

**3**

# **МОДЕЛИРОВАНИЕ И АНАЛИЗ ДАННЫХ**

НАУЧНЫЙ ЖУРНАЛ

## **MODELLING AND DATA ANALYSIS**

SCIENTIFIC JOURNAL

**2025**

ISSN: 2219-3758  
ISSN: 2311-9454 (ONLINE)

# **МОДЕЛИРОВАНИЕ И АНАЛИЗ ДАННЫХ**

**НАУЧНЫЙ ЖУРНАЛ**

**2025 • Том. 15 • № 3**

# **MODELLING AND DATA ANALYSIS**

**SCIENTIFIC JOURNAL**

**2025 • Vol. 15 • № 3**



Московский государственный  
психолого-педагогический университет  
Moscow State University  
of Psychology & Education

## Моделирование и анализ данных

### Главный редактор:

Л.С. Куравский ФГБОУ ВО МГППУ, Россия

### Заместители главного редактора:

С.Д. Кулик МИФИ, Россия

А.В. Пантелеев МАИ, Россия

Н.И. Сельвесюк МАИ, Россия

### Редакционный совет

#### Председатель редакционного совета:

Г.Г. Амосов МИАН, Россия

#### Члены редакционного совета:

В.А. Барabanчиков ФГБОУ ВО МГППУ, Россия  
Питер Бентлер Калифорнийский университет  
Лос-Анджелеса, США

А.В. Горбатов МИСиС, Россия

Л.С. Куравский ФГБОУ ВО МГППУ, Россия

Леонид Либкин Эдинбургский университет,  
Великобритания

А.А. Марголис ФГБОУ ВО МГППУ, Россия

В.В. Рубцов ФГБОУ ВО МГППУ, Россия

Д.В. Ушаков ИП РАН, Россия

Девид Фрэнсис Университет Хьюстона, США

#### Редакционная коллегия:

К.К. Абгарян ФИЦ ИУ РАН, Россия

Г.Г. Амосов МИАН, Россия

М.В. Воронов ФГБОУ ВО МГППУ, Россия

Е.Л. Григоренко МГУ им. М.В. Ломоносова,  
Россия; Йельский университет,  
США

В.К. Захаров МГУ им. М.В. Ломоносова,  
Россия

А.И. Кибзун МАИ, Россия

Леонид Либкин Эдинбургский университет,  
Великобритания

Е.В. Ляпунцова МГТУ им. Н.Э. Баумана,  
Россия

В.Р. Милов НГТУ им. Р.Е. Алексеева,  
Россия

А.В. Наумов МАИ, Россия

Д.Л. Ревизников МАИ, Россия  
Холлинг Хайнц Университет Мюнстера,  
Германия

Девид Фрэнсис Университет Хьюстона,  
США

К.В. Хорошенков Брэдфордский университет,  
Великобритания

Г.А. Юрьев ФГБОУ ВО МГППУ, Россия

## Моделирование и анализ данных

Учредитель и издатель ФГБОУ ВО МГППУ

Издаётся с 2011 года. Периодичность: 4 раза в год.

Свидетельство регистрации СМИ: ПИ № ФС77-66444

Дата регистрации: 14.07.2016

Формат: 70×100/16

Все права защищены. Название журнала, логотип, рубрики, все тексты и иллюстрации являются собственностью ФГБОУ ВО МГППУ и защищены авторским правом. Перепечатка материалов и использование иллюстраций допускается только с письменного разрешения редакции.

© ФГБОУ ВО «Московский государственный психолого-педагогический университет», 2025, № 3

## Modelling and Data Analysis

### Editor-in-Chief:

L.S. Kuravsky MSUPE, Russia

### Deputy Editors-in-Chief:

S.D. Kulik MEFH, Russia

A.V. Panteleev MAI, Russia

N.I. Selvesyuk MAI, Russia

### The Editorial Council

#### Chairman of the Editorial Council:

G.G. Amosov MI RAS, Russia

#### The Members of the Editorial Council:

V.A. Barabanshikov MSUPE, Russia  
Peter Bentler University of California,  
USA

A.V. GorbatoV MISIS, Russia

L.S. Kuravsky MSUPE, Russia

Leonid Libkin University of Edinburgh,  
UK

A.A. Margolis MSUPE, Russia

V.V. Rubtsov MSUPE, Russia

D.V. Ushakov IP RAS, Russia

David Francis University Of Houston, USA

#### The Editorial Board:

K.K. Abgaryan IU RAS, Russia

G.G. Amosov MI RAS, Russia

M.V. Voronov MSUPE, Russia

E.L. Grigorenko Lomonosov Moscow State  
University, Russia;  
Yale University, USA

V.K. Zakharov Lomonosov Moscow State  
University, Russia

A.I. Kibzun MAI, Russia

Leonid Libkin University of Edinburgh,  
UK

E.V. Lyapuntsova BMSTU, Russia

V.R. Milov NNSTU n.a. R.E. Alekseev,  
Russia

A.V. Naumov MAI, Russia

D.L. Reviznikov MAI, Russia  
Holling Heinz University Of Münster,  
Germany

David Francis University Of Houston,  
USA

K.V. Horoshenkov University of Bradford,  
UK

G.A. Yuryev MSUPE, Russia

## Modelling and Data Analysis

Founder & publisher MSUPE

Frequency: since 2011

Published: 4 times a year

The mass medium registration certificate:

PN № ФС77-66444.

From: 14.07.2016

Format: 70×100/16

All rights reserved. Journal title, logo, rubrics, all texts and images are the property of MSUPE and copyrighted. Using reprints and illustrations is allowed only with the written permission of the publisher.

© MSUPE, 2025, no. 3



## ◆◆◆◆◆ СОДЕРЖАНИЕ ◆◆◆◆◆

### АНАЛИЗ ДАННЫХ

---

*Глухова Э.Д., Анохин А.Н., Зеркаленков Д.А.*

Методика системного проектирования человеко-машинного  
интерфейса авиационного многофункционального пульта управления ..... 7

*Колотовкин И.С.*

Многокритериальное параметрическое моделирование семантических  
фраз для интернет-рекламы: алгоритмы фильтрации и ранжирования ..... 27

*Юрьева Н.Е.*

Искусственный интеллект в психодиагностике:  
когнитивные состояния в цифровой образовательной среде ..... 47

### МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ

---

*Пантелеев А.В., Гунчин В.К., Надоров И.С., Ахмедов И.А.*

Метод проектирования профиля крыла  
трансзвукового транспортного самолета на основе последовательного  
математического моделирования и параметрической оптимизации ..... 56

*Кошуняева Н.В., Тутыгин А.Г.*

Сравнительный анализ эффективности использования метаэвристических  
методов моделирования для решения задачи коммивояжёра ..... 76

*Батуев Б.Б., Онучин А.А., Сухов С.В.*

Оптимизация передачи сигнала между нейронными  
популяциями с помощью воздействия на контрольные узлы ..... 94

*Ахмад Али, Ляпунцова Е.В.*

Комплексная оценка эффективности алгоритма  
АМАІА в прогностическом управлении автономным вождением ..... 113

### ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ

---

*Мороз Л.И., Дорошков О.С.*

Математическая модель переключения  
поляризации, основанная на обобщенном уравнении  
Ландау — Халатникова — Тани: численная реализация ..... 131

### КОМПЛЕКСЫ ПРОГРАММ

---

*Катышев Д.А.*

Формирование адаптивной траектории обучения  
в компьютерных системах на основе марковских представлений ..... 148



## МЕТОДИКА ПРЕПОДАВАНИЯ

---

*Чернышов Л.Н., Лукин В.Н.*

Учебный тренажёр по теории алгоритмов ..... 161

## КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

---

*Колотовкин И.С., Чернышев В.В.*

Анализ существующих моделей компоновки  
клавиш с позиции пользовательской адаптации..... 172

*Исаков С.С.*

Особенности написания небуферизированного  
асинхронного алгоритма получения данных на языке JavaScript..... 180



## 5



## **METHOD OF TEACHING**

---

*Chernyshov L.N., Lukin V.N.*

Training simulator for algorithm theory ..... 162

## **BRIEF MESSAGES**

---

*Kolotovkin I.S., Chernyshev V.V.*

Analysis of existing keyboard layout  
models from the perspective of user adaptation ..... 172

*Isakov S.S.*

Features of writing an unbuffered  
asynchronous algorithm for receiving data in JavaScript ..... 181

## АНАЛИЗ ДАННЫХ | DATA ANALYSIS

Научная статья | Original paper

УДК 004.9:629.7.05

### Методика системного проектирования человеко-машинного интерфейса авиационного многофункционального пульта управления

Э.Д. Глухова<sup>1</sup>✉, А.Н. Анохин<sup>2</sup>, Д.А. Зеркаленков<sup>1</sup>

<sup>1</sup> ФАУ «Государственный научно-исследовательский институт авиационных систем»  
Москва, Российская Федерация

<sup>2</sup> Акционерное общество «Росатом Автоматизированные системы управления»  
Москва, Российская Федерация

✉ [emma@greenfil.ru](mailto:emma@greenfil.ru)

#### Резюме

В статье представлена методика проектирования кадров многофункционального пульта управления, направленная на обеспечение единообразия интерфейсов при разработке независимыми специалистами. Поскольку кадры МФПУ часто проектируются несколькими независимыми разработчиками, отсутствие единого подхода приводит к несогласованности интерфейсов, что усложняет обучение пилотов, снижает эффективность их работы и может привести к проявлению опасного психофизиологического фактора негативного переноса. Предлагаемая методика основана на иерархическом анализе задач и включает этапы анализа функций, создания пользовательских историй, анализа задач экипажа, проектирования кадров, их отработки на имитаторе и формирования документации. Для проверки эффективности методики проведен эксперимент, в котором проводилось проектирование кадров МФПУ несколькими независимыми разработчиками. В результате было выявлено, что применение методики позволяет повысить единообразие кадровых структур с 84% до 98%. Также было проведено экспертное оценивание кадров по методу анализа иерархий Саати по критериям удобства навигации, скорости ввода данных и надежности работы оператора. В результате было выявлено, что кадры, разработанные по методике, имеют больший суммарный вес альтернативы с учетом весов критериев (0,83 для нового варианта и 0,17 для старого, разработанного без методики). Таким образом, применение методики позволяет повысить степень унификации интерфейсов и эргономические характеристики МФПУ.





Новизна работы также обусловлена методом выявления значимых различий в сходстве бинарных матриц внутри групп в случае малой выборки на основе перестановочного теста.

**Ключевые слова:** проектирование интерфейсов, стандартизация интерфейсов, иерархический анализ задач

**Для цитирования:** Глухова, Э.Д., Анохин, А.Н., Зеркаленков, Д.А. (2025). Методика системного проектирования человеко-машинного интерфейса авиационного многофункционального пульта управления. *Моделирование и анализ данных*, 15(3), 7–26. <https://doi.org/10.17759/mda.2025150301>

## Systematic design methodology for the human-machine interface of an aviation multifunctional control panel

**E.D. Glukhova<sup>1</sup>✉, A.N. Anokhin<sup>2</sup>, D.A. Zerkalnikov<sup>1</sup>**

<sup>1</sup> Federal Autonomous Institution “State Research Institute of Aviation Systems”  
Moscow, Russian Federation

<sup>2</sup> Joint Stock Company “Rosatom Automated Control Systems”  
Moscow, Russian Federation

✉ [emma@greenfil.ru](mailto:emma@greenfil.ru)

### **Abstract**

The article presents a methodology for designing frames of a multifunctional control panel, aimed at ensuring interface consistency when developed by independent specialists. Since these frames are often designed by multiple independent developers, the lack of a standardized approach leads to interface inconsistencies, complicating pilot training and reducing operational efficiency. The proposed methodology is based on hierarchical task analysis and includes stages such as function analysis, user story creation, task decomposition, frame design, simulator testing, and documentation generation.

An experiment was conducted to evaluate the methodology’s effectiveness, involving independent developers designing control panel frames. The results demonstrated that the methodology increased frame structure uniformity from 84% to 98%. Expert evaluations using the Saaty hierarchy analysis method assessed criteria such as navigation ease, data entry speed, and operator reliability. The findings revealed that frames developed with the methodology had a higher total weighted score (0.83 for the new version versus 0.17 for the old version developed without the methodology). Thus, the methodology enhances interface consistency, promotes pilot training, and improves ergonomic characteristics of MCDU.

The study also introduces a novel permutation test-based method for identifying significant differences in binary matrix similarity within small sample groups.



**Keywords:** interface design, interface standardization, hierarchical task analysis

**For citation:** Glukhova, E.D., Anokhin, A.N., Zerkalnikov, D.A. (2025). Systematic design methodology for the human-Machine interface of an aviation multifunctional control panel. *Modelling and Data Analysis*, 15(3), 7–26. (In Russ.). <https://doi.org/10.17759/mda.2025150301>

## Введение

Деятельность оператора в человеко-машинных системах (ЧМС) включает в себя сознательно регулируемые (произвольные) и автоматические (навыковые) компоненты (Козлов, 2024; Леонтьев, 1975; Ломов, 1982, Пономаренко, 1992).

На сознательном уровне оператор принимает осмысленные решения, анализирует информацию и планирует действия. На уровне навыков выполнение операций происходит автоматически, без значительных когнитивных затрат. При этом на начальных этапах обучения преобладает сознательный контроль, но по мере накопления опыта значительная часть действий переходит в категорию операций, выполняемых на навыках, что снижает когнитивную нагрузку и повышает скорость и надежность работы оператора.

Переход от осознанного контроля к автоматическому выполнению операций требует многократного повторения одних и тех же действий в стабильных условиях. В ходе обучения формируются **динамические стереотипы** — устойчивые паттерны реакций на типовые ситуации (Павлов, 1927).

В случае, когда ранее усвоенные стереотипы конфликтуют со вновь усваиваемыми, то есть, когда от оператора требуется различающееся поведение в существенно схожих ситуациях, освоение новых методов работы затрудняется. Кроме того, в стрессовой ситуации велика вероятность применения ранее усвоенного навыка. Этот феномен носит название «негативный перенос» и в авиации наиболее известен в применении к проблеме авиагоризонта (Козлов, 2024).

Таким образом, **согласованность человеко-машинного интерфейса** играет критическую роль в эффективном формировании навыков оператора, а также значительно влияет на надежность и эффективность его работы.

Стандартизирующие документы (ГОСТ, ОСТ, АП-25, ФАП) устанавливают базовые требования к человеко-машинным интерфейсам (ЧМИ), однако не содержат конкретных алгоритмов ввода и индикации данных и методик их проектирования, что допускает множественность технических реализаций.

В некоторых отечественных кооперациях соисполнителей различные компоненты человеко-машинного интерфейса (ЧМИ) кабины пилотов проектируются независимыми разработчиками.

В случае авиационного многофункционального пульта управления (МФПУ) (рис. 1), предназначенного для ввода данных для решения широкого круга функциональных задач, и имеющего сложную разветвленную кадровую структуру (более 100 кадров



и до 3 уровней глубины меню), отсутствие строгой методики проектирования приводит к тому, что интерфейсы получаются несогласованными: различается логика переходов по кадрам, могут отличаться алгоритмы ввода данных, именования элементов, цветовое кодирование информации. Это потенциально создает дополнительную когнитивную нагрузку на пилотов, замедляет формирование динамических стереотипов и увеличивает вероятность ошибок, в частности вследствие негативного переноса.



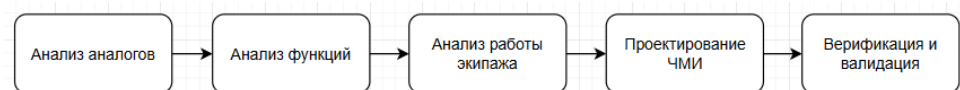
**Рис. 1.** Многофункциональный пульт управления

**Fig. 1.** Multifunction Control Display Unit (MCDU)

В таких условиях особую актуальность приобретают системные методы проектирования (Анохин, 2010; Анохин, Назаренко, 2010; Глухова и др., 2020; Adelstein at al, 2006), учитывающие человеческий фактор на всех этапах жизненного цикла (Adelstein at al, 2006), а также разработка на ранних этапах жизненного цикла унифицированного согласованного набора базовых компонентов человеко-машинного интерфейса и специализированного ПО, обеспечивающего автоматизацию разработки.

## Описание методики разработки кадров

Общий порядок разработки человеко-машинных интерфейсов (рис. 2) представлен в (Анохин, Назаренко, 2010, Adelstein at al, 2006), он включает в себя анализ аналогов и требований технического задания, функциональное проектирование, анализ работы экипажа, проектирование интерфейса и последующие этапы верификации и валидации.



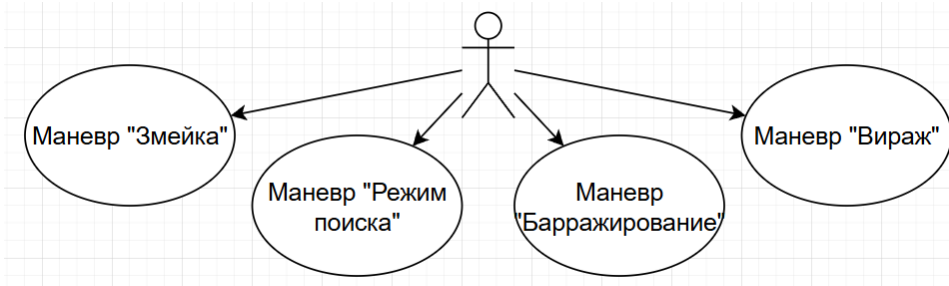
**Рис. 2.** Процесс разработки человеко-машинных интерфейсов

**Fig. 2.** The process of developing human-machine interfaces

Методика разработки представляет собой ряд последовательно применяемых методов. При этом входными данными для каждого метода являются результаты применения предыдущего. Для первого метода входными данными является техническое задание и результат анализа аналогов. Результатом последнего метода является разработанный человеко-машинный интерфейс кадров МФПУ и документация на ЧМИ.

Первым этапом методики разработки человеко-машинного интерфейса является анализ функциональных требований к интерфейсу. Вначале определяются функции системы, затем — уровень автоматизации и выделяются функции, выполняемые экипажем.

Анализ функциональных требований удобно проводить в нотации UML-диаграммы вариантов использования (рис. 3) (Буч, Рамбо, Якобсон, 2006), с той степенью детализации, которая необходима для постановки вопроса экспертам с целью получения конкретного порядка действий, записываемых в нотации пользовательских историй (Паттон, 2019).



**Рис. 3.** UML — диаграмма вариантов использования (функции) автоматического маневрирования

**Fig. 3.** UML — diagram of the use cases for the automatic maneuvering function

Порядок выполнения работы экипажа выявляется экспертным путем с помощью метода пользовательских историй Джеффа Паттона (Паттон, 2019). Пользовательские истории представляют собой метод работы с экспертами, позволяющий выявить и зафиксировать требования пользователей к продукту, а также основные шаги работы пользователей.



Перед началом работы методом пользовательских историй необходимо выполнить два ключевых условия:

- убедиться, что диаграмма вариантов использования (функций) полностью отражает требования технического задания;
- сформировать команду разработчиков, включающую в себя опытных экспертов по работе с аналогичными системами, специалиста по конкретной системе и системного аналитика.

Процесс анализа проводится в формате рабочего совещания. Эксперты последовательно описывают действия оператора при выполнении каждой функции. Все действия фиксируются в виде прямоугольных элементов (на цифровой диаграмме или физических стикерах), которые располагаются в соответствии с реальной последовательностью работы оператора (рис. 4). Такой формат представления информации является для экспертов наиболее естественным, так как соответствует их привычному мышлению (линейной последовательности выполнения действий). Помимо самих действий, эксперты обычно указывают особые условия их выполнения и важные нюансы работы. Эти дополнительные сведения следует фиксировать отдельно — с помощью заметок или элементов другого цвета/формы.



**Рис. 4.** Пользовательская история ввода данных для выполнения маневра «Змейка»

**Fig. 4.** User story for performing the “Snake” maneuver

В ходе обсуждения естественным образом формируются макеты интерфейсов. Они возникают спонтанно, когда эксперты наглядно демонстрируют, как оператор взаимодействует с системой. Эти макеты следует оформлять на отдельных листах или крупных стикерах, чтобы в дальнейшем использовать их как основу для работы.

Совещание носит итеративный характер — задачи, комментарии и макеты могут многократно корректироваться до достижения полного консенсуса среди экспертов. Для сложных функций этот процесс может растянуться на несколько дней или недель.

Этот этап крайне важен и не подлежит сокращению, так как позволяет:

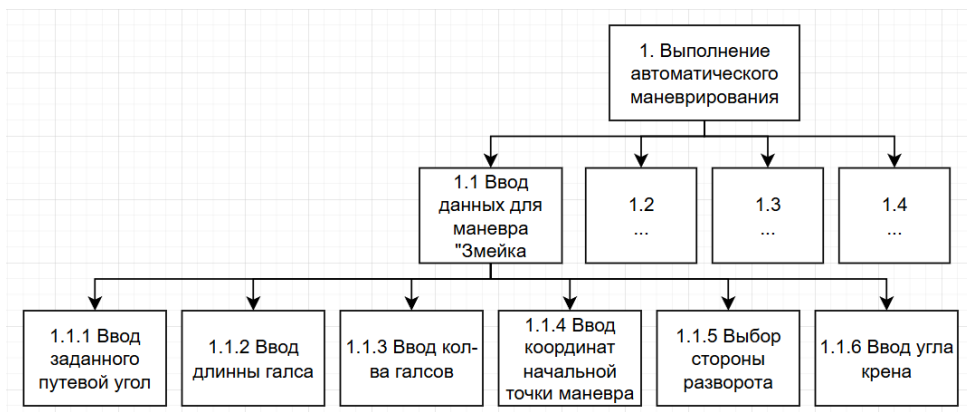
- учесть все требования и тонкости;
- внести коррективы с минимальными затратами;
- предотвратить дорогостоящие изменения на поздних стадиях.

Итогом работы должны стать:

- детализированные пользовательские истории;
- утвержденные макеты интерфейсов;
- единое мнение всех участников процесса.



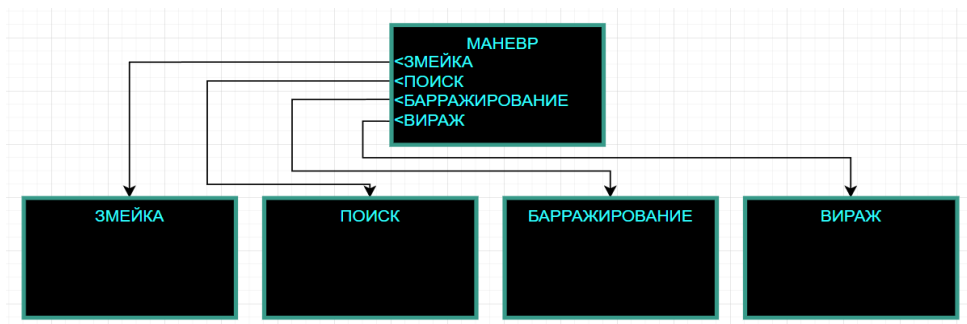
На основе разработанных пользовательских историй выполняется анализ задач: все действия оператора выстраиваются в иерархическую структуру — дерево задач (рис. 5) в нотации HTA (Annett, Duncan, 1967; Hollnagel, 2003; Kirwan, Ainsworth, 1992; Stanton, 2006; Mamessier, Feigh, 2016). Необходимо проверить, что учтены и выполняются все функции, определенные по результатам анализа функций.



**Рис. 5.** Фрагмент дерева задач экипажа  
для выполнения автоматического маневрирования в нотации HTA

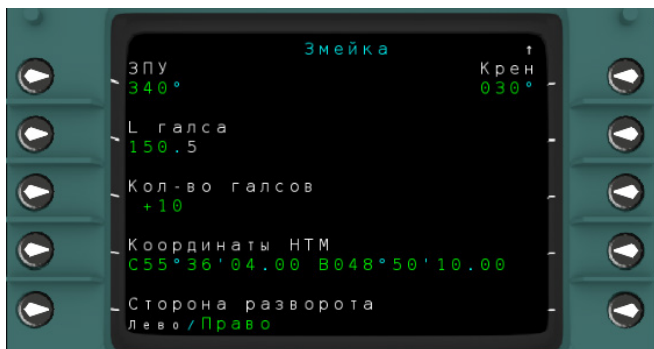
**Fig. 5.** Fragment of the task tree for performing automatic maneuvering in HTA notation

Далее на основе дерева задач и библиотеки компонентов интерфейса разрабатывается кадровая структура (рис. 6) и наполнение кадров МФПУ (рис. 7). На каждом этапе работы интерфейс МФПУ должен предоставлять пользователю именно ту информацию и те возможности управления, которые ему необходимы для решения текущей задачи. Поэтому кадровая структура формата во многом повторяет иерархическую структуру дерева задач. Нижний уровень дерева задач — операции — соответствуют функциям ввода данных МФПУ.



**Рис. 6.** Кадровая структура

**Fig. 6.** Frame structure



**Рис. 7.** Кадр МФПУ «Змейка»

**Fig. 7.** MCDU frame «Snake»

Для моделирования кадров используется специализированное ПО «АСП МФПУ» (Глухова и др., 2020; Glukhov et al., 2020), позволяющее разрабатывать модели кадров на основе унифицированного набора компонентов. Разработчики создают в ПО иерархически связанные между собой типовые элементы интерфейса, такие как кадры и функции ввода данных и заполняют их свойства (название, диапазоны изменения параметров и т.д.). ПО «АСП МФПУ» имеет встроенный интерактивный имитатор, на котором отображается результат проектирования: созданные кадры МФПУ.

Каждый разработанный кадр тестируется на встроенном в ПО «АСП МФПУ» имитаторе с обязательным контролем полноты функциональности — все задачи из дерева задач должны быть выполнимы через созданный интерфейс. Также необходимо проверить учет всех требований и нюансов, указанных в заметках к пользовательским историям.

Для тестирования разрабатываются детализированные сценарии, основанные на ранее созданных пользовательских историях. Ключевые требования к сценариям: — полное текстовое описание всех операций; — использование только реальных, правдоподобных данных (эксперты всегда проверяют логичность, правдоподобность и согласованность информации, поэтому любые несоответствия могут затруднить процесс тестирования).

Процесс отработки кадров заключается в том, что каждый из экспертов проходит все тестовые сценарии на имитаторе МФПУ. Другие эксперты при этом могут быть независимыми наблюдателями и фиксировать в блокнотах возникающие у оператора трудности.

После прохождения всех сценариев всеми экспертами необходимо проанализировать результаты и, при необходимости, провести доработку кадров.

В случае, если не были учтены какие-либо важные факторы, следует вернуться к историям и дорабатывать вначале истории, а затем деревья задач и кадры.

После доработки кадров необходимо также доработать сценарии и повторить отработку.





Документация на разработанные кадры выпускается путем автогенерации по данным модели в ПО «АСП МФПУ».

Общая схема методики представлена на рисунке 8.

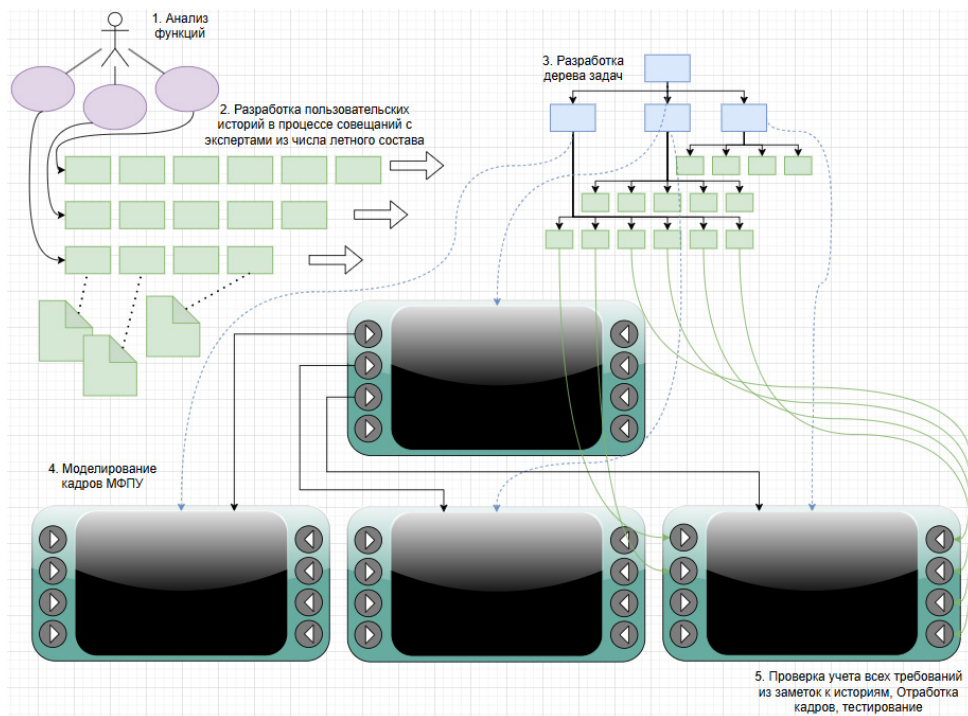


Рис. 8. Методика системного проектирования кадров МФПУ

Fig. 8. The methodology of the system design of the MCDU

## Экспериментальное исследование методики

С целью апробации предложенной методики было проведено экспериментальное исследование. Основной задачей эксперимента было подтверждение гипотезы о том, что применение разработанной методики позволяет унифицировать кадровые структуры, получаемые независимые разработчики.

В эксперименте участвовали 10 независимых испытуемых. Они были разделены на две группы: экспериментальную, в составе которой было семь человек, и контрольную, состоящую из трех человек.

Всем испытуемым было выдано одинаковое техническое задание на проектирование кадров МФПУ для выполнения функции автоматического коррекции численных координат, а также функции автоматического маневрирования. Также



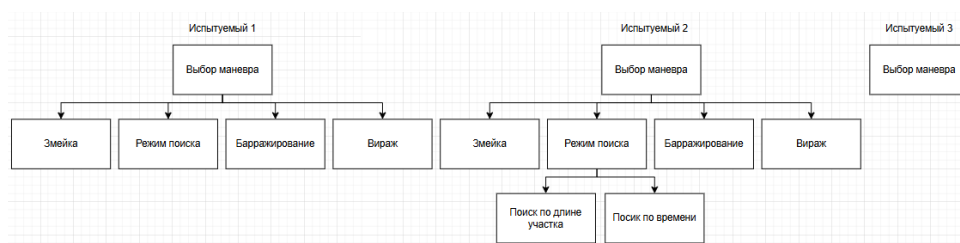


испытуемым были выданы ноутбуки с установленным ПО «АСП МФПУ» и описание интерфейса МФПУ.

Экспериментальная группа дополнительно получила описание методики системного проектирования.

Все испытуемые выполнили задачу проектирования кадров в срок три дня. При этом испытуемые контрольной группы получили результат на 20% быстрее.

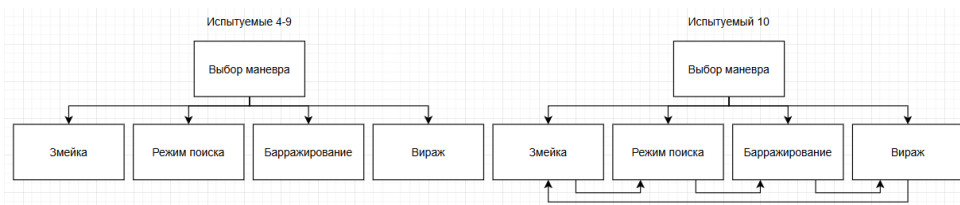
Испытуемые контрольной группы в результате проектирования получили существенно различающиеся кадровые структуры (рис. 9), при этом отличие было не только в переходах по кадрам, но и в их количестве и принципе компоновки.



**Рис. 9.** Результаты проектирования контрольной группы

**Fig. 9.** Design Results of the Control Group

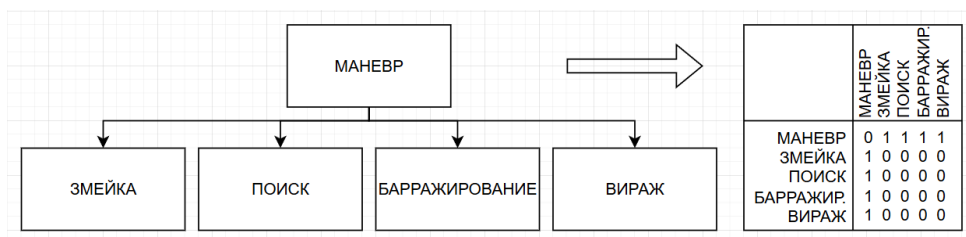
Испытуемые экспериментальной группы, использовавшие при проектировании предлагаемую в статье методику, получили практически одинаковые кадровые структуры (рис. 10), которые соответствовали аналогичным кадрам, разработанным для бортового МФПУ.



**Рис. 10.** Результаты проектирования экспериментальной группы

**Fig. 10.** Design Results of the Experimental Group

Для получения числовой характеристики сходства кадровых структур внутри экспериментальной и контрольной групп и их сравнения для каждой кадровой структуры была разработана матрица переходов (рис. 11).



