итерационного процесса



происходит по достижении максимального числа итераций, и его невозможно установить достаточно малым.



Рис. 3. Траектории координат управления и состояния при
 $\mathbf{x}^0 = (0.5 \dots 0.5)^\top, \mathbf{r} = (0 \dots 0)^\top, N_p = N_c = 8, \Delta t = 0.1, l_{max} = 10$

Fig. 3. Control and state components trajectories at
 $\mathbf{x}^0 = (0.5 \dots 0.5)^\top, \mathbf{r} = (0 \dots 0)^\top, N_p = N_c = 8, \Delta t = 0.1, l_{max} = 10$

На рисунках 4—6 приведены случаи с отличными значениями горизонтов прогнозирования и управления. Можно заметить, что уменьшение величин горизонтов влечёт за собой увеличение времени переходного процесса. Их увеличение же может привести к невыполнению ограничений на управление. Причём в большей степени, судя по результатам, влияет величина горизонта прогнозирования.

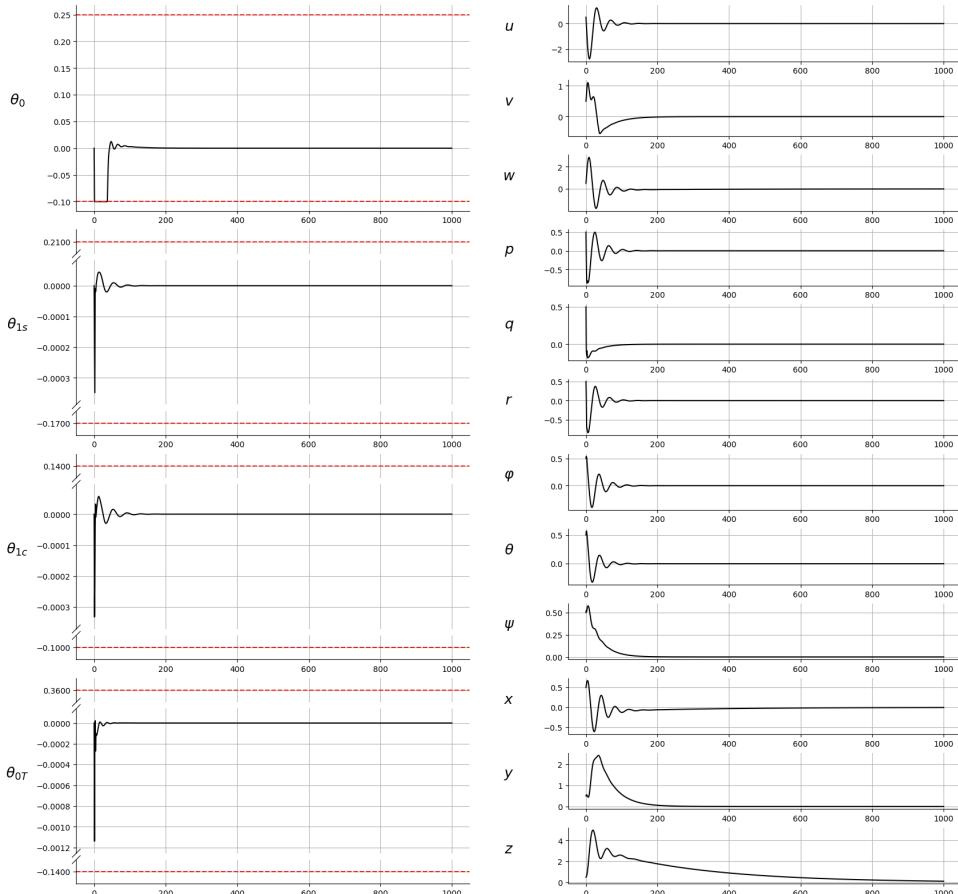


Рис. 4. Траектории координат управления и состояния при
 $\mathbf{x}^0 = (0.5 \dots 0.5)^\top, \mathbf{r} = (0 \dots 0)^\top, N_p = N_c = 4, \Delta t = 0.1, l_{max} = 100$

Fig. 4. Control and state components trajectories at
 $\mathbf{x}^0 = (0.5 \dots 0.5)^\top, \mathbf{r} = (0 \dots 0)^\top, N_p = N_c = 4, \Delta t = 0.1, l_{max} = 100$

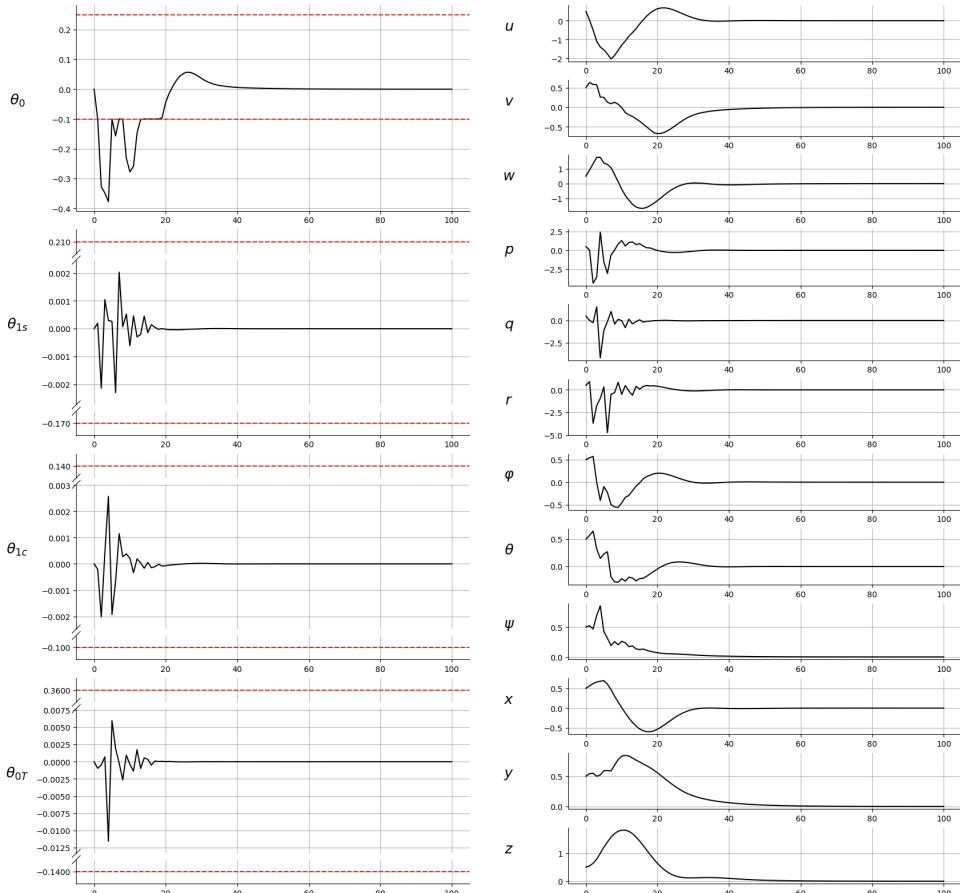


Рис. 5. Траектории координат управления и состояния при
 $\mathbf{x}^0 = (0.5 \dots 0.5)^\top$, $\mathbf{r} = (0 \dots 0)^\top$, $N_p = N_c = 32$, $\Delta t = 0.1$, $l_{max} = 100$

Fig. 5. Control and state components trajectories at
 $\mathbf{x}^0 = (0.5 \dots 0.5)^\top$, $\mathbf{r} = (0 \dots 0)^\top$, $N_p = N_c = 32$, $\Delta t = 0.1$, $l_{max} = 100$

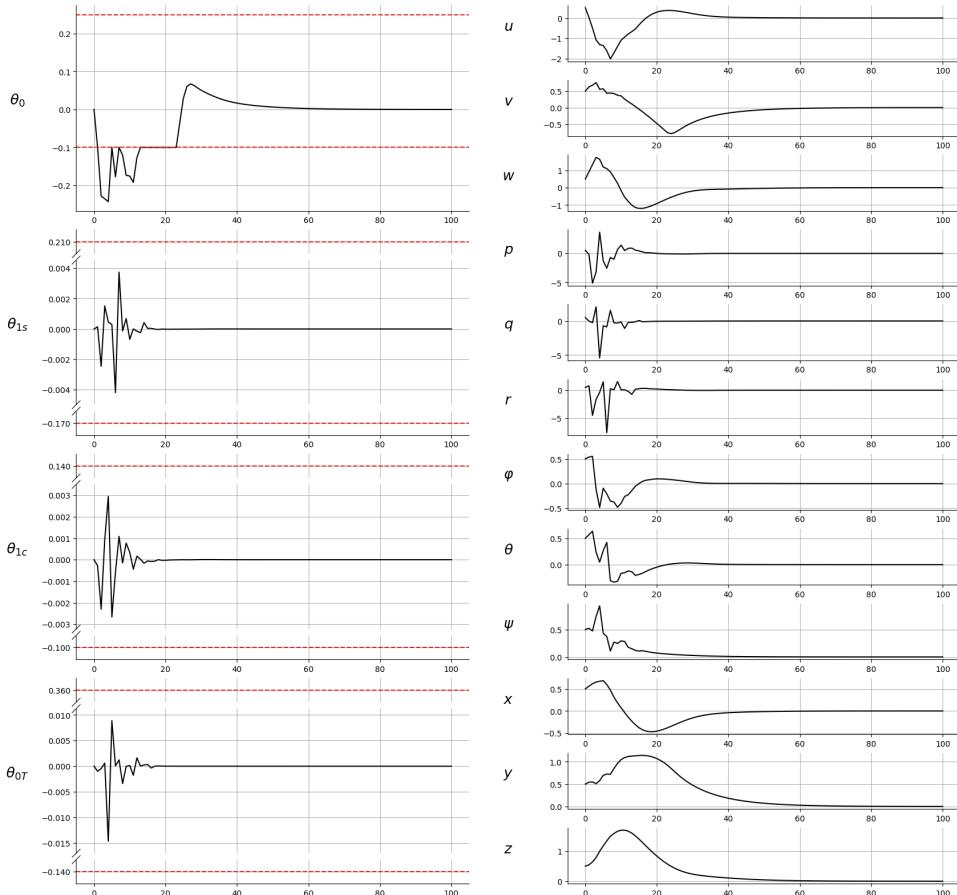


Рис. 6. Траектории координат управления и состояния при
 $\mathbf{x}^0 = (0.5 \dots 0.5)^\top$, $\mathbf{r} = (0 \dots 0)^\top$, $N_p = 32$, $N_c = 4$, $\Delta t = 0.1$, $l_{max} = 100$

Fig. 6. Control and state components trajectories at
 $\mathbf{x}^0 = (0.5 \dots 0.5)^\top$, $\mathbf{r} = (0 \dots 0)^\top$, $N_p = 32$, $N_c = 4$, $\Delta t = 0.1$, $l_{max} = 100$



Анализ влияния значений шага дискретизации приведен на рисунках 7—8.

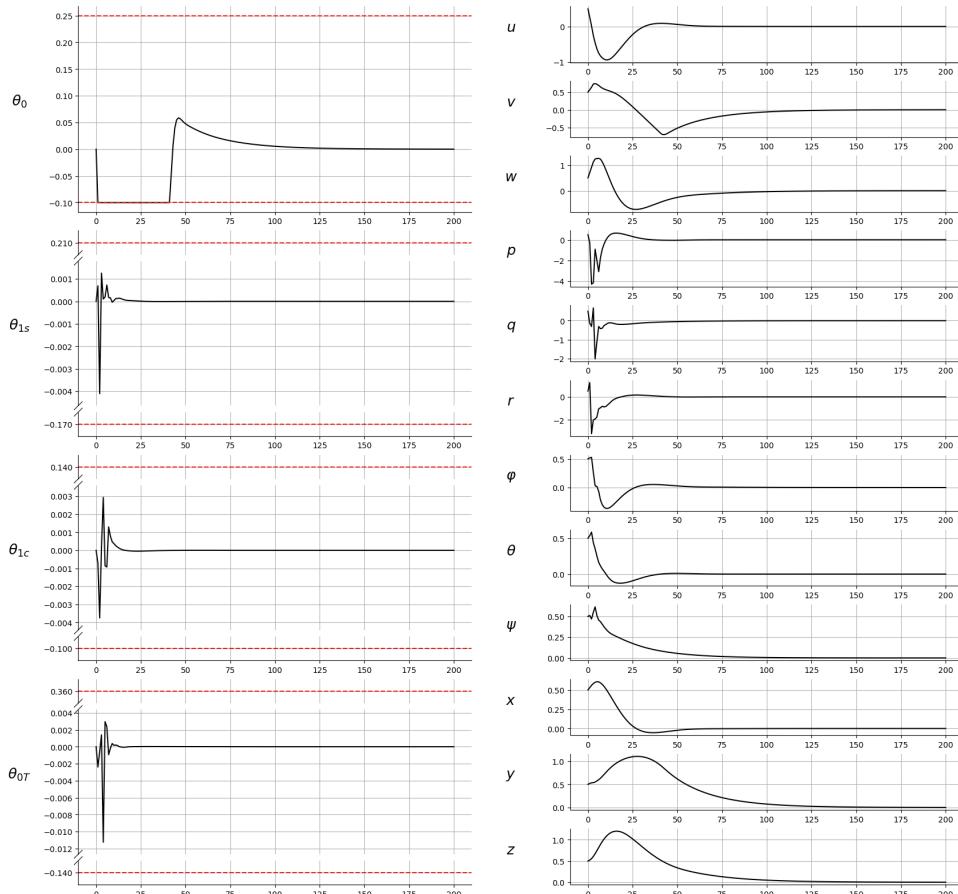


Рис. 7. Траектории координат управления и состояния при
 $\mathbf{x}^0 = (0.5 \dots 0.5)^\top$, $\mathbf{r} = (0 \dots 0)^\top$, $N_p = 32$, $N_c = 4$, $\Delta t = 0.05$, $l_{max} = 100$

Fig. 7. Control and state components trajectories at
 $\mathbf{x}^0 = (0.5 \dots 0.5)^\top$, $\mathbf{r} = (0 \dots 0)^\top$, $N_p = 32$, $N_c = 4$, $\Delta t = 0.05$, $l_{max} = 100$

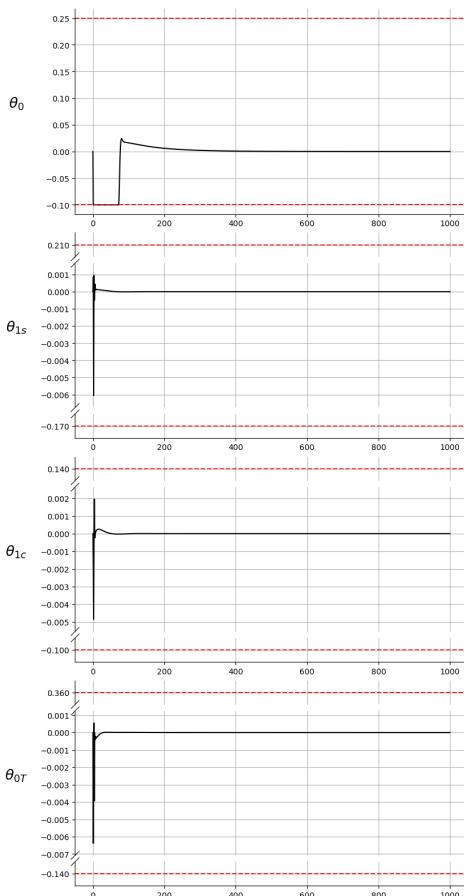


Рис. 8. Траектории координат управления и состояния при
 $\mathbf{x}^0 = (0.5 \dots 0.5)^\top, \mathbf{r} = (0 \dots 0)^\top, N_p = 32, N_c = 4, \Delta t = 0.02, l_{max} = 100$

Fig. 8. Control and state components trajectories at
 $\mathbf{x}^0 = (0.5 \dots 0.5)^\top, \mathbf{r} = (0 \dots 0)^\top, N_p = 32, N_c = 4, \Delta t = 0.02, l_{max} = 100$

На рисунках 7—8 изображены случаи с изменённым шагом дискретизации. Видно, что ширина временного интервала, которому соответствует переходный процесс, увеличивается с уменьшением шага дискретизации. Кроме того, оказалось возможным (и вынужденным) изменение горизонтов прогнозирования и управления до значений, которые ранее были недопустимы из-за отсутствия учёта ограничений на управление.



Обсуждение результатов

Из результатов моделирования следует, что:

- слишком малое ограничение на максимальное число итераций l_{max} может привести к невыполнению ограничений на управление;
- увеличение горизонтов прогнозирования и управления N_p и N_c также может привести к невыполнению ограничений на управление, а их уменьшение влечёт за собой увеличение времени переходного процесса, не приводя, однако, к невыполнению ограничений;
- уменьшение шага дискретизации Δt приводит к сглаживанию сегментов траекторий состояния и управления, отвечающих переходному процессу, и требует увеличение горизонтов прогнозирования.

Предложенный алгоритм показал свою эффективность для решения задачи синтеза управления движением вертолёта в условиях наложения ограничений на управление. Однако, апробация на одной из реальных моделей многоцелевых вертолётов показала, что алгоритм чувствителен к подбору параметров, в особенности значений горизонтов управления и прогнозирования, рассматриваемой схемы дискретизации модели.

Заключение

В статье была рассмотрена задача синтеза управления движением вертолёта при наличии ограничений на управление. При этом предполагалось, что динамика вертолёта описывается нелинейной системой, включающей уравнения состояния для 12 переменных (6 DoF model) и уравнения измерений. Кроме того, учитывалось наличие геометрических ограничений на управление. Для решения поставленной задачи используется метод на основе нелинейной прогнозирующей модели с последовательной линеаризацией (NMPC-SL). Данный подход предполагает нахождение текущего управления путём последовательной оптимизации функционала качества на каждом временном шаге с целью предсказания положения объекта для конечного горизонта прогнозирования.

Результаты моделирования подтвердили применимость описанного выше подхода для рассматриваемой задачи. Однако, для сохранения его работоспособности требуется соответствующая настройка параметров.

Важно отметить, что, хотя предложенный метод и разработанный на его основе алгоритм демонстрируют работоспособность, очевидна и их вычислительная сложность, например, в силу использования итерационной процедуры в ходе нахождения управляющего воздействия. Следовательно, остаётся необходимым развитие метода с целью получения более эффективной с точки зрения вычислительных затрат его модификации. Кроме того, используя представленный подход, можно попробовать решить несколько более сложные задачи, например, задачу, в которой ограничения на управление не являются постоянными.



Список источников / References

1. Leishman, J.G. (2006). *Principals of Helicopter Aerodynamics*. Cambridge University Press, 2nd edition.
2. Padfield, G.D. (2007). *Helicopter flight dynamic. The theory and application of flying qualities and simulation modelling*. Oxford: Blackwell Publishing.
3. Camacho, E.F., Bordons, C. (1999). *Model Predictive Control*. London: Springer.
4. Wang, L. (2009). *Model Predictive Control System Design and Implementation Using MATLAB*. London: Springer-Verlag.
5. Faulwasser, T., Grüne, L., Müller M.A. (2018). Economic Nonlinear Model Predictive Control. *Foundations and Trends in Systems and Control*, 5(1), 1—98.
6. Grüne, L., Pannek, J. (2011). *Nonlinear Model Predictive Control. Theory and Algorithms*. London: Springer-Verlag.
7. Henson, M.A. (1998). Nonlinear model predictive control: current status and future directions. *Computers & Chemical Engineering*, 23(2), 187—202.
8. Maciejowski, J. M. (2002). *Predictive Control with Constraints*. London: Pearson Education Limited.
9. Abbeel, P., Coates, A., Ng, A.Y. (2010). Autonomous Helicopter Aerobatics through Apprenticeship Learning. *The International Journal of Robotics Research*, 29(13), 1—31.
10. Kudryavtseva, I., Petrov, K. (2022). Stability analysis of helicopter dynamics with in-complete information using MPC. *MATEC Web of Conferences*, 362, 01012.
11. Пономарев, А.А. (2014). Построение субоптимального управления в регуляторе «предиктор-корректор». *Вестник СПбГУ*, 10(3), 141—153.
Ponomaryov, A.A. (2014). Optimal control building in «predictor-corrector» regulator. *Bulletin of St. Petersburg State University*. 10(3), 141—153.
12. Кюнци Г.П., Крелле, В. (1965). Нелинейное программирование. М., Советское радио, 1965 г.
Kuntz, H.P., Krelle, W. (1965) Nonlinear Programming. Moscow: Sov. Radio.

Информация об авторах

Кудрявцева Ирина Анатольевна, кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры «Математическая кибернетика», институт «Компьютерные науки и прикладная математика», Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), Москва, Российская Федерация, ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-4042-7087>, e-mail: kudryavtseva.irina.a@gmail.com

Кирилл Сергеевич Петров, аспирант, институт «Компьютерные науки и прикладная математика», Московский авиационный институт (ФГБОУ ВО «МАИ (НИУ)»), Москва, Российская Федерация, e-mail: kpetroff12@yandex.ru

Information about the authors

Irina A. Kudryavtseva, Candidate of Science (Physics and Maths), Associate Professor, staff of Mathematical Cybernetics, Moscow Aviation Institute, Moscow, Russian Federation, ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-4042-7087>, e-mail: kudryavtseva.irina.a@gmail.com

Kirill S. Petrov, postgraduate, Moscow Aviation Institute, Moscow, Russian Federation, e-mail: kpetroff12@yandex.ru



Вклад авторов

Кудрявцева И.А. — идеи исследования; аннотирование и обзор работ по теме исследования, методология, разработка алгоритма решения, редактирование рукописи.

Петров К.С. — реализация алгоритма решения, визуализация результатов, составление эскиза рукописи.

Все авторы приняли участие в обсуждении результатов и согласовали окончательный текст рукописи.

Contribution of the Authors

Irina A Kudryavtseva — ideas; annotation and review on the research field, methodology, developing the solution algorithm, editing the manuscript, writing and design of the manuscript, control over the research.

Kirill S. Petrov — implementing the solution algorithm, visualization of the research results, writing the draft of the manuscript.

All authors participated in the discussion of the results and approved the final text of the manuscript.

Конфликт интересов

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Conflict of Interest

The authors declare no conflict of interest.

Поступила в редакцию 07.05.2025

Received 2025.05.07

Поступила после рецензирования 13.05.2025

Revised 2025.05.13

Принята к публикации 25.05.2025

Accepted 2025.05.25

Опубликована 30.06.2025

Published 2025.06.30

ЧИСЛОВЫЕ МЕТОДЫ | NUMERICAL METHODS

Научная статья | Original paper

УДК 519.6

Оценка точности аппроксимации множеств достижимости линейной системы с геометрическими ограничениями при различных видах дискретизации

С.М. Вуксанович

Московский Авиационный Институт (Национальный исследовательский университет)

Москва, Российская Федерация

✉ stas.vuksanovic@mail.ru

Резюме

Решается задача построения множеств достижимости линейной непрерывной системы с геометрическими ограничениями на управление. В качестве метода решения рассматривается дискретизация исходной непрерывной системы. Для кусочно-постоянных, кусочно-линейных и сплайн-подобных управлений эквивалентные дискретные системы получены явно. Доказана теорема о скорости сходимости в метрике Хаусдорфа множеств достижимости вспомогательных систем к множеству достижимости исходной системы в зависимости от типа аппроксимации. Проведены численные расчеты.

Ключевые слова: линейная система, множество достижимости, дискретная аппроксимация, дискретизация, кусочно-постоянное управление, кусочно-линейное управление, метрика Хаусдорфа

Для цитирования: Вуксанович, С.М. (2025). Оценка точности аппроксимации множеств достижимости линейной системы с геометрическими ограничениями при различных видах дискретизации. *Моделирование и анализ данных*, 15(2), 110—126. <https://doi.org/10.17759/mda.2025150206>



Estimation of the accuracy of approximation of reachable sets of a linear system with geometric constraints for various types of discretization

S.M. Vuksanovic

Moscow Aviation Institute (National Research University), Moscow, Russian Federation

✉ stas.vuksanovic@mail.ru

Abstract

The problem of the construction of reachable sets of a linear continuous-time system with geometric control constraints is solved. The discretization of the initial continuous-time system is considered as a solution method. For piecewise-constant, piecewise-linear, and spline-like controls, equivalent discrete-time systems are obtained explicitly. A theorem on the rate of the convergence in the Hausdorff metric of reachable sets of auxiliary systems to the reachable set of the initial system is proved, depending on the type of approximation. Numerical calculations have been performed.

Keywords: linear system, reachable set, discrete approximation, discretization, piecewise-constant control, piecewise-linear control, Hausdorff metric

For citation: Vuksanovic, S.M. (2025). Estimation of the accuracy of approximation of reachable sets of a linear system with geometric constraints for various types of the discretization. *Modelling and Data Analysis*, 15(2), 110—126. (In Russ.). <https://doi.org/10.17759/mda.2025150206>

Введение

Одной из важных задач анализа в математической теории управления является построение множеств достижимости и управляемости. Например, при решении двухточечных задач, т.е. с жесткими ограничениями на начальное и конечное состояние, необходимое и достаточное условие разрешимости сводится к принадлежности данных состояний множествам достижимости и управляемости соответственно. С другой стороны, для систем с терминальным критерием качества задача оптимального управления может быть сведена к поиску минимума или максимума на множестве достижимости, что отражено в классических монографиях (Красовский, 1970), (Понтрягин и др., 1969). Также при рассмотрении задачи быстродействия множество 0-управляемости по определению представляет собой множество уровня функции будущих потерь в методе динамического программирования Беллмана (Беллман, 1960), что используется для синтеза оптимальных процессов.

При этом точное описание множеств достижимости, как правило, не представляется возможным, поскольку предполагает либо решение эволюционных уравнений (аналога дифференциальных уравнений для множеств) (Комаров, 1988), (Куржанский,



Никонов, 1993), (Панасюк, Панасюк, 1980), (Толстоногов, 1982), либо вычисления неподвижной точки отображения в пространстве компактов (Арутюнов, Жуковский, 2017), (Беллман, 1960), (Жуковский, 2016), (Жуковский, Панасенко, 2018). Для ряда линейных систем возможно построение полиздральных аппроксимаций на основе аппарата опорных функций (Красовский, 1970).

С точки зрения практики наиболее эффективным методом построения множеств достижимости является дискретизация непрерывной динамической системы (Мордухович, 1988). В контексте линейных систем данный подход позволяет большую часть соотношений получить явно, что связано с возможностью точного решения системы линейных дифференциальных уравнений (Хартман, 1970). Таким образом, применение дискретизации сводится к исследованию сходимости последовательности множеств достижимости вспомогательных дискретных систем к множеству достижимости исходной непрерывной системы.

Существенным недостатком большей части работ по данной тематике является предположение о кусочно-постоянной структуре управления (Булаев, Шориков, 2017), (Зыков, 2022), (Максимов, 2021), (Никольский, 2021). При этом класс функций управления в непрерывной системе является значительно более широким. В данной статье исследуется скорость сходимости последовательности множеств достижимости дискретной системы в зависимости от выбранного типа дискретизации. Кроме классического кусочно-постоянного управления, допускаются также кусочно-линейные функции и «ломаные» (непрерывные сплайны первого порядка на каждом интервале дискретизации). Также решается задача явного описания эквивалентных дискретных систем для каждого из заданных классов управлений. Значимым результатом является описание всех конструкций в терминах суммы Минковского, линейного преобразования компакта и расстояния Хаусдорфа, что делает возможным численную реализацию всех полученных математических соотношений.

Постановка задачи

Рассматривается линейная система управления с непрерывным временем:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + v(t), \\ x(0) = x_0, v(t) \in \mathcal{U}_c, t \in [0; T],\end{aligned}\#(1)$$

где $x(t) \in \mathbb{R}^n$ — вектор состояния системы, $x_0 \in \mathbb{R}^n$ — начальное состояние, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ — матрица системы, $\det A \neq 0$, $\mathcal{U}_c \subset \mathbb{R}^n$ — множество допустимых значений управления непрерывной системы. Предполагается, что \mathcal{U}_c — компакт, $v \in \mathbf{U}$, где

$$\mathbf{U} = \left\{ v : [0; T] \rightarrow \mathcal{U}_c : v \in \mathbb{L}_2([0; T]) \right\}.$$

Определение 1. Множеством достижимости $Y_c(x_0, T, \mathbf{U})$ непрерывной системы (1) называется множество тех состояний, в которые можно перевести данную



систему управления за время T из начального состояния x_0 посредством выбора допустимых управляющих воздействий:

$$Y_c(x_0, T, \mathbf{U}) = \{x \in \mathbb{R}^n : \exists v \in \mathbf{U} : \text{если } x(0) = x_0, \text{то } x(T) = x\}.$$

Стоит отметить, что $Y_c(x_0, T, \mathbf{U})$ вообще говоря не является компактом.

Требуется явно построить или получить выпуклую и компактную оценку множества достижимости (1). Для решения поставленной задачи предлагается по аналогии с (Зыков, 2022) использовать идею дискретизации. Таким образом, необходимо построить следующую систему с дискретным временем, эквивалентную (1):

$$\begin{aligned} z(k+1) &= A_d z(k) + u(k), \\ z(0) &= x_0, u(k) \in \mathcal{U}_d, k = \overline{0, N}, \#(2) \end{aligned}$$

где $z(k) \in \mathbb{R}^n$ — вектор состояния дискретной системы, $x_0 \in \mathbb{R}^n$ — начальное состояние, $A_d \in \mathbb{R}^{n \times n}$ — матрица системы, $\mathcal{U}_d \subset \mathbb{R}^n$ — множество допустимых значений управления дискретной системы.

Эквивалентность систем (1) и (2) заключается в том, что траектория $x(t)$ системы (1) является допустимой тогда и только тогда, когда найдётся допустимая траектория $\{z(k)\}_{k=0}^N$ системы (2), удовлетворяющая условию:

$$x(k\Delta) = z(k), = \overline{0, N},$$

где $\Delta = \frac{T}{N}$ — шаг дискретизации.

Определение 2. Множеством достижимости $Y_d(x_0, N)$ дискретной системы (2) называется множество состояний, в которое можно перевести данную систему управления за N шагов из начального состояния x_0 посредством выбора допустимых управляющих воздействий:

$$Y_d(x_0, N) = \{z \in \mathbb{R}^n : \exists u(0), \dots, u(N-1) \in \mathcal{U}_d : \text{если } z(0) = z_0, \text{то } z(N) = z\}.$$

По построению верно равенство $Y_c(x_0, T, \mathbf{U}) = Y_d(x_0, N)$. Таким образом, дискретизация позволяет полностью решить исходную задачу о построении множества достижимости для непрерывной системы (1), однако такой подход имеет и свои ограничения. Основной сложностью в переходе от (1) к (2) является построение множества \mathcal{U}_d , определяющего ограничения в дискретной системе. Для возможности численной реализации данной процедуры предлагается сузить множество допустимых управлений U до некоторого подмножества, которое, с одной стороны, при устремлении шага дискретизации к 0, будет в некотором смысле сходится к U , а с другой стороны, при фиксированном Δ будет описываться конечным числом параметров, которые можно рассмотреть в качестве вектора управления в системе (2).



В связи с этим определим следующие подмножества множества допустимых управлений U . Далее для всех $k = 0, N$ введём обозначение $t_k = k\Delta$.

1. Кусочно-постоянное управление.

$$U_0 = \left\{ u : [0; T] \rightarrow \mathcal{U}_c : u(t) = \alpha_k \in \mathcal{U}_c, t \in [t_k; t_{k+1}), k = \overline{0, N} \right\},$$

где α_k — константный вектор из \mathcal{U}_c .

2. Кусочно-линейное управление.

$$U_1 = \left\{ u : [0; T] \rightarrow \mathcal{U}_c : u(t) = u_{k,2} \frac{t - t_k}{\Delta} + u_{k,1} \frac{t_{k+1} - t}{\Delta} \in \mathcal{U}_c, t \in [t_k; t_{k+1}), k = \overline{0, N-1} \right\},$$

где $u_{k,1}, u_{k,2}$ — константные векторы из \mathcal{U}_c .

3. Управление в виде полиномиального сплайна первого порядка.

В данном случае отрезок $[t_k; t_{k+1}]$ равномерно разбивается на M дополнительных отрезков:

$$t_k = t_{k,0} < t_{k,1} < t_{k,2} < \dots < t_{k,M-1} < t_{k,M} = t_{k+1},$$

где $t_{k,j} = t_k + j\delta, j = \overline{0, M}$.

$$U_2 = \left\{ u : [0; T] \rightarrow \mathcal{U}_c : u(t) = u_{k,j+1} \frac{t - t_{k,j}}{\delta} + u_{k,j} \frac{t_{k+1,j} - t}{\delta} \in \mathcal{U}_c, t \in [t_k; t_{k+1}), j = \overline{0, M-1}, k = \overline{0, N-1} \right\},$$

где $u_{k,j}$ — константный вектор из \mathcal{U}_c .

Таким образом, для решения задачи построения $Y_c(x_0, T, U)$ требуется, во-первых, осуществить переход от (1) к (2), заменив U на U_0 , U_1 или U_2 и явным образом построив матрицу A_d и множество \mathcal{U}_d , во-вторых, исследовать сходимость множеств $Y_c(x_0, T, U_i) = Y_d(x_0, N)$ к $Y_c(x_0, T, U)$ при $\Delta \rightarrow 0$. В качестве критерия сходимости рассматривается расстояние Хаусдорфа.

Определение 3. Пусть $X \subset \mathbb{R}^n, Y \subset \mathbb{R}^n$ — компакты. Тогда расстоянием Хаусдорфа между множествами X и Y называется

$$\rho_h(X, Y) = \max \left\{ \supinf_{x \in X} y - x, \supinf_{y \in Y} x - y \right\}. \#(3)$$

Замечание 1. Если $X \subset Y$, то расстояние Хаусдорфа выражается следующей формулой:

$$\rho_h(X, Y) = \supinf_{y \in Y} x - y. \#(4)$$

Поскольку $Y_c(x_0, T, U)$ вообще говоря не является компактом, то сходимость будет рассматриваться к его замыканию $\text{cl } Y_c(x_0, T, U)$.



Дискретизация

В данном разделе рассматривается дискретизация линейной системы управления с непрерывным временем. Выразим решение (1) в момент времени $t = t_{k+1}$ по аналогии с (Зыков, 2022), полагая начальное условие $x(t_k) = z(k)$ для произвольного $k = \overline{0, N-1}$:

$$z(k+1) = x(t_{k+1}) = \Phi(t_{k+1})\Phi^{-1}(t_k)z(k) + \int_{t_k}^{t_{k+1}} \Phi(t_{k+1})\Phi^{-1}(s)v(s)ds, \#(5)$$

где $\Phi(t) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ — матрица фундаментальной системы решений дифференциальных уравнений (1). Матрица A_d в силу стационарности (1) в данном случае будет иметь вид

$$A_d = \Phi(t_{k+1})\Phi^{-1}(t_k) = \Phi(\Delta)\Phi^{-1}(0). \#(6)$$

Чтобы получить множество \mathcal{U}_d для различных случаев, необходимо поочерёдно подставить в (5) управление $v \in U_i, i = \overline{0, 2}$ и вычислить соответствующий интеграл. Введём переходную матрицу:

$$\Phi(t, s) = \Phi(t)\Phi^{-1}(s).$$

1. Кусочно-постоянное управление $v \in U_0$.

В данном случае решение интеграла (5) будет иметь следующий вид:

$$u(k) = \int_{t_k}^{t_{k+1}} \Phi(t_{k+1}, s)v(s)ds = (\Phi(t_{k+1}, t_k) - I)A^{-1}\alpha_k,$$

где $I \in \mathbb{R}^{n \times n}$ — единичная матрица.

Учтём, что в силу стационарности (1) верно равенство

$$\Phi(t_{k+1}, t_k) = \Phi(\Delta, 0).$$

Тогда искомое множество $\mathcal{U}_{d,0}$ выражается следующим образом:

$$\mathcal{U}_{d,0} = (\Phi(\Delta, 0) - I)A^{-1}\mathcal{U}_c, \#(7)$$

2. Кусочно-линейное управление $v \in U_1$.

В данном случае решение интеграла (5) будет иметь следующий вид:

$$u(k) = \int_{t_k}^{t_{k+1}} \Phi(t_{k+1}, s)v(s)ds = \left(C_1(\Delta) - \frac{1}{\Delta}C_2(\Delta) \right) u_{k,1} + \frac{1}{\Delta}C_2(\Delta)u_{k,2},$$

где

$$C_1(\Delta) = (\Phi(\Delta, 0) - I)A^{-1},$$



$$C_2(\Delta) = \left([\Phi(\Delta, 0) - I] A^{-1} - \Delta I \right) A^{-1}.$$

Тогда искомое множество $\mathcal{U}_{d,1}$ выражается следующим образом:

$$\mathcal{U}_{d,1} = \left(C_1(\Delta) - \frac{1}{\Delta} C_2(\Delta) \right) \mathcal{U}_c + \frac{1}{\Delta} C_2(\Delta) \mathcal{U}_c, \#(8)$$

где сумма множеств производится по Минковскому.

3. Управление в виде полиномиального сплайна первого порядка $v \in U_2$.

В данном случае решение интеграла (5) будет иметь следующий вид:

$$\begin{aligned} u(k) &= \int_{t_k}^{t_{k+1}} \Phi(t_{k+1}, s) v(s) ds = \sum_{j=0}^{M-1} \int_{t_{k,j}}^{t_{k,j+1}} \Phi(t_{k+1}, s) v(s) ds = \\ &= \sum_{j=0}^{M-1} \Phi(t_{k+1}, t_{k,j+1}) \int_{t_{k,j}}^{t_{k,j+1}} \Phi(t_{k,j+1}, s) v(s) ds = \\ &= \sum_{j=0}^{M-1} \Phi(t_{k+1}, t_{k,j+1}) \left(\left[C_1(\delta) - \frac{1}{\delta} C_2(\delta) \right] u_{k,j} + \frac{1}{\delta} C_2(\delta) u_{k,j+1} \right) = \\ &= u_{k,0} \left(\Phi(t_{k+1}, t_{k,1}) \left[C_1(\delta) - \frac{1}{\delta} C_2(\delta) \right] \right) + u_{k,M} \left(\Phi(t_{k+1}, t_{k,1}) \frac{1}{\delta} C_2(\delta) \right) + \\ &\quad + \sum_{i=1}^{M-1} u_{k,i} \left(\Phi(t_{k+1}, t_{k,i}) \frac{C_2(\delta)}{\delta} + \Phi(t_{k+1}, t_{k,i+1}) \left[C_1(\delta) - \frac{1}{\delta} C_2(\delta) \right] \right) = \\ &= u_{k,0} \left(\Phi(\delta(M-1), 0) \left[C_1(\delta) - \frac{1}{\delta} C_2(\delta) \right] \right) + u_{k,M} \frac{1}{\delta} C_2(\delta) + \\ &\quad + \sum_{i=1}^{M-1} u_{k,i} \left(\Phi(\delta(M-i), 0) \frac{C_2(\delta)}{\delta} + \Phi(\delta(M-i-1), 0) \left[C_1(\delta) - \frac{1}{\delta} C_2(\delta) \right] \right). \end{aligned}$$

Тогда искомое множество $\mathcal{U}_{d,2}$ выражается следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_{d,2} &= \left(\Phi(\delta(M-1), 0) \left[C_1(\delta) - \frac{1}{\delta} C_2(\delta) \right] \right) \mathcal{U}_c + \frac{1}{\delta} C_2(\delta) \mathcal{U}_c + \\ &\quad + \sum_{i=1}^{M-1} \left(\Phi(\delta(M-i), 0) \frac{C_2(\delta)}{\delta} + \Phi(\delta(M-i-1), 0) \left[C_1(\delta) - \frac{1}{\delta} C_2(\delta) \right] \right) \mathcal{U}_c. \#(9) \end{aligned}$$



Теорема о сходимости множеств достижимости

Рассмотрим вопросы зависимости скорости сходимости множества достижимости дискретной системы (2) к множеству непрерывной системы (1) в зависимости от выбранного типа дискретизации.

Теорема 1. Пусть переход от (1) к (2) для некоторого $\Delta > 0$ выполнен в предположении, что $v \in U_i$ для некоторого $i = 0, 1, 2$, т.е. $Y_d(x_0, N) = Y_c(x_0, T, U_i)$. Тогда

1. для $v \in U_0$ справедлива оценка $\rho_h(Y_d(x_0, N), \text{cl } Y_c(x_0, T, U)) = O(\Delta)$;
2. для $v \in U_1$ справедлива оценка $\rho_h(Y_d(x_0, N), \text{cl } Y_c(x_0, T, U)) = O(\Delta^2)$;
3. для $v \in U_2$ справедлива оценка $\rho_h(Y_d(x_0, N), \text{cl } Y_c(x_0, T, U)) = O(\delta^2)$;

Доказательство. Выберем следующее $\hat{U} \subset U$

$$\hat{U} = \left\{ v : [0; T] \rightarrow \mathcal{U}_c, v \in C^1([0; T]) \right\}.$$

Поскольку класс всех многочленов, с одной стороны, плотен в $\mathbb{L}_2([0; T])$ (Колмогоров, Фомин, 2021; гл. VII, § 1, разд. 4) с другой стороны, является подмножеством $C^1([0; T])$, то верно равенство

$$\text{cl } \hat{U} = \text{cl } U. \# (10)$$

Рассмотрим оператор $F : \mathbb{L}_2([0; T]) \rightarrow \mathbb{R}^n$ следующего вида:

$$F(v) = \int_0^T \Phi(T)\Phi^{-1}(s)v(s)ds.$$

Оператор F является линейным и ограниченным (Колмогоров, Фомин, 2021; гл. IV, § 1, разд. 2, пример 3), при этом в силу (5) при $N = 1$ верно, что

$$Y_c(x_0, T, U) = \Phi(T)\Phi^{-1}(0)x_0 + F(U).$$

Поскольку для линейного оператора ограниченность эквивалентна непрерывности (Колмогоров, Фомин, 2021; гл. IV, § 1, разд. 1, теорема 1), то для любого $\hat{U} \subset \mathbb{L}_2([0; T])$, удовлетворяющего условию (10), верно равенство

$$\text{cl } F(U) = F(\text{cl } U) = F(\text{cl } \hat{U}) = \text{cl } F(\hat{U}).$$

Отсюда следует, что

$$\text{cl } Y_c(x_0, T, U) = \text{cl } Y_c(x_0, T, \hat{U}).$$

По построению множество достижимости $Y_d(x_0, N) = Y_c(x_0, T, U_i)$ является подмножеством $\text{cl } Y_c(x_0, T, \hat{U})$, а следовательно, верно (4):



$$\rho_h \left(\text{cl} Y_c(x_0, T, \hat{U}), Y_d(x_0, N) \right) = \sup_{x \in Y_c(x_0, T, \hat{U})} \inf_{\tilde{x} \in Y_d(x_0, N)} |x - \tilde{x}|. \quad \#(11)$$

Зафиксируем $x \in Y_c(x_0, T, \hat{U})$ и рассмотрим произвольный $\tilde{x} \in Y_c(x_0, T, U_i) = Y_d(x_0, N)$. Тогда найдутся $v \in \hat{U}, \tilde{v} \in U_i$ такие, что

$$x(T) = \Phi(T)\Phi^{-1}(0)x_0 + \int_0^T \Phi(T)\Phi^{-1}(s)v(s)ds,$$

$$\tilde{x}(T) = \Phi(T)\Phi^{-1}(0)x_0 + \int_0^T \Phi(T)\Phi^{-1}(s)\tilde{v}(s)ds,$$

где v фиксировано, а \tilde{v} выбирается произвольно. Рассмотрим следующую величину:

$$\begin{aligned} \|x(T) - \tilde{x}(T)\| &= \left\| \int_0^T \Phi(T)\Phi^{-1}(s)(v(s) - \tilde{v}(s))ds \right\| \\ &\leq \Phi(T) \sum_{k=0}^{N-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \Phi^{-1}(s)(v(s) - \tilde{v}(s))ds \leq \\ &\leq \Phi(T) \sum_{k=0}^{N-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \Phi^{-1}(s)v(s) - \tilde{v}(s)ds \leq \\ &\leq \Phi(T) \max_{t \in [0; T]} \Phi^{-1}(t) \sum_{k=0}^{N-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} v(s) - \tilde{v}(s)ds \leq \\ &\leq C_1 C_2 \sum_{k=0}^{N-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} v(s) - \tilde{v}(s)ds, \end{aligned}$$

где

$$C_1 \triangleq \max_{t \in [0; T]} \|\Phi(t)\| < \infty,$$

$$C_2 \triangleq \max_{t \in [0; T]} \|\Phi^{-1}(t)\| < \infty.$$

Оценим величину $v(s) - \tilde{v}(s)$, находящуюся под интегралом, на некотором интервале $[t_k; t_{k+1}]$. Пусть $\tilde{v} \in U_0$. Разложим функцию $v(t)$ по формуле Тейлора (Зорич, 1984; гл. 5, § 3, разд. 3, теорема 2) в окрестности точки t_k :

$$v(t) = v(t_k) + O(|t - t_k|).$$

Выберем $\tilde{v}(t) = v(t_k)$ и получим

$$v(t) - \tilde{v}(t) = O(|t - t_k|) \leq O(\Delta).$$



Таким образом,

$$\int_{t_k}^{t_{k+1}} \|v(s) - \tilde{v}(s)\| ds \leq \int_{t_k}^{t_{k+1}} \|O(\Delta)\| ds = \Delta \|O(\Delta)\|.$$

Окончательно, $\|x(T) - \tilde{x}(T)\| \leq N\Delta \|O(\Delta)\|$.

Пусть теперь $\tilde{v} \in U_1$. Разложим функцию $v(t)$ по формуле Тейлора (Зорич, 1984; гл. 5, § 3, разд. 3, теорема 2) в окрестности точки t_k :

$$v(t) = v(t_k) + (t - t_k)v'(t_k) + O(|t - t_k|^2).$$

Выберем

$$\tilde{v}(t) = v(t_k) + \frac{v(t_{k+1}) - v(t_k)}{t_{k+1} - t_k}(t - t_k).$$

Получим с учётом (Формалев, Ревизников, 2004; гл. 3, § 3.4, формула 3.36)

$$\begin{aligned} v(t) - \tilde{v}(t) &= (t - t_k) \left(v'(t_k) - \frac{v(t_{k+1}) - v(t_k)}{t_{k+1} - t_k} \right) = \\ &= (t - t_k) O(|t_{k+1} - t_k|) \leq O(|t_{k+1} - t_k|^2) = O(\Delta^2). \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\int_{t_k}^{t_{k+1}} \|v(s) - \tilde{v}(s)\| ds \leq \int_{t_k}^{t_{k+1}} \|O(\Delta^2)\| ds = \Delta \|O(\Delta^2)\|.$$

Окончательно, $\|x(T) - \tilde{x}(T)\| \leq N\Delta \|O(\Delta^2)\|$.

Пусть $\tilde{v} \in U_2$. Разобьём интеграл на сумму интегралов:

$$\int_{t_k}^{t_{k+1}} v(s) - \tilde{v}(s) ds = \sum_{j=0}^{M-1} \int_{t_{k,j}}^{t_{k,j+1}} v(s) - \tilde{v}(s) ds.$$

На каждом $[t_{k,j}; t_{k,j+1}]$ аналогично п. 2 положим

$$\tilde{v}(t) = v(t_{k,j}) + \frac{v(t_{k,j+1}) - v(t_{k,j})}{t_{k,j+1} - t_{k,j}}(t - t_{k,j})$$

и получим оценку

$$\begin{aligned} v(t) - \tilde{v}(t) &= (t - t_{k,j}) \left(v'(t_{k,j}) - \frac{v(t_{k,j+1}) - v(t_{k,j})}{t_{k,j+1} - t_{k,j}} \right) = \\ &= \dots \end{aligned}$$



$$= (t - t_{k,j}) O(|t_{k,j+1} - t_{k,j}|) \leq O(|t_{k,j+1} - t_{k,j}|^2) = O(\delta^2).$$

Таким образом,

$$\sum_{j=0}^{M-1} \int_{t_{k,j}}^{t_{k,j+1}} \|v(s) - \tilde{v}(s)\| ds \leq \sum_{j=0}^{M-1} \int_{t_{k,j}}^{t_{k,j+1}} \|O(\delta^2)\| ds = M\delta \|O(\delta^2)\|.$$

Окончательно, $\|x(T) - \tilde{x}(T)\| \leq NM\delta \|O(\delta^2)\|$.

Таким образом, для каждого $x \in Y_c(x_0, T, \hat{U})$ найдётся $\tilde{x} \in Y_c(x_0, T, U_i)$ такой, что

$$\|x(T) - \tilde{x}(T)\| = \begin{cases} O(\Delta), & i = 0, \\ O(\Delta^2), & i = 1, \\ O(\delta^2), & i = 2. \end{cases}$$

Тогда

$$\rho_h \left(cl Y_c(x_0, T, \hat{U}), Y_d(x_0, N) \right) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0.$$

Теорема 1 доказана.

Пример

Рассмотрим непрерывную систему вида (1). Для неё зададим следующие параметры:

$$A = \begin{pmatrix} -10 & -10 \\ 10 & 30 \end{pmatrix}, x_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, T = 8,$$

$$U_c = \text{conv} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Используя идеи дискретизации и сходимости последовательности множеств достижимости системы (2) к множествам достижимости (1), описанные в теореме 1, можно аппроксимировать искомое множество с произвольным порядком точности дискретным аналогом.

Проведём дискретизацию исходной системы, перейдя к соотношениям вида (2). Построение матрицы фундаментальной системы решений происходит с помощью вычисления спектра и вещественного жорданова базиса матрицы A :

$$\lambda_{1,2} = -20, h_1 = \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \end{pmatrix}, h_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$



В данном случае собственные значения кратные, следовательно, матрица ФСР будет иметь вид

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} 10e^{-20t} & e^{-20t}(10t+1) \\ 10e^{-20t} & 10e^{-20t}t \end{pmatrix}.$$

Матрица A_d вычисляется по формуле (6):

$$A_d = \Phi(\Delta)\Phi^{-1}(0) = \begin{pmatrix} e^{-20\Delta}(10\Delta + 1) & -10\Delta e^{-20\Delta} \\ 10\Delta e^{-20\Delta} & e^{-20\Delta}(1 - 10\Delta) \end{pmatrix}.$$

Для каждого из множеств U_0 , U_1 и U_2 найдём множество допустимых значений управления дискретной системы при $N=8$, $\Delta=1$, $M=5$ с помощью формул (7), (8), (9). На рис. 1 изображены $\mathcal{U}_{d,0}$, $\mathcal{U}_{d,1}$, $\mathcal{U}_{d,2}$. Синий цвет — $\mathcal{U}_{d,0}$, красный — $\mathcal{U}_{d,1}$, зелёный — $\mathcal{U}_{d,2}$.

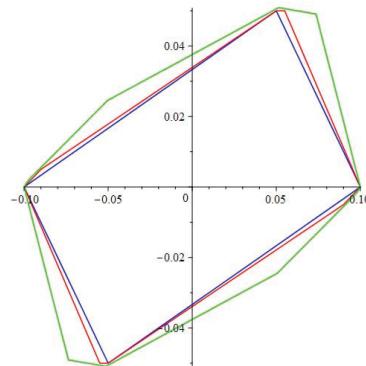


Рис. 1. Множества допустимых значений управления $\mathcal{U}_{d,0}, \mathcal{U}_{d,1}, \mathcal{U}_{d,2}$ дискретной системы (2) при $N=8, \Delta=1, M=5$

Fig. 1. The sets of possible controls actions $\mathcal{U}_{d,0}, \mathcal{U}_{d,1}, \mathcal{U}_{d,2}$ of the discrete-time system (2) for $N=8, \Delta=1, M=5$

Для построения множеств достижимости воспользуемся представлением, описанным в статье (Ибрагимов, 2019; разд. 2, лемма 1):

$$Y_c(x_0, T, \mathbf{U}_i) = Y_d(x_0, N) = \sum_{k=0}^{N-1} A^k \mathcal{U}_{d,i} + A^N x_0. \#(11)$$

Множества (11) для $i = \overline{0, 2}$ изображены на рис. 2—4.

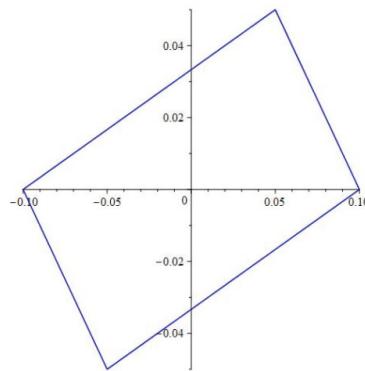


Рис. 2. Множество достижимости $Y_c(x_0, T, \mathbf{U}_0)$ при $\Delta = 1$

Fig. 2. The reachable set $Y_c(x_0, T, \mathbf{U}_0)$ at $\Delta = 1$

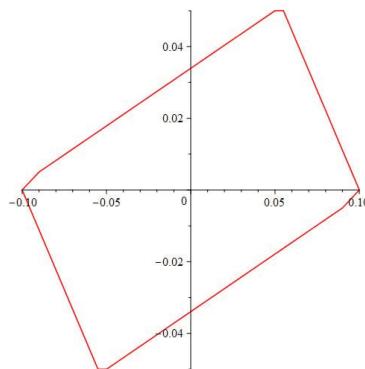


Рис. 3. Множество достижимости $Y_c(x_0, T, \mathbf{U}_1)$ при $\Delta = 1$

Fig. 3. The reachable set $Y_c(x_0, T, \mathbf{U}_1)$ for $\Delta = 1$

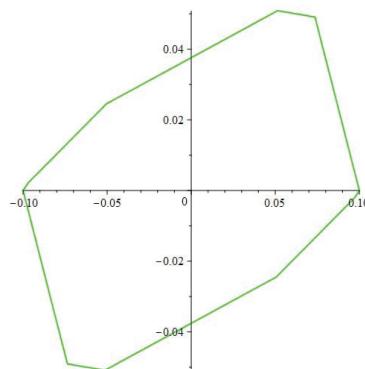


Рис. 4. Множество достижимости $Y_c(x_0, T, \mathbf{U}_2)$ при $\Delta = 1$

Fig. 4. The reachable set $Y_c(x_0, T, \mathbf{U}_2)$ for $\Delta = 1$



Для построения оценки множества достижимости, исходя из теоремы 1, достаточно устремить $N \rightarrow \infty$, зафиксировав при этом T . Проверим это утверждение, рассмотрев последовательность множеств достижимости для разных N . Для каждого случая множества $\mathcal{U}_{d,i}$, $i = \overline{0,2}$ пересчитываются в соответствии с формулами, описанными в разделе 3. Результаты расчётов представлены на рис. 5—7.

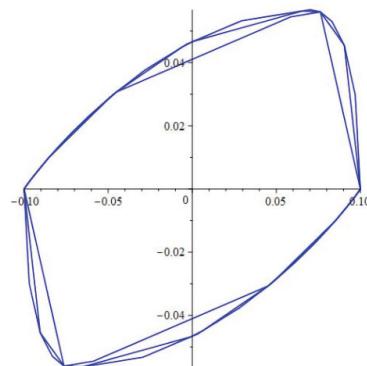


Рис. 5. Последовательность множеств достижимости $Y_c(x_0, T, U_0)$ при $N \in \{200, 300, 400\}$

Fig. 5. The sequence of reachable sets $Y_c(x_0, T, U_0)$ for $N \in \{200, 300, 400\}$

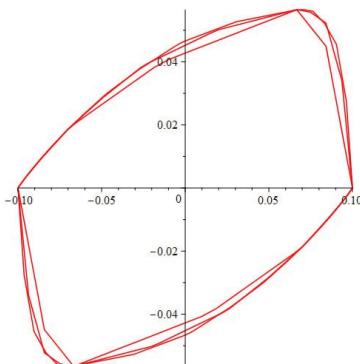


Рис. 6. Последовательность множеств достижимости $Y_c(x_0, T, U_1)$ при $N \in \{70, 140, 210\}$

Fig. 6. The sequence of reachable sets $Y_c(x_0, T, U_1)$ for $N \in \{70, 140, 210\}$

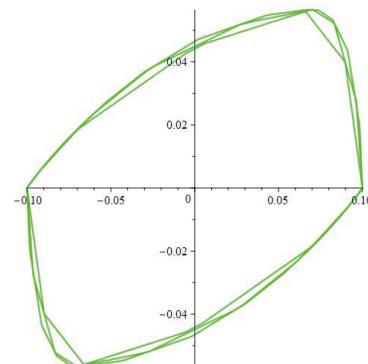


Рис. 7. Последовательность множеств достижимости $Y_c(x_0, T, U_2)$ при $N \in \{20, 40, 60\}$, $M = 5$

Fig. 7. The sequence of reachable sets $Y_c(x_0, T, U_2)$ for $N \in \{20, 40, 60\}, M = 5$.



Заключение

В статье разработан метод построения множеств достижимости непрерывной линейной системы с геометрическими ограничениями на управление на основе методов дискретизации. Для трёх различных подходов дискретизации в явном виде описаны параметры вспомогательных дискретных систем. Доказана сходимость и получена оценка скорости сходимости при использовании кусочно-постоянного управления, кусочно-линейного управления и управления в виде сплайна первого порядка.

В ходе проведённых опытов удалось подтвердить данные, полученные теоретически. Последовательности множеств достижимости при различных типах дискретизации управления действительно сходятся к одному и тому же множеству. Скорость сходимости напрямую зависит от типа выбранного управления при дискретизации. Последовательность множеств достижимости при управлении сплайном сходится быстрее всего по N , кусочно-линейное — второе по скорости, кусочно-постоянное — последнее, что подтверждает результаты теоремы 1.