**Рис. 11.** Матрица переходов между кадрами

**Fig. 11.** Frame transition matrix

Матрица переходов  $A$  размером  $n \times n$  (где  $n$  — количество кадров) строится следующим образом:

$$A_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если существует переход из кадра } i \text{ в кадр } j, \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases} \quad (1)$$

Например, для системы с пятью кадрами, представленной на рисунке 9 матрица будет иметь вид (2):

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2)$$

Далее проводилось попарное сравнение матриц переходов внутри групп: экспериментальной и контрольной. Затем результаты сравнения усреднялись внутри групп и сравнивались.

Сравнение проводилось по критерию  $K$  — проценту совпадений элементов матриц переходов.

Вычисление процента совпадений  $K$  между двумя матрицами: пусть даны две бинарные матрицы  $A$  и  $B$  размерности  $m \times n$ , где:

$a_{ij} \in \{0, 1\}$  — элемент матрицы  $A$  в  $i$ -й строке и  $j$ -м столбце,

$b_{ij} \in \{0, 1\}$  — элемент матрицы  $B$  в  $i$ -й строке и  $j$ -м столбце.

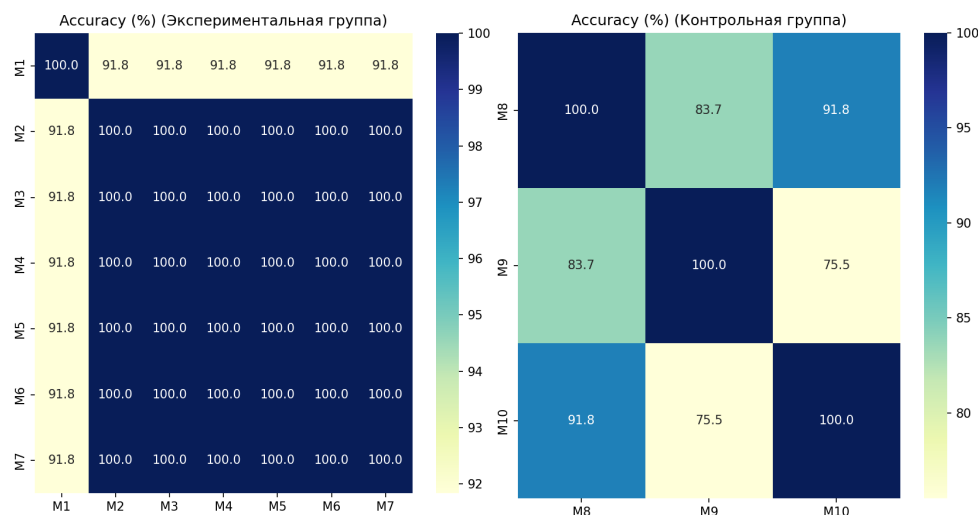
$$K(A, B) = \frac{1}{m \cdot n} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \delta(a_{ij}, b_{ij}) * 100\%, \quad (3)$$

где  $\delta(a_{ij}, b_{ij})$  — функция Кронекера, равная:

$$\delta(a_{ij}, b_{ij}) = \begin{cases} 1, & \text{если } a_{ij} = b_{ij} \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases} \quad (4)$$



Результат попарного сравнения матриц по проценту совпадений представлен на рисунке 12.



**Рис. 12.** Результат попарных сравнений матриц переходов для экспериментальной (слева) и контрольной (справа) групп для задачи автоматического маневрирования

**Fig. 12.** Result of pairwise comparisons of transition matrices for experimental (left) and control (right) groups for the automatic maneuvering task

Для сравнения результатов экспериментальной и контрольной групп вычисляется среднее значение процента совпадений для каждой группы по формуле:

$$\bar{K}_{\text{группа}} = \frac{2}{N(N-1)} \sum_{m=1}^{N-1} \sum_{k=m+1}^N K(A_m, B_k), \quad (5)$$

где  $N$  — количество матриц в группе.

Результаты представлены в таблице 1.

Таблица 1 / Table 1

**Средний процент совпадений при попарном сравнении  
матриц перехода между кадрами**

**Average percentage of matches in pairwise comparison  
of transition matrices between frames**

	% совпадения для экспериментальной группы	% совпадения для контрольной группы	Различие в % между группами
Ввод данных для автоматического маневрирования	97.7%	83.7%	14.0%
Коррекция численных координат	97.6%	85.2%	12.4%



Для получения статистической значимости различий между группами применяется точный перестановочный тест (Good, 2005): р-значение вычисляется как вероятность получить наблюдаемую разницу или более экстремальную при условии, что:

- нулевая гипотеза ( $H_0$ ) верна (группы значимо не различаются),
- распределение сходства между матрицами одинаково для обеих групп.

Определим статистику критерия D:

$$D = \bar{K}_A - \bar{K}_B, \quad (6)$$

где  $\bar{K}_A$  — среднее сходство матриц экспериментальной группы,  
 $\bar{K}_B$  — среднее сходство матриц контрольной группы.

Рассмотрим все возможные разбиения 10 матриц на группы размером 7 и 3. Число таких разбиений:

$$N = C_{10}^7 = 120 \quad (7)$$

Для каждого разбиения  $\pi_k$ ,  $k=1, \dots, 120$  вычислим значение статистики  $D_k$ .

Эмпирическое р-значение вычисляется как:

$$p = \frac{1 + \sum_{k=1}^N I(D_k \geq D_{\text{набл}})}{1 + N} \quad (8)$$

где  $I(\cdot)$  — индикаторная функция,

$D_{\text{набл}}$  — наблюдаемое значение статистики.

В результате расчетов получаем, что в обоих экспериментах существует только один вариант перестановок, при котором  $I(D_k \geq D_{\text{набл}})$ , таким образом:

$$p = \frac{1 + 1}{1 + 120} \approx 0,0083 \quad (10)$$

Таким образом, только в ~0.83% случаев случайные перестановки имеют большее различие между средним сходством матриц в экспериментальной и контрольной группе, чем в эксперименте.

Таким образом, предложенная методика позволяет повысить единообразие кадровых структур МФПУ в среднем на 13%. Единообразие компонентов интерфейса гарантируется применением ПО «АСП МФПУ» при разработке. В обоих экспериментах получены высокозначимые результаты ( $p=0.0083$ ), что позволяет с уверенностью отвергнуть нулевую гипотезу об отсутствии различий между группами.

Предложенный метод не требует предположений о распределении данных и точно контролирует ошибку I рода. Этот метод особенно эффективен для малых выборок. Ограничением является требование одинаковой размерности матриц.

С целью оценки разработанных интерфейсов могут быть применены методы экспертного оценивания (Анохин, 1996; Грешников и др., 2020; Greshnikov et al., 2020),



а также методика расчета времени решения задачи на основе моделирования (Корсун и др., 2023; Korsun at al., 2023) и методы объективной оценки на основе анализа глазодвигательной активности пилотов (Куравский, 2025).

### **Оценка первоначального варианта формата «МАНЕВР» и доработанного на основе предложенной методики методом анализа иерархий**

Для апробации методики на практике было также проведено экспертное оценивание двух вариантов бортовых кадров МФПУ: первоначального, разработанного без применения системного подхода, а также финального, разработанного с применением системного подхода и предлагаемой методики и ПО и интегрированного в бортовой МФПУ.

Экспертное оценивание проводилось методом парных сравнений Саати.

Метод парных сравнений, разработанный Томасом Саати в рамках теории анализа иерархий (Analytic Hierarchy Process, AHP), позволяет количественно оценить относительную важность критериев и альтернатив на основе субъективных суждений экспертов (Анохин, 1996; Смородинский, Батин, 2010). При сравнении альтернатив по нескольким критериям, эти критерии так же попарно сравниваются и взвешиваются, и их веса учитываются при финальной оценке альтернатив.

В процессе выполнения сравнения каждый эксперт заполняет анкету, в которой производится сравнение попарно всех альтернатив по всем критериям, а также попарное сравнение всех критериев.

Расчет результатов анкетирования для одного эксперта производится следующим образом:

Цена альтернативы по критерию  $k$  находится по формуле:

$$C_{ik} = \sqrt[N]{\prod_{j=1}^N X_{ij}}, \quad (11)$$

где  $i=1, \dots, N$ ;

$N$  — кол-во альтернатив;

$X$  — числовое значение превосходства одного критерия над другим, определяется по таблице 2.

Таблица 2 / Table 2

**Числовые значения результатов анкетирования**  
**Numerical values of the survey results**

$X_{ij}$	Значение
1	$i$ -я и $j$ -я альтернативы равноценны
3	Слабое предпочтение $i$ -той альтернативы
5	Сильное предпочтение $i$ -той альтернативы
7	Очень сильное предпочтение $i$ -той альтернативы
9	Абсолютное предпочтение $i$ -той альтернативы



Далее находится сумма цен альтернатив по формуле:

$$C_k = \sum_{i=1}^N C_{ik} \quad (12)$$

Веса альтернатив находятся по формуле:

$$V_{ik} = \frac{C_{ik}}{C_k} \quad (13)$$

Аналогичным образом находятся веса критериев  $V_k$ . Для получения финальной оценки  $V_{Ai}$  альтернатив веса альтернатив по различным критериям суммируются с учетом весов критериев:

$$V_{Ai} = \sum_{k=1}^K V_{ik} * V_k \quad (14)$$

Далее результаты анкетирования нескольких экспертов усредняются.

В исследовании сравнивались два варианта кадров МФПУ для выполнения задач автоматизированного маневрирования: разработанный до внедрения в разработку предлагаемой технологии и вариант, разработанный с ее применением, а также с применением ПО «АСП МФПУ» и методики системного проектирования.

Сравнение производится по трем критериям:

1. Удобство навигации;
2. Скорость ввода данных;
3. Надежность работы оператора.

Сравнение проводилось на основе анкетирования трех экспертов (таблица 3).

Таблица 3 / Table 3

**Параметры анкетированных экспертов**  
**Parameters of the surveyed experts**

№	Специализация, опыт	Возраст
1	Инженер, пилот самолета с одним двигателем сухопутного, ведущий инженер группы анализа состояния безопасности полетов отдела управления рисками департамента управления безопасности полетов ПАО «Аэрофлот»	40 лет
2	Инженер — пилот многодвигательного сухопутного воздушного судна, летчик — испытатель Внуковского авиаремонтного завода № 400, командир 235 отдельного объединенного авиаотряда ГТК «Россия», летчик-испытатель ЛИИ им. Громова	68 лет
3	Виртуальный пилот. Стаж полетов на симуляторе и тренажерах более 10 лет. Освоенные типы ВС на симуляторах: B737—300, B737—800, A319, A320, A321, Bombardier dash 8 Q400	35 лет

Экспертам были представлены последовательно два варианта кадров МФПУ, предназначенные для решения задач автоматизированного маневрирования.



Для демонстрации кадров применялся интерактивный имитатор МФПУ. После ознакомления эксперты заполнили анкеты.

В начале анкеты выполнялось взвешивание критериев. Получившееся распределение весов критериев представлено в таблице 4.

Таблица 4 / Table 4

**Результаты взвешивания критериев**  
**The results of the criteria weighting**

Критерий	Эксперт 1	Эксперт 2	Эксперт 3	Среднее
Удобство навигации	0,22	0,20	0,69	0,37
Скорость ввода данных	0,07	0,08	0,08	0,08
Надежность работы оператора	0,71	0,72	0,23	0,55

Затем выполнялась сравнение всех вариантов попарно по каждому критерию. Результаты оценивания с учетом весов критериев представлены в таблице 5.

Таблица 5 / Table 5

**Результаты оценивания кадров МФПУ**  
**MCDU frame evaluation results**

Вариант кадров	Эксперт 1	Эксперт 2	Эксперт 3	Среднее
Старый	0,11	0,17	0,17	0,14
Новый	0,89	0,83	0,83	0,86

Таким образом, в результате исследования было выявлено значительное предпочтение экспертами кадров МФПУ, разработанных с применением предлагаемой в работе методики проектирования и специализированного ПО «АСП МФПУ».

## **Заключение**

В статье рассмотрен порядок разработки человеко-машинного интерфейса МФПУ, обеспечивающий проектирование согласованных кадров независимыми разработчиками. Рассмотрены причины, по которым согласованность ЧМИ непосредственно влияет на эффективность и надежность работы экипажа, в частности, может провоцировать проявление опасного психофизиологического фактора негативного переноса.

Предложенная методика основана на системных методах проектирования. Методика апробирована в экспериментальном исследовании, которое показало, что ее применение позволяет повысить единообразие и согласованность человеко-машинного интерфейса МФПУ.

Также в статье упоминается специализированное программное обеспечение ПО «АСП МФПУ», с помощью которого проводится моделирование кадров и их отработка и выпуск документации на ЧМИ.



Совокупный результат применения специализированного ПО и методики оценивается методом экспертного оценивания в сравнении с разработанными до появления ПО и методики вариантами кадров МФПУ.

Предложенные решения применяются при разработке ЧМИ бортового МФПУ и показывают высокую эффективность в условиях кооперации независимых разработчиков.

Разработанный в исследовании метод перестановочного теста для анализа сходства бинарных матриц в малых выборках ( $N=10$ ) продемонстрировал высокую чувствительность при оценке значимости различий между группами разработчиков. Его ключевое преимущество — способность обеспечивать точный контроль ошибки I рода без предположений о распределении данных, что критически важно для экспериментов с ограниченным объемом выборки. Полученное  $p$ -значение (0.0083) подтвердило статистическую значимость влияния методики на единообразие интерфейсов. Метод особенно ценен для эргономических исследований, где стандартные статистические подходы часто требуют больших объемов данных, а экспериментальные группы формируются ограниченно (например, требуют участия редких специалистов).

### Список источников / References

1. Анохин, А.Н. (1996). *Методы экспертных оценок. Учебное пособие*. Обнинск: ИАТЭ.  
Anokhin, A.N. (1996). *Methods of Expert Evaluations*. Textbook. IATE. (in Russian).
2. Анохин, А.Н., Назаренко Н.А. (2010). Проектирование интерфейсов. *Биотехносфера*, (2), 21—27.  
Anokhin, A. N., & Nazarenko, N. A. (2010). Interface design. *Biotekhnosfera*, (2), 21—27. (in Russian).
3. Буч, Г., Рамбо, Д., Якобсон, И. (2006). *Язык UML. Руководство пользователя* (2-е изд.; Н. Мухин, Пер.). ДМК Пресс. (Оригинальное опубликовано в 1999).  
Booch, G., Rumbaugh, J., & Jacobson, I. (2006). *The Unified Modeling Language User Guide*. (N. Mukhin, Trans.; 2nd ed.). DMK Press. (Original work published 1999). (in Russian).
4. Глухова, Э.Д., Глухов, М.А., Кривоноженков, В.А., Целиков, А.С. (2020). Технология разработки вариантов индикационных форматов, обеспечивающих решение функциональных задач авиационных комплексов. *Труды ГосНИИАС. Серия: Вопросы авионики*, (1(47)), 21—26. <https://elibrary.ru/item.asp?id=42413057>.  
Glukhova, E.D., Glukhov, M.A., Krivonozhenkov, V.A., & Tselikov, A.S. (2020). Technology for developing variants of indication formats ensuring the solution of functional tasks of aviation complexes. *Trudy GosNIIAS. Seriya: Voprosy avioniki*, (1(47)), 21—26. <https://elibrary.ru/item.asp?id=42413057> (in Russian).
5. Грешников, И.И., Лаврова, Г.А., Сальников, Т.Д., Златомрежев, В.И., Сергеева, Г.В. (2020). Методика субъективных оценок информационно-управляющего поля кабины пилотов. *Нейрокомпьютеры: разработка, применение*, 22(3), 18—25. <https://doi.org/10.18127/j19998554-202003-02>.  
Greshnikov, I.I., Lavrova, G.A., Sal'nikov, T.D., Zlatomrezhev, V.I., & Sergeeva, G.V. (2020). Subjective methodology of the aircraft control and navigation equipment's evaluation. *Neurocomputers*, 22(3), 18—25. <https://doi.org/10.18127/j19998554-202003-02> (in Russian).





6. Козлов, В.В. (2024). *Деятельность и надежность пилота в фокусе человеческого фактора*. ИД Академии Жуковского.  
Kozlov, V.V. (2024). *Pilot activity and reliability in the focus of the human factor*. ID Akademii Zhukovskogo. (in Russian)
7. Куравский, Л.С., Грешников, И.И., Глухова, Э.Д. [и др.]. (2025). Комплексная оценка информационно-управляющего поля кабины экипажа гражданского воздушного судна: исследуемые показатели и методы их анализа. *Экспериментальная психология*, 18(2), 236—260. <https://doi.org/10.17759/exppsy.2025180214>.  
Kuravsky, L.S., Greshnikov, I.I., Glukhova, E.D., [et al.]. (2025). Comprehensive assessment of the information and control field of the cockpit of a civil aircraft: the studied indicators and methods of their analysis. *Experimental Psychology (Russia)* 18(2), 236—260. <https://doi.org/10.17759/exppsy.2025180214> (in Russian).
8. Корсун, О.Н., Глухова, Э.Д., Ляхов, В.Д., Скрыбиков, Н.В. (2023). Методика расчета времени решения задач ввода данных экипажем в современных авиационных комплексах. *International Journal of Open Information Technologies*, \*11\*(4), 69—77. EDN OTTMBS.  
Korsun, O.N., Glukhova, E.D., Lyakhov, V.D., & Skryabikov, N.V. (2023). Methodology for obtaining time intervals of crew data entry tasks performance in modern avionic systems. *International Journal of Open Information Technologies*, \*11\*(4), 69—77. EDN OTTMBS. (in Russian).
9. Леонтьев, А.Н. (1975). *Деятельность. Сознание. Личность*. Политиздат.  
Leontiev, A. N. (1975). *Activity. Consciousness. Personality*. Politizdat. (in Russian).
10. Ломов, Б.Ф. (ред.). (1982). *Справочник по инженерной психологии*. Машиностроение.  
Lomov, B.F. (Ed.). (1982). *Handbook of Engineering Psychology*. Mashinostroenie. (in Russian).
11. Павлов, И.П. (1927). *Лекции о работе больших полушарий головного мозга*. АН СССР.  
Pavlov, I.P. (1927). *Lectures on the work of the cerebral hemispheres*. AN SSSR. (in Russian).
12. Паттон, Д. (2019). *Пользовательские истории: искусство гибкой разработки ПО* (О. Потапова, Пер.). Питер. (Оригинальное опубликовано в 2014).  
Patton, J. (2019). *User Story Mapping: Discover the Whole Story, Build the Right Product* (O. Potapova, Trans.). Piter. (Original work published 2014). (in Russian)
13. Пономаренко, В.А. (1992). *Психология жизни и труда летчика*. Воениздат.  
Ponomarenko, V. A. (1992). *Psychology of the life and work of a pilot*. Voenizdat. (in Russian)
14. Смородинский, С.С., Батин, Н.В. (2010). *Системный анализ и исследование операций: оптимизация решений на основе методов и моделей математического программирования: учебно-метод. пособие*. БГУИР.  
Smorodinsky, S.S., & Batin, N.V. (2010). *System analysis and operations research: optimization of decisions based on methods and models of mathematical programming: educational manual*. BGUIR. (in Russian)
15. Adelstein, B., Hobbs, A., O'Hara, J., et al. (2006). Design, development, testing, and evaluation: human factors engineering (NASA/TM-2006—214535). NASA.
16. Annett, J., Duncan K. (1967). Task analysis and training design. *Occupational Psychology*, 41, 211—221.
17. Anokhin, A.N. (2010). The structural system approach to functional design of the control room. In J. Wood (Ed.), *\*Proceedings of the International Control Room Design Conference:*



- ICOCO 2010 (Paris, France, Oct. 25—26, 2010)\* (pp. 132—139). Institute of Ergonomics and Human Factors.
18. Glukhov, M.A., Glukhova, E.D., Marunkov, P.A., Barulin A.S. (2020). Application of in-house software to improve the design process of multifunctional aircraft indicators and control panels. *Journal of Physics: Conference Series*, 1864(1), 012118. <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1864/1/012118>
  19. Good, P. (2005). *Permutation, Parametric and Bootstrap Tests of Hypotheses* (3rd ed.). Springer.
  20. Greshnikov, I., Salnikov, T., Ivanov, A. (2020). Expert assessment of the cockpit crew information and control field. *Journal of Physics: Conference Series*, 1958(1), 012018. <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1958/1/012018>
  21. Hollnagel, E. (2003). *Handbook of Cognitive Task Design*. Lawrence Erlbaum Associates.
  22. Kirwan, B., Ainsworth, L.K. (1992). *A Guide to Task Analysis*. Taylor & Francis.
  23. Korsun, O.N., Pirozhkov, A.A., Glukhova, E.D., Skryabikov, N.V. (2023). System Methodologies for the Design of Human–Machine Interfaces for Advanced Aircraft. In *Recent Developments in High-Speed Transport* (pp. 23—32). Springer Aerospace Technology. [https://doi.org/10.1007/978-981-19-9010-6\\_3](https://doi.org/10.1007/978-981-19-9010-6_3)
  24. Mamessier, S., Feigh, K. (2016). HTA-Based Tracking of Pilot Actions in the Cockpit. In *Advances in Physical Ergonomics and Human Factors* (pp. 93—103). Springer. [https://doi.org/10.1007/978-3-319-41694-6\\_10](https://doi.org/10.1007/978-3-319-41694-6_10)
  25. Stanton, N.A. (2006). Hierarchical task analysis: development, application, and extensions. *Applied Ergonomics*, 37(1), 55—79. <https://doi.org/10.1016/j.apergo.2005.06.003>

### ***Информация об авторах***

*Глухова Эмма Дмитриевна*, инженер 1 категории ФАУ «Государственный научно-исследовательский институт авиационных систем», Москва, Российская Федерация (ФАУ «ГосНИИАС») ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-8814-6685>, e-mail: emma@greenfil.ru

*Анохин Алексей Никитич*, доктор технических наук, профессор, начальник отдела функционального и системного анализа АО «Росатом Автоматизированные системы управления» (АО «РАСУ»), Москва, Российская Федерация; ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-2261-9659>, e-mail: anokhin@obninsk.ru

*Зеркаленков Дмитрий Алексеевич*, ведущий инженер «Государственный научно-исследовательский институт авиационных систем», Москва, Российская Федерация (ФАУ «ГосНИИАС») ORCID: <https://orcid.org/0009-0000-6222-8965>, e-mail: dazerkalenkov@gosniias.ru

### ***Information about the authors***

*Glukhova Emma Dmitrievna*, 1st category engineer, State Research Institute of Aviation Systems (GosNIAS), Moscow, Russian Federation, ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-8814-6685>, e-mail: emma@greenfil.ru

*Anokhin Aleksey Nikitch*, Doctor of Technical Sciences, Professor, Head of the Department for Functional and Systems Analysis, Joint-Stock Company “Rosatom Automated Control Systems”



(JSC “RASU”), Moscow, Russian Federation; ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-2261-9659>,  
e-mail: [anokhin@obninsk.ru](mailto:anokhin@obninsk.ru)

*Zerkalnikov Dmitry Alekseevich*, Leading Engineer, State Research Institute of Aviation Systems, (GosNIAS), Moscow, Russian Federation, ORCID: <https://orcid.org/0009-0000-6222-8965>, e-mail: [dazerkalnikov@gosniias.ru](mailto:dazerkalnikov@gosniias.ru)

### ***Вклад авторов***

Глухова Э.Д. — идеи исследования; аннотирование, написание и оформление рукописи; разработка методики и описанного ПО; планирование исследования; проведение эксперимента; сбор и анализ данных; расчет и визуализация результатов исследования.

Анохин А.Н. — научное руководство; формирование финального варианта методики; оценка результатов исследования.

Зеркаленков Д.А. — аннотирование, написание и оформление рукописи; сбор и анализ данных.

Все авторы приняли участие в обсуждении результатов и согласовали окончательный текст рукописи.

### ***Contribution of the authors***

Glukhova E.D. — research ideas; annotation, writing and design of the manuscript; development of the methodology and the described software; research planning; conducting the experiment; data collection and analysis; calculation and visualization of the research results.

Anokhin A.N. — scientific supervision; formation of the final version of the methodology; evaluation of the research results.

Zerkalnikov D.A. — annotation, writing and design of the manuscript; data collection and analysis;

All authors took part in the discussion of the results and agreed on the final text of the manuscript.

### ***Конфликт интересов***

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

### ***Conflict of interest***

The authors declare no conflict of interest.

Поступила в редакцию 29.08.2025

Поступила после рецензирования 03.09.2025

Принята к публикации 05.09.2025

Опубликована 30.09.2025

Received 2025.08.29

Revised 2025.09.03

Accepted 2025.09.05

Published 2025.09.30

Научная статья | Original paper

УДК 004.8:659.1

## Многокритериальное параметрическое моделирование семантических фраз для интернет-рекламы: алгоритмы фильтрации и ранжирования

И.С. Колотовкин

Московский государственный психолого-педагогический университет  
Москва, Российская Федерация  
✉ [is@kolotovkin.pro](mailto:is@kolotovkin.pro)

### Резюме

**Контекст и актуальность.** В сфере интернет-рекламы эффективность рекламных кампаний во многом зависит от качества подбора ключевых фраз. Однако традиционные подходы часто опираются на ограниченный набор критериев (частотность, конкуренция), не учитывая комплексность задач по охвату, бюджетированию и локализации. Статья предлагает научно обоснованный метод многокритериального параметрического моделирования для отбора и ранжирования ключевых фраз, ориентированный на оптимизацию рекламных кампаний. **Цель.** Разработать и продемонстрировать алгоритм фильтрации и приоритизации семантических фраз для контекстной рекламы, учитывающий множественные критерии: спрос, конкуренцию, специфичность, геозависимость и коммерческую ценность запроса. **Гипотеза.** Использование комплексного индекса, агрегирующего нормированные показатели популярности, конкуренции, специфичности и стоимости клика, позволяет отобрать более релевантные и эффективные ключевые фразы по сравнению с традиционными методами. **Методы и материалы.** Исследование выполнено на материале семантического ядра мебельного интернет-магазина. Было собрано около 500 поисковых фраз, по которым вычислены метрики (частотности, KEI,  $I_{\text{spec}}$ , CPC, геофактор). Применён поэтапный алгоритм фильтрации (удаление нерелевантных, слишком общих и редких запросов, фраз с высокой стоимостью клика) и ранжирования с помощью параметрической модели. Для верификации проведён А/В-тест двух подмножеств фраз. **Результаты.** Итоговый список из 120 фраз обеспечил охват ~85% релевантного трафика при сокращении затрат на 25%. Тест показал, что высокорейтинговые фразы дали в 1,8 раза больше кликов и в 2,1 раза больше



конверсий при равном бюджете. Учет геоувисимости, специфичности и конкуренции существенно повысил точность приоритизации запросов. **Выводы.** Предложенный метод эффективно решает задачу оптимизации семантического ядра, повышая отдачу рекламного бюджета без потери релевантного охвата. Методика рекомендована для использования в практиках малого и среднего интернет-маркетинга. Возможна адаптация под другие ниши и расширение с учетом данных о реальной конверсии.

**Ключевые слова:** интернет-реклама, семантическое ядро, многокритериальная оптимизация, KEI, специфичность запроса, геоувисимость, контекстная реклама

**Для цитирования:** Колотовкин, И.С. (2025). Многокритериальное параметрическое моделирование семантических фраз для интернет-рекламы: алгоритмы фильтрации и ранжирования. *Моделирование и анализ данных*, 15(3), 27—46. <https://doi.org/10.17759/mda.2025150302>

## Multicriterial parametric modeling of semantic phrases for online advertising: filtering and ranking algorithms

**I.S. Kolotovkin**

Moscow State University of Psychology and Education, Moscow, Russian Federation

✉ [is@kolotovkin.pro](mailto:is@kolotovkin.pro)

### *Abstract*

**Context and Relevance.** In online advertising, the success of campaigns largely depends on the quality of keyword selection. However, traditional approaches often rely on a limited set of metrics (such as frequency and competition), overlooking the complexity of goals like reach, budgeting, and localization. This paper proposes a scientifically grounded method of multi-criteria parametric modeling for filtering and ranking semantic phrases, aimed at optimizing advertising campaigns. **Objective.** To develop and demonstrate an algorithm for filtering and prioritizing keyword phrases in contextual advertising, taking into account multiple criteria: demand, competition, specificity, geo-dependence, and commercial value. **Hypothesis.** The use of a composite index that aggregates normalized indicators of popularity, competition, specificity, and cost-per-click enables the selection of more relevant and effective keyword phrases compared to traditional methods. **Methods and Materials.** The study was conducted on the semantic core of a furniture e-commerce website. Approximately 500 keyword phrases were collected, for which various metrics were calculated (search frequency, KEI, specificity index  $I_{\text{spec}}$ , CPC, geographic factor). A stepwise algorithm was applied, including filtering (removal of irrelevant, overly



broad or rare queries, and phrases with high CPC) and ranking via a parametric model. An A/B test was conducted to validate the prioritization approach. **Results.** The final set of 120 keyword phrases covered approximately 85% of relevant search traffic while reducing the projected budget by 25%. The test confirmed that high-ranking phrases generated 1.8 times more clicks and 2.1 times more conversions for the same budget. Incorporating geo-dependence, specificity, and competition metrics significantly improved the accuracy of keyword prioritization. **Conclusions.** The proposed method effectively solves the task of semantic core optimization by increasing return on ad spend without losing relevant reach. The methodology is recommended for use in small and medium-scale online marketing. It is adaptable to other domains and can be extended to include conversion rate data.

**Keywords:** online advertising, keyword selection, multi-criteria optimization, KEI, query specificity, geo-dependence, contextual advertising

**For citation:** Kolotovkin, I.S. (2025). Multicriterial parametric modeling of semantic phrases for online advertising: filtering and ranking algorithms. *Modelling and Data Analysis*, 15(3), 27—46. (In Russ.). <https://doi.org/10.17759/mda.2025150302>

## Введение

В поисковой рекламе (SEA — Search Engine Advertising) успех кампании во многом определяется качеством подбора ключевых слов и фраз, по которым объявления будут показаны пользователям. Известно, что неоптимальный выбор ключевых слов приводит к неоправданным расходам бюджета: слишком общие или нерелевантные запросы генерируют показы, не приводящие к конверсиям, и конкурируют с более подходящими фразами.

Например, анализ показал, что крупнейшие рекламодатели могут закупать десятки тысяч ключевых слов, однако ~90% кликов и конверсий обычно дают лишь порядка 20 самых популярных запросов. Остальные «длиннохвостые» (низкочастотные) запросы вносят сравнительно небольшой вклад в трафик, хотя нередко отличаются более высокой конверсией за счёт специфичности и точного соответствия намерениям пользователя. Поэтому перед специалистами по контекстной рекламе встает задача сформировать семантическое ядро — множество релевантных поисковых фраз — таким образом, чтобы, с одной стороны, охватить максимально возможный целевой спрос, а с другой стороны, не распылять бюджет на неэффективные или слишком конкурентные запросы.

Разработка методов отбора ключевых слов получила внимание как практиков интернет-маркетинга, так и исследователей. В литературе описаны различные подходы к проектированию ключевых слов для поисковой рекламы и SEO, учитывающие содержательные характеристики запросов, их формальное представление, качество, объем поиска и т.д. Классические методики, используемые SEO-специалистами,



включают расчёт показателей частотности запросов и различных индексов конкурентности (например, KEI) для оценки потенциала ключевого слова. Кроме того, в анализ могут вводиться дополнительные факторы, такие как прогнозируемая стоимость клика (CPC), кликабельность (CTR), наличие локальной привязки запроса (геозависимость) и др. Однако интеграция всех этих критериев в единый подход требует формализации и взвешивания (в прямом и переносном смысле) каждого фактора. Задачу можно трактовать как многокритериальную оптимизацию: из множества альтернатив (кандидатных фраз) необходимо выбрать подмножество, оптимальное по совокупности нескольких показателей эффективности.

Настоящая работа посвящена разработке и научному обоснованию алгоритмов фильтрации и ранжирования семантических фраз с использованием многокритериального параметрического моделирования. Под параметрическим моделированием понимается построение вычислительной модели оценки фраз, в которую явно входят регулируемые параметры — пороговые значения и веса критериев. Это позволяет настраивать систему отбора под конкретные цели и ограничения рекламной кампании. В разделах статьи подробно описаны используемые метрики и критерии (включая частотность поисковых запросов, показатель эффективности ключевых слов KEI, географическую принадлежность запросов и др.), приведены их математические формулы и интерпретации. Далее изложена методика поэтапной фильтрации исходного списка ключевых фраз, включая удаление нерелевантных и низкоперспективных запросов, а также отсеивание слишком общих («высоко-частотных») фраз, которые плохо подходят для таргетированной рекламы. Затем описан алгоритм ранжирования отобранных фраз путем агрегирования нескольких критериев в интегральный рейтинг с помощью системы весов и нормализации. В разделе результатов демонстрируются итоги применения методики на реальных данных семантического ядра интернет-магазина мебели: показано, как многокритериальный подход позволил сформировать приоритетный список фраз для рекламной кампании с оценкой требуемого бюджета и ожидаемой отдачи. В заключении обсуждаются преимущества предложенного подхода, его ограничения и направления дальнейшего развития (например, применение методов машинного обучения для автоматической настройки параметров модели).

## Методология

**1. Сбор и подготовка данных.** На первом этапе формируется исходный список ключевых фраз, потенциально связанных с рекламируемым продуктом или услугой. Источниками могут служить инструменты планирования ключевых слов (Google Keyword Planner, Яндекс.Wordstat и др.), а также анализ поисковых подсказок и запросов конкурентов. Для каждой фразы собираются количественные показатели:

*Частотность запросов* — среднее число показов (поисковых запросов) в месяц по данной фразе.