Полученные теоретические результаты могут быть использованы при решении задач анализа и для проектирования линейных систем. В зависимости от выбранного типа непрерывного управления, соответствующая дискретная модель может обладать большей точностью в смысле областей достижимости, что, однако, усложнит ее описание. Возможность проведения численного моделирования в соответствии с методикой, предложенной в статье, позволяет соотнести эти два критерия качества дискретизации.

Список источников/ References

1. Арутюнов, А.В., Жуковский, С.Е. (2017) Точки совпадения отображений в пространствах с векторной метрикой и их приложения к дифференциальным уравнениям и управляемым системам // *Дифференц. уравнения*. Т. 53. № 11. С. 1473—1481.
Arutyunov, A.V., Zhukovsky, S.E. (2017) Coincidence points of mappings in spaces with a vector metric and their applications to differential equations and control systems // *Differential Equations*. V. 53. № 11. P. 1473—1481.
2. Беллман, Р. (1960) Динамическое программирование. М.: ИИЛ.
Bellman, R. (1960) Dynamic programming. Moscow: IIL. (In Russ.).
3. Булаев, В.В., Шориков, А.Ф. (2017) Методика дискретизации линейных динамических систем // *Итоги науки и техн. Соврем. мат. и ее прил. Темат. обз.* Т. 132. С. 20—23.
Bulaev, V.V., Shorikov, A.F. (2017) Methodology for discretization of linear dynamic systems // *Results of science and technology. Modern mathematics and its applications. Subject review*. V. 132. P. 20—23.
4. Жуковский, Е.С. (2016) О точках совпадения векторных отображений // *Изв. вузов. Математика*. № 10. С. 14—28.
Zhukovsky, E.S. (2016) On the coincidence points of vector mappings // *Izv. vuzov. Mathematics*. № 10. P. 14—28.
5. Жуковский, Е.С., Панасенко, Е.А. (2018) О неподвижных точках многозначных отображений в пространствах с векторнозначной метрикой // *Тр. ИММ УрО РАН*. Т. 24. № 1. С. 93—105.
DOI: 10.21538/0134-4889-2018-24-1-93-105.



- Zhukovsky, E.S., Panasenko, E.A. (2018) On fixed points of multivalued mappings in spaces with vector-valued metric // *Proceedings of IMM UB RAS. V. 24. № 1.* P. 93—105. DOI: 10.21538/0134-4889-2018-24-1-93-105.
6. Зорич, Б.А. (1984) Математический анализ. Часть I. М.: Наука.
Zorich, V.A. (1984) Mathematical analysis. Part I. Moscow.: Science (In Russ.).
7. Зыков, И.В. (2022) Приближённое вычисление множеств достижимости линейных управляемых систем при разнотипных ограничениях на управление // *Известия Института математики и информатики Удмуртского государственного университета. Т. 60.* С. 16—33.
Zykov, I.V. (2022) Approximate calculation of reachability sets of linear control systems under different types of control constraints // *Bulletin of the Institute of Mathematics and Informatics of the Udmurt State University. V. 60.* P. 16—33.
8. Ибрагимов, Д.Н. (2019) О задаче быстродействия для класса линейных автономных бесконечномерных систем с дискретным временем, ограниченным управлением и вырожденным оператором // *AuT. № 3.* С. 3—25. DOI: 10.1134/S0005231019030012.
Ibragimov, D.N. (2019) On the Optimal Speed Problem for the Class of Linear Autonomous Infinite-Dimensional Discrete-Time Systems with Bounded Control and Degenerate Operator // *Autom. Remote Control. V. 80. № 3.* P. 393—412. DOI: 10.1134/S0005117919030019.
9. Колмогоров, А.Н., Фомин, С.В. (2012) Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Физматлит, 570 с.
Kolmogorov, A.N., Fomin, S.V. (2012) Elements of function theory and functional analysis. Moscow: Fizmatlit, 570 p. (In Russ.).
10. Комаров, В.А. (1988) Уравнение множеств достижимости дифференциальных включений в задаче с фазовыми ограничениями // *Тр. мат. инта АН СССР им. В.А. Стеклова. Т. 185.* С. 116—125.
Komarov, V.A. (1988) Equation of attainability sets of differential inclusions in a problem with phase constraints // *Proceedings of the Mat. Inst. of the USSR Academy of Sciences named after V.A. Steklov. V. 185.* P. 116—125.
11. Красовский, Н.Н. (1970) Игровые задачи о встрече движений. М.: Наука.
Krasovskiy, N.N. (1970) Game problems about meeting of movements. Moscow: Science (In Russ.).
12. Куржанский, А.В., Никонов, О.И. (1993) Эволюционные уравнения для пучков траекторий синтезированных систем управления // *Докл. РАН. Т. 333. № 5.* С. 578—581.
Kurzhansky, A.V., Nikonov, O.I. (1993) Evolutionary equations for trajectory bundles of synthesized control systems // *Reports of the Russian Academy of Sciences. V. 333. № 5.* P. 578—581.
13. Максимов, В.П. (2021) О внутренних оценках множеств достижимости для непрерывно-дискретных систем с дискретной памятью // *Труды Института математики и механики УрО РАН. Т. 27. № 3.* С. 141—151. DOI: 10.21538/0134-4889-2021-27-3-141-151.
Maksimov, V.P. (2021) On interior estimates of reachability sets for continuous-discrete systems with discrete memory // *Proceedings of the Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences. V. 27. № 3.* P. 141—151. DOI: 10.21538/0134-4889-2021-27-3-141-151.
14. Мордухович, Б.Ш. (1988) Методы аппроксимаций в задачах оптимизации и управления. М.: Наука.
Mordukhovich, B.S. (1988) Approximation methods in optimization and control problems. Moscow: Science (In Russ.).
15. Никольский, М.С. (2021) Линейные управляемые объекты с фазовыми ограничениями. Приближенное вычисление множеств достижимости // *Труды Института математики и механики УрО РАН. Т. 27. № 2.* С. 162—168. DOI: 10.21538/0134-4889-2021-27-2-162-168.



Вуксанович С.М. (2025)

Оценка точности аппроксимации множеств

достижимости линейной системы с геометрическими...

Моделирование и анализ данных, 2025. 15(2), 110–126.

Vuksanovic S.M. (2025)

Estimation of the accuracy of approximation of reachable

sets of a linear system with geometric constraints for...

Modelling and Data Analysis, 2025. 15(2), 110–126.

- Nikolsky, M.S. (2021) Linear Controlled Objects with Phase Constraints. Approximate Calculation of Reachability Sets // *Proceedings of the Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences. V. 27. № 2. P. 162—168.* DOI: 10.21538/0134-4889-2021-27-2-162-168.
16. Панасюк, А.И., Панасюк, В.И. (1980) Об одном уравнении, порождающем дифференциальным включением // *Mat. заметки. Т. 27. № 3. С. 429—437.*
- Panasyuk, A.I., Panasyuk, V.I. (1980) On an equation generated by a differential inclusion // *Mat. notes. V. 27. № 3. P. 429—437.*
17. Понtryагин, Л.С., Болтянский, В.Г., Гамкрелидзе, Р.В., Мищенко, Б.Ф. (1969) Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука.
- Pontryagin, L.S., Boltyanskiy, V.G., Gamkrelidze, R.V., Mishchenko, B.F. (1969) Mathematical theory of optimal processes. Moscow: Science (In Russ.).
18. Толстоногов, А.А. (1982) Об уравнении интегральной воронки дифференциального включения // *Mat. заметки. Т. 32. № 6. С. 841—852.* DOI: 10.1007/BF01145876.
- Tolstonogov, A.A. (1982) On the equation of the integral funnel of a differential inclusion // *Mat. notes. V. 32. № 6. P. 841—852.* DOI: 10.1007/BF01145876.
19. Формалев, В.Ф., Ревизников, Д.Л. (2004) Численные методы. М.: Физматлит.
- Formalev, V.F., Reviznikov, D.L. (2004) Numerical methods. Moscow: Fizmatlit.
20. Хартман, Ф. (1970) Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Мир.
- Hartman, F. (1970) Ordinary Differential Equations. Moscow: World.

Информация об авторах

Вуксанович Станислав Мирославович, студент кафедры «Теория вероятностей и компьютерное моделирование», Московский Авиационный Институт (Национальный исследовательский университет), Москва, Российская Федерация, ORCID: <https://orcid.org/0009-0005-0210-8896>, e-mail: stas.vuksanovic@mail.ru.

Information about the authors

Vuksanovic Stanislav Miroslavovich, Student of the Department of Probability Theory and Computer Modeling, Moscow Aviation Institute (National Research University), Moscow, Russian Federation, ORCID: <https://orcid.org/0009-0005-0210-8896>, e-mail: stas.vuksanovic@mail.ru.

Поступила в редакцию 17.03.2025

Received 2025.03.17

Поступила после рецензирования 20.03.2025

Revised 2025.03.20

Принята к публикации 03.04.2025

Accepted 2025.04.03

Опубликована 30.06.2025

Published 2025.06.30

Научная статья | Original paper

УДК 519.6

Современные подходы к моделированию упруго-прочностных характеристик полимерных композиционных материалов

Н.Л. Загордан✉, Ю.Д. Мочалова, К.К. Абгарян

Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление»
Российской Академии Наук, г. Москва, Российская Федерация
✉ zagordann@gmail.com

Резюме

Контекст и актуальность. Совершенствование подходов к прогнозированию упруго-прочностных характеристик композиционных материалов является актуальной задачей механики деформируемого твердого тела, т.к. полимерные композиционные материалы (ПКМ) получили широкое распространение в современной технике, а при проектировании и эксплуатации конструкций из ПКМ важнейшую роль играет скорость и точность моделирования характеристик таких конструкций. **Цель.** Рассмотрев существующие подходы к моделированию ПКМ, выявить наиболее перспективные. **Результаты.** Проведен анализ существующих подходов к моделированию материалов с неоднородной структурой: от ранних феноменологических и полуэмпирических до современных многомасштабных, учитывающих взаимное влияние процессов, происходящих в КМ на микро-, мезо- и макромасштабном уровнях. **Выводы.** Современные многомасштабные конечно-элементные подходы к моделированию упруго-прочностных свойств композиционного материала получили широкое распространение, однако детализированное описание процессов, происходящих на микро- и мезоуровнях ПКМ, требует значительных вычислительных мощностей, что делает такие подходы сложно применимыми на практике. Для решения указанной проблемы предлагается использовать многомасштабный подход, дополненный методами машинного обучения с использованием суррогатных нейронных сетей, что позволяет существенно ускорить процесс получения решений с заданной точностью.

Ключевые слова: полимерные композиционные материалы, компьютерное моделирование, эффективные характеристики, метод конечных элементов, много-масштабный подход, суррогатные модели



Для цитирования: Загордан, Н.Л., Мочалова, Ю.Д., Абгарян, К.К. (2025). Современные подходы к моделированию упруго-прочностных характеристик полимерных композиционных материалов. *Моделирование и анализ данных*, 15(2), 127—138. <https://doi.org/10.17759/mda.2025150207>

Modern approaches to modeling of elastic-strength properties of polymer composites

N.L. Zagordan✉, Y.D. Mochalova, K.K. Abgaryan

Federal Research Center «Computer Science and Control»
of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russian Federation
✉ zagordann@gmail.com

Abstract

Context and relevance. Improvement of approaches to predicting the elastic-strength characteristics of composites is an urgent task in the mechanics of deformable solids, since polymer composite materials are widely used in modern technology, and the speed and accuracy of modeling the characteristics of such structures play an important role in the design and operation of structures made of composite. **Objective.** Having considered the existing approaches to PCM modeling, to identify the most promising ones. **Results.** The article provides analysis of existing approaches to modeling materials with heterogeneous structures: from early phenomenological and semi-empirical to modern multiscale ones that take into account the mutual influence of processes occurring in composites at the micro-, meso-, and macroscale levels. **Conclusions.** Modern multiscale finite-element approaches to modeling the elastic-strength properties of a composite material are widely used, however, a detailed description of the processes occurring at the micro- and meso- levels of the PCM requires significant computing power, which makes such approaches inapplicable in practice. To solve this problem, the multiscale approach is complemented by machine learning methods using surrogate neural networks.

Keywords: polymer composites, computer modeling, effective properties, finite-element method, multiscale approach, surrogate neural network

For citation: Zagordan, N.L., Mochalova, Y.D., Abgaryan, K.K. (2025). Modern approaches to modeling of elastic-strength properties of polymer composites. *Modelling and Data Analysis*, 15(2), 127—138. (In Russ.). <https://doi.org/10.17759/mda.2025150207>

Введение

Важнейшим вопросом механики композиционных материалов (КМ) является вычисление эффективных упруго-прочностных характеристик КМ, так как решение данной проблемы позволяет синтезировать материалы с заданным набором свойств, необходимым для конкретных условий эксплуатации конструкций из КМ.



В первых работах, посвященных определению характеристик структурно-неоднородных сред, принимался ряд упрощающих предположений о микроструктуре КМ (Hill, 1963; Hashin, Rosen, 1964; Chamis, 1989; Сенденцки, 1978), таких как предположение о регулярной структуре армирующих элементов, линейной упругости волокна и матрицы, идеальной связи волокна и матрицы, однородности поля напряжений и деформаций, аппроксимация КМ бесконечной средой с расположенным в ней единственным армирующим элементом.

В отдельных работах (Younes et al.; Muyzemnek, Ivanova, Kartashova, 2021) приводится сопоставление результатов вычисления эффективных упругих характеристик с использованием различных аналитических и численных моделей для однонаправленных и тканых КМ. Показано, что для указанного класса КМ, феноменологические, полуэмпирические (Халпина-Цая, Чамиса, модифицированное правило смесей) модели, модель упругого приближения Мори-Танака, двойного включения и мостовая модель позволяют достаточно точно вычислить модуль продольной упругости, однако вычисленные значения поперечного модуля упругости, модулей сдвига, значения коэффициента Пуассона могут отличаться от экспериментально полученных величин и друг от друга в зависимости от выбора расчетной модели на 200%. Неудовлетворительное согласование результатов является следствием достаточно грубых упрощений, принимаемых в математических моделях, а также неидеальной микроструктуры реального КМ.

Для материалов с непериодической структурой используются стохастические подходы, в основе которых лежит теория случайных функций (Biryachenko, 2007; Tashkinov, Wildemann, Mikhailova, 2012; Хорошун, 1978). В работах (Скудра, Булавс, Роценс, 1971; Хорошун, 1968; Kroner, 1967) рассмотрен статистический подход к расчету эффективных упругих характеристик КМ, в основе которого лежит представление компонентов тензора модулей упругости в виде случайных кусочно-постоянных функций координат. Для определения эффективных упругих характеристик КМ системы дифференциальных уравнений теории упругости дополняются корреляционными функциями. Основным преимуществом стохастического подхода является возможность учета статистического разброса свойств компонентов и случайность расположения элементов в структуре. Основным недостатком подхода является невозможность определения корреляционных функций без экспериментальных данных.

Многомасштабный подход

Совершенствование математических моделей КМ предполагает детальное рассмотрение физико-химических процессов, происходящих на границе раздела фаз наполнителя и матрицы, которые могут приводить к изменению характеристик компонентов вследствие их взаимодействия, например образование трещин и отслоений на межфазной границе. К описанию адгезионных процессов на границе раздела фаз существуют 2 подхода: моделирование на основе метода молекулярной физики (Балбаев и др., 1999; Khalatur, 1991) и описание наблюдаемых эффектов как следствия



макроскопических воздействий на КМ. При втором подходе межфазный слой может рассматриваться как имеющий геометрические характеристики идеальный слой, или имеющий разрывы полей напряжений и перемещений неидеальный интерфейс. Обзор методов моделирования межфазного слоя представлен в (Соколов, Щетинин, Козлов, 2020; Brossseau, 2024).

При прямом моделировании КМ на микромасштабных уровнях определить свойства КМ представляется возможным только для небольших областей в силу математической и вычислительной сложности таких моделей. Поэтому практически в каждой работе стоит задача гомогенизации, т.е. перехода от структурно-неоднородной среды к эффективной с эквивалентными осредненными упруго-прочностными свойствами.

В процессе гомогенизации производится поиск полей микродеформаций, микроперемещений и микронапряжений, так как характеристики полученные в гомогенном приближении могут влиять на структуру и свойства наполнителя, которые в свою очередь определяют характеристики эквивалентного гомогенного образца.

В работах (Dimitrienko et al., 2023; Schröder, 2014; Geers, Kouznetsova, Brekelmans, 2010; Nguyen, Kouznetsova, Geers, 2012; Lin, Brandyberry, Zhang, 2023) реализованы различные вариации многомасштабного конечно-элементного подхода (FE²) к моделированию КМ, учитывающие взаимное влияние микроструктуры КМ и гомогенного эквивалента КМ. В основе этого класса методов лежит применение теории деформаций к элементарным представительским объемам (RVE), полученным одним из классических методов гомогенизации, постулируется кинематическая непротиворечивость при связывании полей деформаций макроскопического и элементарного представительского объемов под действием внешних поверхностных и объемных сил (рис. 1).

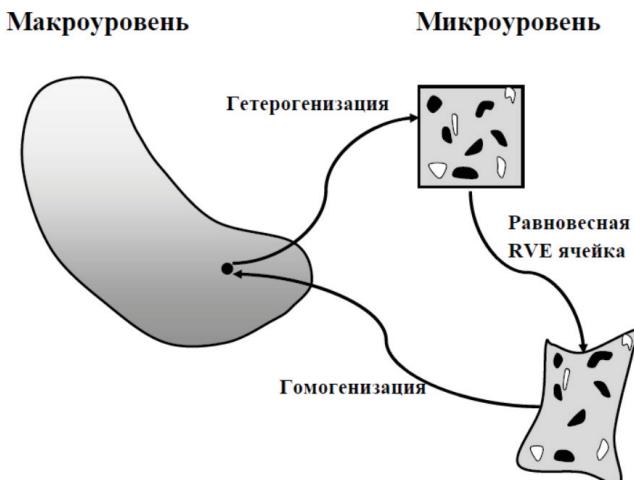


Рис. 1. Схема многомасштабного подхода

Fig. 1. Multiscale approach scheme



В большинстве случаев для представления гетерогенной среды эквивалентным элементарным объемом (RVE) требуется несколько итераций. Например, в (Blanco et al., 2016; Lopes, Pires, 2022) в рамках многомасштабного подхода исследуется задача определения упруго-пластических свойств КМ, армированного короткими разнонаправленными волокнами. На первом этапе элементарный объем с короткими волокнами заменяются RVE ячейку с единичным односторонним волокном на основании подхода Рейса-Фойгта, опирающегося на гипотезу о равенстве напряжений и деформаций в упругопластичных ячейках. На втором этапе гомогенизации усреднение характеристик RVE-объема производится методом конечных элементов. Для получения эквивалентной гомогенизированной среды вводятся ортонормированные базисные вектора для локальной (система координат RVE-ячейки) и глобальной (система координат всего объема КМ) систем координат, с помощью которых определяется матрица трансформации для каждой ячейки. Полученная матрица трансформации участвует в определении компонент напряжений для каждой RVE-ячейки в глобальной системе координат.

В работах (Fish, Shek, 2000; Hashin, 1962) предложен метод введения гетерогенных ячеек периодичности вокруг исследуемой области КМ, получивший название прямой последовательной гетерогенизации (рис. 1). Однако существенной проблемой такого подхода является разрыв полей напряжений на границе сопряжения гомогенизированной и гетерогенной областей. В (Белов, 2009) предложен метод «локальных гетерогенизаций», основанный на введении граничного слоя вокруг интересующего слоя толщиной в две ячейки периодичности.

В (Ullah et al., 2020) демонстрируется успешное применение многомасштабного конечно-элементного подхода к моделированию многослойных перекрестно-армированных и квази-изотропных одноосно нагруженных КМ. В (Bruno, 2024) численно моделируется упруго-прочностные характеристики многослойного КМ с дефектами в виде межслойных пустот.

Применение многомасштабного конечно-элементного подхода связано со сложностью согласования пространственно-временных процессов, протекающих на различных масштабных уровнях. На микромасштабном уровне критично описание взаимного влияния матрицы и армирующих компонентов, на мезомасштабе моделируются структурно-морфологические характеристики КМ, на макроуровне — интегральные свойства материала. Сложность описания физических процессов на каждом уровне, необходимость согласования временных масштабов, полей напряжений и деформаций для каждого конечного элемента на каждом временном шаге, влияют на стабильность решения и требуют значительных вычислительных мощностей, что делает данный подход неприменимым для решения практических задач.

Методы построения суррогатных моделей

В последние годы развитие получили методы нейросетевого обучения для моделирования гетерогенных сред, в которых описание физических процессов является затруднительным или не представляется возможным. Основная задача использования



нейросетевой модели обучения — замена конечно-элементных моделей суррогатными, основанными на данных.

Для описания характеристик гомогенизированного материала может применяться один из двух подходов. В первом неизвестные коэффициенты функции, описывающей поведение КМ на макроуровне, определяются с использованием экспериментальных данных. Во втором модель КМ на макроуровне строится через определение характеристик КМ на микроуровне, но следует учитывать, что при втором подходе для определения свойств на микроуровне также требуются экспериментальные данные.

Первые работы по использованию нейронных сетей для моделирования макросвойств материалов были опубликованы в 90-х годах (Ghaboussi, Garrett, Wu, 1991; Ghaboussi et al., 1998; Hashash, Jung, Ghaboussi, 2004). Нейронная сеть, устанавливающая соответствие тензоров деформаций и напряжений в двумерной модели, обучалась на основе конечно-элементной модели в двумерном приближении (рис. 2).

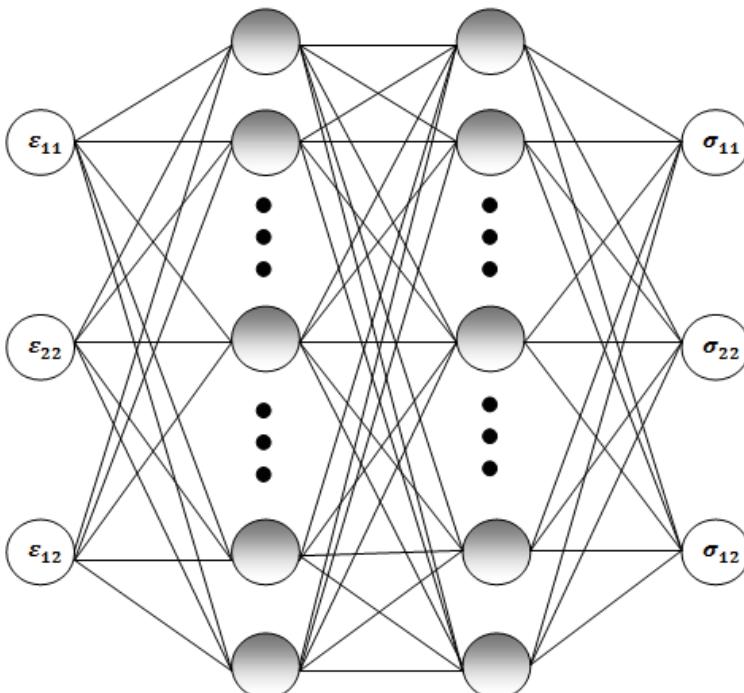


Рис. 2. Установление взаимосвязи тензоров деформаций и напряжений с помощью нейронной сети (серым выделены скрытые нейроны) (Xin, 2020)

Fig. 2. Establishing the relationship between strain and stress tensors using a neural network (hidden neurons are highlighted in gray) (Xin, 2020)



Существует два подхода к обучению нейронной сети. В традиционном методе функция потери строится на основе вычисления и минимизации функции ошибки между полученными с помощью нейронной сети значениями и экспериментальными данными о свойствах материала (рис. 3). Однако такой подход осуществим только, если значения для обучения могут быть измерены с помощью эксперимента.

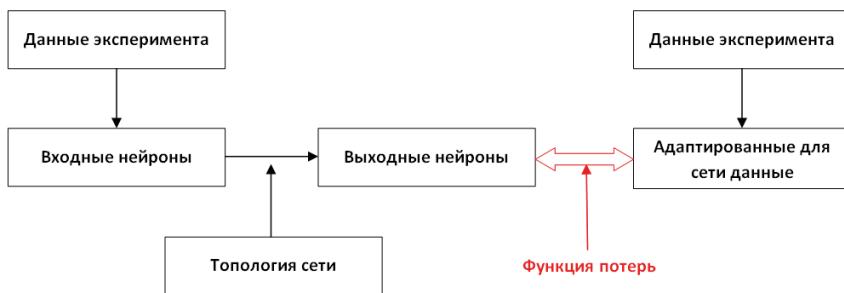


Рис. 3. Схема обучения нейронной сети на основе экспериментальных данных

Fig. 3. Neural network training scheme based on experimental data

Для обучения нейронной сети необходимо использовать данные о напряжениях, полученные из эксперимента, однако для трехмерных объектов измерение величин напряжений невозможно, также как и их вычисление из-за неизвестности функции зависимости деформаций от нагрузок для КМ. На рисунке 4 показана иная схема обучения нейронной сети: для вычисления данных, которые могут быть получены из натурного эксперимента, используется математическая модель физических процессов, позволяющая на основе данных выходного слоя нейронной сети, рассчитать значения параметров для построения функции ошибки. Основное преимущество данного подхода состоит в том, что на входные и выходные данные нейронной сети не накладываются требования измеримости величин в эксперименте.

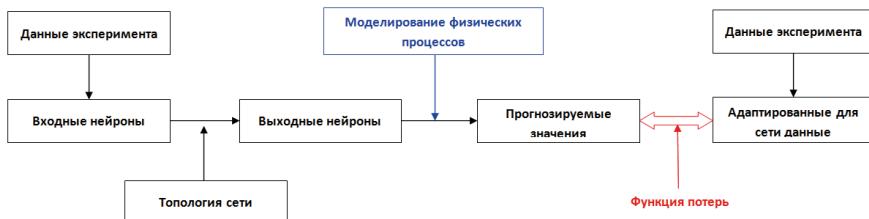


Рис. 4. Схема обучения нейронной сети с предсказательным моделированием

Fig. 4. Neural network training scheme with predictive modeling



Любое многомасштабное моделирование может быть описано уравнением (Xin, 2020)

$$f(\mathbf{I}) = \mathbf{O},$$

где \mathbf{I} — это данные с макроуровня конечно-элементной модели, а \mathbf{O} — это значения, полученные в результате моделирования микро и мезо уровней. f может представлять собой как конечно-элементное моделирование, так и любую другую функцию, описывающую изменение состояния в конкретной точке макромодели.

В (Rocha, Kerfriden, van Der Meer, 2020; Deng, 2024; Liu et al., 2024) применена методика моделирования экспериментов DoE (design of experiment), в которой микромеханические характеристики RVE-объемов, находящихся под действием напряжений, передаваемых с макромасштабного уровня, прогнозируются на основе набора аналитических решений задач микромеханики.

В (Dwivedi, Parashar, Srinivasan, 2021) показано, что при моделировании композиционных материалов применение физически информированной нейронной сети (Physics-informed Neural Network) имеет критические недостатки: алгоритм расчета теряет стабильность. Применение физически кодированной нейронной сети (Physics-encoded Neural Network) позволило получить достаточно точную аппроксимацию нелинейной зависимости напряжения от деформаций (Mostajeran, Faroughi, 2024). В (Ghane et al., 2025) для предсказания упруго-пластичных характеристик тканного КМ успешно применена иерархическая физически рекуррентная нейронная сеть (Physically Recurrent Neural Network).

Заключение

Современный подход к моделированию упруго-прочностных свойств композиционного материала связан с учетом взаимного влияния процессов, происходящих на различных масштабных уровнях структурно неоднородного материала. В связи с тем, что на микро- и мезо- уровнях описание взаимодействия элементов структуры становится более детализированным и требует значительное количество времени для проведения расчетов, то применяемый на макроуровне метод конечных элементов становится малопригодным из-за недостатка вычислительных мощностей. Решение данной проблемы лежит в плоскости применения суррогатных нейросетевых моделей.

Список источников / References

1. Hill, R., (1963). Elastic properties of reinforced solids: some theoretical principles. *Journal of the mechanics and physics of solids*, V.11, 357—372. [https://doi.org/10.1016/0022-5096\(63\)90036-X](https://doi.org/10.1016/0022-5096(63)90036-X)
2. Hashin, Z., Rosen, B.W. (1964). The elastic moduli of fiber reinforced materials. *Journal of Applied Mechanics, Trans ASME*, № 31, pp. 223—232. <http://dx.doi.org/10.1115/1.3629590>
3. Chamis, C.C. (1989). Mechanics of composite materials: past, present, and future. *Journal of Composites Technology and Research*, (1), 3—14. <https://doi.org/10.1520/CTR10143J>
4. Сенденцики, Дж. *Композиционные материалы. В 8-ми т. Т. 2. Механика композиционных материалов* (1978). М.: Мир.



- Sendencki, Dzh. *Kompozicionnye materialy. V 8-mi t. T.2. Mekhanika kompozicionnyh materialov* (1978). M.: Mir. (In Russ.).
5. Younes, R., Hallal, A., Fardoun, F., Chehade, F.H. (2012). Comparative Review Study on Elastic Properties Modeling for Unidirectional Composite Materials. *Composite Materials Book 1*. DOI:10.5772/50362
6. Muyzemnek, A.Yu., Ivanova, T.N., Kartashova, E.D. (2021). A Comparison of Experimental and Computation Results of Finding Effective Characteristics of Elastic Properties of Polymer Layered Composites from Carbon and Glass Fabrics *PNRPU Mechanics Bulletin*, № 2, 88—105. DOI: 10.15593/perm.mech/2021.2.09
7. Buryachenko, V. (2007). *Micromechanics of heterogeneous materials*. New York: Springer.
8. Tashkinov, M.A., Wildemann, V.E., Mikhailova, N.V. (2012). Method of successive approximations in stochastic boundary value problem for structurally heterogeneous materials. *Computational Materials Science, V.52*, 101—106. DOI:10.1016/j.commatsci.2011.04.025
9. Хорошун, Л.П. (1978). Методы случайных функций в задачах о макроскопических свойствах микронеоднородных сред. *Прикладная механика*, 14(2), 3—17.
Horoshun, L.P. (1978). Metody sluchajnyh funkciy v zadachah o makroskopicheskikh svojstvah mikroneodnorodnyh sred. *Prikladnaya mehanika*, 14(2), 3—17. (In Russ.).
10. Скудра, А.М., Булавс, Ф.Я., Роценс, К.А. (1971). *Ползучесть и статическая усталость армированных пластиков*. Riga: Zinatne.
Skudra, A.M., Bulavs, F.Ya., Rocens, K.A. (1971). *Polzuchest' i staticheskaya ustalost' armirovannyh plastikov*. Riga: Zinatne. (In Russ.).
11. Хорошун, Л.П. (1968). О методе определения упругих модулей армированных тел. *Механика полимеров. № 1*. 78—87.
Horoshun, L.P. (1968). O metode opredeleniya uprugih modulej armirovannyh tel. *Mekhanika polimerov. № 1*. 78—87. (In Russ.).
12. Kroner, E. (1967). Elastic moduli of perfectly disordered composite materials. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 15 (5), 319—329. [https://doi.org/10.1016/0022-5096\(67\)90026-9](https://doi.org/10.1016/0022-5096(67)90026-9)
13. Балабаев, Н.К., Власов, А.Н., Згаевский, В.Э., Карнет, Ю.Н., Яновский, Ю.Г. (1999). Структура и микромеханические свойства межфазных слоёв полимерных матричных композитов. *Механика композиционных материалов и конструкций*, 5(2), 109—123.
Horoshun, L.P. (1968). O metode opredeleniya uprugih modulej armirovannyh tel. *Mekhanika poli. Balabaev, N.K., Vlasov, A.N., Zgaevskij, V.E., Karnet, Yu.N., Yanovskij, Yu.G. (1999). Struktura i mikromekhanicheskie svojstva mezhfaznyh sloyov polimernyh matrichnyh kompozitov. Mekhanika kompozicionnyh materialov i konstrukcij*, 5(2), 109—123. (In Russ.).
14. Khalatur, P.G. (1991). Computer simulation of thin polymer layers. *Makromol. Chem., Macromol. Symp.*, 44(1), 23—32. <https://doi.org/10.1002/masy.19910440104>
15. Соколов, А.П., Щетинин, В. Н., Козлов, М.Ю. (2020). Моделирование упругих свойств композитных материалов методом асимптотического осреднения с учетом неидеального интерфейса компонент. *Matem. моделирование*, 32(8), 119—138. <https://doi.org/10.20948/mm-2020-08-08>
Sokolov, A.P., Shchetinin, V. N., Kozlov, M.Yu. (2020). Modelirovanie uprugih svojstv kompozitnyh materialov metodom asimptoticheskogo osredneniya s uchetom neideal'nogo interfejsa komponent. *Matem. modelirovanie*, 32(8), 119—138. <https://doi.org/10.20948/mm-2020-08-08>. (In Russ.).



16. Brosseau, C. (2024). Modeling the Interface Between Phases in Dense Polymer-Carbon Black Nanoparticle Composites by Dielectric Spectroscopy: Where Are We Now and What are the Opportunities? *Macromol. Theory and Simulations*, 33. <https://doi.org/10.1002/mats.202400009>
17. Dimitrienko, Yu, Yurin, Yu., Bogdanov, I., Yahnovskiy, A., Sborschikov, S., Dimitrienko, A. (2023). Finite element modeling of integral viscoelastic properties of textile composites. *E3S Web of Conferences*, V. 376. <https://doi.org/10.1051/e3sconf/202337601032>
18. Schröder, J. (2014). *A numerical two-scale homogenization scheme: the FE2-method*. Plasticity and beyond: microstructures, crystal-plasticity and phase transitions. Springer, 1—64.
19. Geers, M. G.D., Kouznetsova, V.G., Brekelmans, W.A.M. (2010). Multi-scale computational homogenization: Trends and challenges. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 234(7), 2175—2182. <https://doi.org/10.1016/j.cam.2009.08.077>
20. Nguyen, V., Kouznetsova, V.G., Geers, M.G.D. (2012). On the construction of an optimal surrogate model for multiscale analysis of heterogeneous materials. *Computational Mechanics*, 50(6), 633—655. <https://arxiv.org/html/2503.04901v1>
21. Lin, M., Brandyberry, D., Zhang, X. (2023). Multiscale Modeling of Composite Materials under Volumetric and Interfacial Damage: Achieving Adaptive Model Order Reduction. *National Harbor, MD & Online*. <https://doi.org/10.2514/6.2023-0138>
22. Blanco, P.J., Sanchez P.J., de Souza Neto E.A., Feijoo R.A. (2016). The method of multiscale virtual power for the derivation of a second order mechanical model. *Mechanics of Materials*. V.99, 53—67. <https://doi.org/10.1016/j.mechmat.2016.05.003>
23. Lopes, I.A.R., Pires, F.M.A. (2022). Formulation and numerical implementation of a variationally consistent multiscale model based on second-order computational homogenization at finite strains for quasi-static problems. *Computer Methods in applied mechanics and engineering*, 392(3):114714. DOI:10.1016/j.cma.2022.114714
24. Fish, J., Shek, K. (2000). Multiscale analysis of composite materials and structures. *Composites Science and Technology*, 12(60), 2547—2556. [https://doi.org/10.1016/S0266-3538\(00\)00048-8](https://doi.org/10.1016/S0266-3538(00)00048-8)
25. Hashin, Z. (1962). The elastic moduli of heterogeneous materials. *ASME Journal of Applied Mechanics*, 29(1), 143—150. <https://doi.org/10.1115/1.3636446>
26. Белов, Д.А. (2009). Гомогенизация и гетерогенизация однонаправленных упругих волокнистых композитов: Диссертация кандидата технических наук: 01.02.06 / Д.А. Белова. Спб. Belov, D.A. (2009). *Gomogenizaciya i geterogenizaciya odnonapravlennyh uprugih voloknistykh kompozitov*: Dissertation kandidata tekhnicheskikh nauk: 01.02.06 / D.A. Belova. Spb. (In Russ.).
27. Ullah, Z., Kaczmarczyk, L., Zhou, X., Falzon, B., Pearce, C. (2020). Hierarchical finite element-based multiscale modelling of composite laminates. *Composites Part B: Engineering*, 201:108321. Advance online publication. DOI:10.1016/j.compositesb.2020.108321
28. Bruno, G., Christoff, J., Humberto, S., Almeida, Marcelo, L., Ribeiro, Maisa, M., Maciel, Rui, M., Guedes, Volnei, T. (2024). Multiscale modelling of composite laminates with voids through the direct FE2 method. *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*, V.131. <https://doi.org/10.1016/j.tafmec.2024.104424>
29. Ghaboussi, J., Garrett, J., Wu, X. (1991). Knowledge-based modeling of material behavior with neural networks. *Journal of Engineering Mechanics*, 117(1), 132—153. [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)0733-9399\(1991\)117:1\(132\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9399(1991)117:1(132))
30. Ghaboussi, J., Pecknold, D.A., Zhang, M., Haj-Ali, R.M. (1998). Autoprogressive training of neural network constitutive models. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 42(1), 105—126. [https://doi.org/10.1002/\(SICI\)1097-0207\(19980515\)42:1<105::AID-NME356>3.0.CO;2](https://doi.org/10.1002/(SICI)1097-0207(19980515)42:1<105::AID-NME356>3.0.CO;2)



31. Hashash, Y., Jung, S., Ghaboussi, J. (2004). Numerical implementation of a neural network based material model in finite element analysis. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 59(7), 989—1005. <https://doi.org/10.1002/nme.905>
32. Xin, L., Su, T., Fei, T., Haodong, D., Wenbin, Y. (2020). How machine learning can help the design and analysis of composite materials and structures? *Materials Science, Physics, arXiv:2010.09438*, <https://doi.org/10.48550/arXiv.2010.09438>
33. Rocha, I.B.C.M., Kerfriden, P., van Der Meer, F.P. (2020). On-the-fly construction of surrogate constitutive models for concurrent multiscale mechanical analysis through probabilistic machine learning. *ArXiv:2007.07749*. <https://doi.org/10.48550/arXiv.2007.07749>
34. Deng, S., HosseiniMardi, S., Wang, L., Apelian, D., Bostanabad, R. (2024). Data-driven physics-constrained recurrent neural networks for multiscale damage modeling of metallic alloys with process-induced porosity. *Computational Mechanics*, 74(1), 191—221. doi/10.1007/s00466-023-02429-1
35. Liu, M., Li, H., Zhou, H., Zhang, H., Huang, G. (2024). Development of machine learning methods for mechanical problems associated with fiber composite materials: A review. *Composites Communications*, V.49, 101988. <https://doi.org/10.1016/j.coco.2024.101988>
36. Dwivedi, V., Parashar, N., Srinivasan, B. (2021). Distributed learning machines for solving forward and inverse problems in partial differential equations. *Neurocomputing*, V. 420, 299—316. <https://doi.org/10.1016/j.neucom.2020.09.006>
37. Mostajeran, F., Faroughi, S.A. (2024). Epi-ckans: Elasto-plasticity informed kolmogorov-arnold networks using chebyshev polynomials. *ArXiv preprint arXiv:2410.10897*, <https://doi.org/10.48550/arXiv.2410.10897>
38. Ghane, E., Maia, M.A., Rocha, I.B.C.M., Fagerstrom, M., Mirakhalaf, M. (2025). Multiscale Analysis of Woven Composites Using Hierarchical Physically Recurrent Neural Networks. *Computational Physics*, <https://arxiv.org/html/2503.04901v1>

Информация об авторах

Загордан Надежда Леонидовна, кандидат физико-математических наук, научный сотрудник, исследовательский центр «Информатика и управление» Российской Академии Наук (ФИЦ ИУ РАН), г. Москва, Российская Федерация, ORCID: <https://orcid.org/0009-0000-9973-639X>, e-mail: zagordann@gmail.com

Мочалова Юлия Дмитриевна, математик, исследовательский центр «Информатика и управление» Российской Академии Наук (ФИЦ ИУ РАН), г. Москва, Российская Федерация, ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-0109-3213>, e-mail: juliamochalova96@gmail.com

Абгарян Каринэ Карленовна, доктор физико-математических наук, главный научный сотрудник, исследовательский центр «Информатика и управление» Российской Академии Наук (ФИЦ ИУ РАН), г. Москва, Российская Федерация, ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-0059-0712>, e-mail: kristal83@mail.ru

Information about the authors

Nadezhda L. Zagordan, Candidate of Science (Physics and Mathematics), scientist, Federal Research Center “Computer Science and Control” of the Russian Academy of Sciences,



Загордан Н.Л., Мочалова Ю.Д., Абгарян К.К. (2025)
Современные подходы к моделированию
упруго-прочностных характеристик полимерных...
Моделирование и анализ данных, 2025. 15(2), 127 – 138.

Zagordan N.L., Mochalova Y.D., Abgaryan K.K. (2025)
Modern approaches to modeling
of elastic-strength properties of polymer composites
Modelling and Data Analysis, 2025. 15(2), 127 – 138.

Moscow, Russian Federation, ORCID: <https://orcid.org/0009-0000-9973-639X>, e-mail:
zagordann@gmail.com

Julia D. Mochalova, mathematician, Federal Research Center “Computer Science and Control”
of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russian Federation, ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-0109-3213>, e-mail: juliamochalova96@gmail.com

Karine K. Abgaryan, Doctor of Science (Physics and Mathematics), principal scientist, Federal
Research Center “Computer Science and Control” of the Russian Academy of Sciences,
Moscow, Russian Federation, ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-0059-0712> e-mail:
kristal83@mail.ru

Вклад авторов

Загордан Н.Л. — идеи исследования; аннотирование, написание и оформление рукописи; визуализация результатов исследования

Петров В.Н. — применение математических или других методов для анализа данных; проведение эксперимента; сбор и анализ данных.

Абгарян К.К. — постановка задачи, идеи исследования, планирование и контроль за проведением исследования

Все авторы приняли участие в обсуждении результатов и согласовали окончательный текст рукописи.

Contribution of the Authors

Zagordan N.L. — research ideas; annotation, writing and design of the manuscript; visualization of the research results

Mochalova Y.D. — application of mathematical or other methods for data analysis; conducting the experiment; data collection and analysis.

Abgaryan K.K. — setting the problem, research ideas, planning and control over the research

All authors participated in the discussion of the results and agreed on the final manuscript.

Конфликт интересов

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Conflict of Interest

The authors declare no conflict of interest.

Поступила в редакцию 08.04.2025

Received 2025.04.08

Поступила после рецензирования 11.04.2025

Revised 2025.04.11

Принята к публикации 25.04.2025

Accepted 2025.04.25

Опубликована 30.06.2025

Published 2025.06.30

Научная статья | Original paper

УДК 519.6

Идентификация параметров линейной регрессии и математического правила для формирования значений входящей в модель фиктивной переменной

М.П. Базилевский

Иркутский государственный университет путей сообщения,

Иркутск, Российская Федерация

✉ mik2178@yandex.ru

Резюме

Контекст и актуальность. Задача построения регрессионных моделей в ситуации, когда объясняющие переменные носят категориальный характер, актуальна в настоящее время. Категории могут отражать, например, пол человека (мужчина и женщина), уровень высшего образования (бакалавриат, специалитет и магистратура) или времена года (зима, весна, лето и осень). Для внедрения дихотомических категорий в модель используются фиктивные переменные, принимающие при наличии какого-либо признака значение 1, а при его отсутствии — 0. Причём, значения фиктивных переменных зачастую формируют по определенным заранее правилам. **Цель.** Цель работы состоит в исследовании задачи одновременной идентификации параметров модели множественной линейной регрессии и значений входящей в неё фиктивной переменной. **Гипотеза.** Гипотеза состоит в том, что сформулированная задача может быть formalизована в терминах аппарата математического программирования. **Методы и материалы.** Для оценки неизвестных параметров линейной регрессии применён метод наименьших модулей. **Результаты.** Задача идентификации указанных характеристик formalизована в виде задачи частично булевого линейного программирования. Её решение даёт не просто оценки линейной регрессии и оптимальные значения фиктивной переменной, но и правило, по которому эти значения идентифицируются. Правило основано на преобразовании линейной комбинации объясняющих переменных с помощью целочисленной функции «пол». По известным данным о работе выпарного аппарата на большом промышленном предприятии построено 4 разновидности линейной регрессии с фиктивной переменной. **Выводы.** Поскольку в процессе



построения линейных регрессий нашим способом идентифицируется и правило формирования фиктивной переменной, то это позволяет использовать их для решения задач прогнозирования. Идентифицировав правило, при необходимости можно переоценивать полученные линейные регрессии, например, с помощью метода наименьших квадратов, имеющего более ёмкую совокупность критериев верификации моделей.

Ключевые слова: регрессионный анализ, фиктивная переменная, целочисленная функция «пол», метод наименьших модулей, задача частично булевого линейного программирования

Для цитирования: Базилевский, М.П. (2025). Идентификация параметров линейной регрессии и математического правила для формирования значений входящей в модель фиктивной переменной. *Моделирование и анализ данных*, 15(2), 139–151. <https://doi.org/10.17759/mda.2025150208>

Identification of linear regression parameters and a mathematical rule for generating values of a dummy variable included in the model

M.P. Bazilevskiy

Irkutsk State Transport University, Irkutsk, Russian Federation

✉ mik2178@yandex.ru

Abstract

Context and relevance. The task of constructing regression models in a situation where explanatory variables are categorical is currently relevant. Categories can reflect, for example, gender (male and female), level of higher education (bachelor's degree, specialist degree, and master's degrees), or seasons (winter, spring, summer, and autumn). To introduce dichotomous categories into the model, dummy variables are used. These take the value 1 if a certain feature is present, and 0 if it is absent. The values of these dummy variables are often determined by predefined rules. **Objective.** The aim of the work is to formulate a problem of simultaneous identification of parameters of multiple linear regression models and values of dummy variables included in them. **Hypothesis.** The hypothesis is that the formulated problem can be formalized in terms of the apparatus of mathematical programming. **Methods and materials.** The least absolute deviations method is used to estimate the unknown regression parameters. **Results.** The task of identifying these features is formalized as a mixed 0–1 integer linear programming problem. Its solution gives not only estimates of the linear regression and optimal values of the dummy variable, but also a rule by which these values are identified. The rule is based on the transformation of a linear combination of explanatory variables using the integer function floor. Based on known data on the operation of an evaporator at a large industrial enterprise,



4 types of linear regressions with a dummy variable were constructed. **Conclusions.**

Since the process of constructing linear regressions using our method also identifies a rule for forming a dummy variable, it allows them to be used for solving forecasting problems. After identifying the rule, it is possible, if necessary, to re-estimate the obtained linear regressions, for example, using the ordinary least squares method, which has a more extensive set of model validation criteria.

Keywords: regression analysis, dummy variable, integer function floor, least absolute deviations method, mixed 0—1 integer linear programming problem

For citation: Bazilevskiy, M.P. (2025). Identification of linear regression parameters and a mathematical rule for generating values of a dummy variable included in the model. *Modelling and Data Analysis*, 15(2), 139—151. (In Russ.). <https://doi.org/10.17759/mda.2025150208>

Введение

В настоящее время регрессионный анализ активно используется для обработки статистических данных в различных сферах человеческой деятельности (см., например, (Khan et al., 2024; Wang et al., 2024)). Для оценки неизвестных параметров моделей множественной линейной регрессии существует широкий арсенал методов. В данной работе используется метод наименьших модулей (МНМ), состоящий в минимизации суммы модулей отклонений фактических от расчетных значений выходной переменной. Ещё в 1959 году задача поиска минимума такой суммы в работе (Wagner, 1959) была сведена к задаче линейного программирования. Благодаря этому, возникло целое научное направление, связанное с использованием в регрессионном анализе аппарата математического программирования. Важные результаты в этом направлении были получены в работах (Носков, 1996; Konno, Yamamoto, 2009), в которых для МНМ задача отбора наиболее существенных регрессоров в линейной регрессии описана в терминах аппарата частично булевого линейного программирования (ЧБЛП). А повышение эффективности методов и аппаратных средств решения задач ЧБЛП за последние годы, как следует из (Koch et al., 2022), привело к появлению новых подходов к регрессионному моделированию. Так, в (Базилевский, Носков, 2017) сформулирована задача ЧБЛП для отбора наиболее существенных регрессоров в линейной регрессии с контролем величины критерия «согласованности поведения». В (Базилевский, Ойдопова, 2023) рассмотрена задача ЧБЛП для построения с помощью МНМ модульных регрессионных моделей. Причём, аппарат ЧБЛП стал применяться не только при использовании МНМ, но и метода наименьших квадратов (Базилевский, 2024а).

На написание данной статьи сподвигла работа (Базилевский, 2024б), посвященная оценке с помощью МНМ параметров нелинейных регрессий с целочисленными функциями «пол» и «потолок». Если ограничить значения этих целочисленных функций диапазоном от 0 до 1, то можно получить правило формирования значений



фиктивной переменной. Фиктивные переменные (*dummy-переменные*) (Елисеева, Курышева, 2010), которым присваивают значения 0 и 1, довольно часто применяются в процессе построения регрессионных моделей. Например, при построении зависимости заработной платы работника от его стажа, введение в модель фиктивной переменной «пол» позволяет определить среднюю разницу в зарплатах мужчин и женщин. Традиционно *dummy-переменные* используются при моделировании сезонности во временных рядах. Например, в (Крылова, Ефимова, 2019) с помощью фиктивных переменных измеряется сезонность числа зарегистрированных преступлений в Республике Саха, в (Wang, He, Zhao, 2021) осуществляется прогнозирование сезонных потреблений природного газа в США, в (Zhou et al., 2021) исследуется квартальное потребление электроэнергии, ежемесячная пропускная способность грузов, ежемесячная добыча сырой нефти и ежемесячное производство бензина в Китае. С помощью *dummy-переменных* решаются и другие задачи анализа данных. Так, в (Кривошеева, Подкур, 2021) строится зависимость цены квартиры в городе Кемерово от районного расположения, в (Горидько, 2016) исследуется связь между индексом потребительских цен Камчатского края, безработицей и фиктивной переменной, отражающей максимальные отклонения отдельных наблюдений от полученного тренда, в (Шумилина, Цвиль, 2020) с помощью *dummy-переменных* улучшено качество нелинейного тренда в местах его сильных колебаний. В (Cui et al., 2024) обсуждается возможность применения фиктивных переменных для изучения структурных изменений в экономике Китая, в (Singh et al., 2023) исследуется успеваемость выпускников сельскохозяйственных вузов в Индии в зависимости от пола и касты, а в (Sahoo, 2021) строится модель влияния COVID-19 и дня недели на фондовый рынок в Индии.

Проанализированные работы объединяют то, что фиктивным переменным присваиваются значения 0 и 1 по определенным заранее правилам. Цель настоящей статьи состоит в формализации задачи одновременной идентификации и неизвестных параметров линейной регрессии с помощью МНМ, и определенного правила, выраженного с использованием целочисленной функции «пол», по которому формируются значения входящей в модель фиктивной переменной.

Материалы и методы

Пусть исследуется влияние l объясняющих (входных) переменных x_1, x_2, \dots, x_l на объясняемую (выходную) переменную y по выборочной совокупности объема n . Предположим, что все эти переменные принимают значения $y_i, x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{il}$, $i = 1, n$. Рассмотрим модель множественной линейной регрессии с неизвестными параметрами $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_l$ и ошибками ε_i , $i = 1, n$:

$$y_i = \sum_{j=0}^l \alpha_j x_{ij} + \varepsilon_i, \quad i = 1, n, \quad (1)$$

где x_0 — объясняющая переменная, принимающая единичные значения.



Введем в линейную регрессию (1) фиктивную переменную:

$$y_i = \sum_{j=0}^l \alpha_j x_{i,j} + \lambda \cdot d_i \cdot x_{i,s} + \varepsilon_i, \quad i = \overline{1, n}, \quad (2)$$

где s — назначенный исследователем номер объясняющей переменной из множества $\{0, 1, \dots, l-1, l\}$; d — фиктивная переменная с неизвестными булевыми значениями d_i , $i = \overline{1, n}$; λ — неизвестный параметр. Поскольку значения dummy-переменной неизвестны, то модель (2) относится к нелинейным по параметрам регрессиям.

Пусть, например, $l = 3$. Тогда при $s = 0, 1, 2$ и 3 совокупность возможных регрессионных моделей (2) будет иметь вид

$$y_i = \alpha_0 + \alpha_1 x_{i,1} + \alpha_2 x_{i,2} + \alpha_3 x_{i,3} + \lambda \cdot d_i + \varepsilon_i, \quad i = \overline{1, n}, \quad (3)$$

$$y_i = \alpha_0 + \alpha_1 x_{i,1} + \alpha_2 x_{i,2} + \alpha_3 x_{i,3} + \lambda \cdot d_i \cdot x_{i,1} + \varepsilon_i, \quad i = \overline{1, n}, \quad (4)$$

$$y_i = \alpha_0 + \alpha_1 x_{i,1} + \alpha_2 x_{i,2} + \alpha_3 x_{i,3} + \lambda \cdot d_i \cdot x_{i,2} + \varepsilon_i, \quad i = \overline{1, n}, \quad (5)$$

$$y_i = \alpha_0 + \alpha_1 x_{i,1} + \alpha_2 x_{i,2} + \alpha_3 x_{i,3} + \lambda \cdot d_i \cdot x_{i,3} + \varepsilon_i, \quad i = \overline{1, n}. \quad (6)$$

Как видно, если $d_i = 0$, то в регрессии (3) свободный член равен α_0 , в (4) коэффициент при переменной x_1 равен α_1 , в (5) коэффициент при переменной x_2 равен α_2 , в (6) коэффициент при переменной x_3 равен α_3 . Если $d_i = 1$, то указанные коэффициенты в этих моделях переключаются на $(\alpha_0 + \lambda)$, $(\alpha_1 + \lambda)$, $(\alpha_2 + \lambda)$ и $(\alpha_3 + \lambda)$ соответственно.

Будем считать, что значения фиктивной переменной d в регрессии (2) связаны со значениями объясняющих переменных правилом:

$$d_i = \left\lfloor \beta_0 + \sum_{j=1}^l \beta_j x_{i,j} \right\rfloor, \quad i = \overline{1, n}, \quad (7)$$

где $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_l$ — неизвестные параметры; $[x]$ — целочисленная функция «пол» (Грэхем, Кнут, Паташник, 1998), округляющая число x до ближайшего целого в меньшую сторону. Например, $[6,95]=6$.

Поскольку фиктивная переменная d должна принимать только булевые значения, то справедливы будут следующие ограничения:

$$d_i \in \{0, 1\}, \quad i = \overline{1, n}. \quad (8)$$

Используя (7), представим регрессию (2) в виде:

$$y_i = \sum_{j=0}^l \alpha_j x_{i,j} + \lambda \cdot \left\lfloor \beta_0 + \sum_{j=1}^l \beta_j x_{i,j} \right\rfloor \cdot x_{i,s} + \varepsilon_i, \quad i = \overline{1, n}. \quad (9)$$

Сформулируем следующую задачу: для выбранного номера s с помощью МНМ требуется оценить неизвестные параметры α_j, β_j , $j = \overline{0, l}$, λ и $d_i \in \{0, 1\}$, $i = \overline{1, n}$, нелинейной регрессии (9). Покажем далее, что эта задача сводится к задаче ЧБЛП.



Так, как это сделано в (Базилевский, 2024б), заменим целочисленную функцию

$$\left[\beta_0 + \sum_{j=1}^l \beta_j x_{i,j} \right] \text{линейными ограничениями}$$

$$d_i \leq \beta_0 + \sum_{j=1}^l \beta_j x_{ij} \leq d_i + 1 - \Delta, \quad i = \overline{1, n}, \quad (10)$$

где Δ — близкое к нулю положительное число. Из (10) следует, что при $d_i = 1$ линейная комбинация $\beta_0 + \sum_{j=1}^l \beta_j x_{ij} \in [1, 2 - \Delta]$, а при $d_i = 0$ — $\beta_0 + \sum_{j=1}^l \beta_j x_{ij} \in [0, 1 - \Delta]$.

Как того требует МНМ, введём неотрицательные переменные u_i и v_i , $i = \overline{1, n}$, удовлетворяющие условиям:

$$u_i = \begin{cases} y_i - \sum_{j=0}^l \alpha_j x_{i,j} - \lambda \cdot d_i \cdot x_{i,s}, & \text{если } y_i - \sum_{j=0}^l \alpha_j x_{i,j} - \lambda \cdot d_i \cdot x_{i,s} > 0, \\ 0, & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

$$v_i = \begin{cases} -y_i + \sum_{j=0}^l \alpha_j x_{i,j} + \lambda \cdot d_i \cdot x_{i,s}, & \text{если } y_i - \sum_{j=0}^l \alpha_j x_{i,j} - \lambda \cdot d_i \cdot x_{i,s} < 0, \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Подчеркнём ограничения неотрицательности введенных переменных:

$$u_i \geq 0, \quad v_i \geq 0, \quad i = \overline{1, n}. \quad (11)$$

Учитывая введенные неотрицательные переменные, перепишем регрессию (2) в следующем виде:

$$y_i = \sum_{j=0}^l \alpha_j x_{i,j} + \lambda \cdot d_i \cdot x_{i,s} + u_i - v_i, \quad i = \overline{1, n}. \quad (12)$$

Как известно (Wagner, 1959), для получения МНМ-оценок необходимо минимизировать следующую функцию:

$$\sum_{i=1}^n (u_i + v_i) \rightarrow \min. \quad (13)$$

Перейдём к линеаризации ограничений (12). Для этого введем вспомогательную переменную w , значения которой находятся по формулам $w_i = \lambda \cdot d_i$, $i = \overline{1, n}$. Это означает, что

$$w_i = \begin{cases} \lambda, & \text{если } d_i = 1, \\ 0, & \text{если } d_i = 0. \end{cases}$$



Тогда нелинейные ограничения (12) можно представить в виде уже линейных ограничений

$$y_i = \sum_{j=0}^l \alpha_j x_{i,j} + w_i \cdot x_{i,s} + u_i - v_i, \quad i = \overline{1, n}. \quad (14)$$

Из вышеизложенного следует, что значения переменной w должны удовлетворять неравенствам:

$$-M \cdot (1 - d_i) \leq w_i - \lambda \leq M \cdot (1 - d_i), \quad i = \overline{1, n}, \quad (15)$$

$$-M \cdot d_i \leq w_i \leq M \cdot d_i, \quad i = \overline{1, n}, \quad (16)$$

где M — заранее выбранное большое положительное число.