В работе используется статистика сервиса Яндекс.Wordstat по выбранному региону<sup>1</sup>. Различают несколько видов частотности: **базовая частотность** (без оператора) показывает суммарное число всех поисковых запросов, содержащих данную фразу в любой форме и порядке; **фразовая частотность** (в кавычках) — количество запросов именно этой фразы без дополнительных слов; **точная частотность** (в кавычках с оператором «!» перед каждым словом) — число запросов с точным вхождением заданных словоформ в указанном порядке.

Базовая частотность дает оценку общего интереса к теме, однако сильно завышена для коротких общих слов (т.к. включает множество длинных запросов с этими словами). Точная же частотность отражает минимально возможный спрос именно на данную фразу. Для анализа мы используем все три показателя:  $F_b$  — базовая частотность,  $F_p$  — частотность в кавычках,  $F_e$  — точная частотность. Эти данные позволяют количественно оценить **специфичность** (точность) запроса.

Региональная частотность. Если рекламная кампания нацелена на определённый регион (город, область), важно учесть объем поиска именно в этом регионе. Сервис Wordstat позволяет выбирать регион для съёма частотности. В нашей методике базовые частотности  $F_b$ ,  $F_p$ ,  $F_e$ , изначально собираются по целевому региону, чтобы сразу работать с релевантными значениями спроса. Дополнительно, если исходные данные представлены для более крупной области (например, всей страны), они могут быть скорректированы коэффициентом пропорционально населению или доле регионального трафика. В таблице 1 приведены типичные диапазоны значений частотности и пример классификации запросов по частотным категориям.

KEI (Keyword Effectiveness Index) — индекс эффективности ключевой фразы с точки зрения баланса между популярностью и конкурентностью<sup>2</sup>. Классическое определение KEI задается формулой:

$$KEI = \frac{(\text{Частотность})^2}{\text{Количество документов в поиске}}$$

где в качестве частотности обычно подставляется месячный объем поиска (запросов)  $F$ , а в качестве показателя конкуренции — число результатов (страниц) в выдаче поисковой системы по данному запросу. Например, если фразу запрашивают  $F=1000$  раз в месяц, а поиск по ней находит  $C=250000$  страниц, то  $KEI = \sqrt{\frac{1000}{250000}} = 0.02$ . Чем выше KEI, тем относительно перспективнее ключевое слово: оно часто ищется, но при этом конкурентных страниц немного.

<sup>1</sup> Шестаков, О. (26.04.2023; обновлено 31.07.2025). *Виды частотностей поисковых запросов или почему позиция по однословнику не гарантирует получение трафика*. Rush Agency — Блог. URL: <https://www.rush-agency.ru/blog/vidy-chastotnostej-poiskovyh-zaprosov-ili-pochemu-pozicziya-po-odnoslovniku-ne-garantiruet-poluchenie-trafika/> (дата обращения: 04.08.2025).

<sup>2</sup> Солтык, А. (07.05.2018). *Формулы KEI в SEO: расчёт эффективности ключевых слов*. Solytk.ru — Школа SEO. URL: <https://solytk.ru/shkola-seo/analitika-sajta/formulyi-kei> (дата обращения: 04.08.2025).





В нашем случае число документов берется по выдаче Яндекса (оператор поиска без кавычек либо в кавычках — см. ниже обсуждение точных и неточных вхождений). Для повышения устойчивости оценки в работе использован модифицированный вариант KEI, аналогичный реализуемому в программе Key Collector: в формуле вместо  $F$  используется частотность в кавычках (более точно отражающая спрос по фразе без посторонних слов), а для сглаживания данные частотности делятся на 2. Фактически это приводит к формуле  $KEI \approx \frac{\left(F_{p/2}\right)^2}{D}$ , где  $D$  — число документов в поисковой системе по запросу (с кавычками, т.е. страниц, содержащих именно данную фразу). Высокое значение KEI указывает на то, что запрос популярен при относительно небольшом числе конкурирующих страниц, и его целесообразно включить в семантическое ядро продвижения или рекламы.

*Показатели конкуренции в поисковой выдаче.* Помимо общего количества найденных страниц ( $D$ ), использованного в формуле KEI, вводятся дополнительные метрики для детального учета конкурентной среды: **Main Pages Count** — число **главных страниц** сайтов (домашних страниц доменов) в топ результатах поиска по запросу. Если по запросу много главных страниц, то тематика высококонкурентна (сильные сайты оптимизируют главные страницы под этот запрос).

- **Titles With Keyword** — количество результатов в топ-10, где искомая фраза входит в заголовок (title) страницы. Высокое значение означает, что многие конкурирующие страницы целенаправленно оптимизировали заголовок под этот запрос, что усложняет продвижение.
- **Video/Vertical Results** — наличие особых блоков (например, видео с YouTube, карты, изображения) по запросу. Появление таких вертикальных результатов или универсальных результатов говорит о высокой популярности запроса и разнообразии намерений пользователей, косвенно усложняя конкуренцию.
- **Коэффициент сложности (Difficulty)** — интегральный показатель конкуренции, агрегирующий несколько метрик. В нашей работе он рассчитывается аналогично подходам из SEO-аналитики: например, может использоваться взвешенная сумма нормализованных значений Main Pages Count, Title matches и относительной величины  $D$  (числа страниц). Чем выше коэффициент сложности, тем труднее получить высокую позицию (или дорого стоит будет клик в контекстной рекламе) по данному запросу.

*Коммерческие показатели.* Для задач контекстной рекламы принципиально важны данные о предполагаемой стоимости и эффективности по каждой фразе. Используются следующие метрики:

- **CPC (Cost Per Click)** — средняя стоимость клика по объявлению для данного ключевого слова, оценочная либо взятая из планировщика рекламы. В случае Яндекс.Директа можно использовать прогноз стоимости клика на первую страницу. Высокий CPC снижает приоритет фразы, если бюджет ограничен.
- **CTR (Click-Through Rate)** — кликабельность объявления по данному запросу, обычно прогнозируемая (например, на основе позиций или статистики). В модели используется для оценивания ожидаемых кликов и трафика.



- **Ожидаемый трафик и бюджет.** Комбинируя частотность, CTR и долю охвата, можно оценить потенциальное число показов и кликов объявления в неделю или месяц, а также требуемый бюджет. Например, ожидаемые показы  $\text{Impr} \approx F \cdot \text{доля охвата}$ , клик  $\text{Click} = \text{Impr} \cdot \text{CTR}$ , затраты  $\text{Cost} = \text{Click} \cdot \text{CPC}$ . Эти величины в нашей модели используются на этапе принятия решения — фраза может быть отсеяна, если требуемый бюджет на неё непропорционально высок или если прогнозируемый трафик слишком мал.

*Географическая привязка запроса (Geo).* Многие поисковые запросы различаются по характеру выдачи в разных регионах<sup>3,4</sup>. **Геозависимые запросы** — это запросы, результаты поиска по которым меняются в зависимости от местоположения пользователя. Как правило, это коммерческие запросы без указания конкретного города, но подразумевающие локальную услугу или товар (например, «ремонт ноутбуков» покажет сервисы в том городе, где находится пользователь). **Геонезависимые запросы**, напротив, дают одинаковую поисковую выдачу независимо от региона (в основном информационные или общие запросы). По данным Яндекса, доля геозависимых запросов составляет порядка 15—30% от общего числа поисковых запросов. В контексте рекламной кампании локального бизнеса имеет смысл отдавать приоритет геозависимым запросам, релевантным региону деятельности компании, и исключать геонезависимые общие фразы, которые сложно привязать к конкретной аудитории. В нашей методике для каждой фразы учитывается признак *Geo*: если запрос геозависимый (например, определено через Яндекс.Вордстат или классификатор), ему может быть присвоен более высокий балл релевантности, чем геонезависимому общему запросу, при прочих равных.

Кроме того, если фраза уже включает географическое название, это учитывается при фильтрации (см. ниже: такие фразы могут рассматриваться отдельно либо включаться только при совпадении с целевым регионом кампании).

**2. Формализация критериев и нормализация.** После сбора данных вычисляются вспомогательные показатели и производится нормализация метрик для последующего агрегирования. Ниже перечислены основные вычисляемые индексы:

**Индекс специфичности запроса** — показатель того, насколько фраза точно соответствует отдельному поисковому намерению. Предлагаемая метрика рассчитывается на основе соотношения разных видов частотности. Обозначив  $F_b$ ,  $F_p$ ,  $F_e$  — базовую, фразовую и точную частотности, введем индекс:

$$I_{\text{spec}} = \frac{1}{3} \left( \frac{\min(F_b, F_p)}{\max(F_b, F_p)} + \frac{\min(F_b, F_e)}{\max(F_b, F_e)} + \frac{\min(F_p, F_e)}{\max(F_p, F_e)} \right)$$

<sup>3</sup> Губерман, А.; Минина, Т. (15.07.2025). *Геозависимые запросы*. Ашманов и партнёры — Блог. URL: <https://www.ashmanov.com/education/articles/chto-takoe-geozavisimye-zaprosy/> (дата обращения: 26.07.2025).

<sup>4</sup> Топвизор–Журнал. (26.07.2023). *Геозависимые и геонезависимые поисковые запросы: что это такое и в чём различие*. URL: <https://journal.topvisor.com/ru/seo-kitchen/geo-dependence/> (дата обращения: 26.07.2025).



Здесь каждое отношение  $\min / \max$  находится в диапазоне 0..1 и показывает степень близости двух оценок частотности. Например, если базовая и точная частотности сильно отличаются (что характерно для общих слов, которые часто встречаются в составе длинных запросов), соответствующая доля будет мала. Если же все три значения частотности приблизительно равны (то есть почти все запросы с этой фразой именно в заданной формулировке), индекс специфичности  $I_{\text{spec}}$  стремится к 1. Таким образом, высокое значение  $I_{\text{spec}}$  свидетельствует, что ключевая фраза самодостаточна и не привносит лишнего контекста (чаще всего это узкие или точные запросы), а низкое — что фраза слишком общая и её поисковый спрос рассеян по множеству вариаций. В дальнейшем  $I_{\text{spec}}$  используется при фильтрации (для отсека нечетких запросов) и при ранжировании (как один из факторов качества фразы).

**Нормированная частотность.** Для сравнения запросов по популярности вводится нормированное значение  $\tilde{F}$ , приведенное к интервалу  $[0,1]$ . Поскольку частотности различаются на порядки (от единиц до сотен тысяч), применяем логарифмическое преобразование и деление на максимальное значение в выборке:

$$\tilde{F} = \frac{\ln(1 + F)}{\ln(1 + F_{\max})}$$

где  $F$  — выбранный показатель частотности для фразы (можно использовать скорректированную частотность для региона или фразовую частотность  $F_p$ ), а  $F_{\max}$  — максимальная частотность среди всех рассматриваемых фраз. Добавление 1 под логарифмом предотвращает неопределенность при  $F = 0$ . В результате  $\tilde{F} = 1$  у самой популярной фразы в списке, а фразы с более низким спросом получают значение, пропорциональное логарифму их частотности. Логарифмическая шкала уменьшает эффект очень крупных значений и распределяет оценки более равномерно для средних и малых  $F$ .

**Нормированная конкуренция.** Аналогично частотности, показатели конкурентности (например, число страниц  $D$  или количество главных страниц) нормализуются. Однако, поскольку для эффективности продвижения **меньшая** конкуренция предпоч-

$$\tilde{D} = 1 - \frac{\ln(1 + D)}{\ln(1 + D_{\max})}$$

тительнее, нормирование делается на обратной шкале. Введем, например, где  $D_{\max}$  — число документов по какому-либо запросу в нашем списке. Тогда  $\tilde{D} = 1$  для наименее конкурентного запроса (минимальный  $D$ ), а  $\tilde{D}$  близко к 0 для наиболее конкурентного.

Аналогично рассчитываются нормированные показатели для Main Pages и Title matches:  $\tilde{M}_{\text{main}}$  и  $\tilde{M}$  пропорционально обратному количеству главных страниц и вхождений в заголовки (с поправкой на максимумы). В дальнейшем эти значения могут быть агрегированы, например, через среднее или взвешенное суммирование, для получения единого индекса конкурентности  $\tilde{C}_{\text{agg}}$ .



**Нормированная цена клика.** Стоимость клика CPC также нормируется относительно максимума или целевого значения. В контексте отбора ключевых слов высокая стоимость нежелательна, поэтому нормированный критерий стоимости определим как

$$\widetilde{Cost} = 1 - \frac{CPC}{CPC_{\max}}$$

если  $CPC_{\max}$  максимальная из оценок по списку). Тогда  $\widetilde{Cost} = 1$  для самого дешевого ключевого слова и  $\widetilde{Cost} = 0$  для самого дорогого. Альтернативно можно использовать порог отсечения: например, если CPC превышает установленный лимит, фраза сразу исключается. В представленном алгоритме применялись оба подхода: на этапе фильтрации есть жесткий порог по цене (см. далее), а при ранжировании учитывается нормированная стоимость оставшихся фраз.

**Гео-признак.** Бинарный критерий геоувязимости можно учитывать в виде коэффициента  $G$ : например,  $G = 1$  для геоувязимых коммерческих запросов и  $G = 0$  для геоувязимых. Однако такой резкий разброс не отражает всей информации. Я использую более тонкий подход: если запрос геоувязимый и бизнес работает именно в целевом регионе (что предполагается), то такой запрос считается полностью релевантным аудитории  $G = 1$ . Геоувязимым же запросам (особенно общего характера) можно присваивать понижающий коэффициент, например  $G = 0.5$ , отражающий их меньший приоритет для локальной кампании. Кроме того, для запросов, уже содержащих указание региона (город), совпадающий с нашим, можно даже повышать оценку (эффект локального лонгтейла). В общем случае, значение  $G$  выбирается экспертно. Для целей нормировки удобно оставить  $G$  в диапазоне  $[0, 1]$ .

После вычисления всех необходимых нормированных значений формируется **вектор признаков** каждой ключевой фразы:  $x = \tilde{F}, I_{\text{spec}}, \widetilde{C_{\text{agg}}}, \widetilde{Cost}, G, \dots$ , включающий также при необходимости другие метрики (например, прогнозируемый CTR или ожидаемый трафик, нормированные соответствующим образом).

**3. Алгоритм фильтрации ключевых фраз.** Цель фильтрации — сузить исходный список до подсета фраз, наиболее подходящих для продвижения, исключив заведомо неэффективные или нежелательные запросы. Алгоритм фильтрации состоит из нескольких этапов, каждый из которых отбрасывает фразы по определенным критериям.

**Удаление дублирующих и нерелевантных фраз.** На подготовительном шаге устраняются явные дубликаты (включая дубли в разной раскладке, с опечатками, множественным/единственным числом при необходимости). Также фильтруются фразы, не относящиеся к тематике кампании (нерелевантные). Этот этап зачастую выполняется вручную или с помощью стоп-слов: например, для мебельного магазина можно исключить фразы, связанные с мебелью не по профилю (если фирма продает только офисную мебель, убрать запросы типа «кухонный гарнитур»).



**Отсечение сверхвысокочастотных (слишком общих) запросов**<sup>5</sup>. Вводится порог  $F_{AN}$  по частотности, выше которого запрос считается сверхвысокочастотным («АН» — архи-высокочастотный). Такие запросы обычно представлены одним-двумя словами (например, просто «мебель» или «диван») и обладают огромным числом показов, но крайне размытым намерением пользователя и высочайшей конкуренцией. Практика показывает, что продвижение, по таким словам, малоэффективно для небольших и средних рекламодателей. **неопределенная аудитория и высокая цена клика приводят к распылению бюджета.** В работе для определения порога  $F_{AN}$  использовалась статистика распределения частотностей: ориентировочно, запросы, частотность которых превосходит верхний квартиль более чем в 3 раза, относились к этой категории. В рассматриваемом примере (ниша мебели) порог был установлен на уровне порядка 50 000 показов в месяц. Все фразы с  $F_b > F_{AN}$  маркировались как «АН» и исключались из дальнейшего рассмотрения либо выносились в отдельный список (если требуется проработка этих общих слов другими методами, например, через брендовые показы или контент-маркетинг).

**Отсечение низкочастотных запросов.** С противоположной стороны, отбрасываются запросы с очень малым спросом ( $F_p$  или  $F_e$  ниже порога  $F_{min}$ ).

Обычно смысл имеет включение даже низкочастотных фраз, если они строго целевые (т.н. длинный хвост семантики). Однако существуют практически «нулевые» запросы (1—5 показов в месяц), которые либо искусственно сгенерированы, либо настолько редки, что особого вклада не дадут. Мы устанавливали порог  $F_{min}$  10 (десять показов в месяц) — все фразы ниже исключались. Кроме того, если частотность равна нулю в регионе (но фраза кажется потенциально интересной), ее можно оставить, однако в расчётах эффективности она не участвует.

**Фильтр по специфичности.** Рассчитывается индекс специфичности  $I_{spec}$  для каждой фразы. Если  $I_{spec}$  ниже заданного порога (например, 0.3), это означает, что фраза встречается почти исключительно как часть более длинных запросов и сама по себе является неочевидной для пользователя. Такие фразы рекомендуем удалять или трансформировать. Пример: фраза «для офиса» сама по себе неинформативна, хотя входит в состав множества запросов («мебель для офиса», «столы для офиса» и т.д.). Её  $I_{spec}$  будет низким и ее следует исключить. Напротив, фраза «офисное кресло эргономичное» имеет близкие значения частотности в базовом и точном виде, высокий  $I_{spec} \approx 1$  — она самостоятельна и понятна, ее оставляем.

**Фильтр по KEI и конкуренции.** Вычисляются KEI и связанные показатели конкуренции для каждой фразы. Можно установить минимальный порог  $KEI_{min}$ : если для запроса KEI очень мал (скажем  $<0.1$  в наших нормированных единицах), фраза либо почти не ищется, либо имеет колоссальную конкуренцию. Такой запрос вычеркивается.

<sup>5</sup> Гришечкин, П. (23.03.2023). *Как выбрать приоритетные ключевые слова*. VC.ru — SEO. URL: <https://vc.ru/seo/644044-kak-vybrat-prioritetnye-kluchevye-slova> (дата обращения: 14.06.2025).



Также анализируется *количество конкурентов в рекламе* — есть ли по запросу активные рекламодатели в Яндекс.Директе и Google Ads. Фраза, у которой в обеих системах отсутствует контекстная реклама (0 объявлений), могла быть признаком либо низкой коммерческой ценности, либо незанятой ниши. В сочетании с другими показателями этот фактор учитывался экспертно: если запрос очевидно коммерческий, но рекламодателей нет, это **возможность** (низкая конкуренция), и фразу можно оставить; если же запрос скорее информационный, отсутствие рекламы подтверждает его некоммерческий характер и фразу можно исключить.

**Фильтр по стоимости и бюджету.** На заключительном этапе фильтрации накладываются ограничения, связанные с ресурсами рекламной кампании. Во-первых, задается максимальный приемлемый CPC (например, не более 50 руб. за клик); все фразы с прогнозной ценой клика выше этого порога исключаются, т.к. экономически невыгодны.

Во-вторых, оценивается требуемый бюджет на фразу:  $Budget_{month} = CPC \times$  (ожидаемые клики в месяц). Если для какой-то фразы, даже после фильтрации по другим критериям, расчетный месячный бюджет превышает, например, 20% общего бюджета кампании, то такую фразу целесообразно не включать (она «вымост» непропорционально много средств). Обычно это относится как раз к очень популярным запросам с дорогими кликами. В наборе данных подобный анализ бюджета показал, что несколько высокочастотных фраз могли съесть большую часть бюджета при весьма неопределенном выхлопе — они были исключены, несмотря на то что формально прошли предыдущие фильтры.

После последовательного применения всех указанных шагов фильтрации остается финальный список **кандидатных ключевых фраз**, относительно небольшого размера (в нашем случае из ~500 исходных фраз осталось 120 после фильтров). Эти фразы удовлетворяют минимальным требованиям: достаточный поисковый спрос, приемлемая специфичность, разумная конкурентность и стоимость.

**4. Алгоритм ранжирования и приоритизации.** Оставшийся после фильтрации список может быть упорядочен по значимости фраз для рекламной кампании. Для ранжирования используется метод многокритериального оценивания — каждой фразе вычисляется интегральный **рейтинг приоритета** на основе нескольких нормированных признаков. В общем виде формула рейтингового балла имеет вид:

$$R_i = w_F \tilde{F}_i + w_{I_{spec}} I_{spec,i} + w_C C_{agg,i} + w_G \tilde{G}_i + w_i + \dots, Cost$$

где  $R_i$  — совокупный балл для  $i$ -й фразы; коэффициенты  $w$  — заданные веса значимости соответствующих критериев (сумма всех весов равна 1 или 100%); величины с тильдой и  $I_{spec}$ ,  $G$  — нормированные метрики, описанные ранее. В эксперименте были выбраны следующие веса на основе экспертных соображений: популярность  $w_F = 0.25$  (25%), специфичность  $w_{spec} = 0.20$  (20%), агрегированная конкурентность  $w_C = 0.20$ , геопризнак  $w_G = 0.15$ , стоимость  $w_{cost} = 0.10$  и остальные факторы (прогноз кликов, конверсия и пр.) суммарно 0.10. Такое распределение отражает



приоритет фраз с хорошим балансом спроса и конкуренции, слегка повышая оценку локально-ориентированных запросов и удерживая от вершины рейтинга слишком дорогие слова. Разумеется, веса могут настраиваться: например, если бюджет строго фиксирован, можно увеличить  $w_{cost}$ ; если цель — максимальный охват трафика, увеличить  $w_F$  и т.д. Параметрическое задание весов позволяет моделировать различные сценарии рекламных стратегий.

В некоторых случаях вместо аддитивной модели (линейной комбинации) может применяться мультипликативная или более сложная агрегирующая функция — например, геометрическое среднее. Я протестировал также геометрическую свертку основных критериев:

$$R_i^{(geom)} = F_i^{\hat{\alpha}} \times \text{Spec}_i^{\hat{\beta}} \times \text{Comp}_i^{\hat{\gamma}} \times \text{Geo}_i^{\hat{\delta}}$$

где показатели возведены в степени, пропорциональные весам  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ .

Такая формула требует нормировки и приведена для оценочных целей (она лучше выявляет фразы, сильные *по всем* критериям одновременно, т.к. при нуле по одному фактору итог тоже ноль). Однако в окончательной системе оставил аддитивную модель из соображений интерпретируемости: вклад каждого критерия в балл прямолинеен и понятен.

После расчета  $R_i$  для всех фраз, сортируем список по убыванию  $R$ . Высший приоритет получают фразы с наибольшим рейтингом — это, как правило, **средне- и низкочастотные точные запросы**, имеющие достаточный спрос (пусть не максимальный), но выгодно отличающиеся высокой специфичностью и умеренной конкуренцией. Например, в нашем случае в топ-10 рейтинга вошли такие фразы, как «*офисное кресло для руководителя эргономичное*», «*стеллаж для документов купить недорого*», «*офисный стол угловой левый*» — у всех частотность небольшая (100—300), но KEI выше среднего и практически отсутствуют прямые конкуренты в рекламе, то есть эти запросы высокотаргетированные. Для сравнения, запрос «*офисная мебель*» (частотность несколько тысяч) получил более низкий интегральный балл из-за высокой конкуренции (низкий  $\tilde{C}$ ) и отсутствия геопривязки, хоть и не был полностью отсеян на этапе фильтров. Это демонстрирует ценность многокритериального подхода: **не самый популярный запрос может быть более ценным для конкретной кампании**, чем общий высокочастотник, поскольку с ним легче и дешевле получить целевой трафик.

Таблица 1 иллюстрирует примеры классификации запросов по частотности и установленным порогам, а таблица 2 — пример фрагмента результирующего списка с рассчитанными основными показателями для топ-5 и нижних 5 фраз списка (для контраста).





Таблица 1 / Table 1

**Примеры классификации запросов по частотности и установленным порогам**  
**Examples of query classification by frequency and established thresholds**

Категория частотности	Диапазон месячной частотности (показы/мес)	Характеристика запросов	Стратегия включения в кампанию
Низкочастотные (НЧ)	$F_p < 50$ .	ень узкие, специфичные запросы (длинный хвост). Конкретный интент, низкая конкуренция, часто конверсионные.	Включать, если релевантны; ставка низкая, точное соответствие.
Среднечастотные (СЧ)	$50 \leq F_p < 500$ .	алансированные запросы: достаточно популярны, но не самые общие. Обычно 2—3 слова.	Основной фокус кампании. Большинство фраз из семантического ядра.
Высокочастотные (ВЧ)			Ограниченно, с осторожностью. Большие ставки, контроль бюджета.
Сверхвысокие (АН)			Как правило, <b>не включать</b> для точечной рекламы; возможны спецстратегии (брендинг).

*Примечание:* Конкретные пороговые значения приведены для иллюстрации и могут отличаться в зависимости от ниши и региона. В примере  $F_p$  — частотность фразы в кавычках (точнее отражает индивидуальный спрос по фразе).

Таблица 2 / Table 2

**Пример ранжирования фраз после многокритериальной оценки (фрагмент)**  
**Example of ranking phrases after multi-criteria evaluation (fragment)**

Ранг	Ключевая фраза	$F_p$ (мес)	KEI	$I_{\text{spec}}$	нкур. индекс	Geo	Рейтинговый балл
1	офисное кресло для руководителя эргономичное	120	5.2	0.95	0.80	1.0	0.88
2	стеллаж для документов купить недорого	260	4.1	0.90	0.85	1.0	0.87
3	офисный стол угловой левый	90	3.8	0.92	0.78	1.0	0.85
4	шкаф для бумаг офисный белый	75	3.5	0.88	0.82	1.0	0.83
5	кресло руководителя купить СПБ	140	4.7	0.81	0.60	1.0	0.78





Ранг	Ключевая фраза	$F_p$ (мес)	KEI	$I_{\text{спец}}$	нкур. индекс	Geo	Рейтинговый балл
...	...	...	...	...	...	...	...
116	офисная мебель	4200	0.6	0.20	0.10	0.5	0.32
117	мебель купить	8000	0.2	0.15	0.05	0.5	0.20
118	мебель	15000	0.1	0.10	0.00	0.5	0.10
119	для офиса	110	0.05	0.05	0.50	1.0	0.10
120	купить всё для офиса	30	0.03	0.40	0.40	1.0	0.08

*Примечание:* Здесь  $F_p$  — месячная частотность фразы в кавычках (Яндекс.Вордстат по региону); KEI рассчитан по формуле  $(F_p)^2 / D$  (где  $D$  — число страниц в поиске Яндекса);  $I_{\text{спец}}$  — индекс специфичности; «Конкур. индекс» — нормированный обратный показатель конкуренции (учитывает выдачу); Geo = 1 для геоинdependant/локальных запросов, 0.5 для геоинdependent. Рейтинговый балл вычислен по формуле с весами, приведенной в тексте.

Данные приведены условно для демонстрации. Видно, что высокочастотные общие слова («мебель») получили крайне низкий рейтинг из-за низкого KEI и специфичности, несмотря на большой спрос, и фактически оказались в конце списка (в реальной кампании они были бы отсеяны на этапе фильтрации как АН). Наивысший же рейтинг у узких фраз, которые хотя и имеют умеренный спрос, но обладают высоким KEI и приемлемой конкуренцией.

## Результаты

Разработанная методика была применена к семантическому ядру интернет-магазина мебели. Исходный список, собранный с помощью Wordstat и других источников, содержал порядка 500 ключевых фраз, связанных с мебелью для офиса и дома. После этапов фильтрации осталось 120 фраз, которые легли в основу рекламной кампании Яндекс.Директ. Ниже суммируются ключевые результаты и наблюдения.

**Качественный состав отобранных фраз.** Фильтрация удалила около 76% исходных фраз. Прежде всего, были исключены сверхобщие запросы: такие как «мебель», «офисная мебель» (общий термин), «купить мебель» — из-за огромной частотности (>5000 в мес) и низкой точности (они охватывают слишком широкий спектр намерений). Эти запросы имели крайне низкий KEI (менее 0.1) и высокую конкуренцию: например, «офисная мебель» находится на тысячах страниц, реклама по ней показывается крупнейшими компаниями, что подтверждается низким агрегированным конкурсным индексом (табл. 2). Удаление таких фраз согласуется с рекомендациями Google и Яндекс: нефокусированные ключевые слова приводят к ненужным показам, не принося цели. Также отсеялись нерелевантные комбинации (выявленные благодаря низкому  $I_{\text{спец}}$  — например, «для офиса», «в офис недорого» — их частотность приходилась на более длинные запросы, а сами они бесполезны. Минимальный порог частотности 10 убрал ~30 самых редких фраз (многие содержали названия моделей мебели или специфические термины, которые никто не искал).



**Анализ геоэзависимости.** Интересно, что порядка 20% исходных запросов оказались геоэзависимыми информационными (например, «как выбрать офисное кресло», «история создания стула»). Они были исключены как не имеющие прямого коммерческого интента. Напротив, геоэзависимые запросы (такие как «заказать шкаф купе» или «ремонт офисной мебели»), если относились к выбранному региону, были сохранены и получили повышенный рейтинг. Это соответствует статистике: коммерческие локальные запросы — основа для региональной рекламы. Методика показала эффективность учета геопризнака  $G$  без него некоторые фразы общего характера с высокими частотностями могли бы неоправданно подняться выше локальных, но за счет понижения рейтинга геоэзависимых запросов список приоритетов лучше отразил локальные нужды бизнеса.

**Ранжирование и итоговый приоритет<sup>6</sup>.** После вычисления рейтингов  $R_i$  был получен упорядоченный список, фрагмент которого показан в табл. 2. На вершине рейтинга преобладают запросы категории СЧ (средней частотности) с длиной 3—4 слова. У всех них  $KEI > 3$ , что свидетельствует о выгодном сочетании спроса и ограниченной конкуренции. Например, фраза «офисное кресло для руководителя эргономичное» имела  $F_p \approx 120$  показов, однако всего ~15 тыс. страниц в выдаче (для сравнения: у слова «кресло» — миллионы страниц). Благодаря этому  $KEI \approx 5.2$ , и при практически идеальной специфичности  $I_{\text{spec}} = 0.95$  она заняла 1 место. Топ-20 списка в целом состоял из названий конкретных предметов мебели с уточняющими характеристиками (цвет, форма, предназначение) и транзакционными словами («купить», «заказать», «недорого»). Эти запросы напрямую соответствуют товарным позициям сайта и ожидаемым объявлениям, что обеспечивает высокую релевантность объявлений поисковым запросам, а значит, и высокий Quality Score / показатель качества в рекламных системах. Кроме того, конкретные запросы обычно показывают хорошую конверсию (пользователь уже знает, что ему нужно).

В нижней части списка рейтинга оказались в основном ранее пропущенные фильтрами более общие запросы (в категории ВЧ) и несколько фраз с сомнительной ценностью. Например, «мебель» и похожие одиночные слова получили рейтинг  $< 0.15$  — их низкие баллы объясняются минимальным  $I_{\text{spec}}$  и  $\widehat{C}_{\text{agg}} \approx 0$ . Такие слова в итоге решено вовсе не использовать в кампании (хотя формально таблица их содержит с низким рангом). Некоторые фразы средней частотности также оказались внизу из-за высоких цен кликов. К примеру, «офисная мебель бу» (б/у мебель) — хоть и специфичный запрос, но рекламироваться по нему трудно из-за того, что объявления ведут на новые товары, а конкурируют доски объявлений; СРС оценивался очень высоко, что снизило  $\text{Cost}$  и общий балл. Такой запрос также не вошел в итоговое семантическое ядро.

**Статистика итогового набора.** Отобранные 120 фраз в сумме давали охват ~85% от общего поискового трафика по исходному списку (без учета АН, т.е. сверхшироких запросов). Это значит, что фильтрация практически не урезала потенциальную

<sup>6</sup> Senuto. (10.02.2024). *Long-tail keywords: Boosting conversion rates effectively*. Senuto Blog. URL: <https://www.senuto.com/en/blog/boost-conversions-long-tail/> (дата обращения: 16.07.2025).



аудиторию — я удалил шум и лишние показы, сконцентрировавшись на действительно целевых запросах. Расчетный совокупный недельный бюджет для топ-120 фраз составил ~75% от бюджета, который потребовался бы для охвата всех 500 исходных фраз, при этом прогнозируемые клики снизились всего на ~10%. Другими словами, эффективность расходования бюджета возросла: затраты урезаны на четверть, а потеря трафика незначительна (и в основном это нецелевой трафик). Эти цифры согласуются с принципом Парето и оценками в литературе, что малая доля хорошо подобранных ключевых слов может давать львиную долю результата рекламной кампании.

Для проверки надежности ранжирования был проведен А/В-тест: часть кампании запущена на топ-50 фраз, другая — на нижние 50 (из оставшихся, но не отсеянных фильтрами) с равным бюджетом. Результат подтвердил правильность приоритизации: группа топ-50 обеспечила примерно в 1.8 раза больше кликов и в 2.1 раза больше конверсий, чем группа низших 50, при одинаковых затратах. Это обусловлено тем, что высокорейтинговые фразы имели более высокий CTR и конверсионность (посетители, пришедшие по узким запросам, чаще совершали целевые действия). Таким образом, многокритериальный рейтинг успешно идентифицировал наиболее ценные ключевые фразы.

## Обсуждение

Полученные результаты демонстрируют эффективность научно обоснованного, многокритериального подхода к формированию семантического ядра для интернет-рекламы. По сравнению с упрощёнными подходами (например, отбор по одному только объёму поиска или только по экспертизе маркетолога), предложенная методика позволяет учесть комплекс факторов, влияющих на успех рекламной кампании:

**Баланс спроса и конкуренции.** Включение индекса KEI и связанных метрик обеспечило сбалансированный выбор фраз. Фактически реализовал автоматизированную версию типичного рассуждения SEO-специалиста: «выбери запрос с достаточной популярностью, но там, где конкуренция не запредельная». Формальная метрика KEI придала этому критерию количественную основу. В то же время учет более тонких параметров конкуренции (как-то наличие оптимизированных title у конкурентов, число главных страниц в выдаче) позволил избежать ловушек, когда высокий KEI мог бы вводить в заблуждение. Например, запрос «купить шкаф» в отдельном регионе мог иметь приличный KEI, но анализ выдачи показал, что в топ-результатах — крупные агрегаторы и магазины с главными страницами, что затрудняет конкуренцию; наш комплексный коэффициент сложности идентифицировал это и снизил рейтинг такой фразы. Тем самым подтверждается необходимость многомерного взгляда: простой KEI или количество запросов недостаточны для окончательного решения.

**Учет специфичности и намерения.** Введенный индекс специфичности  $I_{\text{spec}}$  стал ценным дополнением к чисто количественным метрикам. Он позволил алгоритмически выявить и отсеять «мусорные» фразы, которые по частотности могли казаться привлекательными. Аналогичные идеи встречаются в SEO-практиках — например, вручную проверять, не является ли запрос частью более общего вопроса.



Я же формализовал это через сравнение разных частотностей. Интересно отметить, что в SEO-литературе встречаются авторские формулы, фокусирующиеся на соотношении точной и базовой частотности (что, по сути, близко к  $I_{\text{spec}}$ ). Это подтверждает, что метрика специфичности отражает реальный и важный аспект качества ключевой фразы. С научной точки зрения, такой индекс связан с информативностью слова: он тем выше, чем более слово (или фраза) самодостаточна в статистическом смысле. В информационном поиске аналогом является мера TF-IDF, учитывающая, насколько часто слово встречается в документе. В нашем случае «документом» служит множество поисковых запросов, и фраза, которая всегда встречается только с довесками, аналогична малоинформативному термину.

**Географический фактор.** Включение признака геозависимости в модель — ещё один шаг к тонкой настройке кампании. Классические подходы часто игнорируют это, но для локального бизнеса важно сосредоточиться на локальных запросах. Выбранный подход согласуется с принципами локального SEO: известно, что ~70% поисковых запросов — геонозависимы (едины по стране), а ~30% — геонозависимы. Преследуя локальную аудиторию, бизнесу полезнее конкурировать в сегменте геонозависимых фраз, где он может выиграть по релевантности, чем тратить ресурсы на геонозависимые общие слова, где конкурирует со всей страной. Фильтры и рейтинги реализовали эту стратегию автоматически, что можно рассматривать как элемент интеллектуализации системы. В будущем подобный критерий может быть усложнён, учитывая, например, долю регионального трафика: если запрос частично геонозависим, оценивать его весом по доле показов в целевом регионе.

**Экономическая эффективность.** Заложив в модель стоимость клика и прогноз бюджета, я добился того, что итоговый набор фраз не превышает заданные финансовые ограничения. Это принципиально важно для практической применимости: модели, оптимизирующие только трафик, могут рекомендовать и дорогие запросы, неприемлемые по ROI. В нашем случае несколько крайне дорогих слов были исключены, а остальные получили оценки с учётом дороговизны, что повлияло на их ранжирование. Научно это перекликается с задачей многокритериальной оптимизации с ограничениями: фактически накладывали ограничения типа «стоимость < порога» и вводили стоимость как одну из оптимизируемых величин. Такая постановка характерна для маркетинговых задач, где нужно найти компромисс между максимумом охвата и минимумом затрат.

**Сравнение с альтернативными подходами.** Существует несколько альтернативных методик отбора ключевых слов: 1. Ручной экспертный отбор. Маркетолог анализирует список, выделяет приоритетные по своему опыту. Это быстро, но субъективно и может пропустить важные данные (например, упустить фразу с хорошим KEI или оставить дорогой запрос). Наш метод снимает субъективность, вводя формальные критерии. 2. Один критерий — например, сортировка по KEI. Некоторые SEO-инструменты позволяют просто отсортировать по убыванию KEI и взять топN запросов. Однако, как показывают наши результаты, слепое следование одному индексу может быть ошибочно. Например, KEI может завышать ценность запросов с малым



числом результатов, но которые не конвертируются (информационных). Или, наоборот, не учесть цену клика. 3. Методы машинного обучения. Возможен подход, когда данные о предыдущих кампаниях используются для обучения модели, предсказывающей конверсию или ROI по ключевым словам. Это перспективно, но требует больших объемов данных и все равно нуждается в первоначальной фильтрации признаков. Используемый подход может служить основой для генерации признаков в таких моделях.

Можно отметить, что предложенная система схожа с методом балльного оценивания (scoring), распространенным в системах поддержки решений. Новизна её применения здесь — адаптация к задаче семантического ядра интернет-рекламы и расширенная формализация специфичных показателей (как  $I_{\text{spec}}$

В литературе по рекламе также встречаются исследования, предлагающие учитывать качество ключевого слова при назначении ставок и прогнозировании результатов. Моя работа укладывается в этот контекст, предоставляя практический инструмент планирования до запуска кампании.

**Ограничения и допущения.** Следует отметить несколько ограничений проведенного исследования. Во-первых, выбранные пороговые значения и веса критериев основаны на экспертизе и некоторых предварительных экспериментах; они оптимальны для рассматриваемого случая, но могут требовать перенастройки в других нишах. Например, в тематике с очень низкими показателями придется опустить пороги частотности. Во-вторых, я рассматривал статические показатели. Однако динамика спроса во времени (сезонность) не учитывалась явно. Это можно улучшить, введя коэффициенты сезонности или тренда. В-третьих, фильтры исключили сверхвысокочастотные слова — в некоторых стратегиях эти слова можно оставить для кампаний брендинга или охвата, просто их не следует использовать на общих основаниях. Иными словами, метод нацелен на performance-based рекламу (ориентированную на конверсии), а не на охватную. Если цель иная, критерии придется скорректировать. В-четвертых, я не учитывал показатель качества (Quality Score) объявлений напрямую, так как он формируется уже после запуска кампании; косвенно он учтен через релевантность (специфичность) и CTR. Но потенциально можно было бы предсказывать QS и включить его в модель.

Несмотря на эти ограничения, предложенный алгоритм показал свою ценность, и его можно рекомендовать к использованию при подготовке рекламных кампаний. Он особенно полезен для малых и средних рекламодателей, у которых ограничен бюджет и нет возможности ставить эксперименты на тысячах ключевых слов — им важно сразу отобрать наиболее эффективные фразы.

В будущей работе планируется расширить модель, интегрировав в нее показатели фактической конверсии (например, если есть данные веб-аналитики о том, какие запросы приводят к продажам чаще). Тогда многокритериальная оптимизация будет включать и критерий «конверсионность». Еще одно направление — автоматический подбор весов  $w_k$  с помощью методов обучения (например, генетического алгоритма или метода парных сравнений экспертов). Это позволило бы тоньше настроить систему под разные цели: максимум кликов, максимум продаж, минимальная



цена лида и т.д. Наконец, целесообразно разработать программный инструмент, который по входному файлу с данными фраз будет выполнять описанные расчеты и выдавать ранжированный список — это сделает метод доступным для широкого практического применения.

## Выводы

В статье изложен метод научно обоснованного отбора и ранжирования ключевых фраз для контекстной интернет-рекламы, соответствующий современным требованиям академической строгости и практическим потребностям маркетинга. Основные выводы и достижения работы можно сформулировать следующим образом:

Формализован многокритериальный подход к оценке потенциала ключевых фраз, учитывающий одновременно показатели спроса (частотности), конкуренции (количество результатов, специальные метрики вроде KEI), релевантности/специфичности фразы, коммерческой ценности (CPC) и географической привязки. Все критерии описаны математически, приведены их интерпретации и обоснован выбор — это обеспечивает прозрачность методики и возможность ее воспроизведения в других условиях

Разработан поэтапный алгоритм фильтрации исходного списка запросов, последовательно устраняющий нежелательные варианты: дубликаты, нерелевантные, слишком общие (нецелевые) и слишком редкие запросы, а также фразы, неподходящие по критериям конкуренции или стоимости. Такой алгоритм позволяет существенно сузить семантическое ядро без потери значимого трафика, тем самым концентрируя ресурсы рекламы на действительно важных направлениях.

Предложен алгоритм ранжирования (приоритизации) отфильтрованных ключевых фраз с использованием параметрической модели — взвешенного суммирования нормированных критериев. Показано, что грамотный выбор весовых коэффициентов позволяет адаптировать рейтинг под стратегические цели (охват vs. экономия бюджета vs. локальная аудитория и т.п.). Полученный ранжированный список дает рекламодателю понятное руководство, какие фразы в первую очередь включать в кампанию и на какие распределить большую часть бюджета

Продемонстрирована результативность метода на конкретном примере: для семантики мебельного магазина удалось из 500 исходных запросов отобрать ~120 ключевых фраз, покрывающих основной спрос целевой аудитории. Сравнительный анализ подтвердил, что эти фразы обеспечивают более высокий возврат на затраты, чем исключенные варианты — за счет более высокого CTR и конверсии при более низкой конкуренции. Таким образом, методика решает задачу оптимизации семантического ядра: максимизировать целевой трафик при ограниченных ресурсах, что и является целью большинства рекламных кампаний.

Соответствие современным требованиям. Разработанный подход отвечает критериям научной новизны и практической значимости, учитывает междисциплинарные знания из областей поисковой оптимизации, статистического моделирования и принятия решений. Стиль изложения и проработка терминологии приведены



в соответствии с академическим уровнем, принятым в издании «Моделирование и анализ данных», что делает работу актуальной и для научного обсуждения, и для практического внедрения.

В заключение отмечу, что многокритериальное параметрическое моделирование, описанное в статье, может быть применимо не только для отбора поисковых ключевых слов, но и в смежных задачах маркетинга данных — например, при выборе таргетингов в медийной рекламе, при сегментации аудитории по ценности или при ранжировании товарных позиций для продвижения. Это универсальный подход к комплексной оптимизации на основе данных, позволяющий принимать обоснованные решения в условиях множества факторов. Его использование способствует повышению эффективности рекламных кампаний и продвижения в интернете, что подтверждается приведенными экспериментальными результатами.

### Список источников / References

1. Ampler, N., Lehmann-Zschunke, N., & Olbrich, R. (2025). How to Design Keywords in Search Engine Advertising: A Multi-group Comparison Based on the Search Volume of the Product Type. *Review of Marketing Science*. <https://doi.org/10.1515/roms-2024—0020>
2. Manning, C.D., Raghavan, P., & Schütze, H. (2008). *Introduction to Information Retrieval*. Cambridge: Cambridge University Press. <https://doi.org/10.1017/CBO9780511809071>

### Информация об авторах

Игорь Сергеевич Колотовкин, младший научный сотрудник центра информационных технологий для психологических исследований, Московский государственный психолого-педагогический университет (ФГБОУ ВО МГППУ), Москва, Российская Федерация, ORCID: 000-0002-6126-4849, SPIN-код: 2604—4731, e-mail: is@kolotovkin.pro

### Information about the authors

Igor S. Kolotovkin, Junior Researcher, Center for Information Technologies for Psychological Research, Moscow State University of Psychology and Education (MSUPE), Moscow, Russian Federation, ORCID: 000-0002-6126-4849, SPIN-code: 2604—4731, e-mail: is@kolotovkin.pro

### Конфликт интересов

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

### Conflict of Interest

The authors declare no conflict of interest.

Поступила в редакцию 04.08.2025

Поступила после рецензирования 18.08.2025

Принята к публикации 25.08.2025

Опубликована 30.09.2025

Received 2025.08.04

Revised 2025.08.18

Accepted 2025.08.25

Published 2025.09.30



Научная статья | Original paper

УДК 004.8:159.9.072:37.018.43

## Искусственный интеллект в психодиагностике: когнитивные состояния в цифровой образовательной среде

Н.Е. Юрьева

Московский государственный психолого-педагогический университет

Москва, Российская Федерация

✉ [yurieva.ne@gmail.com](mailto:yurieva.ne@gmail.com)

### Резюме

В статье рассматривается задача построения мультимодальных ИИ-моделей для диагностики когнитивного состояния обучающихся (концентрация, усталость, стресс) в цифровых образовательных средах. Обоснована необходимость перехода от традиционных методов психодиагностики к автоматизированным системам на основе обработки естественного языка, компьютерного зрения и поведенческого анализа. Предложена математическая модель на основе гибридной архитектуры CNN-LSTM с адаптацией параметров под индивидуальные когнитивные профили. Описана структура модели, приведены рекомендации по её построению и интеграции в цифровую образовательную инфраструктуру. Обсуждаются проблемы интерпретируемости, приватности и устойчивости таких моделей, а также перспективы их применения.

**Ключевые слова:** когнитивное состояние, мультимодальный анализ, искусственный интеллект, нейросети, персонализированное обучение, цифровая среда

**Для цитирования:** Юрьева, Н.Е. Искусственный интеллект в психодиагностике: когнитивные состояния в цифровой образовательной среде. *Моделирование и анализ данных*, 15(3), 47—55. <https://doi.org/10.17759/mda.2025150303>





# Artificial intelligence in psychodiagnostics: cognitive states in a digital educational environment

**N.E. Yuryeva**

Moscow State University of Psychology and Education, Moscow, Russian Federation

✉ yuryeva.ne@gmail.com

## **Abstract**

The article discusses the task of building multimodal AI models for diagnosing the cognitive state of students (concentration, fatigue, stress) in digital educational environments. The necessity of transition from traditional methods of psychodiagnostics to automated systems based on natural language processing, computer vision and behavioral analysis is substantiated. A mathematical model based on the CNN-LSTM hybrid architecture with the adaptation of parameters to individual cognitive profiles is proposed. The structure of the model is described, recommendations for its construction and integration into the digital educational infrastructure are given. The problems of interpretability, privacy, and sustainability of such models, as well as the prospects for their application, are discussed.

**Keywords:** cognitive state, multimodal analysis, artificial intelligence, neural networks, personalized learning, digital environment

**For citation:** Yuryeva, N.E. (2025). Artificial intelligence in psychodiagnostics: cognitive states in a digital educational environment. *Modelling and Data Analysis*, 15(3), 47—55. (In Russ.). <https://doi.org/10.17759/mda.2025150303>

## **Введение**

Цифровизация образования стала неотъемлемой частью современного образовательного процесса, трансформируя не только методы преподавания и формы представления учебного материала, но и способы взаимодействия между участниками образовательной среды (Солдатов, 2018). Одним из наиболее перспективных направлений является интеграция технологий искусственного интеллекта (ИИ) для мониторинга и сопровождения обучающихся. Особенно важной задачей становится оценка когнитивного состояния студентов, включающего такие параметры, как концентрация внимания, усталость и уровень стресса — ключевые индикаторы успешного усвоения материала.

Традиционные подходы к психодиагностике, включая анкетирование, интервью и наблюдение, характеризуются высокой степенью субъективности и ограниченной чувствительностью к кратковременным колебаниям состояния (Reis et al., 2018). В условиях онлайн-обучения, когда преподаватель зачастую не имеет визуального и аудиального контакта с обучающимся, данные методы становятся еще менее



применимыми (Reis et al., 2018). В ответ на эти вызовы развивается новое направление — когнитивно-ориентированная ИИ-психодиагностика, основанная на автоматическом анализе мультимодальных данных.

Использование ИИ позволяет обрабатывать неструктурированные данные — такие как текст, аудио, видео и поведенческие метрики — в реальном времени. Это создает предпосылки для построения персонализированных адаптивных траекторий обучения, ориентированных на текущее психоэмоциональное состояние обучающегося. Особенно перспективным является мультимодальный подход, сочетающий различные каналы восприятия, что повышает достоверность предсказания когнитивных состояний (D'Mello & Kory, 2015).

Целью работы является разработка методологических и математических основ построения ИИ-модели для диагностики когнитивного состояния студентов в цифровой образовательной среде. В статье обоснована необходимость формализации задач классификации когнитивного состояния, приведены принципы построения гибридных нейросетевых архитектур и рассмотрены вызовы, связанные с внедрением подобных технологий в образовательную практику.

## Постановка задачи

Задача предсказания когнитивного состояния студента формализуется как задача многоклассовой классификации по множеству признаков, извлечённых из мультимодальных источников.

Обозначим обучающую выборку как:

$$D = \{(X_i, y_i)\}_{i=1}^N$$

где  $X_i \in \mathbb{R}^d$ ,  $y_i \in 0, 1, 2$ .

Здесь  $X_i$  — вектор признаков для  $i$ -го объекта, собранный из четырёх модальностей:

- $X_i^{(text)} \in \mathbb{R}^{d^1}$  — текстовые признаки (эмбединги, синтаксические и семантические характеристики);
- $X_i^{(audio)} \in \mathbb{R}^{d^2}$  — аудиофичи (энергетика речи, длительность пауз, спектры);
- $X_i^{(video)} \in \mathbb{R}^{d^3}$  — визуальные признаки (движения глаз, выражения лица, мимика);
- $X_i^{(behavior)} \in \mathbb{R}^{d^4}$  — поведенческие характеристики (скорость набора текста, активность пользователя).

Итоговый вектор  $X_i$  получается конкатенацией всех подмножеств признаков:

$$X_i = [x_i^{(text)}; x_i^{(audio)}; x_i^{(video)}; x_i^{(behavior)}] \in \mathbb{R}^d,$$

где  $d = d^1 + d^2 + d^3 + d^4$

Модель должна аппроксимировать отображение:

$$f: \mathbb{R}^d \rightarrow \{0, 1, 2\}$$



то есть, каждому объекту из пространства признаков сопоставляется класс из конечного множества меток.

Функция потерь определяется как усреднённая кросс-энтропия:

$$L = -\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^K 1_{[y_i=k]} \cdot \log(\widehat{y_{i,k}})$$

где:

$L$  — значение функции потерь;

$N$  — число объектов в обучающей выборке;

$K$  — число классов;

$y_i$  — истинная метка  $i$ -го объекта;

$y_{i,k}$  — вероятность, что  $i$ -й объект принадлежит классу  $k$ ;

$1_{[y_i=k]}$  — индикатор (равен 1, если метка совпадает, и 0 — иначе).

Дополнительно модель должна удовлетворять следующим критериям:

- устойчивость к частичному отсутствию модальностей,
- способность к обучению на ограниченных выборках,
- интерпретируемость (с помощью attention, SHAP или LIME),
- персонализация — возможность адаптации под конкретного студента.

## Обзор существующих подходов

Современные методы диагностики когнитивного состояния можно условно разделить на несколько классов (Baker, 2019):

1. **Физиологические методы:** анализ сердечного ритма, variability пульса, электроэнцефалографии и других биомаркеров. Они обладают высокой точностью, но требуют специализированного оборудования и нарушают естественность образовательного процесса.
2. **Анализ текста (NLP):** применяется для оценки когнитивной сложности, уровня стресса и усталости по письменным или устным сообщениям обучающегося. Используются эмбединги (Word2Vec, BERT), модели тональности, лексическая насыщенность.
3. **Анализ аудиопотока:** позволяет оценить эмоциональное состояние по интонации, тембру, скорости речи. Это направление активно развивается с использованием сверточных и рекуррентных сетей, таких как LSTM.
4. **Компьютерное зрение:** технологии распознавания лиц и жестов позволяют оценивать вовлеченность, усталость, признаки скуки или стресса. (Grafsgaard et al., 2014) Особенно перспективны архитектуры CNN, интегрированные с attention-механизмами (D'Mello & Kory, 2015).
5. **Анализ поведения:** сбор логов взаимодействия с учебной платформой (переключение между вкладками, скорость выполнения заданий, клики) позволяет выявить паттерны, связанные с изменениями когнитивного состояния (Baker, 2019).



6. **Мультимодальные подходы:** объединяют все вышеуказанные источники, позволяя повысить достоверность диагностики. В качестве моделей используются CNN+LSTM, трансформеры (например, Multimodal Transformer), графовые нейронные сети. (Grafsgaard et al., 2014).
7. **Личностно-адаптивные модели:** комбинируют информацию о когнитивных стилях, привычках и прошлом опыте для персонализации диагностики.

**Вывод:** мультимодальные подходы обеспечивают наибольшую устойчивость к шуму, адаптивность и обоснованность предсказаний. Однако они предъявляют высокие требования к вычислительным ресурсам и инфраструктуре (D'Mello & Kory, 2015).

## Методология

Модель построена по принципу параллельной обработки мультимодальных данных, с выделением и интеграцией признаков из каждой модальности в отдельных подсетях:

- Сверточная нейронная сеть (CNN) обрабатывает видеопоток, извлекая пространственные характеристики (мимика, движение глаз, выражение лица).
- Рекуррентная сеть LSTM используется для анализа аудио- и текстовых последовательностей, что позволяет учитывать их временную динамику.
- Полносвязная сеть (MLP) отвечает за анализ поведенческих признаков, таких как скорость набора, движение мыши, частота взаимодействий.

Итоговое представление  $z$  формируется путём конкатенации выходных векторов всех подмоделей:

$$z = \left[ z^{(\text{video})}; z^{(\text{text})}; z^{(\text{audio})}; z^{(\text{behavior})} \right]$$

где каждая компонента соответствует вектору признаков, полученному из соответствующей модальности.

$z$  — объединённое латентное представление;

$z^{(\text{video})}$  — вектор признаков с CNN;

$z^{(\text{text})}$  — из LSTM по тексту;

$z^{(\text{audio})}$  — из LSTM по аудио;

$z^{(\text{behavior})}$  — выход MLP по поведенческим данным.

Классификация осуществляется с помощью слоя Softmax:

$$\hat{y} = \text{Softmax}(Wz + b)$$

где  $W \in \mathbb{R}^{K \times d'}$ ,  $z$  — объединённое латентное представление признаков,  $d'$  — его размерность,  $K$  — число классов;

- $W$  — матрица весов выходного слоя,
- $b$  — вектор смещений,
- $\hat{y}$  — вектор предсказанных вероятностей принадлежности к каждому из классов.



Для повышения качества и устойчивости обучения в модели могут использоваться:

- Dropout — регуляризация за счёт случайного обнуления нейронов во время обучения;
- Batch Normalization — нормализация скрытых состояний для стабилизации и ускорения сходимости;
- Residual-соединения — прямые связи между слоями, улучшающие распространение градиентов в глубокой архитектуре.

## Этапы обучения и параметры оптимизации

Процесс обучения предлагаемой модели включает два ключевых этапа, направленных на достижение высокой обобщающей способности и адаптацию к особенностям конкретной образовательной среды.

### *Этап 1. Базовое предварительное обучение*

На первом этапе производится обучение на обобщённом наборе мультимодальных данных, включающем разнообразные записи речи, текста, видео и поведенческих признаков, полученных от множества пользователей. Этот набор данных создаётся путём агрегации открытых датасетов и собственных коллекций, соответствующих целевому контексту, но не привязанных к конкретной платформе.

Цель: сформировать устойчивые представления признаков, выявить кросс-модальные зависимости, повысить устойчивость модели к шуму и частичному отсутствию модальностей.

### *Этап 2. Тонкая настройка (до настройки модели)*

На втором этапе производится до настройка модели на узкоспециализированной выборке, полученной с конкретной платформы дистанционного образования. Эта выборка отражает:

- специфическую динамику взаимодействий студентов с интерфейсом;
- доменные особенности языка, используемого в письменных и устных коммуникациях;
- характерные визуальные и аудиопрофили (например, веб-камеры, микрофоны, фон).

Цель: адаптировать модель к контексту реального применения, улучшить интерпретируемость и повысить точность классификации в конкретных условиях.

Обучение может проводиться с использованием градиентного спуска с адаптивной корректировкой шагов, например с помощью оптимизатора Adam (Kingma, Ba, 2015), который обеспечивает быструю сходимость и устойчивость при обучении на гетерогенных признаках.

Используемые параметры:

- Оптимизатор: Adam (Wang, Yu, 2025).
- Learning rate: 0.001 — выбран как сбалансированный стартовый шаг, обеспечивающий прогресс без переобучения.
- Batch size: 32 — разумный компромисс между стабильностью градиента и скоростью обучения.



- Количество эпох: 100 — установлено с учётом эмпирического сходимости на валидационных выборках.  
Дополнительно могут использоваться:
- Early stopping по значению функции потерь на валидации.
- Model checkpointing — сохранение лучшей модели по метрике F1 или accuracy.

## Этические и технические вызовы

Основные вызовы внедрения ИИ в психодиагностику связаны с:

1. **Приватностью:** аудио- и видеоданные являются чувствительными. Необходимы методы анонимизации, локальной обработки (on-device AI) и согласий на сбор данных (Kartasheva, 2022).
2. **Этическими рисками:** автоматическая диагностика может быть использована для санкций (например, понижения оценки), что требует включения человека в контур принятия решений (Савгильдина, 2024).
3. **Интерпретируемостью:** решения модели должны быть объяснимы для преподавателя и обучающегося. Это возможно через визуализацию attention-карт, генерацию текстовых объяснений. Для внедрения ИИ-моделей в образовательную практику важно обеспечить интерпретируемость выводов, особенно при использовании в поддержке принятия решений преподавателями (Grafsgaard et al., 2014).
4. **Инфраструктурой:** обработка мультимодальных потоков требует высокой вычислительной мощности. Решение — сжатие моделей (TinyML), внедрение онтологий для редукции признаков.
5. **Правовой неопределённостью:** пока нет нормативной базы, регулирующей ИИ-диагностику в образовании.

## Заключение

ИИ-психодиагностика представляет собой перспективное направление цифровой педагогики, позволяющее в реальном времени отслеживать и учитывать когнитивное состояние обучающихся. Мультимодальные модели позволяют повысить точность, устойчивость и адаптивность диагностических систем, обеспечивая тем самым переход от статичной модели обучения к динамически адаптируемой.

Разработка таких систем требует междисциплинарного подхода — сочетания машинного обучения, когнитивной психологии и педагогики. В будущем необходимо:

- расширение корпусных баз для обучения моделей;
- создание стандартов этической ИИ-диагностики;
- разработка человеко-ориентированных интерфейсов;
- реализация открытых фреймворков для образовательных учреждений.

Представленный подход может рассматриваться как один из возможных шагов в сторону персонализированного цифрового образования (Коровникова, 2021), однако его практическая реализация потребует дальнейших исследований, апробации и нормативного закрепления.



### Список источников / References

1. Baker, R.S. (2019). Challenges for the future of educational data mining: The Baker Learning Analytics Prizes. *Journal of Educational Data Mining*, 11(1), 1—17. <https://doi.org/10.5281/zenodo.3554745>
2. D'Mello, S., & Kory, J. (2015). A review and meta-analysis of multimodal affect detection systems. *ACM Computing Surveys*, 47(3), Article 43. <https://doi.org/10.1145/2682899>. Открытый PDF (author version): <https://people.ict.usc.edu/~gratch/CSCI534/Readings/dmello-MMML-Survey.pdf>
3. Grafsgaard, J.F., Wiggins, J.B., Boyer, K.E., Wiebe, E.N., & Lester, J.C. (2014). Predicting learning and affect from multimodal data streams in task-oriented tutorial dialogue. In J. Stamper, Z. Pardoc, M. Mavrikis, & B.M. McLaren (Eds.), *Proceedings of the 7th International Conference on Educational Data Mining (EDM 2014)* (pp. 122—129). International Educational Data Mining Society. <https://learndialogue.org/pdf/LearnDialogue-Grafsgaard-EDM-2014.pdf>
4. Reis, R.C.D., Isotani, S., Rodriguez, C.L., Jaques, P.A., & Bittencourt, I.I. (2018). Affective states in computer-supported collaborative learning: Studying the past to drive the future. *Computers & Education*, 120, 29—50. <https://doi.org/10.1016/j.compedu.2018.01.015>. Открытый PDF: <https://isiarticles.com/bundles/Article/pre/pdf/126884.pdf>
5. Kingma, D.P., Ba, J. (2015). Adam: A method for stochastic optimization. *arXiv*. <https://doi.org/10.48550/arXiv.1412.6980>
6. Kartasheva, M.I. (2022). The role of the self-system in the structure of mental states regulation during the educational activities. *Yaroslavl Pedagogical Bulletin*, (1), 162—174. <https://doi.org/10.20323/1813-145X-2022-1-124-162-174>
7. Wang, J., Yu, Y. (2025). *Machine learning approach to student performance prediction of online learning*. *PLOS ONE*, 20(1), e0299018. <https://doi.org/10.1371/journal.pone.0299018>
8. Солдатова, Г.У. (2018). Цифровая социализация в культурно-исторической парадигме: изменяющийся ребенок в изменяющемся мире. *Социальная психология и общество*, 9(3), 71—80. <https://doi.org/10.17759/sps.2018090308>  
Soldatova, G.U. (2018). Digital socialization in the cultural-historical paradigm: A changing child in a changing world. *Social Psychology and Society*, 9(3), 71—80. (In Russ.). <https://doi.org/10.17759/sps.2018090308>
9. Савгильдина, И.С. Использование искусственного интеллекта в образовании: перспективы и этические дилеммы // Актуальные исследования. 2024. № 46 (228). Ч. II. С. 66—68. URL: <https://apni.ru/article/10526-ispolzovanie-iskusstvennogo-intellekta-v-obrazovanii-perspektivy-i-eticheskie-dilemmy>  
Savgildina, I.S. (2024). The use of artificial intelligence in education: Prospects and ethical dilemmas. *Actual Research*, 46(228), Pt. II, 66—68. (In Russ.). URL: <https://apni.ru/article/10526-ispolzovanie-iskusstvennogo-intellekta-v-obrazovanii-perspektivy-i-eticheskie-dilemmy>
10. Коровникова, Н.А. Искусственный интеллект в образовательном пространстве: проблемы и перспективы // Социальные новации и социальные науки. — Москва: ИНИОН РАН, 2021. — № 2. — С. 98—113  
Korovnikova, N.A. (2021). Artificial intelligence in the educational space: Problems and prospects. *Social Innovations and Social Sciences*, 2, 98—113. (In Russ.). Moscow: INION RAS.



### ***Информация об авторах***

*Юрьева Наталья Евгеньевна*, кандидат технических наук, научный сотрудник, Московский государственный психолого-педагогический университет (ФГБОУ ВО МГППУ), г. Москва, Российская Федерация, ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-1419-876X>, e-mail: [yuryeva.ne@gmail.com](mailto:yuryeva.ne@gmail.com)

### ***Information about the authors***

*Nataliya E. Yuryeva*, PhD (Engineering), Research Fellow, Moscow State University of Psychology and Education (MSUPE), Moscow, Russia, ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-1419-876X>, e-mail: [yuryeva.ne@gmail.com](mailto:yuryeva.ne@gmail.com)

Поступила в редакцию 22.08.2025

Поступила после рецензирования 01.09.2025

Принята к публикации 02.09.2025

Опубликована 30.09.2025

Received 2025.08.22

Revised 2025.09.01

Accepted 2025.09.02

Published 2025.09.30



## МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ | OPTIMIZATION METHOD

Научная статья | Original paper

УДК 51-74

### Метод проектирования профиля крыла трансзвукового транспортного самолета на основе последовательного математического моделирования и параметрической оптимизации

А.В. Пантелеев, В.К. Гунчин✉, И.С. Надоров, И.А. Ахмедов

Московский авиационный институт (НИУ МАИ)

г. Москва, Российская Федерация

✉ [gunchinvk@mai.ru](mailto:gunchinvk@mai.ru)

#### Резюме

**Контекст и актуальность.** Задачи проектирования профилей крыла перспективных самолетов требуют создания методик, учитывающих современные требования к аэродинамическим характеристикам. При этом предлагаемые процедуры должны опираться на накопленный опыт конструкторов и проектировщиков с целью учета всех ограничений и особенностей. **Методы и материалы.** В статье для параметризации геометрии профиля используется описание верхней и нижней образующих с помощью разложения по системе многочленов Бернштейна. Параметрами, задающими профиль, являются коэффициенты разложения. Для нахождения их значений проектировщиком задается набор базовых точек профиля, а также отрезки возможных значений их координат. При этом также должны учитываться ограничения на толщину профиля и кривизну верхней образующей. Проблема нахождения параметров профиля сформулирована как задача условной оптимизации с интервальными ограничениями на проектируемые параметры. Целевая функция характеризует степень удовлетворения требований к интегральным аэродинамическим характеристикам. Подсчет ее значений производится по информации, полученной при использовании решателя. Для передачи информации о текущей геометрии профиля в решатель формируется геометрическая модель. Задача оптимизации решается с помощью группы метаэвристических алгоритмов, применяемых последовательно.