Очевидно, что если $d_i = 1$, то ограничения (15), (16) преобразуются к виду

$$w_i = \lambda,$$

$$-M \leq w_i \leq M;$$

а если $d_i = 0$, то к виду

$$-M \leq -\lambda \leq M,$$

$$w_i = 0.$$

Таким образом, решение задачи ЧБЛП с целевой функцией (13), с линейными ограничениями (8), (10), (11), (14) — (16) приводит для выбранного номера s к идентификации с помощью МНМ как параметров линейной регрессии, так и правила (7), с помощью которого формируются значения входящей в модель фиктивной переменной d .

Результаты

Для демонстрации предложенного нами способа использовалась известная выборка данных (Дрейпер, Смит, 1986; Дрейпер, Смит, 1987), включающая наблюдения за работой выпарного аппарата на большом промышленном предприятии. Объем выборочной совокупности равен 25. Были выбраны следующие переменные:

y — количество используемого пара в фунтах ежемесячно;

x_1 — количество активной жирной кислоты в фунтах, накопленное за месяц;

x_2 — число рабочих дней в месяце;

x_3 — средняя температура воздуха ($^{\circ}$ F).

Значения этих переменных представлены во 2-м, 3-м, 4-м и 5-м столбцах табл.

Сначала по этим данным с помощью МНМ была построена модель множественной линейной регрессии без фиктивной переменной:

$$\tilde{y} = 8,8543 + 0,5001x_1 + 0,1013x_2 - 0,07785x_3. \quad (17)$$



Таблица / Table

Исходные данные и идентифицированные значения фиктивных переменных
Initial data and identified values of dummy variables

№	y	x ₁	x ₂	x ₃	d ⁽⁰⁾	d ⁽¹⁾	d ⁽²⁾	d ⁽³⁾
1	10,98	5,2	20	35,3	1	1	1	1
2	11,13	5,12	20	29,7	1	1	1	1
3	12,51	6,19	23	30,8	1	1	1	1
4	8,4	3,89	20	58,8	1	1	1	0
5	9,27	6,28	21	61,4	0	0	0	0
6	8,73	5,76	22	71,3	1	1	1	0
7	6,36	3,45	11	74,4	0	0	0	0
8	8,5	6,57	23	76,7	1	1	1	0
9	7,82	5,69	21	70,7	0	0	0	0
10	9,14	6,14	20	57,5	0	0	0	0
11	8,24	4,84	20	46,4	0	0	0	0
12	12,19	4,88	21	28,9	1	1	1	1
13	11,88	6,03	21	28,1	1	1	1	1
14	9,57	4,55	19	39,1	0	0	0	0
15	10,94	5,71	23	46,8	1	1	1	1
16	9,58	5,67	20	48,5	0	0	0	0
17	10,09	6,72	22	59,3	1	1	1	0
18	8,11	4,95	22	70	1	1	1	0
19	6,83	4,62	11	70	0	0	0	0
20	8,88	6,6	23	74,5	1	1	1	0
21	7,68	5,01	20	72,1	0	0	0	0
22	8,47	5,68	21	58,1	0	0	0	0
23	8,86	5,28	20	44,6	0	0	0	0
24	10,36	5,36	20	33,4	0	0	0	0
25	11,08	5,87	22	28,6	1	1	1	1

Для (17) сумма модулей остатков *SAE* составила 10,475. Под остатком понимается разность между фактическим и расчетным по модели значением выходной переменной *y*.

Затем строились модели (3), (4), (5) и (6) с фиктивными переменными. Для этого в каждом случае решалась задача ЧБЛП (13), (8), (10), (11), (14) — (16) с параметрами *M*=100, *Δ*=0,000001. Для решения использовался пакет LPSolve.

При *s* = 0 была получена линейная регрессия

$$\tilde{y} = 9,888 + 0,625x_1 - 0,02112x_2 - 0,07328x_3 + 0,8119d^{(0)}, \quad (18)$$

в которой фиктивная переменная *d*⁽⁰⁾ находится по правилу

$$d^{(0)} = \left\lfloor 0,996 - 0,0001848x_1 + 0,0002642x_2 - 1,03068 \cdot 10^{-5}x_3 \right\rfloor;$$



при $s=1$ регрессия

$$\tilde{y} = 10,0135 + 0,4397x_1 + 0,02065x_2 - 0,07255x_3 + 0,1359d^{(1)}x_1, \quad (19)$$

где

$$d^{(1)} = \lfloor -0,03611x_1 + 0,06316x_2 - 0,002089x_3 \rfloor;$$

при $s=2$ модель

$$\tilde{y} = 10,1192 + 0,5922x_1 - 0,01472x_2 - 0,07581x_3 + 0,03645d^{(2)}x_2, \quad (20)$$

где

$$d^{(2)} = \lfloor -0,03611x_1 + 0,06316x_2 - 0,002089x_3 \rfloor;$$

при $s=3$ зависимость

$$\tilde{y} = 8,0794 + 0,4372x_1 + 0,1032x_2 - 0,06293x_3 + 0,02219d^{(3)}x_3, \quad (21)$$

где

$$d^{(3)} = \lfloor -0,11802x_1 + 0,093036x_2 - 0,00683x_3 \rfloor.$$

Значения идентифицированных фиктивных переменных $d^{(0)}$, $d^{(1)}$, $d^{(2)}$ и $d^{(3)}$ представлены в 6-м, 7-м, 8-м и 9-м столбцах таблицы соответственно. Как видно по табл., $d^{(0)} = d^{(1)} = d^{(2)} \neq d^{(3)}$. Значения критерия SAE для моделей (18) — (21) составили 7,098, 7,083, 7,063 и 7,554 соответственно. Это означает, что все четыре построенные модели с фиктивными переменными оказались лучше по качеству аппроксимации линейной регрессии (17) без фиктивных переменных. Лучшей из моделей (18) — (21) следует признать зависимость (20).

Обсуждение результатов

Подчеркнём следующие важные на наш взгляд моменты.

Во-первых, после идентификации dummy-переменной можно переоценить найденное уравнение линейной регрессии другими методами. Это можно сделать, например, с помощью метода наименьших квадратов, который имеет более ёмкую совокупность критериев верификации модели — коэффициент детерминации R^2 , критерий Фишера, Стьюдента, Дарбина-Уотсона и пр. В результате проведенной переоценки значения R^2 для перестроенных моделей (18) — (21) составили 0,9387, 0,9357, 0,9393 и 0,9285. Для перестроенной линейной регрессии (17) $R^2=0,8795$.



Во-вторых, поскольку в процессе оценки идентифицируется правило формирования фиктивной переменной, то построенную модель можно использовать для прогнозирования. Причём, поскольку при решении задачи ЧБЛП выполняются условия (8) и (10), то фиктивная переменная для любого наблюдения выборки обязательно принимает либо значение 0, либо 1. Но для новых наблюдений это свойство может нарушаться. В таком случае достаточно округлять полученное по найденному правилу целое число до ближайшего числа из множества {0, 1}.

Заключение

В статье с использованием целочисленной функции «пол» сформулирована задача ЧБЛП, решение которой приводит к идентификации с помощью МНМ как параметров линейной регрессии, так и правила, с помощью которого формируются значения входящей в модель фиктивной переменной. Предложенный математический аппарат продемонстрирован при примере моделирования количества используемого пара при работе выпарного аппарата на большом промышленном предприятии. Показано, что благодаря идентификации правила формирования фиктивной переменной можно использовать построенную линейную регрессию для прогнозирования значений выходной переменной. Открытым пока остаётся вопрос с выбором в задаче ЧБЛП чисел M и Δ . Тем не менее, разработанный метод идентификации dummy-переменной может успешно применяться для улучшения аппроксимационных качеств линейных по параметрам регрессионных моделей.

Список источников / References

1. Базилевский, М.П. (2024). Интеграция ограничений на коэффициенты интеркорреляций в оптимизационную задачу и условия построения вполне интерпретируемых неэлементарных линейных регрессий. *Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика*, (69), 31—41.
Bazilevskiy, M.P. (2024). Integration of constraints on intercorrelation coefficients into the optimization problem and conditions for constructing quite interpretable non-elementary linear regressions. *Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*, (69), 31—41. (In Russ.).
2. Базилевский, М.П. (2024). Оценивание с помощью метода наименьших модулей регрессионных моделей с целочисленными функциями пол и потолок. *International Journal of Open Information Technologies*, 12(10), 56—61.
Bazilevskiy, M.P. (2024). Estimation using least absolute deviations method of regression models with integer floor and ceiling functions. *International Journal of Open Information Technologies*, 12(10), 56—61. (In Russ.).
3. Базилевский, М.П., Носков, С.И. (2017). Программный комплекс построения линейной регрессионной модели с учётом критерия согласованности поведения фактической и расчетной траекторий изменения значений объясняемой переменной. *Вестник Иркутского государственного технического университета*, 21(9), 37—44.



Базилевский М.П. (2025)

Идентификация параметров линейной регрессии

и математического правила для формирования...

Моделирование и анализ данных, 2025. 15(2), 139–151.

Bazilevskiy M.P. (2025)

Identification of linear regression parameters and

a mathematical rule for generating values of a dummy...

Modelling and Data Analysis, 2025. 15(2), 139–151.

- Bazilevskiy, M.P., Noskov, S.I. (2017). Program complex for linear regression model construction considering behavior consistency criterion of actual and calculated trajectories of explained variable value change. *Proceedings of Irkutsk State Technical University*, 21(9), 37–44. (In Russ.).
4. Базилевский, М.П., Ойдопова, А.Б. (2023). Оценивание модульных линейных регрессионных моделей с помощью метода наименьших модулей. *Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Электротехника, информационные технологии, системы управления*, (45), 130–146.
Bazilevskiy, M.P., Oydopova, A.B. (2023). Estimation of modular linear regression models using the least absolute deviations. *Bulletin of Perm National Research Polytechnic University. Electrotechnics, Informational Technologies, Control Systems*, (45), 130–146. (In Russ.).
5. Горидько, Н.П. (2016). Методика сценарного прогнозирования изменения экономических показателей региона с использованием фиктивных переменных. *Известия Волгоградского государственного технического университета*, (7), 12–17.
Gorid'ko, N.P. (2016). Methods of scenario forecasting for changes of regional economic indicators using dummy variables. *Izvestia VSTU*, (7), 12–17. (In Russ.).
6. Грэхем, Р., Кнут, Д., Паташник, О. (1998). *Конкретная математика. Основание информатики*. М.: Мир.
Grekhem, R., Knut, D., Patashnik, O. (1998). *Concrete Mathematics. A Foundation for Computer Science*. Moscow: Mir. (In Russ.).
7. Дрейпер, Н., Смит, Г. (1986). *Прикладной регрессионный анализ. Книга 1*. М.: Финансы и статистика.
Dreyper, N., Smit, G. (1986). *Applied Regression Analysis. Part 1*. Moscow: Finance & Statistics. (In Russ.).
8. Дрейпер, Н., Смит, Г. (1987). *Прикладной регрессионный анализ. Книга 2*. М.: Финансы и статистика.
Dreyper, N., Smit, G. (1987). *Applied Regression Analysis. Part 2*. Moscow: Finance & Statistics. (In Russ.).
9. Елисеева, И.И., Курышева, С.В. (2010). Фиктивные переменные в анализе данных. *Социология: методология, методы, математическое моделирование*, (30), 43–63.
Eliseeva, I.I., Kuryshova, S.V. (2010). Dummy variables in data analysis. *Sociology: Methodology, Methods, Mathematical Modeling*, (30), 43–63. (In Russ.).
10. Кривошеева, М.В., Подкур, П.Н. (2021). Исследование цен на однокомнатные квартиры с помощью фиктивных переменных. *Россия молодая*, 95020.1-95020.4.
Krivosheeva, M.V., Podkur, P.N. (2021). A Study of one-room apartment prices using dummy variables. *Young Russia*, 95020.1-95020.4. (In Russ.).
11. Крылова, Е.А., Ефимова, Н.Р. (2019). Использование фиктивных переменных при моделировании числа зарегистрированных преступлений по Республике Саха (Якутия). *Южно-Сибирский научный вестник*, (2), 111–116.
Krylova, E.A., Efimova, N.R. (2019). Application of indicator variables in modeling of number of recorded crimes in the Republic of Sakha (Yakutia). *South-Siberian Scientific Bulletin*, (2), 111–116. (In Russ.).
12. Носков, С.И. (1996). *Технология моделирования объектов с нестабильным функционированием и неопределенностью в данных*. Иркутск: РИЦ ГП «Облинформпечать».



- Noskov, S.I. (1996). *Technology for modeling objects with unstable functioning and uncertainty in data*. Irkutsk: RITZ GP Oblinformpechat'. (In Russ.).
13. Шумилина, В.Е., Цвиль, М.М. (2020). Построение модели регрессии по временным рядам с целью прогнозирования индекса производительности труда в Российской Федерации. *Вестник евразийской науки*, 12(1), 73.
- Shumilina, V.E., Tsvil', M.M. (2020). Building a time series regression model with the aim of predicting the labor productivity index in the Russian Federation. *The Eurasian Scientific Journal*, 12(1), 73. (In Russ.).
14. Cui, J., Zhang, J., Liu, C., Liu, Y., Guo, S. (2024). Dummy variable threshold effect model and its economic applications. *Journal of Nonlinear and Convex Analysis*, 25(4), 779—788.
15. Khan, F., Muhammadullah, S., Sharif, A., Lee, C.C. (2024). The role of green energy stock market in forecasting China's crude oil market: An application of IIS approach and sparse regression models. *Energy Economics*, 130, 107269. <https://doi.org/10.1016/j.eneco.2023.107269>
16. Koch, T., Berthold, T., Pedersen, J., Vanaret, C. (2022). Progress in mathematical programming solvers from 2001 to 2020. *EURO Journal on Computational Optimization*, 10, 100031. <https://doi.org/10.1016/j.ejco.2022.100031>
17. Konno, H., Yamamoto, R. (2009). Choosing the best set of variables in regression analysis using integer programming. *Journal of global optimization*, 44, 273—282. <https://doi.org/10.1007/s10898-008-9323-9>
18. Sahoo, M. (2021). COVID-19 impact on stock market: Evidence from the Indian stock market. *Journal of Public Affairs*, 21(4), e2621. <https://doi.org/10.1002/pa.2621>
19. Singh, H., Das, A., Dey, S., Narsimhaiah, L., Pandit, P., Sinha, K., Sahu, P.K., Mishra, P. (2023). A study on academic attainment of agriculture students and its correlates: a dummy regression approach. *Annals of Data Science*, 10(1), 129—152. <https://doi.org/10.1007/s40745-020-00275-z>
20. Wagner, H.M. (1959). Linear programming techniques for regression analysis. *Journal of the American Statistical Association*, 54(285), 206—212. <https://doi.org/10.1080/01621459.1959.10501506>
21. Wang, S., Chen, Y., Cui, Z., Lin, L., Zong, Y. (2024). Diabetes risk analysis based on machine learning LASSO regression model. *Journal of Theory and Practice of Engineering Science*, 4(01), 58—64. [https://doi.org/10.53469/jtpes.2024.04\(01\).08](https://doi.org/10.53469/jtpes.2024.04(01).08)
22. Wang, Z.X., He, L.Y., Zhao, Y.F. (2021). Forecasting the seasonal natural gas consumption in the US using a gray model with dummy variables. *Applied Soft Computing*, 113, 108002. <https://doi.org/10.1016/j.asoc.2021.108002>
23. Zhou, W., Cheng, Y., Ding, S., Chen, L., Li, R. (2021). A grey seasonal least square support vector regression model for time series forecasting. *ISA transactions*, 114, 82—98. <https://doi.org/10.1016/j.isatra.2020.12.024>

Информация об авторе

Михаил Павлович Базилевский, кандидат технических наук, доцент кафедры математики, факультет «Управление на транспорте и информационные технологии», Иркутский государственный университет путей сообщения (ФГБОУ ВО ИрГУПС), Иркутск, Российская Федерация, ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-3253-5697>, e-mail: mik2178@yandex.ru



Базилевский М.П. (2025)

Идентификация параметров линейной регрессии

и математического правила для формирования...

Моделирование и анализ данных, 2025. 15(2), 139 – 151.

Bazilevskiy M.P. (2025)

Identification of linear regression parameters and

a mathematical rule for generating values of a dummy...

Modelling and Data Analysis, 2025. 15(2), 139 – 151.

Information about the author

Mikhail P. Bazilevskiy, Candidate of Science (Technical), Associate Professor, Department of Mathematics, Irkutsk State Transport University, Irkutsk, Russian Federation, ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-3253-5697>, e-mail: mik2178@yandex.ru

Вклад автора

Базилевский М.П. — идеи исследования; аннотирование, написание и оформление рукописи; планирование исследования; контроль за проведением исследования; применение статистических, математических или других методов для анализа данных; проведение эксперимента; сбор и анализ данных; визуализация результатов исследования.

Contribution of the Author

Mikhail P. Bazilevskiy — ideas; annotation, writing and design of the manuscript; planning of the research; control over the research; application of statistical, mathematical or other methods for data analysis; conducting the experiment; data collection and analysis; visualization of research results.

Конфликт интересов

Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Conflict of Interest

The author declare no conflict of interest.

Поступила в редакцию 10.04.2025

Received 2025.04.10

Поступила после рецензирования 15.04.2025

Revised 2025.04.15

Принята к публикации 15.05.2025

Accepted 2025.05.15

Опубликована 30.06.2025

Published 2025.06.30

Моделирование и анализ данных
2025. 15(2), 152 – 164.
<https://doi.org/10.17759/mda.2025150209>
ISSN: 2219-3758 (печатный)
ISSN: 2311-9454 (online)

Modelling and Data Analysis
2025. 15(2), 152 – 164.
<https://doi.org/10.17759/mda.2025150209>
ISSN: 2219-3758 (print)
ISSN: 2311-9454 (online)

КОМПЛЕКСЫ ПРОГРАММ | SOFTWARE PACKAGES

Научная статья | Original paper

УДК 007.5:004.89:62-50:681.5

Разработка вероятностной модели поведения многоагентной системы в трехмерном пространстве

Н.И. Левонович

Московский государственный психолого-педагогический университет,

Москва, Российская Федерация

✉ levonikitatech@yandex.ru

Резюме

В статье рассматриваются теоретические аспекты управления многоагентной системой, на основе вероятностных марковских моделей. Система представляет собой набор агентов, с возможностью взаимодействовать между собой, для достижения группы целей. Поведение системы является непредсказуемым с точки зрения целей. Поведение агентов определяется с помощью алгоритма, который включает идентификацию параметров вероятностной модели, используя максимизацию целевых функций, представляющих индивидуальные и групповые вероятности достижения (пометки) целей.

Ключевые слова: многоагентные системы, контроль групп, марковские процессы, идентификация моделей, контроль поведения прикладных многоагентных систем

Для цитирования: Левонович, Н.И. (2025). Разработка вероятностной модели поведения многоагентной системы в трехмерном пространстве. *Моделирование и анализ данных*, 15(2), 152—164. <https://doi.org/10.17759/mda.2025150209>

Probabilistic model of behavior multi-agent system is three-dimensional space developing

N. I. Levonovich

Moscow State University of Psychology and Education, Moscow, Russian Federation

✉ levonikitatech@yandex.ru



Abstract

The article discusses theoretical aspects of multi-agent systems based of probability Markov models. System consists of agents, that have ability to cooperate for achievement of goals. The behavior of system is unpredictable from point of goals' view. The behavior of agents Agent's behavior is determined with the aid of the algorithm that includes identification of the probabilistic model parameters using maximized objective functions representing individual and group probabilities for goals reaching (marking).

Keywords: multi-agent systems; group control; Markov process; model identification; behavior control for applied multi-agent systems

For citation: Levonovich, N.I. (2025). Probabilistic model of behavior multi-agent system is three-dimensional space developing. *Modelling and Data Analysis*, 15(2), 152—164. (In Russ.). <https://doi.org/10.17759/mda.2025150209>

Введение

В последнее время существенно актуализировались проблемы, связанные с управлением группой подвижных объектов, которым необходимо согласовывать свое поведение для достижения целей. Постановка и решение задач в данной сфере может использоваться для управления группами наземных и воздушных роботов и других мобильных систем.

Данные системы могут применяться для поиска в тайге, поиска и слежения за движущимися объектами на обширных пространствах.

Описание поведения системы

Агенты $L_m (m = 0, \dots, M - 1)$ движутся в трехмерном игровом пространстве, которое содержит набор целей $T_n (n = 0, \dots, N - 1)$, согласно некоторым правилам, пытаясь поразить цели. С целью определения положения агентов и целей вводится агент-наблюдатель, относительно которого производится позиционирование, к нему привязана относительная система координат. Пространство ограничено зоной действия агента-наблюдателя и разделено на кубы. Позиция агента и цели определяется с точностью до куба (i, j, k) , где i — индекс долготы ($i = (0, \dots, I - 1)$), j — индекс широты ($j = (0, \dots, J - 1)$), k — индекс высоты ($k = (0, \dots, K - 1)$) (рисунок 1). Вероятность того, что агент L_m находится в ячейке (i, j, k) в момент времени t определяется функцией $p_{m,ijk}(t)$.

В дискретные моменты времени, разделенные интервалами дискретизации Δt , агент L_m может воздействовать на цель, и вероятно это воздействие будет успешно или претерпит воздействие со стороны цели и вероятно пораженным целью с вероятностями определяемые позициями агентов и целей. В параметрах системы задаются: пороговые вероятности для индивидуального p_i и коллективного p_m воздействия



на цель, максимальная разрешенная вероятность успешного воздействия цели на агента p_B , максимальная скорость агента v_{\max} . Число агентов, одновременно терпящих воздействие одной цели (не регулируется, один агент).

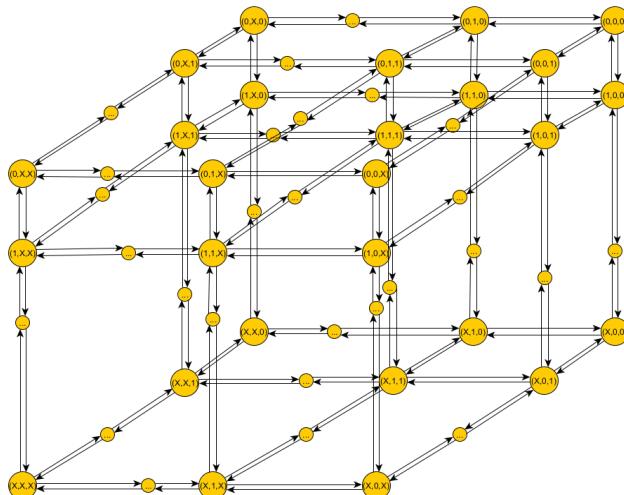


Рис. 1. Структура отношений между состояниями случайного марковского процесса, представляющая движение агентов по ячейкам игрового поля

Fig. 1. Structure of relationship between states of random Markov process representing agent movement through game field cells

В дискретный каждый момент времени все функционирующие агенты знают какой ячейке они находятся. В зависимости от игровой ситуации агенты могут получать или не получать информацию о положении других агентах.

Изменение положения агентов и целей на игровом поле, а также вероятностей взаимных поражений происходит за фиксированный интервал времени Δt называется *тактом игры*.

Концом игры является ситуация, когда на поле не осталось целей (все цели помечены), либо когда на поле не осталось агентов.

В рассматриваемой модели цели могут располагаться только на одном индексе высоты (наземные цели).

Предположим, что движение каждого агента по ячейкам анализируемого пространства описывается случайным марковским процессом с непрерывным временем и дискретными состояниями. Нахождение в состоянии такого марковского процесса означает пребывание в выделенной ячейке рассматриваемого пространства, которая имеет те же индексы. В таком случае переходы, подчиняющиеся пуассоновскому потоку случайных событий, возможны только между смежными ячейками, которые имеют общую грань.



Число переходов между смежными состояниями X , происходящий за любой интервал времени τ , начиная со времени t подчиняются закону Пуассона:

$$P_{t,\tau}(X = m) = \frac{a(t, \tau)^m}{m!} e^{-a(t, \tau)},$$

где $P_{t,\tau}(X = m)$ — вероятность m переходов за этот интервал, $a(t, \tau)$ среднее количество переходов, совершаемых за интервал τ с момента времени t . В дальнейшем рассматриваются только стационарные потоки $a(t, \tau) = \eta\tau$ и $\eta = \text{const}$

Гипотеза о пуассоновском распределении переходов является стандартной для рассматриваемой области, так как это распределение часто встречается на практике, так как следует из предельных теорем для потоков событий.

Поведение каждого агента в части перемещения определяется автономно. Динамика вероятностей пребывания m -того агента в состояниях марковского процесса определяется системой дифференциальных уравнений Колмогорова в матричной форме:

$$\frac{dp_m(t)}{dt} = M_m(\lambda_m)p_m(t)$$

где $p_m(t)$ — вероятности пребывания m -того агента в n -том состоянии процесса, λ_m — вектор интенсивностей перехода между смежными состояниями для m -того агента. M_m — матрица n -того порядка интенсивностей перехода между смежными состояниями m -того агента. Начальные условия $p_{m,i_0,j_0,k_0}(0) = 1, \{p_{m,ijk}(0) = 0\}_{i \neq i_0, j \neq j_0, k \neq k_0}$, где (i_0, j_0, k_0) — индекс ячейки в которой m -тый агент находился в $t_0 = 0$.

Введём следующее обозначения для элементов вектора λ_m (рис. 2):

- Интенсивность переходов m -того агента в состоянии (i, j, k) в сторону увеличения первой координаты $\lambda_{m,i,j,k,\rightarrow}$;
- Интенсивность переходов m -того агента в состоянии (i, j, k) в сторону уменьшения первой координаты $\lambda_{m,i,j,k,\leftarrow}$;
- Интенсивность переходов m -того агента в состоянии (i, j, k) в сторону увеличения второй координаты $\lambda_{m,i,j,k,\otimes}$;
- Интенсивность переходов m -того агента в состоянии (i, j, k) в сторону уменьшения второй координаты $\lambda_{m,i,j,k,\otimes}$;
- Интенсивность переходов m -того агента в состоянии (i, j, k) в сторону увеличения третьей координаты $\lambda_{m,i,j,k,\uparrow}$;
- Интенсивность переходов m -того агента в состоянии (i, j, k) в сторону уменьшения третьей координаты $\lambda_{m,i,j,k,\downarrow}$;

Расчет вероятностей $p_m(t)$ для всех агентов происходит синхронно в дискретные моменты времени с шагом Δt . Некоторые агенты могут оставаться в тех же ячейках.

Обозначим текущий момент времени как t_* , обозначим введем следующие обозначения для событий:



A_n — n-тая цель успешно помечена в результате воздействия;

B_{mn} — m-тый агент помечена в результате n-той цели;

D_{mn} — воздействие m-тым агентом на n-тую цель;

$H_{i_m j_m k_m m}$ — m-тый агент находится в ячейке (i_m, j_m, k_m)

$H_{i_m j_m k_m m}$ — в момент времени $t_* + \Delta t$ m-тый агент находится в ячейке (i_m, j_m, k_m) , которая смежна с ячейкой, в которой агент находился в момент времени t_* .

C_m — переход m-того агента из ячейки, в которой он был в момент времени t_* в одну из смежных ячеек.