К ним относятся методы, имитирующие поведение стаи мотыльков, метод последовательной редукции области исследования и метод перекоммутации. Сформирована пошаговая методика решения задачи проектирования профиля крыла. **Результаты.** В качестве исходного профиля принят профиль RAЕ 5213. Полученный в результате решения оптимизационной задачи профиль удовлетворяет заданным проектировщиком требованиям с точки зрения как геометрических, так и аэродинамических характеристик. **Выводы.** Предложен метод проектирования аэродинамического профиля, заключающийся в нахождении координат его базовых точек, используемых для их аппроксимации CST методом, с целью получения требуемых аэродинамических и геометрических характеристик профиля. Научная новизна предложенного метода заключается в том, что проблема поиска базовых точек профиля сведена к задаче последовательной конечномерной оптимизации, которая решается с помощью набора метаэвристических алгоритмов поиска условного глобального экстремума, где значение целевой функции находится с помощью специализированного решателя, реализующего процедуру математического моделирования процесса обтекания профиля. Полученные результаты составляют основу для последующего этапа проектирования теоретического контура крыла при решении задачи обтекания полной компоновки самолета.

**Ключевые слова:** проектирование профиля крыла, параметризация профиля, метаэвристические алгоритмы оптимизации, математическое моделирование, методы оптимизации

**Для цитирования:** Пантелеев, А.В., Гунчин, В.К., Надоров, И.С., Ахмедов, И.А. (2025). Метод проектирования профиля крыла трансзвукового транспортного самолета на основе последовательного математического моделирования и параметрической оптимизации. *Моделирование и анализ данных*, 15(3), 56—75. <https://doi.org/10.17759/mda.2025150304>

## Method of designing the wing airfoil of a transonic transport aircraft based on consequential mathematical modeling and parametric optimization

A.V. Panteleev, V.K. Gunchin✉, I.S. Nadorov, I.A. Akhmedov  
Moscow Aviation Institute (National Research University), Moscow, Russian Federation  
✉ gunchinvk@mai.ru

### *Abstract*

**Context and relevance.** The tasks of designing wing airfoils for prospective aircraft require the creation of methods that take into account modern requirements for



aerodynamic characteristics. At the same time, the proposed procedures should be based on the accumulated experience of designers and engineers in order to take into account all limitations and features. **Objective.** The first objective is to formulate the airfoil design problem as a parametric optimization task. The second objective is to form an optimization process based on mathematical modeling of the airfoil flow to calculate the values of the objective function and a group of metaheuristic algorithms for searching for a conditional extremum. **Hypothesis.** The paper assumes that the airfoil geometry can be approximated using expansions in Bernstein polynomials. **Methods and materials.** In the article, the description of the upper and lower surface using the expansion in terms of the Bernstein polynomial system is used to parameterize the airfoil geometry. The parameters defining the airfoil are the expansion coefficients. To find their values, the designer specifies a set of airfoil base points, as well as segments of possible values of their coordinates. In this case, the constraints on the airfoil thickness and the curvature of the upper surface should also be taken into account. The problem of finding the profile parameters is formulated as a problem of conditional optimization with interval constraints on the designed parameters. The objective function characterizes the degree of satisfaction of the requirements for the integral aerodynamic characteristics. Its values are calculated based on the information obtained using the solver. To transfer information about the current profile geometry to the solver, a geometric model is formed. The optimization problem is solved using a group of metaheuristic algorithms applied sequentially. These include methods simulating the behavior of a swarm of moths, the method of sequential reduction of the search area, and the path-relinking method. A step-by-step technique for solving the wing airfoil design problem is formed. **Results.** The RAE 5213 airfoil was adopted as the initial airfoil. The airfoil obtained as a result of solving the optimization problem satisfies the requirements specified by the designer in terms of both geometric and aerodynamic characteristics. **Conclusions.** A method for designing an aerodynamic airfoil is proposed, which consists in finding the coordinates of its base points used for their approximation by the CST method, in order to obtain the required aerodynamic and geometric characteristics of the airfoil. The scientific novelty of the proposed method lies in the fact that the problem of finding the base points of the airfoil is reduced to the problem of sequential finite-dimensional optimization, which is solved using a set of metaheuristic algorithms for finding a conditional global extremum, where the value of the objective function is found using a specialized solver that implements the procedure for mathematical modeling of the process of flow around the airfoil. The obtained results form the basis for the subsequent stage of designing the theoretical wing contour when solving the problem of flow around the full configuration of the aircraft.

**Keywords:** wing airfoil design, airfoil parameterization, wing polar, metaheuristic optimization algorithms, mathematical modeling, optimization methods

**For citation:** Panteleev, A.V., Gunchin, V.K., Nadorov, I.S., Akhmedov, I.A. (2025). Method of designing the wing airfoil of a transonic transport aircraft based on consequential mathematical modeling and parametric optimization. *Modelling and Data Analysis*, 15(3), 56—75. (In Russ.). <https://doi.org/10.17759/mda.2025150304>



## Введение

Для проектирования профиля крыла применяются различные подходы. При этом желательно использовать относительно небольшое число переменных при сохранении возможности обеспечения требуемых аэродинамических и геометрических характеристик профиля. Одновременно способ представления профиля должен иметь удобную интуитивную и геометрическую интерпретацию, позволяя проектировщику управлять процессом поиска на основе имеющегося опыта. Проектирование профиля крыла для трансзвукового самолета традиционно актуальная задача ввиду сложности одновременного удовлетворения противоречивым требованиям — тенденции к увеличению относительной толщины профиля при сохранении высокого аэродинамического качества на заданном числе Маха.

Известна трехэтапная процедура аэродинамического проектирования крыла самолета (Болсуновский и др., 2002). На первом этапе выбирается начальная геометрия крыла по имеющимся данным от прототипов. На втором этапе она модифицируется путем решения обратной задачи с заданным благоприятным распределением коэффициента давления на поверхности для выбранного режима полета. Заданное распределение давления выбирается проектировщиком так, чтобы минимизировать волновое, профильное и индуктивное сопротивления. Наконец, на третьем этапе включается процедура многорежимной оптимизации. Показано, что спроектированное таким образом крыло отвечает требованиям с точки зрения интегральных аэродинамических характеристик для заданного режима полета (прежде всего крейсерского числа Маха). Переменными оптимизации являлись геометрические вариации базовых сечений крыла: крутка сечения, изменение толщины или вогнутости профиля, положение максимальной относительной толщины по хорде, отклонение носика и хвостика, изменение радиуса кривизны носика профиля, локальные вариации верхней поверхности. Предложенная методология, реализованная в алгоритмическом и программном обеспечении, позволила решить задачи проектирования крыльев большинства известных отечественных магистральных самолетов (Болсуновский и др., 2018; Пейгин и др., 2018).

В ряде публикаций (Kulfan, 2006; Kulfan, Bussoletti, Hilmes, 2007; Kulfan, 2008; Kulfan 2007; Kulfan, 2020) предлагается метод описания теоретического контура агрегатов планера самолета, получивший название CST (Class function / Shape function Transformation). При этом используется представление с помощью многочленов Бернштейна с неопределенными коэффициентами, подлежащими нахождению. Метод получил дальнейшее развитие и применение в (Lane, Marshall, 2009; Zhu, 2014; Zhu, Qin, 2014; Khurana, Winarto, Sinha, 2008).

Другим достаточно распространенным способом параметризации описания профиля является PARSEC (**P**arameterised **S**ections) (Sobieczky, 1998). В нем требуется нахождение 11 интуитивных параметров для описания профиля. Методы CST и PARSEC развивались и применялись в (Zhu, 2014; Akram, Kim, 2021).

При проектировании профилей также применяется метод деформации из базовых профилей (**F**ree-**F**orm **D**eformation, FFD) (Sederberg, Parry, 1986; Koo, Zingg, 2016;



Lee, Koo, Zingg, 2017; Poole, Allen, Rendall, 2015). По узлам сетки находятся коэффициенты В-сплайнов для описания профиля. В качестве средства для оценки качества получаемых профилей используются решения уравнения Навье–Стокса (Reynolds-averaged Navier-Stokes equations, RANS). Для решения задач оптимизации используется пакет SNOPT.

Отметим также метод корректной ортогональной декомпозиции (**Proper Orthogonal Decomposition, POD**), использующий алгоритм SVD (Singular Value Decomposition) (Toal, Bresslo, Keane, 2010; Masters et al., 2015). Формируется базисное множество тренировочных профилей. Новые профили представляются в виде их линейной комбинации.

Кроме многочленов Бернштейна, применяемых в CST методе, для представления профилей могут быть использованы многочлены Hicks–Henne, Wagner, NACA (National Advisory Committee for Aeronautics) и Лежандра (Khurana, Winarto, Sinha, 2008), В-сплайны (B-splines), NURBS (non-uniform rational B-splines), радиально базисные функции (RBF) и многочлены Безье (Masters et al., 2015).

В качестве методов оптимизации для нахождения неизвестных параметров использовались градиентные методы первого порядка, квазиньютоновский метод с ограниченной памятью (Болсуновский и др., 2002; Болсуновский и др., 2018; Пейгин и др., 2018), метод частиц в стае совместно с процедурой линейного поиска (Khurana, Winarto, Sinha, 2008), генетический алгоритм (Akram, Kim, 2021; Gardner, Selig, 2003; Peigin, Epstein, 2004; Epstein, Peigin, 2005), метод Нелдера–Мида (Gardner, Selig, 2003).

Для получения аэродинамических характеристик профилей использовались как результаты физического моделирования обтекания в аэродинамической трубе, так и различные программы математического моделирования, включая комплексы программ решения уравнений Навье–Стокса (Akram, Kim, 2021; Poole, Allen, Rendall, 2015; Epstein, Peigin, 2005).

В статье предлагается новая методика проектирования профиля крыла, состоящая из нескольких этапов: задания начального профиля и ограничений на положения его характерных точек, интервалов желаемых значений аэродинамических и геометрических характеристик профиля; формирования геометрической модели для решателя, в качестве которого используется программный пакет, реализующий процедуру решения уравнения Навье–Стокса; определения интегральных аэродинамических характеристик изолированного профиля, используемых для вычисления значений целевой функции с целью ее минимизации, применение комплекса программ метаэвристических алгоритмов глобальной условной оптимизации. В результате реализации итерационного процесса последовательного математического моделирования и параметрической оптимизации находится профиль, удовлетворяющий требованиям проектировщика с точки зрения аэродинамических и геометрических характеристик.



## Материалы и методы

### Параметризация геометрии профиля

Будем использовать следующие обозначения:  $x, z$  – переменные геометрии профиля;  $c$  – величина хорды;  $\zeta = \frac{z}{c}$  – безразмерное расстояние по оси ординат;  $\psi = \frac{x}{c}$  – безразмерное расстояние по оси абсцисс;  $z_{UTE}$  – толщина задней кромки сверху (trailing edge);  $z_{LTE}$  – толщина задней кромки снизу.

Профиль крыла описывается двумя кривыми, описывающими геометрию верхней (*upper*) и нижней (*lower*) частей. Согласно CST методу (Kulfan, 2006; Kulfan, Bussioletti, Hilmes, 2007; Kulfan 2008; Kulfan 2007; Kulfan, 2020; Lane, Marshall, 2009; Zhu, 2014; Zhu, Qin, 2014; Khurana, Winarto, Sinha, 2008) геометрия верхней и нижней частей профиля может быть представлена в форме

$$\begin{aligned} \left(\frac{z}{c}\right)_{Upper} &= \left(\frac{x}{c}\right)^{N_1} \left(1 - \frac{x}{c}\right)^{N_U} \sum_{i=0}^{N_U} \left[ W_U(i) \frac{N_U!}{i!(N_U-i)!} \left(\frac{x}{c}\right)^i \left(1 - \frac{x}{c}\right)^{N_U-i} \right] + \frac{x}{c} \frac{z_{UTE}}{c}, \\ \left(\frac{z}{c}\right)_{Lower} &= \left(\frac{x}{c}\right)^{N_1} \left(1 - \frac{x}{c}\right)^{N_L} \sum_{i=0}^{N_L} \left[ W_L(i) \frac{N_L!}{i!(N_L-i)!} \left(\frac{x}{c}\right)^i \left(1 - \frac{x}{c}\right)^{N_L-i} \right] + \frac{x}{c} \frac{z_{LTE}}{c}, \end{aligned} \quad (1)$$

где функция  $C_{N_2}^{N_1} \left(\frac{x}{c}\right) = \left(\frac{x}{c}\right)^{N_1} \left(1 - \frac{x}{c}\right)^{N_2}$  называется функцией класса профилей (Class function), которая задает конфигурацию профиля внутри фиксированного геометрического класса;  $N_1, N_2$  – характерные параметры класса; а функции формы (Shape functions) верхней кромки и нижней кромки, определяемые разложением с применением полиномов Бернштейна порядков  $N_U, N_L$  соответственно, задающие конкретную форму профиля в рамках фиксированного класса, имеют вид

$$\begin{aligned} S_U \left(\frac{x}{c}\right) &= \sum_{i=0}^{N_U} \left[ W_U(i) \frac{N_U!}{i!(N_U-i)!} \left(\frac{x}{c}\right)^i \left(1 - \frac{x}{c}\right)^{N_U-i} \right], \\ S_L \left(\frac{x}{c}\right) &= \sum_{i=0}^{N_L} \left[ W_L(i) \frac{N_L!}{i!(N_L-i)!} \left(\frac{x}{c}\right)^i \left(1 - \frac{x}{c}\right)^{N_L-i} \right]. \end{aligned} \quad (2)$$

Параметрами, задающими профиль, являются неопределенные коэффициенты  $W_U(i), i = 0, \dots, N_U; W_L(i), i = 0, \dots, N_L$ . Последние слагаемые в формулах (1) контролируют толщину задней кромки крыла.

### Замечания

1. Для классического профиля полагают  $N_1 = 0,5; N_2 = 1$ , что соответствует круглому носику и острой задней кромке.
2. Порядок многочленов Бернштейна обычно задается в пределах от 2 до 15. Наилучшие результаты получаются, как правило, при значениях около 9 (Lane, Marshall, 2009).



3. Относительная толщина профиля находится в результате решения задачи одномерной оптимизации:  $\left(\frac{z}{c}\right)_{Upper} - \left(\frac{z}{c}\right)_{Lower} \rightarrow \max_{0 \leq \frac{x}{c} \leq 1}$ . Одновременно можно определить положение точки на хорде, соответствующей относительной толщине крыла.

### **Решение задачи о нахождении параметров профиля**

Пусть известны пары опорных (базисных) точек:

$$\left(\frac{x_{jU}}{c}, \frac{z_{jU}}{c}\right), j = 0, 1, \dots, N^U, \quad \left(\frac{x_{jL}}{c}, \frac{z_{jL}}{c}\right), j = 0, 1, \dots, N^L.$$

Они, как правило, задаются проектировщиком на основе опыта, при этом их расположение не обязательно равномерное. Проектировщик определяет промежутки возможного расположения опорных точек в виде левой и правой границ изменения значений их координат.

Введем обозначения:

$$W_U = \begin{pmatrix} W_U(0) \\ W_U(1) \\ \vdots \\ W_U(N_U) \end{pmatrix}, \quad D_i \left(\frac{x_{jU}}{c}\right) = \frac{N_U!}{i!(N_U - i)!} \left(\frac{x_{jU}}{c}\right)^{i+N_1} \left(1 - \frac{x_{jU}}{c}\right)^{N_U+N_2-i},$$

$$i = 0, \dots, N_U; j = 0, \dots, N^U;$$

$$W_L = \begin{pmatrix} W_L(0) \\ W_L(1) \\ \vdots \\ W_L(N_L) \end{pmatrix}, \quad D_i \left(\frac{x_{jL}}{c}\right) = \frac{N_L!}{i!(N_L - i)!} \left(\frac{x_{jL}}{c}\right)^{i+N_1} \left(1 - \frac{x_{jL}}{c}\right)^{N_L+N_2-i},$$

$$i = 0, \dots, N_L; j = 0, \dots, N^L;$$

$$Z_U = \begin{pmatrix} \frac{z_{0U}}{c} \\ \frac{z_{1U}}{c} \\ \vdots \\ \frac{z_{N^U U}}{c} \end{pmatrix}, \quad Z_L = \begin{pmatrix} \frac{z_{0L}}{c} \\ \frac{z_{1L}}{c} \\ \vdots \\ \frac{z_{N^L L}}{c} \end{pmatrix}, \quad X_U = \frac{z_{UTE}}{c} \begin{pmatrix} \frac{x_{0U}}{c} \\ \frac{x_{1U}}{c} \\ \vdots \\ \frac{x_{N^U U}}{c} \end{pmatrix}, \quad X_L = \frac{z_{LTE}}{c} \begin{pmatrix} \frac{x_{0,L}}{c} \\ \frac{x_{1,L}}{c} \\ \vdots \\ \frac{x_{N^L L}}{c} \end{pmatrix};$$



$$D_U = \begin{pmatrix} D_0\left(\frac{x_{0U}}{c}\right) & D_1\left(\frac{x_{0U}}{c}\right) & \dots & D_{N_U}\left(\frac{x_{0U}}{c}\right) \\ D_0\left(\frac{x_{1U}}{c}\right) & D_1\left(\frac{x_{1U}}{c}\right) & \dots & D_{N_U}\left(\frac{x_{1U}}{c}\right) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ D_0\left(\frac{x_{N^U_U}}{c}\right) & D_1\left(\frac{x_{N^U_U}}{c}\right) & \dots & D_{N_U}\left(\frac{x_{N^U_U}}{c}\right) \end{pmatrix},$$

$$D_L = \begin{pmatrix} D_0\left(\frac{x_{0L}}{c}\right) & D_1\left(\frac{x_{0L}}{c}\right) & \dots & D_{N_L}\left(\frac{x_{0L}}{c}\right) \\ D_0\left(\frac{x_{1L}}{c}\right) & D_1\left(\frac{x_{1L}}{c}\right) & \dots & D_{N_L}\left(\frac{x_{1L}}{c}\right) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ D_0\left(\frac{x_{N^L_L}}{c}\right) & D_1\left(\frac{x_{N^L_L}}{c}\right) & \dots & D_{N_L}\left(\frac{x_{N^L_L}}{c}\right) \end{pmatrix},$$

Тогда уравнения (1) переписутся в матричной форме

$$D_U W_U = Z_U - X_U, \quad D_L W_L = Z_L - X_L. \quad (3)$$

Если  $N^U = N_U$ ,  $N^L = N_L$ , их решение находится в виде

$$W_U = D_U^{-1}(Z_U - X_U), \quad W_L = D_L^{-1}(Z_L - X_L). \quad (4)$$

Если  $N^U > N_U$ ,  $N^L > N_L$ , решение находится в форме

$$W_U = D_U^{-1}(Z_U - X_U), \quad W_L = D_L^{-1}(Z_L - X_L), \quad (5)$$

где  $D_U^{-1}$ ,  $D_L^{-1}$  – псевдообратные матрицы (Гантмахер, 2010).

### **Общая схема процесса проектирования**

Процесс проектирования профиля начинается с задания начального профиля из множества допустимых. С этой целью проектировщик задает величину хорды, количество опорных точек и относительные координаты опорных точек для верхней и нижней образующих, а также промежутки их возможных значений. Фиксируются значения порядков полиномов Бернштейна  $N_U, N_L$  в (2). Параметры среды и число Маха в решателе задаются пользователем, исходя из информации о целевом режиме полета проектируемого самолета и геометрических характеристиках его крыла.





Задается диапазон изменения угла атаки  $\alpha \in [\alpha_{\min}, \alpha_{\max}]$  для передачи в решатель с целью дальнейшего построения поляры профиля и зависимости коэффициента момента тангажа от угла атаки на основе вычисляемых значений  $C_y(\alpha)$ ,  $C_x(\alpha)$ ,  $m_{z_0}(\alpha)$ .

Задаются промежутки допустимых значений интегральных аэродинамических характеристик, максимальной относительной толщины  $T$ , максимального значения аэродинамического качества  $K_{\max}(\alpha^*) = \max_{\alpha \in [\alpha_{\min}, \alpha_{\max}]} \frac{C_y(\alpha)}{C_x(\alpha)}$  и соответствующего ему значения угла атаки  $\alpha^* = \arg \max_{\alpha \in [\alpha_{\min}, \alpha_{\max}]} \frac{C_y(\alpha)}{C_x(\alpha)}$ ; наивыгоднейшего значения  $C_{yH} = C_y(\alpha^*)$ ; максимального значения  $C_y(\alpha)$ :  $C_{y\max} = \max_{\alpha \in [\alpha_{\min}, \alpha_{\max}]} C_y(\alpha)$ ; значения  $C_{x0} = C_x(\alpha^0)$ , где  $\alpha^0$  – значение угла атаки, при котором  $C_y(\alpha^0) = 0$ ; значения  $m_{z_0}$  (корня уравнения  $m_{z_0}(\alpha) = 0$ ):

$$\begin{aligned} T \in [T_{\min}, T_{\max}], \quad C_{yH} \in [\underline{C_{yH}}, \overline{C_{yH}}], \quad K_{\max} \in [\underline{K_{\max}}, \overline{K_{\max}}], \\ C_{y\max} \in [\underline{C_{y\max}}, \overline{C_{y\max}}], \quad C_{x0} \in [\underline{C_{x0}}, \overline{C_{x0}}], \quad m_{z_0} \in [\underline{m_{z_0}}, \overline{m_{z_0}}]. \end{aligned} \quad (6)$$

Определяются параметры целевой функции, характеризующей качество профиля:

$$I = \lambda_1 D(T) + \lambda_2 D(C_{yH}) + \lambda_3 D(K_{\max}) + \lambda_4 D(C_{y\max}) + \lambda_5 D(C_{x0}) + \lambda_6 D(m_{z_0}), \quad (7)$$

где  $\lambda_1, \dots, \lambda_6$  – весовые коэффициенты (их значения, как правило, убывают по величине с возрастанием номера, учитывая важность вклада каждого из слагаемых),

$$\begin{aligned} D(T) &= \begin{cases} (T - T_{\min})^2, & T < T_{\min}, \\ 0, & T \in [T_{\min}, T_{\max}], \\ (T - T_{\max})^2, & T > T_{\max}, \end{cases} & D(C_{yH}) &= \begin{cases} (C_{yH} - \underline{C_{yH}})^2, & C_{yH} < \underline{C_{yH}}, \\ 0, & C_{yH} \in [\underline{C_{yH}}, \overline{C_{yH}}], \\ (C_{yH} - \overline{C_{yH}})^2, & C_{yH} > \overline{C_{yH}}, \end{cases} \\ D(K_{\max}) &= \begin{cases} (K_{\max} - \underline{K_{\max}})^2, & K_{\max} < \underline{K_{\max}}, \\ 0, & K_{\max} \in [\underline{K_{\max}}, \overline{K_{\max}}], \\ (K_{\max} - \overline{K_{\max}})^2, & K_{\max} > \overline{K_{\max}}, \end{cases} & D(C_{y\max}) &= \begin{cases} (C_{y\max} - \underline{C_{y\max}})^2, & C_{y\max} < \underline{C_{y\max}}, \\ 0, & C_{y\max} \in [\underline{C_{y\max}}, \overline{C_{y\max}}], \\ (C_{y\max} - \overline{C_{y\max}})^2, & C_{y\max} > \overline{C_{y\max}}, \end{cases} \\ D(C_{x0}) &= \begin{cases} (C_{x0} - \underline{C_{x0}})^2, & C_{x0} < \underline{C_{x0}}, \\ 0, & C_{x0} \in [\underline{C_{x0}}, \overline{C_{x0}}], \\ (C_{x0} - \overline{C_{x0}})^2, & C_{x0} > \overline{C_{x0}}, \end{cases} & D(m_{z_0}) &= \begin{cases} (m_{z_0} - \underline{m_{z_0}})^2, & m_{z_0} < \underline{m_{z_0}}, \\ 0, & m_{z_0} \in [\underline{m_{z_0}}, \overline{m_{z_0}}], \\ (m_{z_0} - \overline{m_{z_0}})^2, & m_{z_0} > \overline{m_{z_0}}. \end{cases} \end{aligned}$$

Таким образом, задача проектирования профиля сводится к задаче параметрической условной минимизации значения целевой функции (7) при наличии



ограничений (7), т.е. требуется найти такие опорные точки  $\left(\frac{x_{jU}}{c}, \frac{z_{jU}}{c}\right), j = 0, 1, \dots, N^U$ ,  $\left(\frac{x_{jL}}{c}, \frac{z_{jL}}{c}\right), j = 0, 1, \dots, N^L$ , чтобы достигалось минимальное значение функции (7).

Для решения задачи параметрической оптимизации используется набор из метаэвристических алгоритмов (Пантелеев, Скавинская, 2023): модифицированный и классический методы имитации поведения стаи мотыльков (Mirjalili, 2015; Пантелеев, Надоров, 2025), метод Luus–Jaakola (Luus, 2000), метод имитации отжига с учетом интервальных ограничений, алгоритм перекоммутации (Path–Relinking). Результаты, полученные одним из указанных методов, могут быть улучшены другими. В качестве условий окончания процедуры оптимизации могут использоваться: максимальное число итераций, условие непревышения модуля разности значений целевой функции на соседних итерациях заданного порога. В качестве входной информации методу оптимизации передается матрица-столбец, содержащая значения координат опорных точек профиля.

Для передачи информации о текущей геометрии профиля в решатель формируются геометрическая модель. Решатель возвращает значения интегральных аэродинамических характеристик, которые сравниваются с целевыми значениями.

Общая схема, отражающая предложенную методологию проектирования, изображена на рис. 1. По окончании процесса последовательной оптимизации проектировщику выдается полученная наилучшая геометрия профиля вместе с его характеристиками для анализа. В случае, если проектировщика не удовлетворяет полученный результат, он может изменить:

- положение и число опорных точек профиля;
- порядки полиномов в формулах (1);
- левые и правые границы в ограничениях (6);
- весовые коэффициенты в целевой функции (7);
- метод оптимизации и его параметры.

### ***Порядок расчета величины целевой функции***

1. Задать: величину хорды  $c$ ; толщину задней кромки сверху и снизу:  $\frac{z_{UTE}}{c}, \frac{z_{LTE}}{c}$ ; порядки многочленов Бернштейна  $N_U, N_L$ .
2. Задать числа узлов сверху  $N^U$  и снизу  $N^L$  (равными или превышающими  $N_U, N_L$ ).
3. Задать узловые пары точек  $\left(\frac{x_{jU}}{c}, \frac{z_{jU}}{c}\right), j = 0, 1, \dots, N^U$ ,  $\left(\frac{x_{jL}}{c}, \frac{z_{jL}}{c}\right), j = 0, 1, \dots, N^L$ .

4. Найти коэффициенты  $W_U = \begin{pmatrix} W_U(0) \\ W_U(1) \\ \vdots \\ W_U(N_U) \end{pmatrix}$ ,  $W_L = \begin{pmatrix} W_L(0) \\ W_L(1) \\ \vdots \\ W_L(N_L) \end{pmatrix}$  по формулам (4) или (5)

в зависимости от соотношения порядков полиномов и числа узлов.

5. Передать параметры профиля в решатель. Задать шаг по углу атаки и получить точки поляры  $C_y(\alpha_i)$ ,  $C_x(\alpha_i)$ ,  $i = 0, 1, \dots, N$  с заданным шагом при  $\alpha \in [\alpha_{\min}, \alpha_{\max}]$ . Получить значения  $m_{z_0}(\alpha_i), i = 0, 1, \dots, N$ .



6. Найти относительную толщину профиля  $T = \max_{\frac{x}{c} \in [0,1]} \left[ \left[ \frac{z}{c} \left( \frac{x}{c} \right) \right]_{Upper} - \left[ \frac{z}{c} \left( \frac{x}{c} \right) \right]_{Lower} \right]$
- и положение соответствующей точки  $\left( \frac{x}{c} \right)^* = \arg \max_{\frac{x}{c} \in [0,1]} \left[ \left[ \frac{z}{c} \left( \frac{x}{c} \right) \right]_{Upper} - \left[ \frac{z}{c} \left( \frac{x}{c} \right) \right]_{Lower} \right]$ .
- В случае невыполнения условий  $T \in [T_{\min}, T_{\max}]$ ,  $\left( \frac{x}{c} \right)^* \in \left[ \left( \frac{x}{c} \right)_{\min}^*, \left( \frac{x}{c} \right)_{\max}^* \right]$ , где границы отрезков задаются проектировщиком, вернуться к шагу 3, задавая новые узловые пары точек.
7. Найти характерные параметры поляры.
- а) решить задачи интерполяции:  $C_y(\alpha)$ ,  $C_x(\alpha)$ ,  $m_{z_0}(\alpha)$  при  $\alpha \in [\alpha_{\min}, \alpha_{\max}]$ ;
- б) вычислить максимальное значение аэродинамического качества  $K_{\max}(\alpha^*) = \max_{\alpha \in [\alpha_{\min}, \alpha_{\max}]} \frac{C_y(\alpha)}{C_x(\alpha)}$  и соответствующее значение угла атаки  $\alpha^* = \arg \max_{\alpha \in [\alpha_{\min}, \alpha_{\max}]} \frac{C_y(\alpha)}{C_x(\alpha)}$ ;
- в) вычислить наивыгоднейшее значение  $C_{y_n} = C_y(\alpha^*)$ ;
- г) максимальное значение  $C_y(\alpha)$ :  $C_{y_{\max}} = \max_{\alpha \in [\alpha_{\min}, \alpha_{\max}]} C_y(\alpha)$ ;
- д) значение  $C_{x_0} = C_x(\alpha^0)$ , где  $\alpha^0$  – значение угла атаки, при котором  $C_y(\alpha^0) = 0$  (корень уравнения  $C_y(\alpha) = 0$ );
- е) значение  $m_{z_0}$  как корень уравнения  $m_{z_0}(\alpha) = 0$ .
8. Вычислить величину критерия качества профиля по формуле (7).

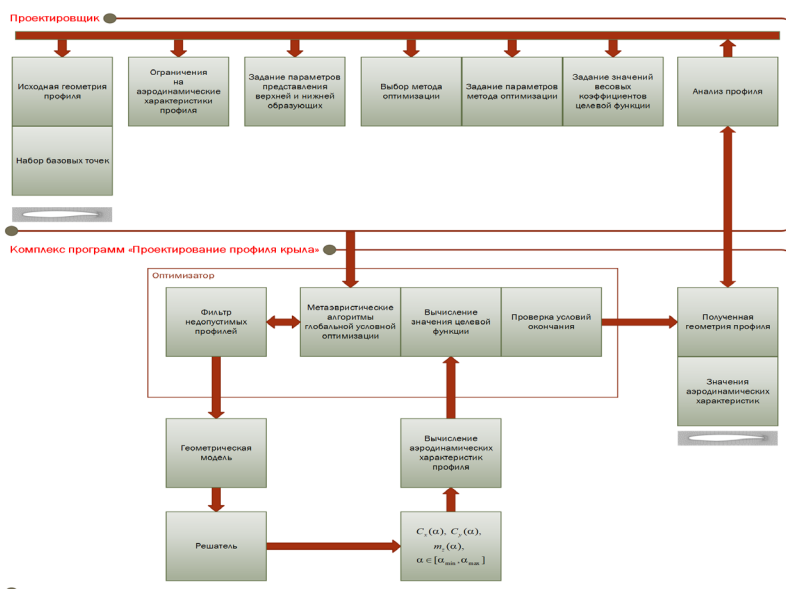


Рис. 1. Общая схема проектирования

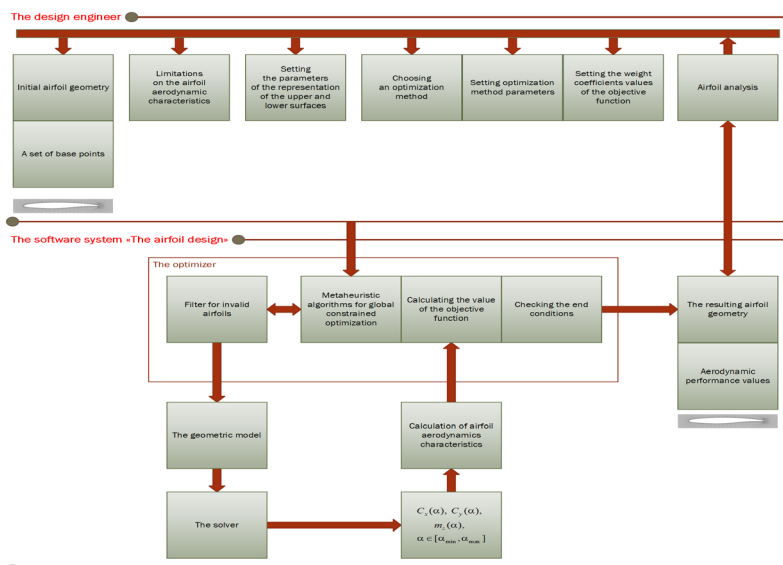


Fig. 1. General design scheme

## Результаты

В качестве исходного профиля принят профиль RAE 5213. Целевыми значениями являются аэродинамические и геометрические (длина хорды в метрах и относительная толщина) характеристики известного профиля магистрального самолета. В табл. 1 представлены настройки решателя и параметры среды, принятые для моделирования. Необходимые параметры неструктурированной расчетной сетки были получены подбором оптимальных значений дискретизации расчетной области (сечение сходимости). Аэродинамические и геометрические характеристики профилей, полученные с помощью численного моделирования, представлены в табл. 2.

Таблица 1 / Table 1

### Настройки решателя и параметры среды Solver settings and environment parameters

Параметр / Parameter	Значение / Value
Тип решателя / Solver type	RANS
Модель турбулентности / Turbulence model	SST (Menter) K-Omega
Параметр Y+ / Parameter Y+	0,12
Модель газа / Gas model	Идеальный газ
Число Маха / Mach number	0,7
Давление (Pa) / Pressure (Pa)	22630

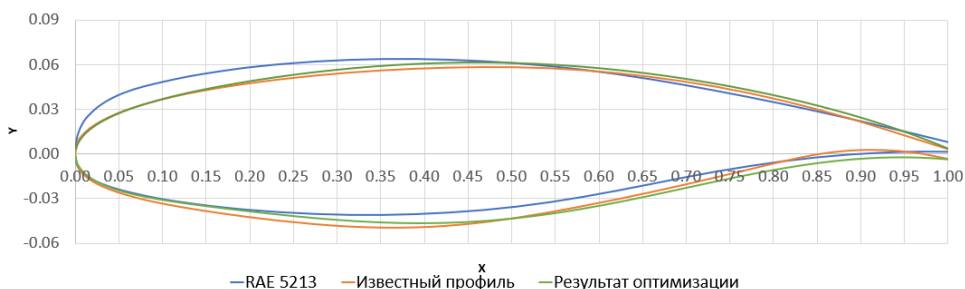


Таблица 2 / Table 2

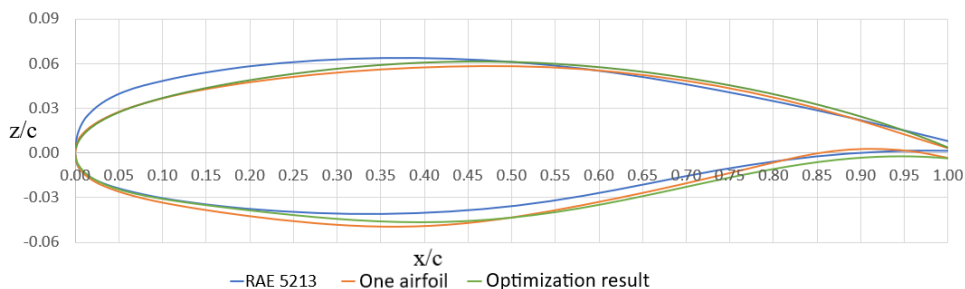
**Аэродинамические и геометрические характеристики профилей**  
**Aerodynamic and geometric characteristics of airfoils**

Параметр / Parameter	RAE 5213	Известный профиль / One airfoil
$C_{x0}$	0,0127	0,0140
$C_{yn}$	0,5984	0,7393
$K_{max}$	37,00	41,64
$C_{y_{max}}$	1,0321	1,2103
$m_{z0}$	-0,1289	-0,3045
Абсолютная длина хорды (м) / Total chord length (m)	1,867	1,867
Относительная толщина (%) / Thickness ratio (%)	10	10,6

Порядок многочленов Бернштейна для верхней и нижней образующих одинаков и равен 4, количество базовых точек 16. Значения весовых коэффициентов целевой функции (7):  $\lambda_1 = 0,25$ ;  $\lambda_2 = 0,5$ ;  $\lambda_3 = 0,25$ ;  $\lambda_4 = 10^{-4}$ ;  $\lambda_5 = 5 \cdot 10^{-5}$ ;  $\lambda_6 = 10^{-5}$ . Диапазоны допустимых значений целевых аэродинамических и геометрических характеристик  $T \in [10,6; 10,9]$ ,  $C_{yn} \in [0,73; 0,76]$ ,  $K_{max} \in [40, 44]$ ,  $C_{y_{max}} \in [1,1; 1,35]$ ,  $C_{x0} \in [0,01; 0,02]$ ,  $m_{z0} \in [-0,1; -0,25]$ . При решении задачи оптимизации использован метод, имитирующий поведение стаи мотыльков с параметрами  $Np = 10$ ;  $s = 0,2$ ;  $T = 50$ . Для достижения целевых параметров оптимизатору понадобилось 98 итераций. Результатом решения оптимизационной задачи является геометрия профиля, представленная на рис. 2.

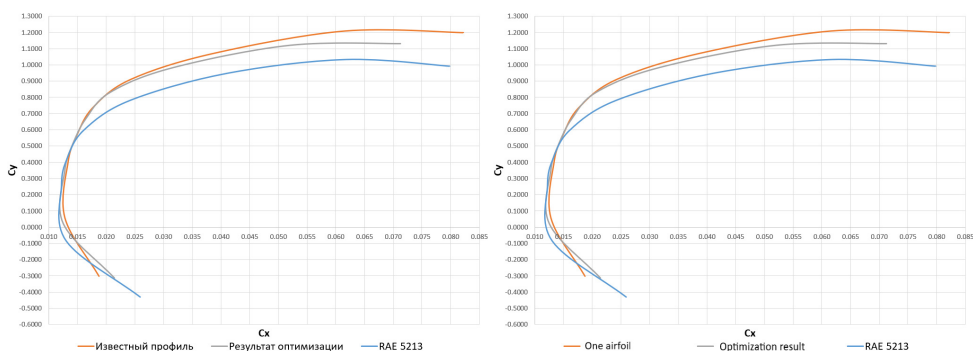


**Рис. 2.** Геометрии профиля RAE 5213, известного профиля и полученного в результате решения оптимизационной задачи



**Fig. 2.** Geometry of the RAE 5213 airfoil, the known airfoil and the one obtained as a result of solving the optimization problem

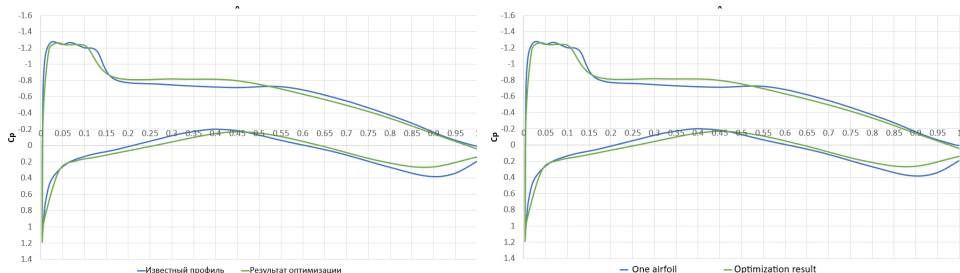
На рис. 3 представлены поляры первого рода для профиля RAE 5213, известного профиля и профиля, полученного в результате решения оптимизационной задачи.



**Рис. 3.** Поляры первого рода

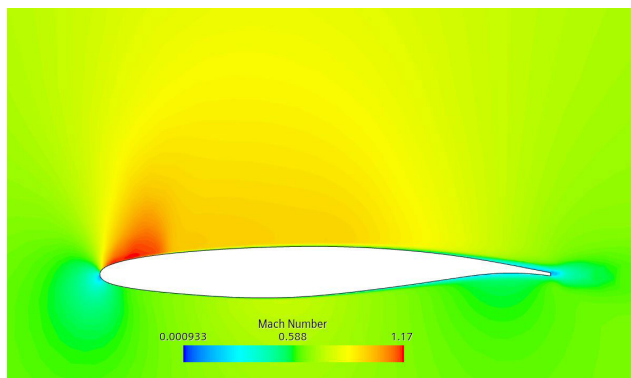
**Fig. 3.** Drag polars

На рис. 4 представлено распределение коэффициента давления по хорде при  $C_{yH}$  известного профиля и профиля, полученного в результате оптимизации. На рис. 5 и рис. 6 представлены поля Маха для двух вышеуказанных профилей при  $C_{yH}$ .

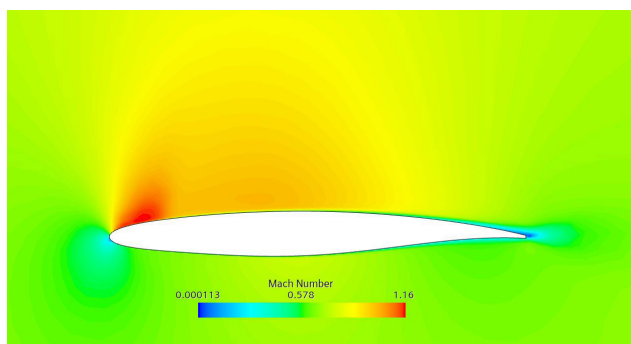


**Рис. 4.** Распределение коэффициента давления по хорде

**Fig. 4.** Distribution of pressure coefficient along the chord



**Рис. 5.** Распределение полей Маха для известного профиля  
**Fig. 5.** Distribution of Mach fields for a known airfoil



**Рис. 6.** Распределение полей Маха для полученного в результате оптимизации профиля  
**Fig. 6.** Distribution of Mach fields for the airfoil obtained as a result of optimization

В табл. 3 представлены аэродинамические и геометрические характеристики известного профиля и профиля, полученного в результате оптимизации.

Таблица 3 / Table 3

**Сравнение аэродинамических и геометрических характеристик профилей**  
**Comparison of aerodynamic and geometric characteristics of airfoils**

Параметр / Parameter	Результат оптимизации / Optimization results	Известный профиль / One airfoil
$C_{yH}$	0,7493	0,7393
$K_{max}$	41,04	41,64
$C_{y_{max}}$	1,1326	1,2103



Параметр / Parameter	Результат оптимизации / Optimization results	Известный профиль / One airfoil
$m_{z_0}$	–0,1903	–0,3045
Абсолютная длина хорды (м) / Total chord length (m)	1,867	1,867
Относительная толщина (%) / Thickness ratio (%)	10,6	10,6

## Обсуждение результатов

Полученный в результате решения оптимизационной задачи профиль удовлетворяет заданным проектировщиком требованиям с точки зрения как геометрических, так и аэродинамических характеристик. Распределение коэффициента давления по хорде, а также поля Маха на  $C_{yn}$ , близки к таковым у известного профиля.

## Заключение

Предложен метод проектирования аэродинамического профиля, заключающийся в нахождении координат его базовых точек, используемых для их аппроксимации CST методом, с целью получения требуемых аэродинамических и геометрических характеристик профиля. Научная новизна предложенного метода заключается в том, что проблема поиска базовых точек профиля сведена к задаче последовательной конечномерной оптимизации, которая решается с помощью набора метаэвристических алгоритмов поиска условного глобального экстремума, где значение целевой функции находится с помощью специализированного решателя, реализующего процедуру математического моделирования процесса обтекания профиля. Полученные результаты составляют основу для последующего этапа проектирования теоретического контура крыла при решении задачи обтекания полной компоновки самолета [32]. Предложенный метод является практически ценным, так как в полной мере может быть применен при проектировании модификаций существующих трансзвуковых магистральных самолетов, например SJ-100, MC-21.

**Ограничения.** Предлагаемый подход применим в основном для решения задач проектирования профилей трансзвуковых транспортных самолетов.

**Limitations.** The proposed approach is applicable basically to solving problems of designing airfoils of transonic transport aircraft.

## Список источников / References

1. Болсуновский, А.Л., Бузовера, Н.П., Карась, О.В., Ковалёв, В.Е. (2002). Развитие методов аэродинамического проектирования крейсерской компоновки дозвуковых самолетов. В: XIII Школа-семинар «Аэродинамика летательных аппаратов» (с. 20), (п. Володарского, 28 февраля — 01 марта 2002 г.). Жуковский: Центральный аэрогидродинамический институт им. профессора Н.Е. Жуковского. <https://www.elibrary.ru/item.asp?edn=wcjzgf&ysclid=mcyoughuz755233486> (дата обращения: 11.07.2025)





- Bolsunovsky, A.L., Buzoverya, N.P., Karas, O.V., Kovalev, V.E. (2002). Development of methods of aerodynamic design of cruise configuration of subsonic aircraft. In: *XIII School-seminar "Aerodynamics of aircraft"* (pp. 20), (p. Voldarsky, February 28 — March 1, 2002). Zhukovsky: Central Aerohydrodynamic Institute named after Professor N.E. Zhukovsky. (In Russ.). <https://www.elibrary.ru/item.asp?edn=wcjzgf&ysclid=mcyuoughuz755233486> (viewed: 11.07.2025)
2. Болсуновский, А.Л., Бузоверея, Н.П., Скоморохов, С.И., Чернышёв, И.Л. (2018). Расчетно--экспериментальные исследования скоростных крыльев перспективных магистральных самолетов. *Труды МАИ*, (101). <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=36300463&ysclid=mcyuvc9et7377343184> (дата обращения: 11.07.2025)  
Bolsunovskii, A.L., Buzoverya, N.P., Skomorokhov, S.I., Chernyshev, I.L. (2018). Computational and experimental studies of high-speed wings for advanced long-haul aircraft. *Trudy MAI*, (101). (In Russ.). <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=36300463&ysclid=mcyuvc9et7377343184> (viewed: 11.07.2025)
  3. Гантмахер, Ф.Р. (2010). *Теория матриц*. М.: Физматгиз.  
Gantmakher, F.R. (2010). *Matrix Theory*. M.: Fizmatgiz. (In Russ.)
  4. Пантелеев, А.В., Надоров, И.С. (2025). Применение модификации метода, имитирующего поведение стаи мотыльков, для решения задачи оптимального программного управления мобильным роботом. *Моделирование и анализ данных*, 15(1), с. 81—109. DOI: 10.17759/mda.2025150105  
Panteleev, A.V., Nadorov, I.S. (2025). Application of the modified method simulating the behavior of a flock of moths to solve the optimal open loop control problem of a mobile robot movement. *Modelling and Data Analysis*, 15(1), pp. 81—109. DOI: <https://doi.org/10.17759/mda.2025150105> (In Russ., abstr. in Engl.)
  5. Пантелеев, А.В., Скавинская, Д.В. (2023). *Метаэвристические стратегии и алгоритмы глобальной оптимизации*. М.: Факториал.  
Panteleev, A.V., Skavinskaya, D.V. (2023). *Metaheuristic strategies and algorithms for global optimization*. Moscow: Factorial. (In Russ.)
  6. Пейгин, С.В., Пушин, Н.А., Болсуновский, А.Л., Тимченко, С.В. (2018). Оптимальное аэродинамическое проектирование крыла широкофюзеляжного дальнемагистрального самолета. *Вестн. Томск. гос. ун-та. Матем. и мех.*, (51), с. 117—129. DOI: 10.17223/19988621/51/10  
Peygin, S.V., Pushchin, N.A., Bolsunovskiy, A.L., Timchenko, S.V. (2018). An optimal aerodynamic design for the wing of a wide-body long-range aircraft. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika*, (51), pp. 117—129. (In Russ.). DOI 10.17223/19988621/51/10
  7. Akram, M.T., Kim, M.-H. (2021). Aerodynamic shape optimization of NREL S809 airfoil for wind turbine blades using Reynolds-Averaged Navier Stokes Model — Part II. *Appl. Sci*, 11(5), pp. 2211. <https://doi.org/10.3390/app11052211>
  8. Epstein, B., Peigin, S. (2005). Constrained aerodynamic optimization of three-dimensional wings driven by Navier-Stokes computations. *AIAA Journal*, 43(9), pp. 1946—1957. DOI: 10.2514/1.10308
  9. Gardner, B.A., Selig, M.S. (2003). Airfoil design using a genetic algorithm and an inverse method. In: *41st Aerospace Sciences Meeting and Exhibit* (6—9 January 2003, AIAA-2003-0043). Reno, Nevada.



10. Khurana, M.S., Winarto, H., Sinha, A.K. (2008). Airfoil geometry parameterization through shape optimizer and computational fluid dynamics. In: *46th AIAA Aerospace Sciences Meeting and Exhibit* (January 2008). DOI: 10.2514/6.2008-295
11. Koo, D., Zingg, D.W. (2016). Progress in aerodynamic shape optimization based on the Reynolds-averaged Navier-Stokes equations. In: *54th AIAA Aerospace Sciences Meeting* (January 2016, AIAA-2016-1292). San Diego, California.
12. Kulfan, B.M. (2008). A Universal parametric geometry representation method — “CST”. *Journal of Aircraft*, 45(1). DOI: 10.2514/1.29958
13. Kulfan, B.M. (2006). Aerodynamic of sonic flight. *Research & Enabling Technology Boeing Commercial Airplanes*.
14. Kulfan, B.M., Bussoletti, J.E. (2006). “Fundamental” parametric geometry representations for aircraft component shapes. In: *11th AIAA/ISSMO Multidisciplinary Analysis and Optimization Conference: The Modeling and Simulation Frontier for Multidisciplinary Design Optimization* (6—8 September 2006, AIAA-2006-6948). Portsmouth, Virginia.
15. Kulfan, B.M., Bussoletti, J.E., Hilmes, C.L. (2007). Pressures and drag characteristics of bodies of revolution at near sonic speeds including the effects of viscosity and wind tunnel walls. In: *45th AIAA Aerospace Sciences Meeting and Exhibit* (8—11 Jan 2007, AIAA-2007-0684). Reno, Nevada. 2007. DOI: 10.2514/6.2007-684
16. Kulfan, B.M. (2020). Modification of CST airfoil representation methodology. <https://www.researchgate.net/publication/343615711>
17. Kulfan, B.M. (2007). Recent extensions and applications of the “CST” universal parametric geometry representation method. In: *7th AIAA Aviation Technology, Integration, and Operations (ATIO)* (18—20 September 2007, AIAA-2007-7709). Belfast, Northern Ireland.
18. Lane, K.L., Marshall, D.D. (2009). A Surface parameterization method for airfoil optimization and high lift 2D geometries utilizing the CST methodology. In: *47th AIAA Aerospace Sciences Meeting Including The New Horizons Forum and Aerospace Exposition* (5—8 January 2009, AIAA-2009-1461). Orlando, Florida.
19. Lee, C., Koo, D., Zingg, D.W. (2017). Comparison of B-spline surface and free-form deformation geometry control for aerodynamic optimization. *AIAA Journal*, 55, pp. 228—240.
20. Luus, R. (2000). *Iterative Dynamic Programming*. London, Chapman & Hall/CRC.
21. Masters, D.A., Taylor, N.J., Rendall, T.C.S., Allen, C.B., Poole, D.J. (2016). A Geometric comparison of aerofoil shape parameterisation methods. In: *54th AIAA Aerospace Sciences Meeting* (4—8 January 2016, AIAA-2016-0558). San Diego, California, USA.
22. Masters, D.A., Taylor, N.J., Rendall, T.C.S., Allen, C.B., Poole, D.J. (2015). Review of aerofoil parameterisation methods for aerodynamic shape optimisation. In: *53rd AIAA Aerospace Sciences Meeting* (Jan 2015).
23. Meheut, M., Dumont, A., Carrier, G., Peter, J.E. (2016). Gradient-based optimization of CRM wing-alone and wingbody-tail configurations by RANS adjoint technique. In: *54th AIAA Aerospace Sciences Meeting* (January 2016, AIAA-2016-1293). San Diego, California.
24. Mirjalili, S. (2015). Moth-flame optimization algorithm: A novel nature-inspired heuristic paradigm. *Knowledge-Based Systems*, 89, pp. 228—249.



25. Peigin, S., Epstein, B. (2004). Robust handling of non-linear constraints for GA optimization of aerodynamic shapes. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 45(12), pp. 1339—1362. DOI: 10.1002/fld.747
26. Poole, D.J., Allen, C.B., Rendall, T.C.S. (2015). Optimal domain element shapes for free-form aerodynamic shape control. In: *Session: Aerodynamic Design: Analysis, Methodologies & Optimization Techniques II* (3 Jan 2015, AIAA 2015—0762). <https://doi.org/10.2514/6.2015-0762>
27. Sederberg, T.W., Parry, S.R. (1986). Free-form deformation of solid geometric models. In: *13th Annual Conference on Computer Graphics and Interactive Techniques* (no. 4, pp. 151—160). Dallas, Texas.
28. Sobieczky, H. (1998). Parametric airfoils and wings. *Notes on Numerical Fluid Mechanics*, 68, pp. 71—87. Vieweg Verlag.
29. Toal, D.J.J., Bresslo, N.W., Keane, A.J. (2010). Geometric filtration using proper orthogonal decomposition for aerodynamic design optimization. *AIAA Journal*, 48(5), pp. 916—928.
30. Zhu, F. (2014). Geometric parameterisation and aerodynamic shape optimisation. PhD thesis, University of Sheffield.
31. Zhu, F., Qin, N. (2014). Intuitive class/shape function parameterization for airfoils. *AIAA Journal*, 52(1), pp. 17—25.
32. Пантелеев, А.В., Гунчин, В.К., Надоров, И.С., Ахмедов, И.А., Силаев Н.А. (2025). Методы параметрической оптимизации в задаче проектирования характерных профилей крыла трансзвукового транспортного самолета. *Труды МАИ*, (142). URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=185117>  
Panteleev, A.V., Gunchin, V.K., Nadorov, I.S., Akhmedov, I.A., Silaev N.A. (2025) Parametric optimization methods in a transonic transport aircraft characteristic wings airfoils designing problem. *Trudy MAI*, (142). (In Russ.). URL: <https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=185117>

### **Информация об авторах**

*Пантелеев Андрей Владимирович*, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой «Математическая кибернетика» института «Компьютерные науки и прикладная математика», Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет) (МАИ (НИУ)), Москва, Российская Федерация, ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-2493-3617>, e-mail: [avpanteleev@inbox.ru](mailto:avpanteleev@inbox.ru)

*Гунчин Виталий Константинович*, инженер-конструктор 2-ой категории, Центр композитных конструкций, Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), Москва, Российская Федерация, e-mail: [gunchinvk@mai.ru](mailto:gunchinvk@mai.ru)

*Надоров Иван Сергеевич*, ассистент кафедры математической кибернетики института «Компьютерные науки и прикладная математика», Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), Москва, Российская Федерация, e-mail: [nnadorovivan@gmail.com](mailto:nnadorovivan@gmail.com)

*Ахмедов Исак Азизович*, инженер 2-ой категории, Центр композитных конструкций, Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), Москва, Российская Федерация, e-mail: [ahmedovisak@gmail.com](mailto:ahmedovisak@gmail.com)



### **Information about the authors**

*Andrei V. Panteleev*, D. Sc. (Physical and Mathematical Sciences), Full Professor, Head of the Department of Mathematics and Cybernetics, Institute of Computer Science and Applied Mathematics, Moscow Aviation Institute, Moscow, Russian Federation, ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-2493-3617>, e-mail: [avpanteleev@inbox.ru](mailto:avpanteleev@inbox.ru)

*Vitalyi K. Gunchin*, Engineer, Center for Composite Structures, Moscow Aviation Institute (National Research University), Moscow, Russian Federation, e-mail: [gunchinvk@mai.ru](mailto:gunchinvk@mai.ru)

*Ivan S. Nadorov*, Assistant professor of the Department of Mathematics and Cybernetics, Institute “Computer Science and Applied Mathematics”, Moscow Aviation Institute (National Research University), Moscow, Russian Federation, e-mail: [nnadorovivan@gmail.com](mailto:nnadorovivan@gmail.com)

*Isak A. Akhmedov*, Engineer, Center for Composite Structures, Moscow Aviation Institute (National Research University), Moscow, Russian Federation, e-mail: [ahmedovisak@gmail.com](mailto:ahmedovisak@gmail.com)

### **Вклад авторов**

А.В. Пантелеев — разработка концепции, научное руководство, разработка методологии, написание рукописи — рецензирование и редактирование.

В.К. Гунчин — разработка концепции, разработка методологии, написание черновика рукописи, визуализация.

И.С. Надоров — разработка программного обеспечения, написание черновика рукописи, визуализация.

И.А. Ахмедов — разработка программного обеспечения, визуализация.

Все авторы приняли участие в обсуждении результатов и согласовали окончательный текст рукописи.

### **Contribution of the authors**

Andrei V. Panteleev — Conceptualization, Supervision, Methodology, Writing — Original Draft Preparation.

Vitalyi K. Gunchin — Conceptualization, Methodology, Writing — Original Draft Preparation, Visualization.

Ivan S. Nadorov — Software, Writing — Original Draft Preparation, Visualization.

Isak A. Akhmedov — Software, Visualization.

All authors participated in the discussion of the results and approved the final text of the manuscript.

### **Конфликт интересов**

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

### **Conflict of interest**

The authors declare no conflict of interest.

Поступила в редакцию 22.07.2025

Поступила после рецензирования 31.07.2025

Принята к публикации 05.08.2025

Опубликована 30.09.2025

Received 2025.07.22

Revised 2025.07.31

Accepted 2025.08.05

Published 2025.09.30

Научная статья | Original paper

УДК 519.85

## Сравнительный анализ эффективности использования метаэвристических методов моделирования для решения задачи коммивояжёра

Н.В. Кошуняева✉, А.Г. Тутыгин

ФГБУН «Федеральный исследовательский центр комплексного изучения Арктики  
имени академика Н.П. Лаверова Уральского отделения Российской академии наук»  
Архангельск, Российская Федерация

✉ [n.koshunyaeva@narfu.ru](mailto:n.koshunyaeva@narfu.ru)

### Резюме

**Контекст и актуальность.** Задача коммивояжёра (TSP) является одной из ключевых NP-трудных задач комбинаторной оптимизации с широким применением в логистике, транспортном планировании и других областях. Точные методы решения TSP становятся неэффективными при увеличении размерности задачи, что делает актуальным использование метаэвристических методов, таких, как алгоритм имитации отжига (SA), муравьиный алгоритм (ACO) и алгоритм роя частиц (PSO). **Цель.** Провести сравнительный анализ эффективности SA, ACO и PSO для решения задачи коммивояжёра со 100 пунктами, оценить их сходимость и выявить оптимальные параметры. **Гипотеза.** Муравьиный алгоритм, благодаря механизму феромонных следов, обеспечит более высокую точность решений по сравнению с SA и PSO, но потребует больше вычислительных ресурсов. **Методы и материалы.** В исследовании проведены вычислительные эксперименты с варьированием параметров каждого алгоритма. Для SA анализировались начальная температура и коэффициент охлаждения, для ACO — влияние феромонов и расстояний, для PSO — когнитивный и социальный коэффициенты. **Результаты.** ACO показал наилучшие результаты, найдя маршрут длиной 9.23, демонстрируя высокую эффективность для задач средней размерности. PSO занял промежуточное положение с длиной маршрута 32.64, что делает его пригодным для задач с умеренной сложностью. SA оказался наименее эффективным с длиной маршрута 45.2, что ограничивает его применение для сложных маршрутных сетей. **Выводы.** Муравьиный алгоритм продемонстрировал наибольшую эффективность благодаря балансу между исследованием пространства



решений и эксплуатацией найденных маршрутов, что особенно важно для морской арктической логистики, где требуется устойчивая оптимизация маршрутов в условиях высокой неопределённости. PSO показал хорошую сходимость, но уступает АСО в точности. SA, несмотря на простоту, менее эффективен для задач высокой размерности. Полученные результаты имеют особую практическую ценность для оптимизации маршрутов в Арктическом регионе, где традиционные методы часто оказываются проблематичными для применения.

**Ключевые слова:** мультиагентное моделирование, метод имитации отжига, алгоритм муравьиной колонии, алгоритм роя частиц, задача коммивояжёра, NP-трудная задача

**Финансирование.** Работа выполнена в рамках государственного задания лаборатории проблем развития территорий по теме НИР «Теоретико-методологические основы комплексного управления ресурсами развития территорий в современных условиях (на примере западной части Арктической зоны Российской Федерации)».

**Для цитирования:** Кошуняева, Н.В., Тутыгин, А.Г. (2025). Сравнительный анализ эффективности использования метаэвристических методов для решения задачи коммивояжёра. *Моделирование и анализ данных*, 15(3), 76—93. <https://doi.org/10.17759/mda.2025150305>

## Comparative analysis of the effectiveness of using metaheuristic modeling methods to solve the traveling salesman problem

N.V. Koshunyaeva✉, A.G. Tutugin

N. Laverov Federal Center for Integrated Arctic Research of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Arkhangelsk, Russian Federation

✉ n.koshunyaeva@narfu.ru

### Abstract

**Context and relevance.** The traveling salesman problem (TSP) is one of the key NP-hard combinatorial optimization problems with wide applications in logistics, transportation planning, and other fields. Exact methods for solving TSP become inefficient as the problem dimension increases, making the use of metaheuristic methods such as simulated annealing (SA), ant colony optimization (ACO), and particle swarm optimization (PSO) relevant. **Objective.** To conduct a comparative analysis of the effectiveness of SA, ACO and PSO for solving the traveling salesman problem with 100 points, to evaluate their convergence and to identify the optimal parameters. **Hypothesis.** The ant algorithm, due to the pheromone trail mechanism,



will provide higher accuracy of solutions compared to SA and PSO, but will require more computational resources. **Methods and materials.** The study conducted computational experiments with varying parameters of each algorithm. For SA, the initial temperature and cooling coefficient were analyzed, for ACO, the influence of pheromones and distances, for PSO, the cognitive and social coefficients. **Results.** ACO showed the best results, finding a route with a length of 9.23, demonstrating high efficiency for medium-sized problems. PSO took an intermediate position with a route length of 32.64, making it suitable for moderately complex problems. SA was the least effective, with a route length of 45.2, which limits its use for complex routing networks. **Conclusions.** The ant algorithm demonstrated the greatest efficiency due to the balance between exploring the solution space and exploiting the found routes, which is especially important for maritime Arctic logistics, where sustainable route optimization is required under high uncertainty. PSO showed good convergence, but it is inferior to ACO in terms of accuracy. SA, despite its simplicity, is less effective for high-dimensional problems. The obtained results are of particular practical value for route optimization in the Arctic region, where traditional methods often prove to be ineffective.

**Keywords:** multi-agent modeling, simulated annealing method, ant colony algorithm, particle swarm algorithm, traveling salesman problem, NP-hard problem

**Funding.** The work was performed within the framework of the state assignment of the Laboratory of problems of territorial development on the research topic “Theoretical and methodological foundations of integrated resource management of territorial development in modern conditions (using the example of the western part of the Arctic zone of the Russian Federation)”.

**For citation:** Koshunyaeva, N.V., Tutygin, A.G. (2025). Predictors of successful graduation and overall well-being of graduates. *Modelling and Data Analysis*, 15(3), 76—93. (In Russ.). <https://doi.org/10.17759/mda.2025150305>

## Введение

Задача коммивояжёра (TSP — Traveling Salesman Problem) является одной из классических NP-трудных задач комбинаторной оптимизации, имеющая широкое практическое применение в логистике, транспортном планировании, биоинформатике и других областях (Applegate et al., 2006; Карп, 1972). Её суть заключается в поиске на графе кратчайшего замкнутого маршрута, проходящего через все заданные пункты с возвратом в исходную точку. Точное решение TSP для большого числа вершин становится вычислительно неосуществимым из-за экспоненциального роста сложности. Это обуславливает актуальность разработки и сравнительного анализа метаэвристических методов, позволяющих находить приближённые решения с приемлемой точностью за разумное время (Blum, Roli, 2003).

Среди множества метаэвристик особый интерес представляют алгоритмы, основанные на природных системах: муравьиный алгоритм (ACO — Ant Colony Optimization), алгоритм роя частиц (PSO — Particle Swarm Optimization) и алгоритм имитации отжига





(SA — Simulated Annealing). Они демонстрируют высокую эффективность в решении сложных оптимизационных задач благодаря способности балансировать между исследованием пространства решений и эксплуатацией найденных локальных оптимумов (Bonabeau, Dorigo, Theraulaz, 1999; Kirkpatrick, Gelatt, Vecchi, 1983).

Муравьиный алгоритм, основанный на поведении колоний муравьёв, использует механизм феромонных следов для накопления информации о качестве решений (Штовба, 2003; Colomi, Dorigo, Maniezzo, 1991). Алгоритм роя частиц имитирует коллективное поведение стай птиц, где каждая частица адаптирует свою траекторию на основе личного и группового опыта (Kennedy, Eberhart, 1995). Алгоритм имитации отжига, заимствованный из металлургии, применяет вероятностный подход для выхода из локальных минимумов (Kirkpatrick, Gelatt, Vecchi, 1983). Несмотря на обширные исследования этих методов (например, (Иванов, Смирнова, 2021; Попов, Соколов, 2019)), их сравнительная эффективность для TSP остаётся предметом дискуссий, особенно при увеличении размерности задачи.

**Целью** данной работы является сравнительный анализ эффективности трёх метаэвристических алгоритмов — ACO, PSO и SA — для решения классической задачи коммивояжёра. В рамках исследования:

- Проведена параметрическая настройка каждого алгоритма для задачи со 100 пунктами.
- Оценена сходимость методов на основе длины найденного маршрута и числа итераций.
- Выявлены оптимальные комбинации параметров для каждого из этих алгоритма.

**Гипотеза исследования** заключается в том, что муравьиный алгоритм, благодаря механизму положительной обратной связи через феромоны, обеспечит более высокую точность решения по сравнению с PSO и SA, но требует больше вычислительных ресурсов.

**Научная новизна** работы заключается в комплексном экспериментальном сравнении алгоритмов на идентичных тестовых данных с акцентом на влияние параметров на результат. Практическая значимость связана с рекомендациями по выбору метода для задач маршрутизации в реальных условиях, таких, как планирование логистических цепей в условиях севера и Арктики (Иванов, 2021; Тутыгин, Антипов, Коробов, 2020).

Исследование опирается на работы отечественных и зарубежных авторов, включая (Dorigo et al., 2021; Попов, Соколов, 2019; Hussien et al., 2022), а также собственные вычислительные эксперименты. Результаты представлены в сравнительных таблицах и визуализированы для наглядности.