$H_{i_n j_n k_n n}$ — n-тая цель находится в ячейке (i_n, j_n, k_n)

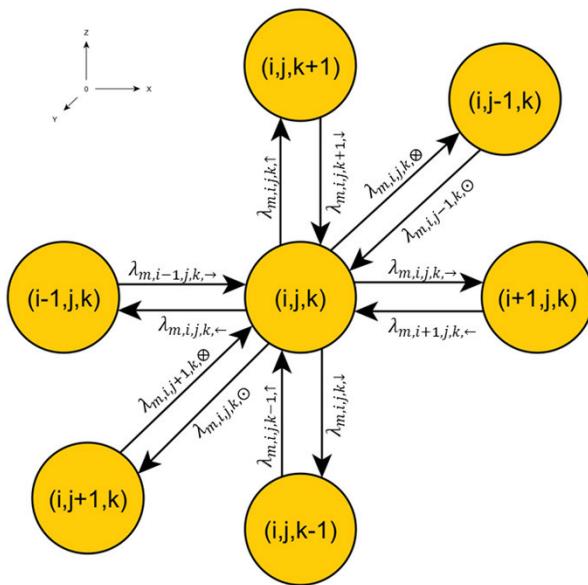


Рис. 2. Обозначение интенсивности переходов m-того агента в данном состоянии

Fig. 2. Designation of the intensity of transitions of the m-th agent in a given state

Вероятность успешной пометки n-той цели в результате воздействия m-тым агентом вычисляется согласно формуле полной вероятности:

$$p(A_n | D_{mn}) = \sum_{i,j,k} p(A_n | H_{i_m j_m k_m m} \cap H_{i_n j_n k_n n}) p(H_{i_m j_m k_m m}) p(H_{i_n j_n k_n n})$$

Вероятность успешной пометки n-той цели, находящейся в ячейке (i_n, j_n, k_n) m-тым агентом в результате воздействия из ячейки (i_m, j_m, k_m) в момент времени t_* задается относительной «карточкой осуществимости» f_a :



$$p(A_n | H_{i_m j_m k_m m} \cap H_{i_n j_n k_n n}) = f_a(i_m, j_m, k_m, i_n, j_n, k_n, t_*)$$

Вероятности $p(H_{i_m j_m k_m m})$ определяются из решения системы дифференциальных уравнений Колмогорова. Цель движется по функции.

Вероятность успешной пометки m -того агента, находящегося ячейке (i_m, j_m, k_m) , n -той целью находящейся в ячейке (i_n, j_n, k_n) в результате воздействия в момент времени t_* задается относительной «картой уязвимости» f_b :

$$p(A_n | H_{i_m j_m k_m m} \cap H_{i_n j_n k_n n}) = f_b(i_n, j_n, k_n, i_m, j_m, k_m, t_*)$$

Карты осуществимости и уязвимости пересчитываются каждый тик игры, чтобы отслеживать перемещения целей и агентов по игровому полю. Для решения множества прикладных проблем, целесообразно определить распределение вероятностей, которые задают две карты как логистические функций:

$$f_a(i_m, j_m, k_m, i_n, j_n, k_n, t_*) = c_a \left(\frac{e^{r_{a,d} d(i_m, j_m, k_m, i_n, j_n, k_n) + q_{a,d}}}{1 + e^{r_{a,d} d(i_m, j_m, k_m, i_n, j_n, k_n) + q_{a,d}}} \right)$$

$$f_b(i_m, j_m, k_m, i_n, j_n, k_n, t_*) = c_b \left(\frac{e^{\eta_{b,d} d(i_m, j_m, k_m, i_n, j_n, k_n) + q_{b,d}}}{1 + e^{\eta_{b,d} d(i_m, j_m, k_m, i_n, j_n, k_n) + q_{b,d}}} \right)$$

где $d(i_m, j_m, k_m, i_n, j_n, k_n)$ расстояние между ячейками (i_m, j_m, k_m) и (i_n, j_n, k_n) ; параметры $c_a, c_b, r_{a,d}, q_{a,d}, r_{b,d}, q_{b,d}$ идентифицируется по методу максимального правдоподобия согласно эмпирическим данным, для того чтобы обеспечить наивысшую вероятность попадания наблюдаемой цели и агентов в контрольную серию экспериментов.

Найдем закон распределения для $\tau_* > 0$, которое необходимо для перехода между состояниями процесса. Вероятность, что переход не случится — $P_\tau(X=0) = e^{-\eta\tau}$. Это значение эквивалентно вероятности события $\tau_* > \tau$: $P(\tau_* > \tau) = e^{-\eta\tau}$. Следовательно, $P(\tau_* \leq \tau) = 1 - P(\tau_* > \tau) = 1 - e^{-\eta\tau}$, где $F(\tau, \eta) = P(\tau_* \leq \tau)$ — функция распределения случайной величины τ_* . Это распределение имеет плотность $\rho(\tau) = \eta e^{-\eta\tau}$ и математическое ожидание $E = \int_0^\infty t \eta e^{-\eta\tau} dt = \frac{1}{\eta}$

Вероятность успешной пометки n -той цели в ходе групповой атаки оценивается согласно формуле сумме вероятностей, в случае воздействия на него всеми агентами одновременно:

$$p(A_n | D_{1n} + \dots + A_n | D_{mn}) = p(A_n | D_{1n}) + \dots + p(A_n | D_{mn}) - p(A_n | D_{1n} * A_n | D_{2n}) - \dots - p(A_n | D_{1n} * A_n | D_{3n}) - \dots + p(A_n | D_{1n} * A_n | D_{2n} * A_n | D_{3n}) + \dots \pm p(A_n | D_{1n} * A_n | D_{2n} * \dots * A_n | D_{mn})$$

События $A_n | D_{in}$ и $A_n | D_{jn}$ полагаются независимыми если $i \neq j$.



Построение пар атак

Введем понятие воздействия (потенциального воздействия), как пары агента и цели $d_{mn} = (l_m, t_n)$, \mathbf{D} — множество воздействий, функционал $f_a^+(d_{mn}, t_*) = f_a(i_m, j_m, k_m, i_n, j_n, k_n, t_*)$ назовем значением воздействия.

Матрица значений воздействия \mathbf{C} , образуется из значений воздействий, которые стоят на пересечении строки (относящейся к агенту) и столбца (относящейся к цели).

$$\mathbf{C}(t_*) = c_{ij} = f_a^+(d_{ij}, t_*)$$

Построим граф $G = (W, E); W = L_m \cup \mathbf{D}; E = \{(l_m, d_{mn}): l_m \in L_m; l_m \in d_{mn}\}$. Для ребер существует функционал разметки $g: E \rightarrow \mathbb{R}$, $g(e) = \sup f_a^+(d_{mn}, t_*) - f_a^+(d_{mn}, t_*) + \epsilon$, где $d_{mn} \in e$.

Для полученного графа с помощью венгерского алгоритма [1; 2] решается задача о назначениях получается распределение воздействий.

Определения:

- Паросочетанием M называется набор попарно несмежных рёбер графа (иными словами, любой вершине графа должно быть инцидентно не более одного ребра из множества M). Мощностью паросочетания назовём количество рёбер в нём. Наибольшим (или максимальным) паросочетанием назовём паросочетание, мощность которого максимальна среди всех возможных паросочетаний в данном графе. Все те вершины, у которых есть смежное ребро из паросочетания (т.е. которые имеют степень ровно один в подграфе, образованном M), назовём насыщенными этим паросочетанием.
- Полное паросочетание — паросочетание, в которое входят все вершины.
- Цепью длины k назовём некоторый простой путь (т.е. не содержащий повторяющихся вершин или рёбер), содержащий k рёбер.
- Чередующейся цепью (в двудольном графе, относительно некоторого паросочетания) назовём цепь, в которой рёбра поочередно принадлежат/не принадлежат паросочетанию.
- Увеличивающей цепью (в двудольном графе, относительно некоторого паросочетания) назовём чередующуюся цепь, у которой начальная и конечная вершины не принадлежат паросочетанию.

Алгоритм решает следующую задачу пусть дан взвешенный полный двудольный граф с целыми весами ребер $K_{n,n}$, нужно найти в нем полное паросочетание минимального веса. Вес паросочетания определяется как сумма весов его ребер.

Функцию ϕ назовём потенциалом, если для любых вершин i и j выполняется условие:

$$\phi(i) + \phi(j) \leq g((i, j))$$

где $g((i, j))$ — стоимость ребра между i и j . Значением потенциала называется сумма потенциалов всех вершин.



Заметим, что стоимость любого совершенного паросочетания не может быть меньше значения любого потенциала. Венгерский алгоритм решает задачу оптимально: он находит одновременно и совершенное паросочетание, и потенциал, у которых стоимость паросочетания совпадает со значением потенциала. Это доказывает, что оба решения являются оптимальными.

Алгоритм работает с жёсткими рёбрами — теми, для которых выполняется равенство:

$$\phi(i) + \phi(j) = c(i, j)$$

Если обозначить подграф из таких рёбер как G_ϕ , то стоимость любого совершенного паросочетания в G_ϕ (при его существовании) в точности равна значению потенциала ϕ .

Алгоритм работает с матрицей весов графа.

Вспомогательный алгоритм (алгоритм Куна)

Алгоритм

1. Берем пустое паросочетание;
2. Пока в графе удается найти увеличивающую цепь, выполняется чередование паросочетание вдоль этой цепи, и повторять процесс поиска увеличивающей цепи.
 - a. Как только не удалось найти увеличивающую цепь, процесс поиска останавливается, текущее паросочетание максимально.

Алгоритм Куна [3] ищет любую увеличивающую цепь, с помощью обходу в глубину или в ширину. Алгоритм Куна просматривает все вершины графа по очереди, запуская из каждой обход, пытающийся найти увеличивающую цепь, начинающуюся в этой вершине.

Алгоритм последовательно обрабатывает все вершины v первой доли ($v = 1, \dots, n_1$):

- Если вершина v уже насыщена текущим паросочетанием (т. е. уже соединена с какой-то вершиной второй доли), то она пропускается.
- В противном случае алгоритм пытается насытить v путём поиска увеличивающей цепи, начинающейся в этой вершине.

Для поиска используется обход в глубину (DFS) (реже — в ширину, BFS):

1. Начинаем из ненасыщенной вершины v первой доли.
2. Перебираем все рёбра, исходящие из v . Пусть текущее ребро ведёт в вершину to второй доли.
 - Если to ненасыщена, то цепь найдена — это просто ребро (v, to) .
 - Действие: добавляем (v, to) в паросочетание и завершаем поиск.
 - Если to уже насыщена ребром (p, to) , то продолжаем поиск из p .
 - Таким образом, мы пытаемся построить чередующуюся цепь вида $(v, to), (to, p), \dots$



3. Обход продолжается, пока либо не будет найдена увеличивающая цепь, либо не станет ясно, что такой цепи не существует.

Результат обхода:

- Если цепь найдена, то вершина v становится насыщенной, и мощность паросочетания увеличивается на 1.
- Если цепь не найдена, то вершина v остаётся ненасыщенной (и в текущем паросочетании её уже нельзя покрыть).

Завершение работы алгоритма.

После обработки всех вершин первой доли текущее паросочетание становится максимальным, и алгоритм завершает работу.

Алгоритм для равных долей

Алгоритм хранит в памяти потенциал ϕ (в виде массивов u и v) и ориентацию (направление) каждого жёсткого ребра. Эта ориентация обладает ключевым свойством: рёбра, направленные от T к S , формируют паросочетание, обозначаемое M . Ориентированный граф, состоящий из жёстких рёбер с заданной ориентацией, обозначается как \overrightarrow{G}_ϕ .

Шаг 1. В начале алгоритма потенциал полагается равным нулю и паросочетание M полагается пустым.

Цикл. На каждом шаге алгоритм пытается увеличить мощность текущего паросочетания M на единицу, не изменяя потенциалы. Это делается в графе жёстких рёбер G_ϕ с использованием модифицированного алгоритма Куна для поиска максимального паросочетания в двудольных графах.

Если на текущем шаге цикла не удалось увеличить паросочетание, производится корректировка потенциалов, чтобы создать новые возможности для увеличения паросочетания:

1. Определим множества Z_1 и Z_2 и величину Δ :

- Z_1 — посещённые вершины первой доли при обходе (поиске увеличивающей цепи).
- Z_2 — посещённые вершины второй доли.
- Δ вычисляется как:

$$\Delta = \min_{\substack{i \in Z_1 \\ j \notin Z_2}} \{c_{ij} - u_i - v_j\}.$$

Таким образом $\Delta > 0$, иначе существовало бы «жёсткое» ребро (i, j) , ведущее к противоречию с определением Z_1 и Z_2 .

2. Корректировка потенциалов:

- Для всех $i \in Z_1$: $u_i = u_i + \Delta$.
- Для всех $i \in Z_2$: $v_j = v_j - \Delta$.



Корректность потенциала сохраняется: для рёбер (i, j) , где $i \in Z_1$ и $j \notin Z_2$: $u_i + v_j \leq c_{ij}$ (по выбору Δ). Для остальных комбинаций i, j неравенство $u_i + v_j \leq c_{ij}$ либо не изменилось, либо усилилось.

Жёсткие рёбра паросочетания остаются: ребра (i, j) паросочетания могли измениться только если $i \notin Z_1$ и $j \in Z_2$, но такие рёбра не входят в M (так как i не была посещена).

3. Рост достижимого множества.

После пересчёта все ранее достижимые вершины остаются достижимыми. Появится хотя бы одно новое жёсткое ребро (i, j) (где $i \in Z_1$, $j \notin Z_2$), делающее вершину j достижимой. Таким образом, $|Z_1| + |Z_2|$ строго увеличивается.

4. Конечность алгоритма

Поскольку размер $|Z_1| + |Z_2|$ не может превысить $n_1 + n_2$, число пересчётов потенциалов ограничено ($O(n)$). После каждого пересчёта либо находится увеличивающая цепь, либо прогресс гарантирован.

Завершение алгоритма. Алгоритм продолжает итеративно выполнять следующие шаги:

- Поиск увеличивающей цепи для текущего паросочетания M .
- Если цепь найдена — увеличение M на единицу.
- Если цепь не найдена — пересчёт потенциалов, расширяющий множество достижимых вершин.

Рано или поздно будет достигнут потенциал, при котором существует совершенное паросочетание M (если исходный граф его допускает). Это паросочетание и будет решением задачи.

Если говорить об асимптотике алгоритма, то она составляет $O(n^4)$, поскольку всего должно произойти n увеличений паросочетания, перед каждым из которых происходит не более n пересчётов потенциала, каждый из которых выполняется за время $O(n^2)$.

Модификация алгоритма для неравных долей с асимптотикой $O(n^3)$

Ключевая идея — вместо одновременного рассмотрения всей матрицы, алгоритм последовательно добавляет строки, на каждом шаге поддерживая максимальное паросочетание для уже обработанной части. Это позволяет:

1. Локализовать пересчёты потенциалов только для новых данных.
2. Сделать алгоритм пригодным для неравных долей.
3. Снизить асимптотику до $O(n^3)$ (или $O(n^2m)$ для прямоугольных матриц). Оптимизации для асимптотики $O(n^3)$:
 - Поддержка массива $minv$, для каждого столбца j хранится минимальное значение $c_{ij} - u_i - v_j$ по всем посещённым строкам Z_1 . Обновляется за $O(n)$ при добавлении новой строки в Z_1 .
 - Быстрый поиск Δ — $\Delta = \min_{j \in Z_2} \{minv_j\}$ вычисляется за $O(n)$.



- Итеративный обход Куна — после пересчёта потенциала обход продолжается с новыми жёсткими ребрами, не перезапускаясь с нуля.

В результате выполнения венгерского алгоритма имеются пары оптимальных атак, с вероятностью поражения.

Алгоритм поведения системного агента

Поведение m -того агента ($m = 0, \dots, M - 1$) определяется следующим алгоритмом.

Шаг 1. Указать начальные условия, которые определяются:

- Распределение агентов по ячейкам (i, j, k) игрового поля;
- «Карта осуществимости» представлена функцией $f_a(i_m, j_m, k_m, i_n, j_n, k_n, t_*)$
- «Карта уязвимости» представлена функцией $f_b(i_m, j_m, k_m, i_n, j_n, k_n, t_*)$
- Приблизительная оценка интервала семплирования.

Шаг 2. Для текущего распределения агентов и целей на текущий момент t_* :

- Для каждой цели рассчитать вероятность пометки агента. Для каждого цели выбрать первого по порядку агента, вероятность пометки, которого превышает порог, удалить агента пропорционально вероятности пометки.
- Выполнить вероятностную атаку согласно построенным парам атак с помощью алгоритма, представленного в предыдущем пункте статьи.

Шаг 3. Если как минимум одно из условий для завершения игры выполнено на момент t_* :

- Получение информации о пометке всех агентов.
- Получение информации о пометке всех целей.
- Тогда перейти к шагу 6, иначе перейти к шагу 4.

Шаг 4. Выполним идентификацию свободных параметров $\{\lambda_m\}_{m=0, \dots, M-1}$ марковского процесса, полагая $|v_k| \leq v_{\max}$, где ограничение скорости задает ограничения значения компонент вектора $\{\lambda_m\}_{m=0, \dots, M-1}$, со средними значениями $\bar{\tau}_{\lambda^*} = \frac{1}{\lambda_*}$, $\bar{\tau}_{\mu^*} = \frac{1}{\mu_*}$ и $\bar{\tau}_{v^*} = \frac{1}{v_*}$ времени перехода. Если агентам доступна информация друг о друге, максимизировать целевую функцию игры, которая вычисляется по формуле (obj), и представляет собой сумму вероятностей успешного воздействия на цели (простую сумму, которая сама не является вероятностью) в момент времени $t_* + \Delta t$, принимая в расчет всех агентов.

$$obj = \sum_{n=0, \dots, N-1} p(A_n | D_{1n} + \dots + A_n | D_{mn})$$

В противном случае, задача оптимизации решается отдельно для каждого агента автономно, с индивидуальными целевыми функциями $iobj$, в момент времени $t_* + \Delta t$ (при условии равновероятного выбора цели).

$$iobj = \sum_{n=0, \dots, N-1} \frac{p(A_n | D_{mn})}{N} (m = 0, \dots, M - 1)$$



Перейти к шагу 5.

Шаг 5. Для каждого агента выбрать ячейку игрового поля, смежную с ячейкой, в которой он находится в момент времени t_* используя «метод рулетки», с вероятностями выбора пропорциональными предсказанным байесовским оценкам

$$p(\tilde{H}_{i_m j_m k_m m} | C_k) = \frac{p(C_k | \tilde{H}_{i_m j_m k_m m}) p(\tilde{H}_{i_m j_m k_m m})}{p(C_k)} = \frac{p(\tilde{H}_{i_m j_m k_m m})}{p(C_k)}$$
 и вероятностям $p(\tilde{H}_{i_m j_m k_m m})$,

рассчитанным для момента времени $t_* + \Delta t$ как результат предыдущего шага алгоритма, и переместить агента туда со скоростью, случайные компоненты, которой вычисляются на основе интенсивностей идентифицированных на шаге 4, если выполнены следующие ограничения:

$$\begin{aligned} |\mathbf{v}_m| &\leq v_{\max} \\ p(B|H_{ijk}) &\leq p_B \end{aligned}$$

Если не выполнено условие 1, установить скорость перемещения $|\mathbf{v}_k|$ равной v_{\max} , если не выполнено второе условие, не перемещаться. На текущий такт игры, интервал Δt определяется как максимальное время необходимое для перемещения между центрами соседних ячеек:

$$\ddot{\Delta t} = \max_{m \in \{0, \dots, M-1\}} \frac{\Delta l_m}{|\mathbf{v}_m|}, \text{ где } \Delta l_m = \sqrt{(\Delta l_{\lambda, m})^2 + (\Delta l_{\mu, m})^2 + (\Delta l_{\nu, m})^2}$$

Переходы агентов между состояниями синхронизированы по интервалу Δt который одинаков для всех объектов.

Перейти к следующему по порядку дискретному моменту времени $t_* + \Delta t$, и далее полагать его текущим моментом времени. Перейти к шагу 2.

Шаг 6. Завершить игру.

Задача идентификации решается по методу, предложенному в статье [4].

Выводы

Разработана вероятностная модель поведения прикладной многоагентной системы, которая представляет собой игровое взаимодействие между агентами и целями. Поведение агентов не детерминировано и таким образом непредсказуемо с точки зрения целей. Модель подразумевает применимость в условиях скоординированной или автономной работы агентов, на основе доступности агентам информации о положении друг друга.

Поведение агентов определяется вспомогательным алгоритмом, который включает:

- Идентификация параметров вероятностной модели, используя максимизацию целевой функцию, которая учитывает вероятности поражения целей.
- Последовательное движение агентов по игровому полю со скоростями, случайные компоненты которых вычисляются, используя идентифицированные параметры модели.

- Атаку врага в случае превышения вероятности группового или индивидуального поражения цели.
Разработанная модель и алгоритм обеспечивают управление поведением соответствующих прикладных многоагентных систем.

Список источников / References

Информация об авторах

Левонович Никита Ильич, лаборант-исследователь, лаборатория количественной психологии, Московский государственный психолого-педагогический университет (ФГБОУ ВО МГППУ), Москва, Российская Федерация, ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-8580-0490>, e-mail: levonikitach@yandex.ru

Information about the authors

Nikita I. Levonovich, Laboratory Research Assistant, Laboratory of Quantitative Psychology, Moscow State University of Psychology and Education, Moscow, Russian Federation, ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-8580-0490>, e-mail: levonikitatech@yandex.ru

Поступила в редакцию 25.05.2025

Поступила после рецензирования 26.05.2025

Принята к публикации 06.06.2025

Опубликована 30.06.2025

Received 2025.05.25

Revised 2025.05.26

Accepted 2025.06.06

Published 2025.06.30

Научная статья | Original paper

УДК 004.42

Количественная оценка навыков командной работы у операторов БПЛА

М.А. Михайловский✉, В.А. Орищенко,

О.С.А. Ел Саид, Л.С. Куравский, Н.Е. Юрьева

Московский государственный психолого-педагогический университет
(ФГБОУ ВО МГППУ), г. Москва, Российская Федерация

✉ muxa172002@yandex.ru

Резюме

Представлен новый подход к количественной оценке навыков командной работы у операторов сложных технических систем на примере совместного управления беспилотными летательными аппаратами. Этот подход опирается на представления деятельности операторов в виде марковских процессов с дискретными состояниями и дискретным временем с последующим анализом матриц вероятностей переходов между элементарными операциями, используя квантовые представления. Описываются программные средства, имитирующие распределенное управление двумя беспилотными летательными аппаратами, которые могут применяться как в учебных, так и в исследовательских целях для решения диагностических задач и количественного сравнения навыков согласованного управления.

Ключевые слова: психологическая диагностика, навыки командной работы, совместная деятельность, компьютерный тренажер

Финансирование. Работа выполнена в рамках научно-исследовательского проекта МГППУ «Технологии искусственного интеллекта для поддержки операторов БПЛА» при финансовой поддержке программы «Приоритет 2030».

Для цитаты: Михайловский, М.А., Орищенко, В.А., Ел Саид, О.С.А., Куравский, Л.С., Юрьева, Н.Е. (2025). Количественная оценка навыков командной работы у операторов БПЛА Моделирование и анализ данных, 15(2), 165—176. <https://doi.org/10.17759/mda.2025150210>



Quantitative assessment of the teamwork skills for UAV operators

M.A. Mikhailovsky✉, V.A. Orischenko, O.S.A.

El Sayed, L.S. Kuravsky, N.E. Yuryeva

Moscow State University of Psychology and Education (MSUPE), Moscow, Russia

✉ muxa172002@yandex.ru

Abstract

Presented is a new approach to the quantitative assessment of the teamwork skills for the operators of complex technical systems, using the example of collaborative control of unmanned aerial vehicles (UAVs). This approach is based on representing operator activities as Markovian processes with discrete states and discrete time, followed by an analysis of transition probability matrices between elementary operations using quantum representations. Software tools are described that simulate distributed control of two UAVs and can be used for both educational and research purposes, enabling diagnostic tasks and quantitative comparison of coordinated control skills.

Keywords: psychological diagnostics, teamwork skills, collaborative activity, computer simulator

Funding. The work was carried out within the framework of the MSUPE research project “Artificial Intelligence Technologies to support UAV operators” with the financial support of the Priority 2030 program.

For citation: Mikhailovsky, M.A., Orischenko, V.A., El Sayed, O.S.A., Kuravsky, L.S., Yuryeva, N.E. (2025). Quantitative assessment of teamwork skills in UAV operators. *Modelling and Data Analysis*, 15(2), 165—176. (In Russ.). <https://doi.org/10.17759/MDA.2025150210>

Введение

Применение беспилотных летательных аппаратов (БПЛА) требует не только технического совершенствования автономных систем, но и углубленного изучения механизмов формирования командных навыков у операторов, взаимодействующих в условиях пространственной разобщенности и ограниченной информированности. Особенно актуальна эта задача для сценариев, где два пользователя управляют разными типами дронов: у одного из них целью является достижение конкретной точки в пилотируемом пространстве, у второго — разведка и координация действия первого. Такое разделение ролей создает уникальные вызовы для коммуникации: оператор первого дрона зависит от внешней информации, предоставляемой разведчиком, а их совместная эффективность напрямую связана с качеством передачи команд (например, через последовательность команд). Традиционные подходы в оценке командной работы, разработанные



для пилотируемых систем, часто не учитывают специфику дистанционного взаимодействия, где коммуникация ограничена формализованными сигналами, а ошибки одного участника могут критически повлиять на решение поставленной задачи.

Для объективного анализа таких сценариев необходимы методы, формализующие динамику взаимодействия. Одним из перспективных подходов к решению является адаптация «схемы треугольника» (Михайловский, Ермаков, Юрьева, 2024; Куравский, Юрьев и др., 2024) позволяющей количественно оценивать командные навыки на основе анализа переходов между типами операций в процессе выполнения задачи.

Современные подходы к подготовке операторов бпла

Развитие беспилотной авиации расширило сферы применения дронов, что потребовало пересмотра подходов к подготовке специалистов. Современные операторы должны управлять сложными системами в условиях стресса, неопределенности и взаимодействия с другими участниками процессов. Традиционные методы подготовки, ориентированные на индивидуальные навыки, не обеспечивают достаточного уровня готовности к реальным вызовам, связанным с многозадачностью, динамичными сценариями и коллективным принятием решений.

Обучение операторов БПЛА исторически включает четыре этапа: теоретическую подготовку, симуляторы, практические полеты и квалификационные испытания. Однако эта модель имеет ограничения, так как не учитывает необходимость командной работы, быстрой смены ролей и адаптации к непредвиденным ситуациям. Стандартные тренажеры часто воспроизводят идеализированные условия, что снижает их эффективность при подготовке к сложным погодным условиям или техническим сбоям.

Одним из перспективных направлений стало внедрение технологий виртуальной и дополненной реальности, позволяющих создавать реалистичные сценарии обучения. Подобные среды повышают вовлеченность и развивают пространственное мышление (Будкин, Постников, Лагутина, 2023), однако их массовое применение ограничено стоимостью оборудования и недостаточной проработкой командных сценариев. Большинство решений пока фокусируются на индивидуальном обучении, тогда как реальные задачи требуют координации действий и общей ситуационной осведомленности.

Не менее важным является использование биофидбэк-технологий, которые отслеживают физиологические параметры обучающихся и адаптируют сложность заданий под их текущее состояние. Такой подход позволяет персонализировать нагрузку, выявлять моменты утомления и формировать навыки саморегуляции. Однако широкому внедрению препятствуют техническая сложность, необходимость специализированного оборудования и недостаток экспертов для анализа данных.

Технологии искусственного интеллекта открывают возможности для автоматизации анализа поведения обучающихся и построения индивидуальных траекторий обучения. Алгоритмы машинного обучения могут предсказывать ошибки, адаптировать сценарии



под уровень подготовки и имитировать командное взаимодействие. Некоторые разработки демонстрируют повышение эффективности решений за счет моделирования ролевых паттернов. При этом проблема «непрозрачности» алгоритмов и зависимость от качества входных данных остаются барьерами для применения таких систем.

Элементы геймификации и игровые симуляторы повышают мотивацию, особенно среди молодых специалистов, и формируют базовые навыки управления. Однако упрощенная физическая модель и отсутствие реалистичных стрессовых факторов затрудняют перенос этих навыков на профессиональные задачи. Для преодоления данного разрыва необходима интеграция игровых элементов с аналитикой ошибок и модулями групповой координации.

Когнитивная подготовка вне полетной среды играет важную роль в повышении устойчивости к перегрузкам. Упражнения на развитие внимания, рабочей памяти и многозадачности снижают количество ошибок и улучшают скорость реакции. Такие тренировки не требуют дорогостоящего оборудования и могут быть использованы в программах среднего профессионального образования.

Интеграция различных методов в единую обучающую систему признается наиболее перспективным направлением. Комплексные тренажеры, сочетающие симуляторы, ИИ, биофидбэк и когнитивные тесты, позволяют формировать устойчивые навыки, соответствующие реальным условиям. Однако масштабирование таких решений требует значительных инвестиций и междисциплинарного сотрудничества.

Облачные тренажеры становятся важным инструментом снижения затрат на обучение за счет централизованной обработки данных. Платформы такого типа обеспечивают одновременную подготовку большого количества студентов и интеграцию аналитических модулей для оценки прогресса. Параллельно развивается стандартизация программ подготовки в сфере среднего профессионального образования, что необходимо для унификации компетенций и сертификации специалистов.

Подготовка операторов БПЛА представляет собой междисциплинарную задачу, требующую синтеза технических, когнитивных и командных аспектов. Эффективность современных технологий зависит от системного подхода, адаптации к локальным условиям и развития инфраструктуры образования. Интеграция инноваций в массовую практику, особенно на уровне среднего профессионального образования, станет критическим фактором для формирования кадрового потенциала отрасли.