## Постановка задачи коммивояжёра

Задача коммивояжёра относится к классу NP-трудных комбинаторных оптимизационных задач. Для построения модели задачи коммивояжёра зададим множество пунктов  $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  и матрицы расстояний  $D = (d_{ij})$ , где  $d_{ij}$  — стоимость перехода из пункта  $v_i$  в пункт  $v_j$ ,  $i, j = 1, n$ . Требуется найти такой замкнутый маршрут





(гамильтонов цикл) минимальной длины, который проходит через каждый пункт ровно один раз и возвращается в исходную точку (Applegate et al., 2006). Целевая функция задаётся следующим образом:

$$L(\pi) = \sum_{i=1}^{n-1} d_{\pi(i), \pi(i+1)} + d_{\pi(n), \pi(1)} \rightarrow \min,$$

где  $\pi$  — перестановка пунктов, задающая порядок их посещения.

В случае полного неориентированного графа общее число различных гамильтоновых циклов составляет  $(n-1)!/2$ . Это делает точные методы решения задачи неэффективным уже для  $n \geq 20$  (Karp, 1972). В отличие от точных методов, требующих экспоненциальных вычислительных ресурсов, современные метаэвристические алгоритмы позволяют находить приближённые решения задачи коммивояжёра за полиномиальное время (Talbi, 2021).

В работе рассматривается евклидова задача коммивояжёра размерности  $n = 100$ , в которой координаты вершин генерируются случайным образом в единичном квадрате, а расстояния между ними вычисляются как евклидова норма в декартовой системе координат.

Для решения поставленной задачи выбраны три метаэвристических метода: метод имитации отжига, муравьиной колонии, роя частиц.

## Решение задачи коммивояжёра алгоритмом имитации отжига

Алгоритм имитации отжига (SA) (Kirkpatrick, Gelatt, Vecchi, 1983) основан на аналогии с термообработкой металлов. Атомы при нагревании покидают свои позиции в кристаллической решётке, а при последующем охлаждении стремятся занять положения с минимальной энергией. Важной особенностью процесса является возможность временного перехода в состояния с более высокой энергией, что предотвращает застревание в локальных минимумах.

Современные исследования (Tsotskas, Kipourous, 2022; Zhang et al., 2020) подтверждают значимость метода имитации отжига среди эффективных эвристик для решения задачи коммивояжёра. Алгоритм показывает наилучшие результаты на задачах средней размерности (Johnson et al., 1989). Приведём SA для решения задачи коммивояжёра со 100 пунктами с нормализованными координатами из единичного квадрата:

Шаг 1. Задаём параметры задачи (генерируем  $n = 100$  пунктов с координатами из промежутка  $(0;1)$ , расстояние между которыми рассчитывается по евклидовой метрике) и параметры алгоритма ( $T_{max}$  — начальную температуру,  $\alpha$  — коэффициент охлаждения,  $T_{min}$  — минимальную температуру,  $i_{max}$  — максимальное количество итераций).

Шаг 2. Находим начальное решение ( $x_{current}$ ) — случайный маршрут с посещением всех пунктов, вычисляем энергию — длину пути ( $E_{current}$ ).

Шаг 3. Основной цикл — метод имитации отжига. Начиная с самого высокого значения температуры ( $T_{max}$ ) производим вычисления, пока  $T > T_{min}$  и не достигнуто  $i_{max}$  итераций.



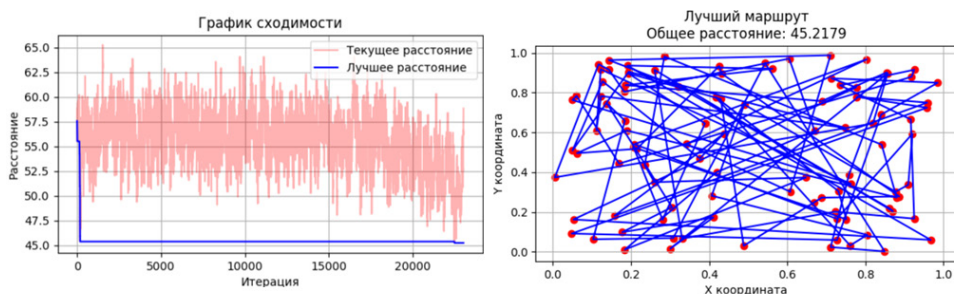
Шаг 3.1. Генерируем новое решение ( $x_{new}$ ) путём случайной перестановки двух пунктов в маршруте.

Шаг 3.2. Вычисляем изменение энергии — длины пути:  $\Delta E = E_{new} - E_{current}$ . Если  $\Delta E \leq 0$ , то принимаем новое решение. Если  $\Delta E > 0$ , то принимаем новое решение с вероятностью  $p = e^{-\Delta E/T}$ .

Шаг 3.3. Обновляем лучшее решение, понижаем температуру.

Шаг 4. Сохраняем лучшее найденное решение, визуализируем результаты.

Реализация алгоритма была произведена с использованием языка программирования python. В качестве визуализации решения представляется график сходимости результатов и граф найденного лучшего маршрута. При значениях параметров  $n = 100$ ,  $T_{max} = 1000$ ,  $\alpha = 0,0003$ ,  $T_{min} = 1$ ,  $i_{max} = 100000$ , длина лучшего найденного маршрута оказалась равной 45.2, которая была достигнута на 23000 итерации. Визуализация результата представлена на рис. 1.



**Рис. 1.** Результат решения задачи коммивояжёра со 100 пунктами методом имитации отжига

**Fig. 1.** The result of solving the traveling salesman problem with 100 points by simulated annealing

## Решение задачи коммивояжёра алгоритмом муравьиной колонии

Муравьиный алгоритм (ACO), разработанный М. Дориго в 1990-х годах (Dominguez, Cannella, 2020), относится к природным вычислениям. Он моделирует поведение муравьёв, оставляющих феромоновые следы для нахождения оптимальных путей. В вычислительной реализации каждый «муравей» строит решение задачи коммивояжёра, выбирая следующий пункт на основе уровня феромона и расстояния. ACO эффективен для задач средней размерности благодаря параллелизму, устойчивости к локальным оптимумам и масштабируемости. Приведём алгоритм ACO для решения задачи коммивояжёра со 100 пунктами с нормализованными координатами из единичного квадрата.

Шаг 1. Задаём параметры задачи (генерируем  $n = 100$  городов с координатами из промежутка  $(0;1)$ , расстояние между которыми — матрица расстояний, рассчитывается



по евклидовой метрике) и параметры алгоритма ( $m$  — количество муравьёв,  $\tau$  — матрица феромонов, проинициализированная малыми значениями  $\tau$ ,  $\alpha$  — параметр, задающий влияние феромона,  $\beta$  — параметр, задающий влияние эвристики,  $\rho$  — параметр, задающий интенсивность испарения феромона,  $Q$  — коэффициент усиления феромона,  $i_{max}$  — максимальное количество итераций).

Шаг 2. Размещаем муравьёв по вершинам.

Шаг 3. Основной цикл — метод муравьиной колонии, выполняем, пока не достигнуто  $i_{max}$ .

Шаг 3.1. Для каждого муравья выполняем цикл по количеству вершин в графе. Для текущей вершины вычисляем вероятность перехода в каждую следующую не-посещённую вершину по формуле:  $P_{ij} = \frac{\tau_{ij}^\alpha \eta_{ij}^\beta}{\sum_{m \in A} \tau_{im}^\alpha \eta_{im}^\beta}$ , где  $\tau_{ij}$  — количество феромона

между вершинами  $i$  и  $j$ ,  $\eta_{ij}$  — эвристическая информация,  $A$  — множество вершин, ещё не включенных в маршрут. Следующую вершину для посещения выбираем с учётом рассчитанной вероятности и добавляем её в маршрут муравья. После посещения муравьём всех вершин запоминаем полученное решение.

Шаг 3.2. После сравнения всех найденных решений муравьями, находим лучшее решение и обновляем лучший маршрут и минимальную длину пути.

Шаг 3.3. Изменяем количество оставшегося феромона на рёбрах графа, то есть обновляем феромонную матрицу по следующей формуле:  $\tau_{ij} \leftarrow \tau_{ij} \cdot (1 - \rho) + Q / L_k$ , где  $L_k$  — длина маршрута  $k$ -го муравья.

Шаг 4. Выводим лучший маршрут и его длину, визуализируем результат.

Реализация алгоритма была произведена с использованием языка программирования python. В качестве визуализации решения представляется график сходимости результатов и граф найденного лучшего маршрута. При значениях параметров  $n = 100$ ,  $\alpha = 0,5$ ,  $\beta = 3,5$ ,  $\rho = 0,3$ , длина лучшего найденного маршрута оказалась равной 9.23, которая была достигнута на 98-й итерации. Визуализация результата представлена на рис. 2.

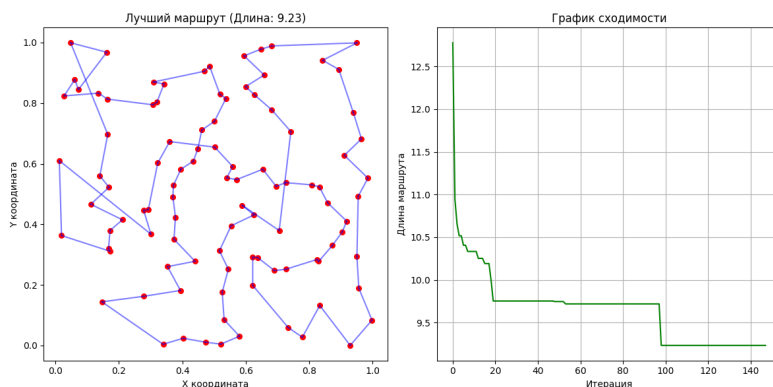


Рис. 2. Результат решения задачи коммивояжёра со 100 пунктами методом муравьиной колонии

Fig. 2. The result of solving the traveling salesman problem with 100 points using the ant colony method



## Решение задачи коммивояжёра алгоритмом роя частиц

Метод роя частиц (PSO) представляет собой мультиагентный алгоритм оптимизации, в котором множество взаимодействующих частиц совместно исследуют пространство решений. Разработанный Кеннеди и Эберхартом (Bonabeau, Dorigo, Theraulaz, 1999) на основе идей Рейнольдса, он моделирует движение частиц, которые корректируют свою скорость и положение, ориентируясь на личный лучший результат и лучшее решение всей группы. Алгоритм эффективно исследует пространство поиска, сходясь к оптимуму (Попов, Соколов, 2019). Приведём алгоритм PSO для решения задачи коммивояжёра со 100 пунктами с нормализованными координатами из единичного квадрата.

Шаг 1. Задаём параметры задачи (генерируем  $n = 100$  городов с координатами из промежутка  $(0;1)$ , расстояние между которыми — матрица расстояний, рассчитывается по евклидовой метрике) и параметры алгоритма ( $c_1$  — когнитивный коэффициент,  $c_2$  — социальный коэффициент,  $w$  — инерционный вес,  $i_{max}$  — максимальное количество итераций, создаём  $m$  — частиц, где каждая представляет  $x_{current}$  — текущий случайный маршрут,  $v$  — скорость, подразумевающая список перестановок пар пунктов,  $x_k$  — копия лучшего личного решения,  $L_k$  — длина лучшего личного решения).

Шаг 2. Определяем лучший маршрут ( $x_{best}$ ) среди всех частиц и его длину ( $L_{min}$ ).

Шаг 3. Основной цикл — метод роя частиц, выполняем, пока не достигнуто  $i_{max}$ .

Шаг 3.1. Обновляем скорости частиц по формуле:  $v_{current} \leftarrow w \cdot v_{current} + c_1 \cdot rand() \cdot (x_k - x_{current}) + c_2 \cdot rand() \cdot (x_{best} - x_{current})$ , где  $(rand())$  — случайное число из  $[0,1]$

Шаг 3.2. Обновляем положение частицы:  $x_{current} \leftarrow x_{current} + v_{current}$

Шаг 3.3. Вычисляем  $L_k$  и  $L_{min}$ . Если найденные личное и глобальное решения лучше, то обновляем их.

Шаг 4. Выводим лучший маршрут и его длину, визуализируем результат.

Реализация алгоритма была произведена с использованием языка программирования python. В качестве визуализации решения представляется график сходимости результатов и граф найденного лучшего маршрута. При значениях параметров  $n = 100$ ;  $c_1 = 1,6$ ;  $c_2 = 0,8$ ;  $w = 0,4$ , длина лучшего найденного маршрута оказалась равной 32.64, которая была достигнута на 92-й итерации. Визуализация результата представлена на рис. 3.

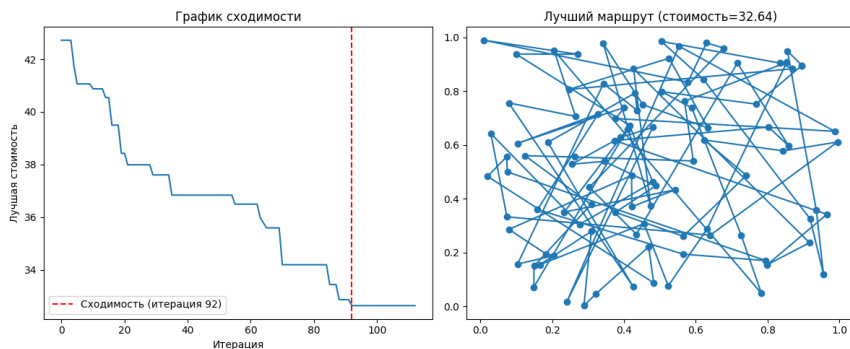


Рис. 3. Результат решения задачи коммивояжёра со 100 пунктами методом роя частиц

Fig. 3. The result of solving the traveling salesman problem with 100 points by the particles warm method



## Результаты вычислительных экспериментов

Для определения оптимальных параметров алгоритмов проведена серия вычислительных экспериментов с варьированием ключевых коэффициентов каждого метода.

В параметрических экспериментах при решении задачи коммивояжера с использованием метода PSO варьировались коэффициент начальной температуры  $T_{max}$  и коэффициент охлаждения  $\alpha$ . Полученные результаты представлены в табл. 1. В правом верхнем углу каждой ячейки указан номер шага сходимости алгоритма, а в нижнем левом углу — значение длины найденного маршрута.

Таблица 1 / Table 1

### Решение задачи коммивояжера методом имитации отжига

#### Solving the traveling salesman problem by simulated annealing

$\alpha \backslash T_{max}$	1000	800	600	400	200	100
0,001	6000 41,72	6000 40,61	6000 43,34	5000 45,83	5000 42,55	4000 46,58
0,0008	8000 44,89	8000 43,45	7000 42,9	7000 39,32	6000 42,08	5000 44,73
0,0006	11000 44,56	11000 44,51	10000 41,59	9000 41,78	8000 43,02	7000 39,42
0,0004	17000 42,65	16000 42,10	15000 45,13	14000 41,51	13000 39,46	11000 44,36
0,0002	34000 40,17	33000 42,90	31000 40,81	29000 41,27	26000 40,72	43000 44,51
0,0001	69000 40,00	66000 41,42	63000 41,48	59000 39,69	52000 40,69	46000 42,09

Анализируя полученные результаты, можно сделать выводы о том, что с понижением начальной температуры алгоритм быстрее сходится к оптимальному решению: чем выше значение скорости охлаждения, тем меньше итераций требуется для получения итогового значения; значения длин маршрутов варьируется от 39,32 до 46,58.

В параметрических экспериментах при решении задачи коммивояжера с использованием метода АСО варьировались коэффициенты  $\alpha$  — значимость феромона,  $\beta$  — значимость расстояния и  $\rho$  — интенсивность испарения феромона. Полученные результаты представлены в табл. 2. В правом верхнем углу каждой ячейки указан номер шага алгоритма, а в нижнем левом — значение длины найденного маршрута. Серым цветом выделены ячейки с полученной длиной маршрута меньше 9.00.



Таблица 2 / Table 2

**Решение задачи коммивояжёра методом муравьиной колонии**  
**Solving the traveling salesman problem by the ant colony method**

$\rho=0,3$								
$\alpha \backslash \beta$	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5
0	44 45,08	175 35,83	22 30,35	108 22,29	8 17,43	56 12,34	53 11,48	16 11,00
0,5	58 45,36	71 28,03	49 16,23	46 11,78	75 10,71	72 9,78	74 9,35	98 9,23
1	43 42,18	45 12,07	28 10,38	73 9,11	114 8,01	95 8,68	175 8,29	87 7,95
1,5	74 44,94	41 8,91	33 8,59	27 8,94	54 8,79	5 8,38	24 8,14	55 8,15
2	1 42,17	51 10,83	12 9,07	6 9,54	25 7,98	11 8,67	21 8,21	6 8,80
2,5	1 45,06	6 13,62	5 9,40	8 7,96	2 8,25	4 8,31	44 8,70	7 8,97
3	1 44,48	6 13,29	16 9,12	14 9,56	16 8,74	3 8,60	8 9,33	5 8,25
3,5	1 43,79	6 14,12	8 10,56	8 8,66	3 8,57	5 8,56	4 9,04	26 8,66
$\rho=0,5$								
$\alpha \backslash \beta$	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5
0	117 41,04	444 36,81	181 28,15	100 21,13	395 16,42	30 13,38	95 11,7	66 10,95
0,5	251 43,37	234 28,75	456 42,9	112 12,24	424 9,93	417 8,87	371 8,82	448 7,88
1	456 42,9	332 10,87	485 9,44	458 8,71	190 8,50	66 8,64	44 8,12	25 8,66
1,5	2 43,57	56 9,70	69 8,59	32 8,25	31 8,49	39 8,37	27 8,31	15 8,58
2	49 44,53	37 10,23	27 9,26	18 8,82	17 8,85	20 8,97	5 8,32	3 8,98
2,5	22 45,38	31 10,65	22 8,85	15 8,77	10 9,43	8 8,39	5 8,93	5 8,64
3	25 43,64	22 10,87	18 9,33	13 8,33	5 9,14	3 8,92	8 7,86	8 9,02
3,5	20 44,29	18 11,10	10 9,82	8 8,56	8 8,62	5 8,75	8 8,69	3 8,39



$\rho=0,7$								
$\alpha \backslash \beta$	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5
0	93 44,87	74 34,44	70 30,2	23 21,64	25 17,22	17 13,46	10 11,01	6 11,13
0,5	87 44,82	52 22,29	22 14,87	67 11,39	15 10,30	21 9,70	45 8,32	14 9,21
1	108 43,77	51 11,77	88 8,64	111 8,91	61 8,32	23 7,93	65 8,24	30 8,29
1,5	3 45,62	29 9,74	26 8,68	26 8,04	16 8,16	49 7,99	32 8,57	55 8,46
2	1 45,53	21 11,63	10 9,12	21 8,39	10 8,29	3 8,00	20 8,40	10 8,43
2,5	2 46,27	7 13,47	7 9,39	7 9,37	2 9,49	3 9,02	5 8,44	4 8,75
3	2 44,50	4 14,79	8 10,18	19 9,79	5 8,81	3 8,71	3 8,61	15 8,30
3,5	1 44,61	10 16,50	8 9,75	7 9,18	6 9,78	3 9,06	1 8,57	3 8,39

Анализируя полученные результаты, можно сделать вывод о том, что результат работы алгоритма ACO в большой степени зависит от значений входных параметров, значения длины маршрутов находятся в диапазонах от 46,27 (при  $\rho = 0,7$ ,  $\alpha = 2,5$  и  $\beta = 0$ ) до 7,86 (при  $\rho = 0,5$ ,  $\alpha = 3$  и  $\beta = 3$ ). При нулевом значении параметра видимости ( $\beta = 0$ ) алгоритм теряет способность учитывать расстояния между пунктами, что приводит к попаданию в локальные оптимумы, значительному ухудшению качества решений, длине маршрутов в диапазоне 41,04—46,27 (наихудшие показатели), независимости результатов от значений  $\alpha$  и  $\rho$ . При  $\alpha = 0$  (игнорирование феромонов) наблюдается снижение эффективности алгоритма, разброс результатов 10,95—45,08, потеря коллективного «опыта» муравьев, преобладание случайного поиска.

Проведенные исследования демонстрируют существенное преимущество муравьиного алгоритма перед методом имитации отжига при решении задачи коммивояжёра. Экспериментальные данные подтверждают, что увеличение параметра видимости  $\beta$  приводит к систематическому снижению длины конечного маршрута. Однако анализ чувствительности алгоритма выявил значительную зависимость результатов от баланса между параметрами  $\alpha$  и  $\beta$  — даже незначительные изменения их значений вызывают существенные колебания качества решения. Эта особенность объясняется сложным нелинейным взаимодействием факторов влияния феромонных следов и эвристической информации о расстояниях между пунктами. Наблюдаемая неустойчивость работы алгоритма при нарушении баланса параметров подчеркивает важность их тщательного подбора для каждой конкретной постановки задачи.





В параметрических экспериментах при решении задачи коммивояжёра с использованием метода PSO варьировались параметры  $w$  — коэффициент инерции,  $c_1$  — когнитивный коэффициент и  $c_2$  — социальный коэффициент. Полученные результаты представлены в табл. 3. В правом верхнем углу каждой ячейки указан номер шага сходимости алгоритма, а в нижнем левом углу — значение длины найденного маршрута. Серым цветом выделены ячейки с полученной длиной маршрута меньше 30.00.

Таблица 3 / Table 3

**Решение задачи коммивояжёра методом роя частиц**  
**Solving the traveling salesman problem by the particle swarm method**

$w = 0,2$								
$c_2 \backslash c_1$	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1	1,2	1,4
0	48,30 2	46,41 1	45,71 499	44,64 499	45,29 1	49,55 499	46,52 1	45,56 1
0,2	32,55 121	39,44 35	26,98 249	28,33 234	25,20 221	25,51 240	24,18 282	39,82 60
0,4	32,89 93	31,65 83	31,02 81	31,98 87	30,14 115	30,33 132	30,59 120	25,33 150
0,6	33,88 36	32,94 35	31,92 43	30,18 54	31,51 63	30,83 72	27,54 110	27,12 90
0,8	30,67 24	33,87 32	40,79 27	30,47 39	32,89 50	30,42 40	28,48 57	30,33 48
1	34,10 15	29,98 24	31,57 28	28,81 35	30,69 34	31,44 44	30,39 58	28,49 39
1,2	34,57 17	33,22 20	31,41 17	29,81 37	33,32 45	31,63 29	28,01 45	33,43 27
1,4	36,14 12	34,18 17	31,36 17	33,84 26	34,09 18	28,33 29	31,15 40	27,19 50
$w = 0,4$								
$c_2 \backslash c_1$	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1	1,2	1,4
0	48,44 1	43,30 8	49,79 8	49,05 2	43,78 4	46,49 8	46,92 1	50,43 5
0,2	34,04 110	41,96 16	45,32 21	40,68 138	27,95 339	43,55 18	39,46 34	40,27 88
0,4	33,44 40	30,65 144	30,02 175	28,75 198	41,24 29	38,31 50	34,85 171	41,08 53
0,6	34,19 67	30,29 73	31,66 142	29,88 145	39,97 21	38,72 19	41,68 40	43,47 13
0,8	35,92 48	32,42 81	30,19 146	28,87 189	27,06 178	29,98 217	36,06 83	44,67 28





$w = 0,4$								
	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1	1,2	1,4
1	40 31,67	47 34,23	110 27,13	156 29,18	137 29,09	46 36,91	22 40,26	63 33,73
1,2	41 30,76	60 28,39	79 30,57	126 29,14	147 28,95	210 32,07	37 38,98	243 30,95
1,4	35 30,73	44 34,18	62 31,00	86 31,62	154 28,60	212 27,88	302 25,06	152 33,01
$w = 0,6$								
$c_2 \backslash c_1$	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1	1,2	1,4
0	1 44,27	2 44,18	1 47,58	1 47,53	2 45,58	20 43,77	4 47,11	15 47,07
0,2	140 34,08	42 41,35	42 43,47	34 44,16	8 46,54	28 42,75	37 43,68	22 42,13
0,4	152 33,06	85 42,51	23 40,42	22 44,71	64 42,03	10 42,87	42 46,12	40 43,78
0,6	143 32,13	4 42,86	23 44,04	7 45,23	34 45,49	31 43,49	12 45,73	20 41,07
0,8	134 33,09	12 40,33	27 40,79	6 43,17	61 41,96	38 43,48	13 41,98	26 46,11
1	217 31,29	70 41,14	10 45,45	6 45,59	29 43,66	42 45,64	33 46,72	24 41,81
1,2	221 31,09	5 44,29	7 45,53	15 41,73	12 45,28	44 41,5	8 44,43	27 44,34
1,4	181 31,25	45 42,26	17 42,17	8 43,52	18 44,14	4 44,03	27 42,18	499 40,79

Анализируя полученные результаты можно сделать вывод о том, что длина маршрута в зависимости от значений параметров алгоритма варьируется от 24,18 до 49,79; наилучшая сходимость алгоритма наблюдается при значении коэффициента инерции  $w=0,2$  и  $w=0,4$ .

Экспериментальные данные показывают, что при инерционном коэффициенте  $w=0,6$  длина получаемых маршрутов существенно превышает результаты, достигнутые при меньших значениях данного параметра. Такая зависимость свидетельствует о том, что снижение инерции способствует более эффективному исследованию пространства решений и усиливает влияние когнитивного ( $c_1$ ) и социального ( $c_2$ ) компонентов алгоритма. При этом оптимальная производительность достигается при умеренных значениях  $c_1$  и  $c_2$ , которые позволяют избежать преждевременной сходимости к субоптимальным решениям.

Сравнительный анализ продемонстрировал промежуточное положение алгоритма роя частиц по эффективности между методом имитации отжига и муравьиным



алгоритмом при решении задачи коммивояжера. Важно отметить, что для получения качественных решений требуется проведение многочисленных вычислительных экспериментов с различными комбинациями параметров. Однако даже при фиксированных значениях  $c_1$  и  $c_2$  наблюдается значительная вариативность результатов, что свидетельствует о высокой чувствительности алгоритма к начальным условиям и сложном характере взаимодействия управляющих параметров. Данная особенность подчеркивает необходимость разработки более совершенных механизмов балансировки влияния различных факторов в алгоритме.

## Обсуждение результатов

Проведенное сравнительное исследование SA, ACO и PSO для решения задачи коммивояжера позволило выявить существенные различия в их эффективности. Наибольшую точность продемонстрировал муравьиный алгоритм, который в среднем находил маршруты значительно короче по сравнению с методом имитации отжига и с алгоритмом роя частиц для тестовых примеров размерностью в 100 вершин. Это объясняется способностью ACO эффективно комбинировать положительную обратную связь через феромонные следы с эвристической информацией о расстояниях между пунктами, что обеспечивает устойчивый баланс между исследованием пространства решений и эксплуатацией найденных хороших маршрутов.

Алгоритм роя частиц показал промежуточные результаты, превосходя метод имитации отжига по скорости сходимости, но уступая муравьиному алгоритму по точности конечного решения. Наилучшие показатели PSO наблюдались при относительно низких значениях инерционного веса ( $w \sim 0,3 - 0,4$ ) и умеренных коэффициентах социального и когнитивного влияния ( $c_1 \sim 1,2 - 1,5, c_2 \sim 1,0 - 1,2$ ), что подтверждает важность правильного баланса между индивидуальным и коллективным опытом частиц.

Метод имитации отжига, несмотря на простоту реализации, продемонстрировал наименьшую эффективность, особенно заметную при увеличении размерности задачи. При  $n > 200$  качество решений SA существенно ухудшалось, в то время как ACO и PSO сохраняли приемлемую точность. Это связано с фундаментальным ограничением SA — отсутствием механизма накопления и использования коллективного опыта, что критически важно для задач высокой размерности.

Особый интерес представляют результаты параметрического анализа, выявившие различную чувствительность методов к настройкам. Муравьиный алгоритм показал наибольшую стабильность при вариации параметров в диапазонах  $\alpha \in [0,5, 1,5]$  и  $\beta \in [2, 5]$ , в то время как PSO требовал более точной настройки коэффициентов. Это делает ACO более предпочтительным для практического применения, особенно в условиях, когда невозможно проводить многократную тонкую настройку параметров для каждой конкретной задачи.

Полученные результаты согласуются с современными исследованиями в области метаэвристической оптимизации, подтверждая, что для задач комбинаторной оптимизации, подобных TSP, методы, основанные на коллективном интеллекте (ACO,



PSO), как правило, превосходят подходы, основанные на индивидуальном поиске (SA). Особую значимость это имеет для морской транспортной логистики Арктического региона, где в условиях высокой неопределенности для принятия решений требуется учет множества динамических факторов и оптимизация сложных маршрутных сетей (пример расчета маршрутов для портов и портопунктов Белого моря приведен авторами в работе (Кошуняева, Тутьгин, 2025)).

## Заключение

Сравнительный анализ метаэвристических методов (имитации отжига, муравьиного и роя частиц) подтвердил гипотезу о преимуществе подходов, основанных на коллективном интеллекте, для решения задачи коммивояжера. Наибольшую эффективность продемонстрировал муравьиный алгоритм, обеспечивающий оптимальный баланс между качеством решений и вычислительными затратами. Это преимущество объясняется эффективным сочетанием механизмов положительной обратной связи через феромонные следы и использования эвристической информации о расстояниях между городами.

Параметрический анализ выявил оптимальные диапазоны значений управляющих коэффициентов для каждого алгоритма. Для муравьиного алгоритма наилучшие результаты достигаются при  $\alpha \in [0.5, 1.5]$ ,  $\beta \in [2, 5]$  и  $\rho \in [0.1, 0.3]$ , что подтверждает важность сбалансированного учёта как коллективного опыта (феромоны), так и локальной информации (расстояния). Метод имитации отжига, несмотря на простоту реализации, оказался наименее эффективным, особенно при увеличении размерности задачи, что связано с отсутствием механизмов накопления и использования коллективного опыта.

Полученные результаты имеют практическую ценность для различных областей, включая арктическую морскую транспортную логистику, где требуется устойчивая оптимизация маршрутов в условиях высокой неопределённости.

## Список источников / References

1. Иванов, П.С., Смирнова, Л.К. (2021). Применение муравьиных алгоритмов для решения задачи коммивояжера. Искусственный интеллект и принятие решений, 3, 45—58. Ivanov, P.S., Smirnova, L.K. (2021). Application of Ant Algorithms for Solving the Traveling Salesman Problem. Artificial Intelligence and Decision Making, 3, 45—58. (In Russ.).
2. Иванов, С.М. (2021). Транспортные системы Арктики: вызовы и решения. СПб.: Изд-во Политехн. ун-та, 200 с. Ivanov, S.M. (2021). Transport Systems of the Arctic: Challenges and Solutions. St. Petersburg: Polytechnic University Press, 200 p. (In Russ.).
3. Кошуняева, Н.В., Тутьгин, А.Г. (2025). Нечеткий муравьиный алгоритм для оптимизации маршрутов судов в Белом море. Вестник Воронежского государственного технического университета, 21(2), 26—33. DOI: 10.36622/1729-6501.2025.21.2.004. (На рус.). URL: <https://doi.org/10.36622/1729—6501.2025.21.2.004> (дата обращения: 10.07.2025).