Математическая модель согласованной деятельности операторов

Следуя работам (Kuravsky, 2021; Kuravsky, 2024; Kuravsky, 2022; Kuravsky, 2020), для количественного представления согласованной командной деятельности, реализуемой при работе на тренажере, применяется вероятностная модель, построенная на использовании матриц вероятностей переходов между элементарными действиями. Эта модель позволяет formalизовать наблюдаемое поведение операторов, представляя



его как процесс с конечным числом состояний и вероятностной динамикой переходов между ними.

Каждое элементарное действие определенного типа (например, нажатие определенной клавиши оператором-наводчиком или исполнителем) рассматривается как уникальное состояние системы. Система может находиться в одном из n возможных состояний марковского процесса с дискретными состояниями и дискретным временем (цепи Маркова), где n определяется количеством всех допустимых типов действий в рамках текущего экспериментального режима. Например, в парном взаимодействии двух операторов фиксируются до 14 типов воздействий (5 клавиши у каждого участника + 4 команды от наводчика), в то время как в интегрированном режиме используется 10 типов операций, объединяющих управление и навигацию.

Динамика пребывания в состояниях системы описывается вектором $p(t) = (p_0(t), p_1(t), \dots, p_{n-1}(t))^T$, где $p_i(t)$ — вероятность того, что система находится в состоянии i в момент времени t ($0 \leq t \leq T$; $t, T \in \mathbb{N}$; T — конечный момент времени; \mathbb{N} — множество натуральных чисел; n — число типов элементарных операций (совпадает с числом состояний цепи Маркова)). Изменение вектора $p(t)$ во времени задается уравнением:

$$p(t+1) = \mathbf{M}_1 p(t)$$

где $\mathbf{M}_1 = m_{ij,l}$ — стохастическая матрица переходов между состояниями порядка n , сформированная на основе наблюдений за деятельностью в первом фрагменте взаимодействия (например, при индивидуальном режиме работы оператора-наводчика, исполнителя или при совместной деятельности); элемент $m_{ij,l}$ представляет собой вероятность перехода от типа действий j к типу действий i .

Элементы матрицы \mathbf{M}_1 оцениваются по эмпирическим данным, используя результаты регистрации нажатий клавиш, а затем нормализации частот переходов между типами элементарных действий. Отдельная матрица формируется для каждого участника и для каждой роли, что позволяет сравнивать поведенческие профили при разных режимах деятельности.

В рамках последующего анализа, представленного в работах (Kuravsky, 2021; Kuravsky, 2024; Kuravsky, 2022; Kuravsky, 2020; Куравский, Юрьев и др., 2024), полученные матрицы сравниваются между собой в рамках «схемы треугольника» (рис. 1), используя:

- матрицу индивидуальной деятельности оператора 1;
- матрицу индивидуальной деятельности оператора 2;
- матрицу совместной (или интегрированной) деятельности.

Применение данной модели позволяет анализировать не только факт выполнения заданий, но и структуру взаимодействий между участниками, выявлять устойчивые поведенческие траектории, переходные вероятности между режимами управления, а также характер изменения стратегии при переходе от индивидуального к парному или интегрированному взаимодействию.

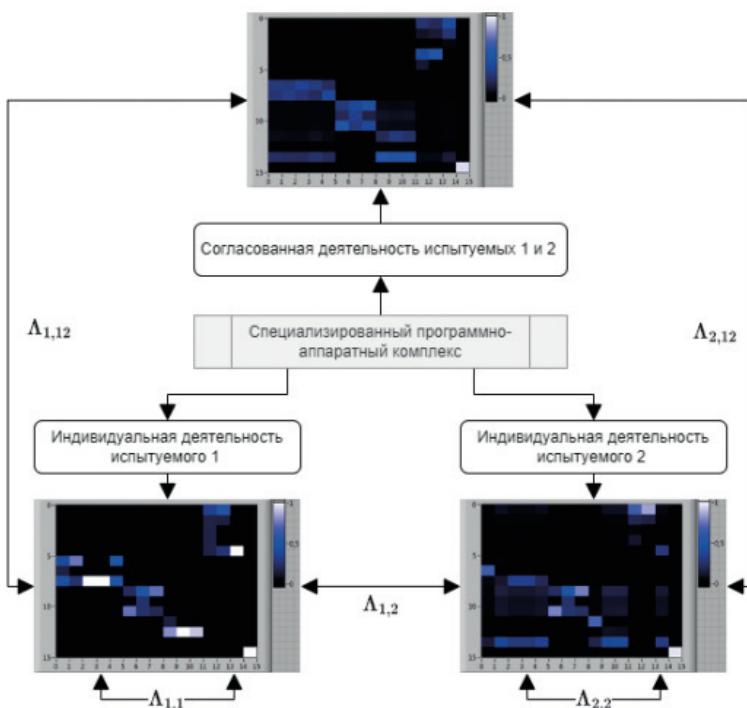


Рис. 1. Оценка навыков командной деятельности по «схеме треугольника», предполагающей сопоставление согласованных действий испытуемых, выполненных в паре и индивидуально

Fig. 1. Assessment of team activity skills according to the «triangle scheme», which involves a comparison of coordinated actions of subjects performed in pairs and individually

Построение и анализ матриц вероятностей переходов между типами элементарных действий обеспечивает формализацию диагностики командной деятельности, применимую как в исследовательских, так и в учебных целях.

Программное обеспечение: тренажер, имитирующий взаимодействие операторов бпла

Тренажер представляет собой программную имитационную систему, моделирующую кооперативную деятельность двух операторов беспилотных летательных аппаратов в условиях функционального разделения ролей. Он предназначен для формирования, тренировки и объективной оценки навыков командного взаимодействия при выполнении пространственно-навигационных задач в трехмерном виртуальном пространстве (рис. 2—3).



Рис. 2. Визуализация управления дроном в трехмерном виртуальном пространстве со стороны оператора-наводчика

Fig. 2. Visualization of drone control in a three-dimensional virtual space by the operator-gunner



Рис. 3. Визуализация управления дроном в трехмерном виртуальном пространстве со стороны оператора-исполнителя

Fig. 3. Visualization of drone control in a three-dimensional virtual space by the performing operator



В стандартной конфигурации тренажер реализует взаимодействие двух операторов:

- Оператор-наводчик управляет разведывательным дроном, оснащенным мини-картой и системой визуального целеуказания. Он передает навигационные команды второму оператору с помощью клавиш ←, →, ↑, ↓, задавая направления движения (вверх, влево, вниз, вправо). Наводчик обладает более широкой сенсорной осведомленностью, что позволяет ему выполнять роль координатора. Помимо этого, оператор-наводчик управляет своим дроном используя клавиши W, A, S, D, Space
- Оператор-исполнитель управляет летательным аппаратом, выполняющим маневры на основе получаемых указаний. Управление осуществляется через клавиши W, A, S, D, Space. соответствующие направлениям перемещения. Ориентируется лишь по ограниченному визуальному полю, что делает его зависимым от точности и своевременности команд наводчика.

Каждое управляющее воздействие фиксируется системой регистрации и рассматривается как элементарная операция. Полученные данные агрегируются. На их основе формируются стохастические матрицы вероятностей переходов между состояниями (рис. 4—5). Эти матрицы представляют взаимодействие участников и позволяют формализовать совместную деятельность в виде марковского процесса.

В дополнение к парному режиму реализован режим интегрированного управления, при котором один участник совмещает функции обоих операторов. Управление в этом случае осуществляется посредством сдвоенности пяти команд, что обеспечивает размерность матрицы (10×10) (рис. 5).

	a	s	w	d	a1	s1	w1	d1	Key.space	Key.space 1	Key.up	Key.down	Key.left	Key.right
a	0,875	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
s	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
w	0	0	0,737	0	1	0	0,038	0	0,05	0	0	0	0	0
d	0	0	0,053	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
a1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,25	0
s1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
w1	0	0	0,053	0	0	0	0,769	0	0,033	0,032	0,333	1	0	0
d1	0	0	0	0	0	0	0	0,9	0,033	0	0	0	0	0
Key.space	0,125	0	0,105	1	0	0	0,077	0,1	0,567	0,581	0	0	0	0
Key.space 1	0	0	0,053	0	0	0	0,038	0	0,317	0,355	0	0	0	0
Key.up	0	0	0	0	0	0	0,077	0	0	0	0,333	0	0	0
Key.down	0	0	0	0	0	0	0	0	0,032	0	0	0	0	0
Key.left	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,333	0	0,75	0	0
Key.right	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1

Рис. 4. Матрица вероятностей переходов 14x14

Fig. 4. Transition probability matrix 14x14

	a1	s1	w1	d1	a2	s2	w2	d2	Key.space 1	Key.space 2
a1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
s1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
w1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
d1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
a2	0	0	0,038	0	0	0	0	0	0	0
s2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
w2	0	0	0,923	0	0	0	0	0	0,065	0
d2	0	0	0	0,95	0	0	0	0	0,032	0
Key.space 1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
Key.space 2	1	0	0,038	0,05	0	0	0	0	0,903	0

Рис. 5. Матрица вероятностей переходов 10x10

Fig.5. Transition probability matrix 10x10



Для наглядного анализа модели поведения участников тренажера были построены матрицы вероятностей переходов, отражающие закономерности смены элементарных операций. На рис. 4 и 5 представлены матрицы, соответствующие двум режимам управления.

Первая матрица размера 14×14 построена на основе анализа совместной деятельности двух операторов в условиях распределенного управления. Каждая из 14 строк и столбцов представляет отдельное действие, выполняемое одним из участников: W, A, S, D, Space, \leftarrow , \rightarrow , \uparrow , \downarrow — от оператора наведения, и клавиши W 1, A 1, S 1, D 1, Space 1 от оператора исполнения. Структура матрицы отражает возможность перехода от любого действия к любому другому, что соответствует гибким и адаптивным стратегиям взаимодействия в парной деятельности.

Вторая матрица размера 10×10 описывает поведение оператора в режиме интегрированного управления, при котором один участник одновременно выполняет функции навигации и исполнения команд. Каждая строка и столбец в данной матрице соответствует определенному элементарному действию (W, A, S, D, Space), а значения ее элементов представляют вероятности перехода от одного действия к другому.

После формирования стохастических матриц вероятностей переходов, описывающих паттерны поведения операторов, полученные результаты передаются в *интеллектуальную систему квантового моделирования* (Kuravsky, 2020), предназначенную для получения количественных оценок степени согласованности действий при совместном решении поставленной задачи средствами искусственного интеллекта в режиме реального времени. Эта система использует квантовые представления (Kuravsky, 2021; Kuravsky, 2024; Kuravsky, 2022) и реализована на языке G в среде графического программирования LabVIEW (рис. 6).

Применяя методы, представленные в работе (Куравский, Юрьев и др., 2024), для каждой сессии работы операторов выполняются:

- **сравнение с индивидуальной деятельностью** — вычисляется степень отличия командной деятельности от деятельности в режиме индивидуального управления, что позволяет оценить уровень координации и наличие избыточного дублирования действий между операторами, используя «схему треугольника»;
- **сравнение с эталонной парой** — реализуется путем сопоставления текущей матрицы переходов с эталонной моделью, сформированной по данным высококвалифицированных операторов.

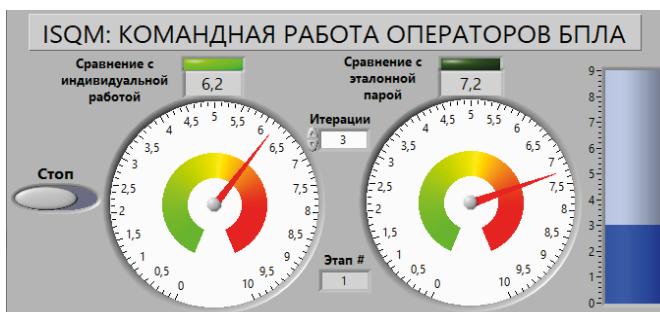


Рис. 6. Визуализация оценок командной работы для операторов БПЛА

Fig.6. Visualization of teamwork assessments for UAV operators



Вычисленные оценки отображаются на аналоговых шкалах с цветовой дифференциацией (зеленая зона — высокая согласованность, красная — низкая). Пользователь в режиме реального времени получает информацию о качестве координации.

Функциональные возможности модуля визуализации оценок командной работы включают:

- проведение интегральной количественной оценки согласованности действий в команде;
- предоставление *визуализированной обратной связи*, понятной как исследователям, так и испытуемым;
- адаптацию сценариев в режиме реального времени на основе текущих показателей согласованности;
- *сопоставление поведения* с эталонными образцами и анализ отклонений, используя спектральную метрику (Kuravsky, 2021; Kuravsky, 2024; Kuravsky, 2022).

Этот модуль, встроенный в процесс тренировки, существенно повышает интерактивность и диагностическую ценность тренажера, обеспечивая объективную интерпретацию эффективности командной работы в режиме реального времени.

Заключение

Разработаны программные средства для количественной оценки командной работы операторов БПЛА, опирающиеся на представление их деятельности в виде марковских процессов. Предложенный подход позволяет формализовать динамику взаимодействия операторов, используя матрицы вероятностей переходов между элементарными операциями, что обеспечивает объективную диагностику и развитие навыков согласованного управления. Созданный тренажер, имитирующий распределенное управление дронами, демонстрирует эффективность интеграции математического моделирования с технологиями виртуальной реальности. Полученные результаты подтверждают эффективность применения марковских процессов и квантовых представлений для исследования командной деятельности. Разработанные средства открывают новые возможности для использования обучающих сценариев в реальном времени, что особенно актуально в условиях ограниченных ресурсов и необходимости стандартизации подготовки специалистов.

Список источников / References

1. Михайловский, М.А., Ермаков, С.С., Юрьева, Н.Е. (2024). Количественная оценка степени сформированности навыков командной деятельности. Моделирование и анализ данных, 14(3), 118—134. <https://doi.org/10.17759/mda.2024140307>
Mikhailovsky M.A., Ermakov S.S., Yuryeva N.E. Quantitative Assessment of Degree Formation of Teamwork Skills. Modelirovaniye i analiz dannykh = Modelling and Data Analysis, 2024. Vol. 14, no. 3, pp. 118—134. DOI: <https://doi.org/10.17759/mda.202414030> (In Russ., abstr. in Engl.).
2. Будкин, Е.Г., Постников, А.А., Лагутина, Е.И. Роль симулятора в подготовке оператора БПЛА вызов современности процессу обучения в военном вузе // Вестник военного образования. — 2023. — № . 3 (42). — С. 27—30.



- Budkin, E.G., Postnikov, A.A., Lagutina, E.I. The Role of a Simulator in UAV Operator Training: A Challenge of Modernity to the Educational Process in a Military University // Vestnik Voennogo Obrazovaniya (Bulletin of Military Education). — 2023. — No. 3 (42). — P. 27—30.
3. Kuravsky, L.S., “Modeling Dynamical Behavior of Stochastic Systems: Spectral Analysis of Qubit Representations vs the Mutual Markovian Model Likelihood Estimations,” Lobachevskii J. Math., 42 (10), 2364—2376 (2021).
4. Kuravsky, L.S. Quantum Representations and Their Applications in Diagnostics. — M.: DeLibri, 2024. — 128 c.
5. Kuravsky L.S., “Simplification of Solving Diagnostics Problems by Convolution of Applied Markovian Models into the Quantum Representations,” Lobachevskii J. Math., 43 (7), 1669—1682 (2022).
6. Kuravsky, L.S., Yuryev G.A. A novel approach for recognizing abnormal activities of operators of complex technical systems: three non-standard metrics for comparing performance patterns// International Journal of Advanced Research in Engineering and Technology (IJARET). 2020. Vol. 11(4). P. 119—136. URL: <http://www.iaeme.com/IJARET/issues.asp?JType=IJARET&VType=11&I-Type=4> (Дата обращения: 06.07.2024).
7. Kabi, A., Dhar, M., Arora, P., Bhardwaj, B.B., Chowdhury, N., Rao, S. Effectiveness of a Simulation Based Training Program in Improving the Preparedness of Health Care Workers Involved in the Airway Management of COVID-19 Patients // Cureus. 2021. Vol. 13(8). Article ID e17323. 8 p. DOI: 10.7759/CUREUS.17323
8. Куравский, Л.С., Юрьев, Г.А., Михайловский, М.А., Несимова, А.О., Юрьева, Н.Е., Поляков, Б.Ю. Формирование навыков командной деятельности и их объективная количественная оценка на основе квантовых представлений // Экспериментальная психология. 2024. Том 17. № 2. С. 154—177. DOI: 10.17759/exppsy.2024170210
Kuravsky, L.S., Yuryev, G.A., Mikhailovsky, M.A., Nesimova, A.O., Yuryeva, N.E., Polyakov, B.Y. (2024). Formation of Teamwork Skills and Their Objective Quantitative Assessment Based on Quantum Representations. Experimental Psychology (Russia), 17(2), 154—177. (In Russ.). <https://doi.org/10.17759/exppsy.2024170210>

Информация об авторах

Михайловский Михаил Александрович, лаборант-исследователь, Московский государственный психолого-педагогический университет (ФГБОУ ВО МГППУ), г. Москва, Российская Федерация, ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-7399-2800>, e-mail: muxa172002@yandex.ru

Орищенко Виталий Алексеевич, лаборант-исследователь, Московский государственный психолого-педагогический университет (ФГБОУ ВО МГППУ), г. Москва, Российская Федерация, ORCID: <https://orcid.org/0009-0003-6696-5147>, e-mail: vitalyorischenko@gmail.com

Ел Саид Омар Адам, лаборант-исследователь, Московский государственный психолого-педагогический университет (ФГБОУ ВО МГППУ), г. Москва, Российская Федерация, e-mail: elsaudomar@gmail.com

Куравский Лев Семенович, доктор технических наук, профессор, декан факультета информационных технологий, Московский государственный психолого-педагогический университет (ФГБОУ ВО МГППУ), г. Москва, Российская Федерация, ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-3375-8446>, e-mail: l.s.kuravsky@gmail.com

Юрьева Наталья Евгеньевна, кандидат технических наук, научный сотрудник, Московский государственный психолого-педагогический университет (ФГБОУ ВО МГППУ), г. Москва, Россия, ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-1419-876X>, e-mail: yurieva.ne@gmail.com



Information about the authors

Michael A. Mikhailovsky, Research Assistant, Moscow State University of Psychology and Education (MSUPE), Moscow, Russia, ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-7399-2800>, e-mail: muxa172002@yandex.ru

Vitaly A. Orishchenko, Research Assistant, Moscow State University of Psychology and Education (MSUPE), Moscow, Russia, ORCID: <https://orcid.org/0009-0003-6696-5147>, e-mail: vitalyorischenko@gmail.com

Omar S.A. El Sayed, Research Assistant, Moscow State University of Psychology and Education (MSUPE), Moscow, Russia, e-mail: elsaudomar@gmail.com

Lev S. Kuravsky, Doctor of Science (Engineering), Professor, Dean of the Computer Science Faculty, Moscow State University of Psychology and Education (MSUPE), Moscow, Russia, ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-3375-8446>, e-mail: l.s.kuravsky@gmail.com

Nataliya E. Yuryeva, PhD (Engineering), Research Fellow, Moscow State University of Psychology and Education (MSUPE), Moscow, Russia, ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-1419-876X>, e-mail: yurieva.ne@gmail.com

Вклад авторов

Куравский Л.С. — идеи исследования; планирование исследования; контроль за проведением исследования.

Михайловский М.А. — применение статистических, математических или других методов для анализа данных.

Орищенко В.А. — визуализация результатов исследования; обработка датасета, подготовка данных; Ел Саид О.С. А. — нормализация, измерения, корректировка расчетов.

Юрьева Н.Е. — аннотирование; обработка датасета, подготовка данных, оформление рукописи, перевод разделов публикации на иностранный язык.

Все авторы приняли участие в обсуждении результатов и согласовали окончательный текст рукописи.

Contribution of the authors

Kuravsky L.S. — research ideas; research planning; control over research.

Mikhailovsky M.A. — application of statistical, mathematical or other methods for data analysis.

Orishchenko V.A. — visualization of research results; dataset processing, data preparation.

El Said O.S. A. — normalization, measurements, correction of calculations.

Yuryeva N.E. — annotation; dataset processing, data preparation, manuscript design, translation of publication sections into a foreign language.

All the authors participated in the discussion of the results and agreed on the final text of the manuscript.

Конфликт интересов

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Conflict of interest

The authors declare no conflict of interest.

Поступила в редакцию 27.05.2025

Received 2025.05.27

Поступила после рецензирования 29.05.2025

Revised 2025.05.29

Принята к публикации 06.06.2025

Accepted 2025.06.06

Опубликована 30.06.2025

Published 2025.06.30

Научная статья | Original paper

УДК 004.89

Разработка прототипа системы на основе марковских представлений для поддержки учебного процесса в начальной школе

Д.А. Катышев

Московский государственный психолого-педагогический университет

Москва, Российская Федерация

✉ katyshevda@mgppu.ru

Резюме

Контекст и актуальность. Индивидуализация учебного процесса является важнейшей задачей современной педагогики, особенно в начальном образовании, где формируются базовые математические навыки. Существующая классно-урочная система часто не позволяет оперативно выявлять и корректировать индивидуальные ошибки учеников. Предложенная автором разработка адаптивной цифровой системы на основе марковских моделей направлена на решение этой проблемы. **Цель.** Разработка прототипа цифровой образовательной системы для поддержки индивидуализированного процесса обучения математике в начальной школе. **Гипотеза.** Адаптивная система, основанная на марковских процессах с дискретными состояниями и непрерывным временем, способна повысить эффективность индивидуализации обучения и улучшить математические навыки учащихся. **Методы и материалы.** В рамках исследования разработано веб-приложение, использующее марковские процессы для оценки математических знаний и умений у учеников начальных классов. Система предлагает задачи с предопределёнными вариантами ответов, фиксирует ошибки, формирует соответствующие ошибкам подсказки и адаптирует сложность задач в зависимости от успехов ученика. **Результаты.** Представлен прототип цифровой системы, которая позволяет эффективно выявлять и корректировать типичные ошибки учащихся начальной школы при решении математических задач, обеспечивая индивидуализированный подход к обучению и снижая нагрузку на учителя. **Выводы.** Разработанная система предоставляет возможности для повышения индивидуализации обучения и качества математического образования в начальной школе. Рекомендуется дальнейшее расширение функционала системы, включая интеграцию дополнительных аналитических модулей и адаптацию к другим образовательным предметам и возрастным группам.



Катышев Д.А. (2025)

Разработка прототипа системы на основе марковских представлений для поддержки учебного процесса...

Моделирование и анализ данных, 2025. 15(2), 177 – 191.

Katyshev D.A. (2025)

Development of a prototype system based on Markov representations to support the learning process...

Modelling and Data Analysis, 2025. 15(2), 177 – 191.

Ключевые слова: адаптивное обучение, индивидуализация обучения, марковский процесс, искусственный интеллект, информационная система

Для цитирования: Катышев, Д.А. (2025). Разработка прототипа системы на основе марковских представлений для поддержки учебного процесса в начальной школе. *Моделирование и анализ данных*, 15(2), 177—191. <https://doi.org/10.17759/mda.2025150211>

Development of a prototype system based on Markov representations to support the learning process in elementary school

D.A. Katyshev

Moscow State University of Psychology and Education, Moscow, Russian Federation

✉ katyshevda@mgppu.ru

Abstract

Context and relevance. Individualization of the learning process is the most important task of modern pedagogy, especially in primary education, where basic mathematical skills are formed. The existing class-lesson system often does not allow to promptly identify and correct individual errors of students. The author's proposed development of an adaptive digital system based on Markov models is aimed at solving this problem. **Objective.** Development of a prototype of a digital educational system to support individualized learning process of mathematics in elementary school. **Hypothesis.** An adaptive system based on Markov processes with discrete states and continuous time can increase the efficiency of individualized learning and improve students' mathematical skills. **Methods and materials.** The study developed a web application that uses Markov processes to assess elementary school students' mathematical knowledge and skills. The system offers tasks with predefined answer choices, captures errors, generates error-appropriate prompts, and adapts task difficulty based on student progress. **Results.** A prototype of a digital system is presented, which allows effectively detecting and correcting typical errors of elementary school students in solving mathematical problems, providing an individualized approach to teaching and reducing the teacher's workload. **Conclusions.** The developed system provides opportunities for increasing individualization of learning and quality of mathematics education in elementary school. Further expansion of the system functionality is recommended, including integration of additional analytical modules and adaptation to other educational subjects and age groups.

Keywords: adaptive learning, individualization of learning, Markov process, artificial intelligence, information system

For citation: Katyshev, D.A. (2025). Development of a prototype system based on Markov representations to support the learning process in elementary school. *Modelling and Data Analysis*, 15(2), 177—191. (In Russ.). <https://doi.org/10.17759/mda.2025150211>



Введение

Проблема повышения качества математического образования в начальной школе остается одной из наиболее актуальных в современной педагогической науке и практике. Начальный этап обучения закладывает основы математической грамотности и математического мышления, от которых во многом зависит дальнейшая академическая успешность учащихся. Однако практика показывает, что значительная часть младших школьников испытывает трудности при освоении курсов математики (Mangarin, Caballes, 2024). Многие ученики допускают систематические математические ошибки, теряя интерес к предмету, что негативно сказывается на качестве дальнейшего естественнонаучного образования (Václavíková, 2023). Одной из причин подобных затруднений является ограниченная возможность учителя в условиях классно-урочной системы выявлять индивидуальные ошибки каждого ученика и своевременно работать над их устранением. Как отмечает В.Л. Соколов, учителям начальных классов зачастую не хватает времени и навыков для детального анализа и обсуждения ошибок учеников во время уроков (Соколов, 2023). В результате многие ошибки остаются непроработанными, закрепляются в мышлении учащихся и приводят к возникновению стойких неправильных представлений о математических понятиях (Kusmaryono и др. 2019).

Описанная в данной работе информационная система призвана помочь учителям решить проблемы, затрудняющие организацию индивидуализации обучения, за счёт адаптивного подхода к оценке сложности предъявляемых заданий и системе подсказок, ориентирующейся на типы ошибок, совершаемых учащимися в процессе решения предъявляемых задач курса математики начальной школы. Диагностика ошибок в данной системе подразумевает классификацию ответов ученика в терминах известного множества типовых ошибок. Здесь система опирается на реестр ошибок — базу знаний, в которой описаны распространенные ошибки при выполнении каждого вида заданий. Каждому неправильному ответу (или характеру решения) сопоставляется определённая причина ошибки. Разрабатываемая система предназначена для формирования и развития математических навыков у младших школьников через индивидуализированную работу над ошибками. В процессе работы с данной информационной системой учащийся проходит пары состояний. В каждой из пар состояний учащемуся предъявляется задание и четыре варианта ответов, из которых верным всегда является только один. В случае, если учащийся дает один из трех ошибочных ответов, он попадает в состояние «ловушки», где ему предъявляется та же самая задача, но с подсказкой. Подсказка представляет собой либо некоторый наводящий вопрос, ответив на который ученик может прийти к верному решению, либо некоторую теоретическую информацию, которая помогает учащемуся решить данную задачу. После успешного решения задачи учащемуся предъявляется следующее задание из следующей пары состояний. Каждая следующая пара состояний содержит более сложные задачи. Банк заданий сформирован таким образом: все задания поделены на четыре большие группы, каждая группа для одного из четырёх классов. В каждом классе рассматриваются три крупные темы, и, в каждой теме три категории заданий:



легкие, средней сложности и повышенной сложности. Таким образом, в каждом классе есть девять категорий заданий и, в обучающей системе эти девять категорий представлены девятью парами состояний марковской модели.

Материалы и методы

Индивидуализация обучения и своевременные решения учебных затруднений рассматриваются в педагогической науке как важнейшие условия повышения эффективности образования (Dias и др., 2023). В мировой практике накоплен положительный опыт использования адаптивных цифровых ресурсов в начальном образовании. Так, в исследовании Х. Дж. Банг показал, что использование игровой адаптивной системы «My Math Academy» для учеников 1—2 классов привело к значимому росту результатов по математике по сравнению с контрольной группой и особенно высокую эффективность адаптивное обучение продемонстрировало у учащихся с низким исходным уровнем подготовки, благодаря возможности подстраивать сложность заданий под индивидуальные потребности ребенка (Bang, 2023). В современных работах, направленных на исследования индивидуализации обучения, подчёркивается, что применение технологий, обеспечивающих индивидуальный темп и траекторию обучения, позволяет учителю эффективнее работать с классом, где у детей разный уровень знаний (Semenovska, Vazhenina, Fazan, 2023), (Saadawi, 2025). Цифровые платформы адаптивного обучения, встроенные в учебный процесс, могут снизить нагрузку на учителя, взяв на себя часть функций по мониторингу успехов учащихся и подбору заданий соответствующего уровня сложности.

В России ведутся исследования в области адаптивного обучения математике. В частности, под руководством Л.С. Куравского и соавторов разработана концепция адаптивного учебного тренажёра, основанного на использовании марковских моделей для постепенного усложнения заданий в зависимости от успехов учащихся (Куравский и др., 2021). Данный подход позволяет учитывать динамику процесса обучения и снижать число необходимых заданий для достижения запланированного результата.

Задача преодоления учебных ошибок младших школьников на уроках математики может решаться благодаря разработке методов работы над ошибками (Иванова, 2019). Например, классифицировать типы детских ошибок и выявлять стоящие за ними ошибочные представления для адресной коррекции (Ashlock, 2002). Так, В.Л. Соколов выделяет распространенные типы ошибок на примере темы «Вычитание» и описывает приёмы педагогической работы по их устранению, включая организацию специального обсуждения ошибок в классе и использование наглядных моделей (Kusmaryono и др. 2019). Однако внедрение таких методов в массовой школе затруднено из-за ограниченности учебного времени и больших классов. Поэтому автоматизация процесса выявления и разбора ошибок с помощью современных информационных систем является актуальной научно-практической задачей.

Архитектура системы построена на концепции структурных единиц, каждая из которых включает три ключевых компонента: банк заданий, реестр возможных ошибок и банк средств для их преодоления. Структурная единица системы рисунка 1 имеет номер 2.1.1.



1-Я СТРУКТУРНАЯ ЕДИНИЦА (Группа заданий 2.1.1.) ▲

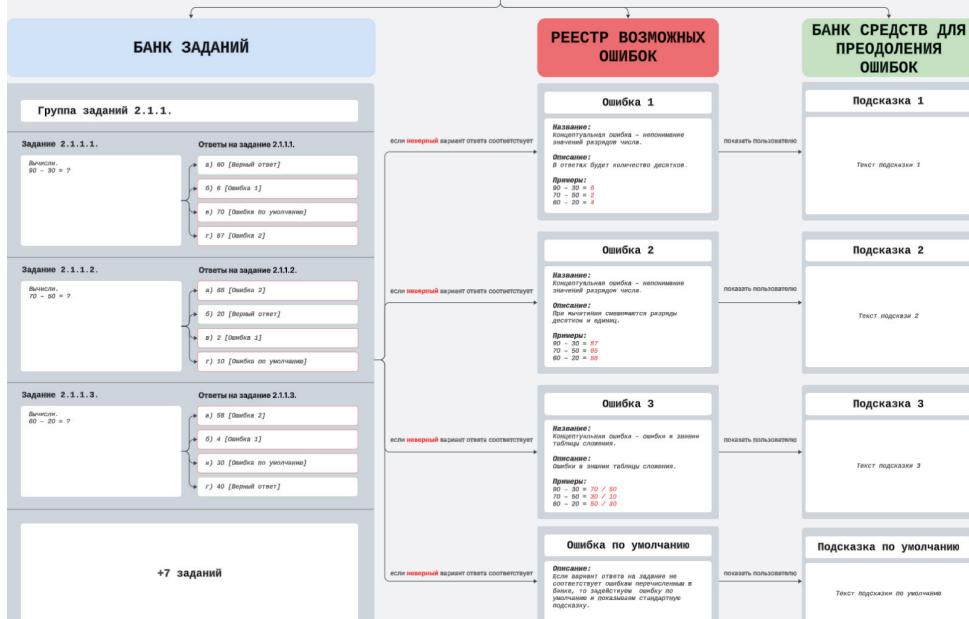


Рис. 1. Схема структурной единицы системы

Fig. 1. Scheme of the structural unit of the system

Это означает первую группу заданий первой темы для второго класса. Данный функциональный блок, обеспечивает реализацию адаптивного обучения в рамках конкретной тематической области. Банк заданий содержит математические задачи трёх уровней сложности с предусмотренными вариантами ответов. К каждому заданию прилагается четыре варианта ответа: один правильный и три неправильных, отражающих типичные ошибки учащихся.

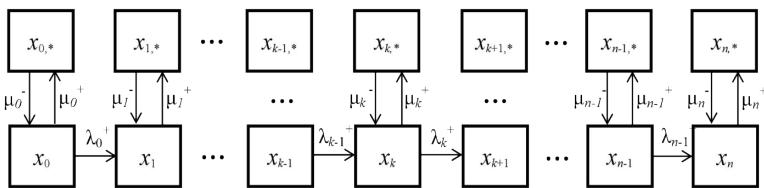
Реестр возможных ошибок содержит структурированную классификацию ошибок, характерных для данной группы заданий. Для каждой типичной ошибки указывается её название, содержательное описание и примеры проявления. Например, в теме вычитания двузначных чисел выделяются такие типы ошибок как «концептуальная ошибка — непонимание значений разрядов числа» и «ошибки в знании таблицы сложения». Это позволяет системе не только фиксировать неверные ответы, но и диагностировать их причины.

Банк средств для преодоления ошибок представляет собой набор подсказок, каждой из которых направлена на преодоление конкретного типа ошибки. Подсказки разрабатывались с учетом педагогических принципов включают текстовые пояснения, помогающие школьнику понять и исправить допущенную ошибку. Например, при ошибке в понимании разрядов числа учащемуся демонстрируется наглядное представление числа с выделением десятков и единиц.



Такая архитектура позволяет системе гибко реагировать на действия ученика, предоставляя ему индивидуализированную поддержку в процессе обучения. При неверном ответе система не просто сообщает о его неправильности, но определяет тип ошибки и предоставляет соответствующую подсказку, направленную на осознание и исправление конкретного заблуждения.

Математической основой системы является марковский процесс с дискретными состояниями и непрерывным временем (Артеменков и др. 2017). Эта модель позволяет описывать динамику взаимодействия ученика с системой, представляя процесс выполнения заданий как последовательность переходов между различными состояниями (рис. 2).





с двузначными числами и т.д. Решение каждой учебной задачи трактуется как событие, приводящее либо к переходу ученика в новое состояние (при успешном решении), либо к повторному предъявлению задания текущего состояния (попадание в «ловушку»). Таким образом, траектория обучения ученика описывается последовательностью состояний где случайность переходов обусловлена как верными, так и неверными действиями ученика. Формально, для каждого состояния существует набор допустимых задач определённого содержания и уровня сложности, а также набор подсказок или разъяснений, которые могут быть предоставлены ученику. Если ученик справляется с задачей, система переводит его в состояние более высокого уровня сложности или продвигает дальше в рамках текущей темы. Если же ученик ошибается, система может перевести его в состояние «ловушки», в котором будет представлена та же самая задача с подсказкой для устранения конкретной ошибки. Подсказки представляют собой заранее заготовленные объяснения или наводящие вопросы, связанные с типом ошибки, например, напоминание о правилах вычитания с переходом через разряд.

Определение значений свободных параметров марковской цепи $\lambda = (\lambda_0^+, \dots, \lambda_{n-1}^+, \mu_0^+, \dots, \mu_n^+, \mu_0^-, \dots, \mu_n^-)^T$ осуществляется путем сравнения наблюдаемых и прогнозируемых распределений частот пребывания в состояниях модели. Для этого определяется набор интенсивностей, обеспечивающий наименьшее значение статистики Пирсона:

$$\chi^2(\lambda) = \sum_{d=0}^{D-1} \sum_{i=0}^n \left[\frac{(p_i(t_d)N_d - F_{i,d})^2}{p_i(t_d)N_d} + \frac{(p_{i*}(t_d)N_d - F_{i*,d})^2}{p_{i*}(t_d)N_d} \right]$$

где $N_d = \sum_{i=0}^n (F_{i,d} + F_{i*,d})$, $F_{i,d}$, $F_{i*,d}$ — наблюдаемые частоты пребывания в состояниях процесса в моменты времени $\{t_d\}_{d=0, \dots, D-1}$.

Данная статистика представляет собой меру согласования применяемой математической модели с наблюдениями.

Важным преимуществом выбранного теоретического подхода является его интерпретируемость. Система не использует непрозрачные «чёрные ящики» вроде сложных нейронных сетей — все её решения (оценки, переходы, подбор подсказок) основаны на понятных педагогам правилах и статистических закономерностях, которые поддаются содержательному объяснению. Благодаря этому система легко интегрируется в реальный учебный процесс.

Результаты

Программная реализация адаптивной цифровой системы состоит из серверной и интерфейсной части веб-приложения.

Серверная часть использует веб-фреймворк CakePHP с дополнительными модулями для обеспечения функционала аутентификации и авторизации пользователей. Фреймворк обладает всем необходимым функционалом для быстрого построения



веб-приложений реализуя паттерн «Модель-Вид-Контроллер». Для написания цифровой системы используется язык программирования PHP версии 8.2.1.

Интерфейсная часть задействует фреймворк Bootstrap для построения адаптивного интерфейса веб-приложения и формирования его мобильной версии. Для визуализации значков интерфейса используется масштабируемые векторные иконки от Font Awesome. Заполнение и загрузка файлов в текстовые поля ввода происходит с помощью кроссплатформенного JavaScript HTML WYSIWYG редактора TinyMCE.

Для развертывания тренажера был задействован сервер с операционной системой Debian и веб-сервер Nginx. В качестве базы данных был задействован PostgreSQL.

Наполнение адаптивной цифровой системы материалами происходит с помощью административной панели веб-приложения. Доступом к ней обладают пользователи с правами администратора, редактора или учителя. Осуществляется разделение прав разных ролей системы посредством файлов политики. Доступ к особо важным компонентам веб-приложения разрешается только редакторам и администраторам. Формирования пар марковского процесса и их последовательности доступно после заполнения следующих сведений: основное описание тренажера, список субтестов (аналог групп заданий, связанных одной логикой), банка заданий, реестра возможных ошибок с подсказками для них. После ввода этих сведений создается отдельная последовательность пар состояний и осуществляется их связывание с определенным субтестом. Для каждой пары состояний возможно подключение только одной группы заданий.

Панель управления > Тесты > Субтесты > Задания > Задание 2.1.3.2.

Редактирование задания [ID: 305]

ЗАДАНИЕ:

Субтест

Группа заданий 2.1.3. [65]

Название

Задание 2.1.3.2.

Подсказка по умолчанию

Файл Редактировать Вид Вставить Формат Инструменты Таблица

Текст задания

Файл Редактировать Вид Вставить Формат Инструменты Таблица

На рисунке изображен фрагмент идущих подряд сказочных цифр.

Винни-Пух

Вычисли

$\psi 0 - \omega 0 = ?$

Один или несколько верных ответов?

Только один верный ответ

Рис. 3. Часть элемента формы заполнения заданий в административной части веб-приложения

Fig. 3. Part of the task filling form element in the administrative part of the web application



На рисунке 3 изображен фрагмент формы заполнения, используя которую, пользователь может добавить новое задание в систему если обладает необходимым доступом к странице. С помощью редактора доступна возможность загрузки файлов изображения для наглядного представления заданий пользователю. Также это позволяет более информативно предоставить подсказки, которые предъявляются в состояниях «ловушках» для избегания использования большого количества текста. Использование готовых вариантов ответа на задание позволяет упростить логику системы и сделать её более доступной для учителей. Составление неверных вариантов ответов осуществляется на основе самых распространённых ошибок, которые школьник может допустить при решении выбранной группы задач. Готовые варианты ответа в данной системе предоставляют оптимальный компромисс между сложностью системы и потребностью учителей. Также некоторые задания требуют ответа символами, которые не представлены на клавиатуре, а использование его виртуального варианта сильно усложняет взаимодействие с системой школьника начальных классов. Использование пользовательского ввода при решении задач негативно сказывается на взаимодействие учителей с веб-приложением из-за необходимости составления правил для связывания большого количества вариантов ответа пользователя с определенными ошибками. Готовые варианты ответа лишены данного недостатка так как используют логику, один вариант ответа связывается с одной ошибкой.

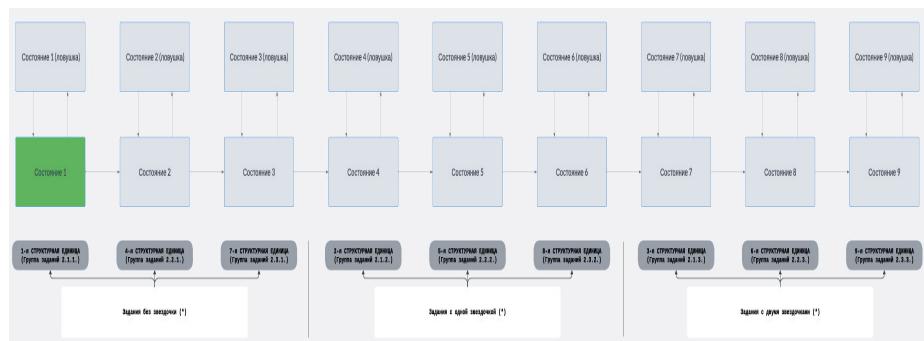


Рис. 4. Схема марковского процесса

Fig. 4. Markov process diagram

На рисунке 4 представлена схема марковского процесса тренажера для поддержки учебного процесса при изучении тем учебного предмета «Математика» второго класса начальной школы. Школьник начинает в «Состояние 1», которая отмечена зеленым цветом. К данному состоянию подключена первая структурная единица, являющаяся абстракцией для хранения банка заданий, реестра ошибок и подсказок. Первая пара состояний предлагает решить простое задание без звездочки из первой темы для второго класса. Нумерация элементов абстракции следующая: первое число — номер



Катышев Д.А. (2025)

Разработка прототипа системы на основе марковских представлений для поддержки учебного процесса...

Моделирование и анализ данных, 2025. 15(2), 177 – 191.

Katyshev D.A. (2025)

Development of a prototype system based on Markov representations to support the learning process...

Modelling and Data Analysis, 2025. 15(2), 177 – 191.

класса, второе число — номер темы, третье число — номер группы заданий, четвертое число — номер задания. Пример 3.1.2.4 — это четвертое задание из второй группы заданий первой темы для третьего класса.

The screenshot shows the 'Math Trainer' application interface. At the top, there is a logo and some navigation links. Below it, the title 'Тренажер по математике для начальных классов' (Math Trainer for primary school students) is displayed. A 'Подсказка' (Hint) section contains text: 'Чтобы вычесть круглые числа, можно вычесть десятки и приписать справа 0.' (To subtract round numbers, you can subtract tens and add 0 to the right). It also shows the equation '6 дес. – 2 дес. = 4 дес., значит: 60 – 20 = 40'. The 'Текст задачи' (Task text) section contains the problem 'Вычисли: 80 – 20 = ?'. Below it, a 'Варианты ответов' (Answer options) section lists four choices: 60, 6, 70, and 78. The first option, 60, is highlighted with a blue background.

Рис. 5. Интерфейс прохождения тренажера по математике в состоянии «ловушки» первой пары

Fig. 5. Interface for passing the math simulator in the “trap” state of the first pair

При входе в первую пару состояний пользователю случайно предлагается задача из первой группы заданий. Пользователю предоставляется текст задачи и готовые варианты ответа, которые он может выбрать. Выбор неверного ответа в задаче приводит пользователя в состояние «ловушки». В нем пользователь получает идентичное задание с подсказкой по её решению. Каждый неверный вариант ответа связан с определенной распространённой для этого задания ошибкой. При выборе ответа происходит запись результатов в базу данных.

Результаты содержат необходимую информацию о переходах пользователя по парам состояний марковского процесса. Также представлена информация о выпавшем пользователю задании и выбранным им готовым вариантом ответа. При неверном ответе записывается ошибка, которую он допустил в этой задачи. В рамках системы пользователь может совершить пять действий. Вход в ловушку обозначает переход в состояние «ловушки» из обычного состояния при выборе неверного ответа в нём. Нахождение в ловушке срабатывает при повторном выборе неверного ответа при нахождении в состоянии «ловушки». Если пользователь даёт правильный ответ на задачу в состоянии «ловушки», то он переходит в обычное состояние и получает новое задание. При выборе правильного ответа в обычном состоянии осуществляется переход в новую пару состояний марковского процесса. Если пользователь находится



в последней паре состояний и не находится в ловушке при выборе правильного ответа происходит завершение тренажера. Для успешного прохождение тренажера пользователю нужно пройти все состояния марковского процесса и успеть во временные рамки, установленные для него системой. Итоговые результаты школьников визуализируется в личном кабинете учителя.

Текущее сост.	Нахождение в сост.	Следующее сост.	Задание	ID ответа	Ошибка	Верно	Действие	Время перехода
Элементарное состояние 1 (simple_s1)	00:00:02.517049	Элементарное состояние 1 (simple_s1)	Задание 2.1.1.2. [290]	1062	[Ошибка 1] Концептуальная ошибка – непонимание значений разрядов числа 1	Нет	Вход в ловушку (to_trap)	17.05.2025, 18:45:11.540115
Элементарное состояние 1 (simple_s1)	00:00:05.750607	Элементарное состояние 1 (simple_s1)	Задание 2.1.1.2. [290]	1063		Нет	Нахождение в ловушки (stay_in_trap)	17.05.2025, 18:45:17.290722
Элементарное состояние 1 (simple_s1)	00:00:09.73204	Элементарное состояние 1 (simple_s1)	Задание 2.1.1.2. [290]	1060	[Ошибка 2] Концептуальная ошибка – непонимание значений разрядов числа 2	Нет	Нахождение в ловушки (stay_in_trap)	17.05.2025, 18:45:27.022762
Элементарное состояние 1 (simple_s1)	00:00:08.300012	Элементарное состояние 1 (simple_s1)	Задание 2.1.1.2. [290]	1061		Да	Выход из ловушки (from_trap)	17.05.2025, 18:45:35.322774
Элементарное состояние 1 (simple_s1)	00:00:01.932294	Элементарное состояние 2 (simple_s2)	Задание 2.1.1.0. [289]	1056		Да	Переход в новое состояние (up_state)	17.05.2025, 18:45:37.255068

Рис. 6. Представление части результатов прохождения тренажера в административной части веб-приложения

Fig. 6. Presentation of part of the results of passing the simulator in the administrative part of the web application

Обсуждение результатов

Таким образом, адаптивная цифровая система, использующая марковские модели, может помочь ученикам начальной школы в обучении математике. Эта система эффективно выявляет и исправляет частые ошибки учеников и облегчает работу учителям, так как они могут быстро заметить в решении каких задач возникают затруднения и оказать своевременную помощь в их устранении. Благодаря этому ученики лучше понимают новый материал и сохраняют интерес к урокам.

Основываясь на описанном функционале системы, можно сделать вывод, что данная разработка обладает большим потенциалом для улучшения качества преподавания математики в начальной школе.

Тем не менее, чтобы такая система была широко распространена в школах, необходимо продолжать её совершенствование. Например, целесообразным является добавление возможности детального анализа того, как именно в данном случае реализуется процесс обучения, а также расширить содержание системы для работы с другими школьными предметами и учениками других возрастов.

Заключение

Представленная цифровая система является современным примером использования технологий искусственного интеллекта в образовании начальных классов.



Её применение способно обеспечить адресную помощь каждому ученику, повысить уровень усвоения математических знаний, мотивацию и интерес к предмету. В то же время, система предоставляет учителям эффективный инструмент для индивидуализации учебного процесса и своевременного выявления ошибок, что способствует более глубокому и качественному обучению в условиях массового образования.

Планируемые этапы аprobации системы включают проведение экспериментальных исследований в реальных школьных условиях с целью оценки её педагогической эффективности и удобства использования. Ожидается, что внедрение данной системы позволит повысить успешность освоения математического материала младшими школьниками, а также снизить нагрузку на учителя за счёт автоматизации диагностики и коррекции учебных затруднений.

Перспективы дальнейшего развития проекта связаны с расширением банка заданий и реестра типичных ошибок, интеграцией дополнительных форм поддержки обучающихся, а также адаптацией системы под другие предметные области и возрастные категории. Кроме того, возможна реализация аналитических модулей для глубокого анализа траекторий обучения и индивидуального прогноза успешности, что откроет новые возможности для персонализированного подхода в образовании.

В целом, разработанная система представляет собой важный шаг на пути цифровой трансформации образовательного процесса, способствуя повышению качества и доступности школьного образования.

Список источников / References

1. Mangarin, R.A., & Caballes, D. O. (2024). Difficulties in Learning Mathematics: A Systematic Review. *International Journal of Research and Scientific Innovation*, XI(IX). С. 401—405. DOI: 10.51244/ijrsi.2024.1109037
2. Václavíková, Z. (2023). The Most Common Mathematical Mistakes in the Teaching of Scientific Subjects at Secondary Schools. *Springer Nature*. 181—193. DOI:10.1007/978-3-031-36375-7_12
3. Соколов, В.Л. (2023). Психологопедагогические приемы работы над ошибками младших школьников при освоении математических понятий. *Вестник практической психологии образования*. 20(1), С. 46—60. DOI:10.17759/bppe.2023200105
Sokolov, V.L. (2023). Psychological and pedagogical methods of working on errors of junior schoolchildren in mastering mathematical concepts. *Vestnik prakticheskoi psichologii obrazovaniya = Bulletin of Practical Educational Psychology*. 20(1), S. 46—60. DOI:10.17759/bppe.2023200105
4. Kusmaryono, I., Ubaidah, N., Ulya, N., & Kadarwati, S. (2019). Have teachers never been wrong? Case studies of misconceptions in teaching mathematics in elementary schools. // *Daya Matematis: Jurnal Inovasi Pendidikan Matematika*. 7(2), 209—218. DOI:10.26858/JDS.V7I2.9817
5. Dias, R.I., Andrade, R.P., Neves, O. dos S., Santos, D. de S., Bastos, A.R. da S., Jesus, B.R. de, Rocha, M.E. de S.B., Borges, D.D., Vieira F. de soisa, Correia, C.A., Costa, M.G. da, & Lins, A.V. (2023). Ensino individualizado: adaptar o ensino de acordo com as necessidades individuais de cada aluno, oferecendo instruções claras, organização e estruturação das tarefas, e feedback específico e imediato. *Brazilian Journal of Implantology and Health Sciences*. DOI:10.36557/2674-8169.2023v5n5p2177-2184



6. Bang, H.J., et al. (2023). Efficacy of an Adaptive Game-Based Math Learning App to Support Personalized Learning and Improve Early Elementary School Students' Learning. *Early Childhood Education Journal*. [URL: <https://link.springer.com/article/10.1007/s10643-022-01332-3>]
7. Semenovska, L., Vazhenina, I., Fazan, V. (2023). Individualization of learning as a development actuality information technological society. *Педагогічні Науки*. 82, С. 30—34. DOI: 10.33989/2524-2474.2023.82.295073
8. Saadawi, H.A. S. (2025). Individualization of teaching and self-learning strategies. «*Arid» Mezhdunarodnyi zhurnal pedagogicheskikh i psikhologicheskikh nauk (آرید) مولعلل ټيولو دل ديرا ټلچ (آرید) سفنل او (آرید)». C. 14—50. DOI: 10.36772/arid.aijeps.2024.5121
Saadawi, H.A.S. Individualization of teaching and self-learning strategies. «*Arid» Mezhdunarodnyi zhurnal pedagogicheskikh i psikhologicheskikh nauk (آرید) مولعلل ټيولو دل ديرا ټلچ (آرید) سفنل او (آرید)», 2025. S. 14—50. DOI: 10.36772/arid.aijeps.2024.5121**
9. Куравский, Л.С., Поминов, Д.А., Юрьев, Г.А., Юрьева, Н.Е., Сафронова, М.А., Куланин, Е.Д., Антипова, С.Н. (2021). Концепция адаптивного тренажера и оценка его эффективности в математическом обучении. *Моделирование и анализ данных*. 11(4), 5—20. DOI: <https://doi.org/10.17759/mda.2021110401>
Kuravskii, L.S., Pominov, D.A., Yur'ev, G.A., Yur'eva, N.E., Safronova, M.A., Kulanin, E.D., Antipova, S.N. (2021). The concept of adaptive simulator and evaluation of its effectiveness in mathematical learning. *Modelirovanie i analiz dannykh = Data modeling and analysis*. 11(4), 5—20. DOI: <https://doi.org/10.17759/mda.2021110401>
10. Иванова, С.В. (2019). Формирование навыков работы над ошибками у младших школьников на уроках математики. *Начальная школа плюс До и После*. (5), С. 23—27. [URL: <https://cyberleninka.ru/article/n/formirovaniye-navykov-raboty-nad-oshibkami-u-mladshih-shkolnikov-na-urokah-matematiki>]
Ivanova S.V. (2019)/ Formation of error work skills in junior schoolchildren at mathematics lessons. *Nachal'naya shkola plus Do i Posle. = Primary School Plus Before and After* 2019. (5), S. 23—27. [URL: <https://cyberleninka.ru/article/n/formirovaniye-navykov-raboty-nad-oshibkami-u-mladshih-shkolnikov-na-urokah-matematiki>]
11. Ashlock R.B. (2002). Error patterns in computation: Using error patterns to improve instruction. *Pearson*. c. 302.
12. Артеменков, С.Л. и др. (2017). Марковские модели в задачах диагностики и прогнозирования: Учебное пособие. / Под ред. Л.С. Куравского. — 2-е изд. доп. М.: Изд-во МГППУ. 203 с.
Artemenkov S.L. i dr. (2017). Markov Models in Diagnostics and Forecasting Problems: Textbook. / Pod red. L.S. Kuravskogo. — 2-e izd. dop. M.: Izd-vo MGPPU. 203 s.
13. Куравский, Л.С., Юрьев, Г.А., Юрьева, Н.Е., Исаков, С.С., Несимова, А.О., Николаев, И.А. (2022). Адаптивная технология психологической диагностики на основе марковских и квантовых представлений процесса выполнения заданий. *Моделирование и анализ данных*. 12(4), С. 36—55.
Kuravskii, L.S., Yur'ev, G.A., Yur'eva, N.E., Isakov, S.S., Nesimova, A.O., Nikolaev, I.A. (2022). Adaptive technology of psychological diagnostics on the basis of Markovian and quantum representations of the task performance process. *Modelirovanie i analiz dannykh = Data modeling and analysis*. 12(4), С. 36—55.
14. Куравский, Л.С., Артеменков, С.Л., Юрьев, Г.А., Григоренко, Е.Л. (2017). Новый подход к компьютеризированному адаптивному тестированию // Экспериментальная психология. Т. 10. № . 3. С. 33—45. doi:10.17759/exppsy.2017100303



Катышев Д.А. (2025)

Разработка прототипа системы на основе марковских представлений для поддержки учебного процесса...

Моделирование и анализ данных, 2025. 15(2), 177 – 191.

Katyshev D.A. (2025)

Development of a prototype system based on Markov representations to support the learning process...

Modelling and Data Analysis, 2025. 15(2), 177 – 191.

Kuravskii, L.S., Artemenkov, S.L., Yur'ev, G.A., Grigorenko, E.L. (2017). A new approach to computerized adaptive testing // *Eksperimental'naya psikhologiya = Experimental psychology*. T. 10. № . 3. S. 33—45. doi:10.17759/expsy.2017100303

Информация об авторах

Катышев Дмитрий Алексеевич, аспирант, Московский государственный психолого-педагогический университет (ФГБОУ ВО МГППУ), Москва, Российская Федерация, ORCID: <https://orcid.org/0009-0002-7900-6431>, e-mail: katyshevda@mgppu.ru

Information about the authors

Dmitry A. Katyshev, PhD student, Moscow State University of Psychology and Education, Moscow, Russian Federation, ORCID: <https://orcid.org/0009-0002-7900-6431>, e-mail: katyshevda@mgppu.ru

Вклад авторов

Катышев Д.А. — разработка прототипа системы; тестирование; аннотирование, написание и оформление рукописи.

Все авторы приняли участие в обсуждении результатов и согласовали окончательный текст рукописи.

Contribution of the authors

Dmitry A. Katyshev — system prototype development; testing; annotation, writing and design of the manuscript.

All authors participated in the discussion of the results and approved the final text of the manuscript.

Конфликт интересов

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Conflict of interest

The authors declare no conflict of interest.

Декларация об этике

Письменное информированное согласие на участие в этом исследовании было предоставлено респондентами (или законными опекунами / ближайшими родственниками участника).

Ethics statement

Written informed consent for participation in this study was obtained from the participants (or legal guardians / next of kin of the participants).

Поступила в редакцию 25.05.2025

Received 2025.05.25

Поступила после рецензирования 26.05.2025

Revised 2025.05.26

Принята к публикации 06.06.2025

Accepted 2025.06.06

Опубликована 30.06.2025

Published 2025.06.30

Моделирование и анализ данных 2025. Том 15. № 2.

Научный журнал

Издаётся с 2011 года

Учредитель

Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Московский государственный психолого-педагогический университет»

Адрес редакции:
г. Москва, ул. Сретенка, 29, факультет информационных технологий
Тел.: +7 (499) 167-66-74
E-mail: mad.mgppu@gmail.com

Журнал зарегистрирован в Государственном комитете РФ по печати.
Свидетельство о регистрации средств массовой информации
ПИ № ФС77-66444 от 14 июля 2016 года

ISSN: 2219-3758
ISSN: 2311-9454 (online)

Подписано в печать: 25.06.2025.
Формат: 70*100/16. Гарнитура Times.
Усл. печ. л. 14,6. Усл.-изд. л. 11,9.
Тираж 100 экз.