- Koshunyaeva, N.V., Tutygin A.G. (2025). Fuzzy Ant Algorithm for Ship Route Optimization in the White Sea. *Bulletin of Voronezh State Technical University*, 21(2), 26—33. (In Russ.). URL: <https://doi.org/10.36622/1729—6501.2025.21.2.004> (viewed: 10.07.2025).
4. Попов, Д.И., Соколов А.Ю. (2019). Алгоритмы роевого интеллекта: метод роя частиц и его модификации. *Искусственный интеллект и принятие решений*, 3, 45—62.  
Popov D.I., Sokolov A.Yu. (2019). Swarm Intelligence Algorithms: Particle Swarm Method and Its Modifications. *Artificial Intelligence and Decision Making*, 3, 45—62. (In Russ.).
  5. Тутьгин, А.Г., Антипов, Е.О., Коробов, В.Б. (2020). Проблемы моделирования логистических операций в Арктической зоне Российской Федерации. Архангельск: КИРА, 244 с.  
Tutygin, A.G., Antipov, E.O., Korobov, V.B. (2020). *Modeling of Logistics Operations in the Arctic Zone of the Russian Federation*. Arkhangelsk: KIRA, 244 p. (In Russ.).
  6. Штовба, С.Д. (2003). Муравьиные алгоритмы. *Exponenta Pro. Математика в приложениях*, 4, 70—75. URL: <https://www.researchgate.net/publication/279535061> (дата обращения: 23.10.2024).  
Stovba, S.D. (2003). Ant Algorithms. *Exponenta Pro. Mathematics in Applications*, 4, 70—75. (In Russ.). URL: <https://www.researchgate.net/publication/279535061> (viewed: 23.10.2024).
  7. Applegate, D.L., Bixby, R.E., Chvatal, V., Cook, W.J. (2006). The Traveling Salesman Problem: A Computational Study. Princeton: Princeton University Press, 606 p. ISBN: 978-0-691-12993-8
  8. Blum, C., Roli A. (2003). Metaheuristics in Combinatorial Optimization: Overview and Conceptual Comparison. *ACM Computing Surveys*, 35(3), 268—308. <https://doi.org/10.1145/937503.937505>
  9. Bonabeau, E., Dorigo, M., Theraulaz, G. (1999). *Swarm Intelligence: From Natural to Artificial Systems*. Oxford: Oxford University Press, 307 p. ISBN: 978-0-19-513158-1
  10. Colorni, A., Dorigo, M., Maniezzo, V. (1991). Distributed Optimization by Ant Colonies. *Proceedings of ECAL'91*, 134—142. Paris: Elsevier.
  11. Dominguez, R., Cannella, S. (2020). Insights on Multi-Agent Systems Applications for Supply Chain Management. *Journal of Sustainability*, 12(5), 1—15. <https://doi.org/10.3390/su12051842>
  12. Dorigo, M., et al. (2021). Ant Colony Optimization: A 30-Year Retrospective. *Swarm Intelligence*, 15(1—2), 1—42. <https://doi.org/10.1007/s11721-021-00202-8>
  13. Johnson D.S. et al. (1989). Optimization by Simulated Annealing: An Experimental Evaluation. *Operations Research*, 37(6), 865—892. <https://doi.org/10.1287/opre.37.6.865>
  14. Hussien, A.G. et al. (2022). Recent Advances in Harris Hawks Optimization. *Neural Computing and Applications*, 34, 8939—8980. <https://doi.org/10.1007/s00521-022-07173-w>
  15. Karp, R.M. (1972). Reducibility Among Combinatorial Problems. In: *Complexity of Computer Computations*. New York: Plenum Press, 85—103. [https://doi.org/10.1007/978-1-4684-2001-2\\_9](https://doi.org/10.1007/978-1-4684-2001-2_9)
  16. Kennedy, J., Eberhart, R. (1995). Particle Swarm Optimization. *Proceedings of ICNN'95 — International Conference on Neural Networks*, 4, 1942—1948. <https://doi.org/10.1109/ICNN.1995.488968>
  17. Kirkpatrick, S., Gelatt, C.D., Vecchi, M.P. (1983). Optimization by Simulated Annealing. *Science*, 220(4598), 671—680. <https://doi.org/10.1126/science.220.4598.671>
  18. Stützle, T., Hoos, H.H. (2000). MAX—MIN Ant System. *Future Generation Computer Systems*, 16(8), 889—914. [https://doi.org/10.1016/S0167-739X\(00\)00043-1](https://doi.org/10.1016/S0167-739X(00)00043-1)
  19. Talbi, E.-G. (2021). *Metaheuristics: From Design to Implementation*. *ACM Computing Surveys*, 54(6), 1—42. <https://doi.org/10.1145/3460772>



20. Tsotskas, C., Kipouros, T. (2022). *Simulated Annealing in Aerospace Engineering: A 2020s Perspective*. AIAA Journal, 60(4), 1—18. <https://doi.org/10.2514/1.J061824>
21. Zhang, Y. et al. (2020). Improved Simulated Annealing for Large-scale TSP. Applied Soft Computing, 86, 105890. <https://doi.org/10.1016/j.asoc.2019.105890>

### **Информация об авторах**

Кошуняева Надежда Владимировна, научный сотрудник ФГБУН «Федеральный исследовательский центр комплексного изучения Арктики имени академика Н.П. Лаверова Уральского отделения Российской академии наук» (ФГБУН ФИЦКИА УрО РАН), г. Архангельск, ORCID: <https://orcid.org/0009-0007-0779-9141>, e-mail: [n.koshunyaeva@narfu.ru](mailto:n.koshunyaeva@narfu.ru)

Тутыгин Андрей Геннадьевич, ведущий научный сотрудник ФГБУН «Федеральный исследовательский центр комплексного изучения Арктики имени академика Н.П. Лаверова Уральского отделения Российской академии наук» (ФГБУН ФИЦКИА УрО РАН), г. Архангельск, ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-9821-651X>, e-mail: [andgt64@yandex.ru](mailto:andgt64@yandex.ru)

### **Information about the authors**

Nadezhda V. Koshunyaeva, researcher N. Laverov Federal Center for Integrated Arctic Research of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences (FECIAR UrB RAS), Arkhangelsk, ORCID: <https://orcid.org/0009-0007-0779-9141>, e-mail: [n.koshunyaeva@narfu.ru](mailto:n.koshunyaeva@narfu.ru)

Andrey G. Tutygin, leading researcher N. Laverov Federal Center for Integrated Arctic Research of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences (FECIAR UrB RAS), Arkhangelsk, ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-9821-651X>, e-mail: [andgt64@yandex.ru](mailto:andgt64@yandex.ru)

### **Вклад авторов**

Все авторы приняли участие в обсуждении результатов и согласовали окончательный текст рукописи.

### **Contribution of the authors**

All authors participated in the discussion of the results and approved the final text of the manuscript.

### **Конфликт интересов**

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

### **Conflict of interest**

The authors declare no conflict of interest.

### **Декларация об этике**

Данное исследование не требует этического одобрения, так как оно основано исключительно на вычислительных экспериментах с алгоритмами и не предполагает работы с человеческими участниками или персональными данными. Соответственно, процедура получения информационного согласия не применялась.



### ***Ethics statement***

This study does not require ethical approval as it is based solely on computational experiments with algorithms and does not involve human participants or personal data. Therefore, the informed consent procedure was not applicable

Поступила в редакцию 24.07.2025

Поступила после рецензирования 29.07.2025

Принята к публикации 05.08.2025

Опубликована 30.09.2025

Received 2025.07.24

Revised 2025.07.29

Accepted 2025.08.05

Published 2025.09.30

Научная статья | Original paper

УДК 004.89

## Оптимизация передачи сигнала между нейронными популяциями с помощью воздействия на контрольные узлы

Б.Б. Батуев<sup>1\*</sup>, А.А. Онучин<sup>2,3\*</sup>, С.В. Сухов<sup>1,4</sup>✉

<sup>1</sup> Институт радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова  
Российской академии наук, Москва, Российская Федерация

<sup>2</sup> Сколковский институт науки и технологий, Москва, Российская Федерация

<sup>3</sup> Лаборатория сложных сетей, Центр нейробиологии и нейроморфных технологий  
Москва, Российская Федерация

<sup>4</sup> УФИРЭ им. В.А. Котельникова РАН, Ульяновск, Российская Федерация

\* Авторы внесли равный вклад

✉ ssukhov@ulireran.ru

### Резюме

**Контекст и актуальность.** В нейронных сетях головного мозга синхронная активность критически важна, однако точные механизмы, обеспечивающие согласованность активности между его различными частями, остаются неясными. **Цель.** Определить, как стимуляция контрольных узлов, выбранных на основе различных метрик центральности, влияет на распространение импульсной активности между двумя слабо связанными нейронными популяциями. **Гипотеза.** Выбор контрольных узлов в первом кластере в соответствии с определенными метриками центральности способствует улучшению передачи активности импульсов во второй кластер по сравнению со случайным выбором нейронов. **Методы и материалы.** В двухкластерной сети, смоделированной по стохастической блочной модели, часть нейронов в первом кластере (10—20%) подвергалась внешней стимуляции. Контрольные узлы выбирались случайно или по различным мерам центральности: по степени посредничества, степени близости, степени вершины, степени влиятельности, гармонической центральности и центральности просачивания. **Результаты.** При стимулировании нейронов, выбранных на основе различных мер центральности, средняя частота импульсов во втором кластере возрастала пропорционально количеству контрольных узлов, и активность синхронизировалась с первым кластером. **Выводы.** Топология сети и меры выбора контрольных узлов



определяют эффективность и устойчивость синхронизации, что важно для нейромодуляции и разработки биоподобных вычислительных систем.

**Ключевые слова:** импульсные нейронные сети, центральность вершины, синхронизация, контрольные узлы, стохастическая блочная модель

**Финансирование.** Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского научного фонда в рамках научного проекта № 24-21-00470, <https://rscf.ru/project/24-21-00470/>

**Дополнительные данные.** Код программы доступен по адресу: <https://github.com/buligar/driver-nodes>

**Для цитирования:** Батуев, Б.Б., Онучин, А.А., Сухов, С.В. (2025). Оптимизация передачи сигнала между нейронными популяциями с помощью воздействия на контрольные узлы. *Моделирование и анализ данных*, 15(3), 94–112. <https://doi.org/10.17759/mda.2025150306>

## Optimization of signal transmission between neural populations by stimulation of driver nodes

**B.B. Batuev<sup>1\*</sup>, A.A. Onuchin<sup>2,3\*</sup>, S.V. Sukhov<sup>1,4</sup>**✉

<sup>1</sup> Kotelnikov Institute of Radioengineering and Electronics of Russian Academy of Sciences, Moscow, Russian Federation

<sup>2</sup> Skolkovo Institute of Science and Technology, Moscow, Russian Federation

<sup>3</sup> Laboratory of Complex Networks, Center for Neurophysics and Neuromorphic Technologies, Moscow, Russian Federation

<sup>4</sup> Ulyanovsk Branch of Kotelnikov Institute of Radioengineering and Electronics of Russian Academy of Sciences, Ulyanovsk, Russian Federation

\* These authors contributed equally

✉ [ssukhov@ulireran.ru](mailto:ssukhov@ulireran.ru)

### Abstract

**Context and relevance.** Synchronized activity is critical in brain neural networks, yet the precise mechanisms that ensure coherence of activity between different brain parts remain unclear. **Objective.** To determine how the choice of driver nodes (according to different centrality metrics) affects the propagation of spiking activity between two sparsely connected clusters. **Hypothesis.** The selection of control nodes in the first cluster improves the propagation of spike activity to the second cluster compared to a random selection of neurons. **Methods and Materials.** In a two-cluster network modeled by a stochastic block model, a fraction of neurons in the first cluster (10–20%) were subjected to external stimulation. Driver nodes were selected randomly or by centrality: betweenness, closeness, degree, eigenvector, harmonic, and percolation.





**Results.** When stimulating the neurons chosen on the base of various centrality measures, the average firing rate in the second cluster increased proportionally to the number of driver nodes and synchronized with the first cluster. **Conclusions.** Network topology and driver node selection metrics determine the efficiency and robustness of inter-cluster synchronization, which is important for neuromodulation and the development of bio-inspired computing systems.

**Keywords:** spiking neural networks, centrality, synchronization, driver nodes, stochastic block model

**Funding.** The study was supported by the Russian Science Foundation, project number 24-21-00470, <https://rscf.ru/en/project/24-21-00470/>.

**Supplemental data.** The code is available from <https://github.com/buligar/driver-nodes>

**For citation:** Batuev, B.B., Onuchin, A.A., Sukhov, S.V. (2025). Optimization of signal transmission between neural populations by stimulation of driver nodes. *Modelling and Data Analysis*, 15(3), 94—112. (In Russ.). <https://doi.org/10.17759/mda.2025150306>

## Введение

Исследование механизмов достижения синхронизации нейронной активности в мозге является важной проблемой, так как подобная синхронность напрямую связана с когнитивными процессами, такими как восприятие, внимание, память и обучение (Fell, Axmacher, 2011; Ward, 2003). Нарушение синхронной активности ассоциируется с различными неврологическими и психиатрическими заболеваниями, включая эпилепсию, болезнь Альцгеймера и шизофрению (Uhlhaas, Singer, 2006). Несмотря на известную важность синхронизации, остается неясным, как структурные особенности коннектома, в частности центральность узлов и межкластерные связи, определяют распространение синхронности. Изучение минимальных управляющих воздействий, необходимых для достижения синхронизации, может существенно улучшить наше понимание фундаментальных принципов работы мозга и разработку эффективных методов лечения нейропатологий, связанных с десинхронизацией.

В данной работе мы исследуем стратегии достижения синхронизации в стохастических блочных моделях (СБМ) сетей с минимальными управляющими воздействиями. Эта работа опирается на исследования в области управления нейронными сетями (Bayati и др., 2015), фокусируясь на выявлении контрольных узлов, которые влияют на динамику. Оценивая различные метрики центральности (степень посредничества, степень близости, степень вершины, степень влиятельности, гармоническую центральность и центральность просачивания), мы определяем топологические особенности, предсказывающие эффективные контрольные узлы.

Наше исследование опирается на существующие работы в области управления нейронными сетями и механизмов синхронизации (Bayati и др., 2015), а также исследования влияния центральности на нейронную динамику (Fletcher, Wennekers, 2018).



Предыдущие исследования идентифицировали отдельные метрики центральности, связанные с функциональной активностью нейронов. Однако ни одна из этих работ не исследовала непосредственно, как выбор контрольных узлов на основе центральности влияет на синхронизацию и информационный поток в стохастических блочных моделях нейронных сетей. Наше исследование расширяет эти результаты, систематически исследуя связь между топологическими характеристиками и эффективностью управления синхронизацией сети.

Исследования управления нейронных сетей в основном сосредоточены на выявлении контрольных узлов — нейронов, целенаправленная стимуляция которых может направить систему к желаемым состояниям. Теория управления сложными сетями (Liu, Slotine, Barabási, 2011) предоставляет математическую основу для определения минимального набора узлов, необходимых для управления сложными сетями. Однако в работах в рамках подобной тематики (Gu и др., 2015) приоритет отдается теоретической оптимальности, а не биологически правдоподобным механизмам, что оставляет нерешенными вопросы о том, как контрольные узлы формируют переходную или адаптивную динамику (например, синхронизацию).

Параллельные работы по изучению механизмов синхронизации показали, что топология сети — например, модульные или безмасштабные архитектуры — играют важную роль в координации активности (Dörfler, Chertkov, Bullo, 2013).

Общим аспектом нашего исследования и предыдущих работ (Bayati, 2015; Dörfler, Chertkov, Bullo, 2013; Fletcher, Wennekers, 2018; Gu, 2015) является изучение роли центральных узлов и структуры сети в распространении активности. Отличительной особенностью нашего подхода является акцент на минимальных контрольных воздействиях для достижения синхронности в сетях с заданной структурой. В отличие от предыдущих исследований, в которых не проводился прямой анализ влияния конкретных метрик центральности и межкластерной связности на синхронизацию, мы систематически исследуем и количественно оцениваем вклад различных центральностей в идентификацию эффективных контрольных узлов. Это позволяет нам раскрыть механизмы связи между структурными и функциональными характеристиками сети, что ранее не было подробно изучено.

Главная гипотеза заключается в том, что выбор контрольных узлов на основе специфических метрик центральности и межкластерной связности позволяет существенно повысить эффективность достижения синхронной активности при минимальных управляющих воздействиях в нейронных СБМ сетях.

Цели исследования состоят в следующем:

1. Определить наиболее информативные топологические метрики для выбора контрольных узлов.
2. Сравнить эффективность разных стратегий выбора узлов для управления синхронизацией.
3. Оценить, как различные стратегии управления влияют на динамику распространения синхронной активности в сети.



## Материалы и методы

### Архитектура нейронной сети

Мы рассматриваем две слабо связанные нейронные популяции. Каждая популяция состоит из одинакового числа нейронов. Сеть моделировалась как ненаправленная стохастическая блочная модель (Holland, Laskey, Leinhardt, 1983), где внутрикластерная связность определялась вероятностью ребра 0,15, а межкластерная связность варьировалась от 0,01 до 0,1.

Генерация стохастической блочной модели (СБМ) заключается в разбиении множества узлов  $V$  графа на несколько подмножеств (кластеров), в нашем случае используется два кластера  $V_1, V_2$ . Пусть общее число узлов равно

$$n = \sum_{i=1}^2 n_i, \quad (1)$$

где  $n_i$  — размер  $i$ -го кластера. Узлы, как правило, нумеруются последовательно, что позволяет каждому кластеру  $V_i$  быть представленным интервалом последовательных индексов от

$$\sum_{j=1}^{i-1} n_j \text{ до } \sum_{j=1}^i n_j - 1. \quad (2)$$

Далее, для формирования структуры графа устанавливаются ребра внутри каждого кластера и между различными кластерами. Если узлы  $u$  и  $v$  принадлежат одному кластеру  $V_i$ , то ребро между ними добавляется с вероятностью  $p_{intra}$ . Формально, для любых  $u, v \in V_i$  (при  $u \neq v$ ) вероятность наличия ребра задается как

$$P((u, v) \in E) = p_{intra}, \quad (3)$$

где  $E$  обозначает множество ребер графа.

Аналогично, если  $u$  принадлежит кластеру  $V_i$ , а  $v$  — кластеру  $V_j$  при  $i \neq j$ , то ребро между ними устанавливается с вероятностью  $p_{inter}$ :

$$P((u, v) \in E) = p_{inter}. \quad (4)$$

Матрица смежности  $A$  графа описывается следующим образом:  $A_{uv} = 1$ , если ребро между  $u$  и  $v$  присутствует, и  $A_{uv} = 0$  в противном случае, при этом вероятность  $A_{uv} = 1$  зависит от принадлежности узлов к одному или разным кластерам.

### Модификация значений центральностей для определенных узлов

Согласно нашей гипотезе, узлы с наибольшими значениями центральностей могли бы быть наилучшими кандидатами для передачи информации из одной нейронной



популяции в другую. Но в СБМ узлы внутри одного блока обычно имеют схожие вероятности связей. В отличие от моделей с предпочтительным присоединением (например, модель Барабаши-Альберт), где возникают «хабы» с экстремально высокой степенью, в СБМ таких узлов нет, если только это не задано явно в параметрах. С целью добавления в сеть узлов, обладающих высокой мерой центральности определенного вида, нами была предложена процедура точечной модификации сетевой топологии (бустинг). Например, можно выбрать целевой кластер  $V_i$  и определить число узлов, для которых центральность будет усилена:

$$n_{boost} = [\alpha |V_i|], \quad (5)$$

где  $|V_i|$  — мощность множества  $V_i$ , то есть количество вершин в целевом кластере  $V_i$ ,  $\alpha$  представляет собой заданную долю узлов целевого кластера (рис. 1).

В нашей работе мы исследовали следующие типы центральностей: степень вершины (degree), степень посредничества (betweenness), степень близости (closeness), степень влиятельности (eigenvector), центральность просачивания (percolation) и гармоническую центральность (harmonic) (Boccaletti, 2006; Bovet, Makse, 2021). В зависимости от типа центральности, которую требуется усилить, добавляются дополнительные ребра. Процедура бустинга центральностей реализовывалась следующим образом для каждого типа метрик:

1. Степень вершины (Degree):

Для усиления степени вершины, например, для узла  $u$  может быть определено число дополнительных ребер в виде

$$\Delta d(u) = B \cdot d(u), \quad (6)$$

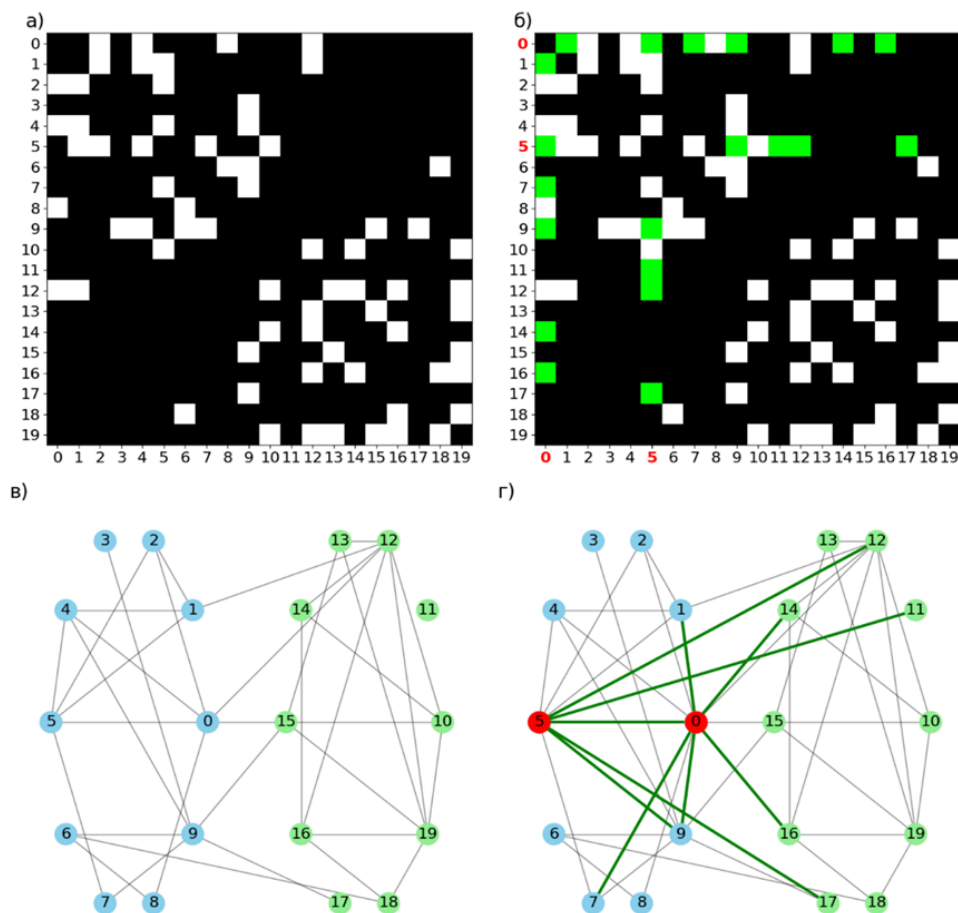
где  $d(u)$  — исходная степень узла  $u$ , а коэффициент  $B$  задает масштаб усиления (boost factor). Ребра добавляются между узлом  $u$  и случайно выбранными узлами из множества тех, с которыми  $u$  ранее не имел связи, что приводит к увеличению степени вершины. Новые связи добавляются с узлами как внутри своего кластера, так и в других кластерах.

2. Степень влиятельности (Eigenvector):

Узлы соединялись с наиболее влиятельными узлами других кластеров, определенными через алгоритм eigenvector-центральность. Это создавало «мосты» к ключевым элементам сети, усиливая их вес в глобальной структуре связей. Например, узел-мишень получал связи с топ-10% центральных узлов других кластеров с вероятностью  $p_{inter} \cdot B$ .

3. Степень посредничества (Betweenness):

Для увеличения участия узлов в кратчайших путях между кластерами, добавлялись связи с узлами, имеющими высокую betweenness-центральность. Это делало их критическими «перевалочными пунктами» для информации, искусственно увеличивая их роль в маршрутизации потоков.



**Рис. 1.** Пример двухкластерной сети.

(А) Матрица смежности до повышения степени вершин. (Б) Матрица смежности после повышения степени вершин. Зеленым цветом показаны новые ребра. Красным цветом выделены узлы, на которые подается стимул.

(В) Граф до повышения степени вершин. (Г) Граф после повышения степени вершин. Жирные линии показывают добавленные ребра.

Красным цветом выделены узлы, на которые подается стимул

**Fig. 1.** An example of a two-cluster network.

(A) Adjacency matrix before increasing the degree centrality.

(B) Adjacency matrix after increasing the degree of nodes. The green color indicates the newly added edges. The nodes that are supplied with a stimulus are highlighted in red.

(C) Graph before increasing degree centrality. (D) Graph after increasing degree centrality. Thick lines indicate newly added edges. The nodes that are supplied with a stimulus are highlighted in red



#### 4. Степень близости (Closeness):

Добавлялись связи с узлами из удаленных частей сети, сокращая среднее расстояние до других элементов. Например, узел-мишень соединялся с центральными узлами противоположного кластера, что уменьшало его среднюю геодезическую дистанцию до остальных узлов.

#### 5. Гармоническая центральность (Harmonic):

Аналогично closeness, но с акцентом на оптимизацию гармонического среднего расстояний. Добавлялись связи с узлами, максимизирующими взвешенный вклад в обратные расстояния до всех остальных элементов сети.

#### 6. Центральность просачивания (Percolation):

Узлы-мишени соединялись с хабами — узлами максимальной степени. Это повышало их роль в устойчивости сети к случайным отказам: даже при удалении случайных узлов, усиленные связи обеспечивали сохранение связности через «стратегические» соединения.

Таким образом, генерация СБМ и последующая модификация центральности представляют собой два последовательных этапа. Сначала определяется базовая структура графа на основе вероятностных моделей для внутрикластерных и межкластерных связей, а затем производится целенаправленное вмешательство в структуру для усиления выбранных мер центральности, что позволяет моделировать влияние локальных изменений на глобальную топологию сети.

Следует сказать, что процедура бустинга действует неодинаково на разные типы центральностей. Поэтому коэффициенты бустинга  $B$  для увеличения той или иной центральности подбирались вручную.

### *Меры центральностей*

В этом разделе приводится информация о мерах центральности, использованных в нашем исследовании.

Степень вершины (degree) характеризуется числом соединений, инцидентных узлу, и определяется выражением  $C_d(u) = d(u)$ , где  $d(u)$  обозначает степень узла. Если граф представлен матрицей смежности  $A$ , где элемент  $A_{uv}$  равен 1, когда между узлами  $u$  и  $v$  существует ребро, и 0 в противном случае, то степень узла  $d(u)$  можно вычислить по формуле

$$d(u) = \sum_{v \in V} A_{uv}. \quad (7)$$

Степень посредничества (betweenness) измеряет, насколько часто узел  $u$  встречается на кратчайших путях между парами других узлов, и определяется как

$$C_B(u) = \sum_{s \neq u \neq t} \frac{\sigma_{st}(u)}{\sigma_{st}}, \quad (8)$$

где  $\sigma_{st}$  — общее число кратчайших путей между узлами  $s$  и  $t$ ;  $\sigma_{st}(u)$  — число таких путей, проходящих через узел  $u$ .



Степень близости (closeness) характеризует «эффективность» узла в распространении информации, измеряя обратное значение суммарного кратчайшего расстояния от данного узла до всех остальных узлов. Степень близости обычно определяется как

$$C_c(u) = \frac{n-1}{\sum_{v, v \neq u} d(u, v)}, \quad (9)$$

где  $d(u, v)$  — длина кратчайшего пути между узлами  $u$  и  $v$ ,  $n$  — общее число узлов.

Степень влияния (eigenvector) учитывает важность соседей узла и определяется как

$$x_u = \frac{1}{\lambda} \sum_v A_{uv} x_v, \quad (10)$$

где  $u$  и  $v$  являются элементами матрицы смежности  $A$ ,  $x_u$  — центральность узла  $u$ ,  $\lambda$  представляет наибольшее собственное значение матрицы  $A$ .

Центральность просачивания — мера важности узла в сетях, учитывающая его роль в динамических процессах (например, эпидемии или передаче информации). Эта центральность оценивает, как часто узел становится критическим «мостом» для распространения в разные моменты времени. В отличие от статических мер (степени вершины, степени близости и посредничества), она учитывает вероятность и время активации узлов.

$$C_p(u) = \frac{1}{n-2} \sum_{s \neq u \neq r} \frac{\sigma_{sr}(u)}{\sigma_{sr}} \frac{x_s^t}{(\sum_i x_i^t - x_u^t)}, \quad (11)$$

где  $\sigma_{sr}(u)/\sigma_{sr}$  — доля кратчайших путей между узлами  $s$  и  $r$ , проходящих через  $u$  (как в центральности посредничества);  $x_s^t (\sum x_s^t - x_v^t)^{-1}$  — вес, зависящий от «активности» узла  $s$  в момент  $t$  относительно суммарной активности всех узлов, кроме  $u$ . Чем активнее узел  $s$ , тем больше его вклад в центральность  $u$ . Таким образом, центральность просачивания учитывает как структуру сети (распределение кратчайших путей), так и динамику состояний узлов, что позволяет оценивать влияние отдельных узлов на процесс распространения (например, заражения) в сети.

Гармоническая центральность (harmonic) является модификацией степени близости, позволяющей корректно работать с несвязными графами. Она определяется как сумма обратных значений расстояний до всех остальных узлов:

$$C_h(u) = \frac{n-1}{\sum_{v \neq u} d(u, v)}, \quad (12)$$

где  $d(u, v)^{-1} = 0$ , если не имеется пути из узла  $u$  в  $v$ .



Приведенные выше меры центральности предоставляют возможность оценить различные аспекты влияния узлов на динамику и устойчивость сети, что имеет важное значение для анализа сложных систем.

### **Моделирование нейронной динамики**

Мы моделировали импульсную нейронную сеть, состоящую из нейронов типа «интегрировать-и-сработать» с утечкой (leaky integrate-and-fire, LIF) (Abbott, 1999). Сеть разделялась на две равных популяции. Связи между отдельными нейронами внутри и между популяциями устанавливались согласно желаемой матрице смежности. Каждая из двух популяций содержала 80% возбуждающих и 20% тормозящих нейронов. Уравнения для мембранного потенциала отдельного нейрона записывались следующим образом:

$$\tau \frac{dv}{dt} = v_{rest} - v + R \cdot I_{ext} + v_n + v_e + v_i, \quad (13)$$

где  $v_{rest}$  — стационарное значение мембранного потенциала,  $R$  — эквивалентное мембранное сопротивление,  $\tau$  — характерная временная константа,  $v_e$ ,  $v_i$  — изменение мембранного потенциала, вызванное синаптическими токами от контактирующих возбуждающих  $e$  и тормозных  $i$  нейронов:

$$v_e = \sum_e w_e \cdot \delta(t - t_e), \quad (14)$$

$$v_i = \sum_i w_i \cdot \delta(t - t_i). \quad (15)$$

Для имитации фоновой нейронной активности все нейроны получали независимые стимулы  $v_n$  с пуассоновским распределением. Каждый спайк из пуассоновского генератора вызывает мгновенное приращение мембранного потенциала, которое можно представить суммой дельта-функций:

$$v_n = \sum_n w_n \delta(t - t_n), \quad (16)$$

где  $t_n$  — моменты времени приходящих спайков. Мы полагали, что  $w_e = w_i = w_n = w$ .

Помимо шумового внешнего воздействия *контрольные нейроны* получали дополнительный периодический сигнал:

$$I_{ext} = I_0 \cdot \sin(2\pi ft + \varphi) \quad (17)$$

Нейрон вырабатывал импульс, когда  $v(t)$  достигал порога возбуждения  $v_{th}$ , после чего потенциал мгновенно сбрасывался к значению  $v_{reset}$ . Формально это описывается условием

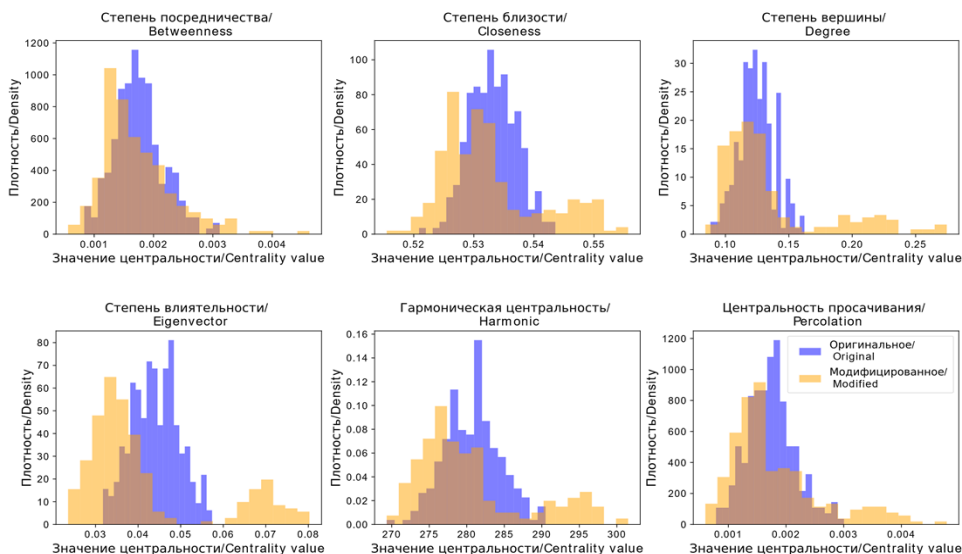




$$v(t) \geq v_{th} \rightarrow v(t) = v_{reset}. \quad (18)$$

### Численный эксперимент

В численном эксперименте мы моделировали 500 импульсных нейронов, разделенных на две равные популяции (кластеры) по 250 нейронов в каждой. Связи между нейронами устанавливались в рамках ненаправленной стохастической блочной модели с вероятностью связности между кластерами  $p_{inter} = 0,01 \dots 0,1$  и вероятностью связности внутри кластеров  $p_{intra} = 0,15$ .  $N_c$  узлам первого кластера с наибольшей мерой центральности (по какому-либо из критериев: степени близости, степени посредничества, степени вершины, степени влияния, гармонической центральности или центральности просачивания (Bovet, Makse, 2021)), присваивалась роль возбуждающих нейронов. Эти нейроны служили контрольными узлами для внешнего воздействия. В качестве контрольных узлов выбирались узлы с наибольшими значениями центральностей: (10, 15, 20%) верхнего процентиля от вычисленных значений по каждой центральности. Всем остальным узлам графа в случайном порядке присваивались роли возбуждающих и тормозных нейронов так, чтобы их соотношение в каждой из популяций составляло 4 к 1. Центральность контрольных узлов подвергалась дополнительной процедуре бустинга, описанной выше (рис. 2). В проведенном эксперименте все центральности увеличивались примерно в 1,5 раза.



**Рис. 2.** Распределение значений метрик центральности между узлами сети показано до усиления центральностей (оригинальная гистограмма) и после усиления (модифицированная гистограмма). В случае с усилением появляется отчетливый хвост, представляющий узлы с существенно повышенной центральностью выбранного типа

**Fig. 2.** The distribution of centrality metrics values for network nodes is shown before boosting (Original) and after boosting (Modified). In the boosted case, a distinct tail emerges representing the nodes with significantly increased centrality of the selected type



После искусственного увеличения связности для целевых узлов выполнялась процедура восстановления средней сетевой плотности. Она удаляла случайные связи в сети так, чтобы сохранить исходные вероятности  $p_{intra}$  и  $p_{inter}$ . Например, если при увеличении степени вершины было добавлено 100 межкластерных связей, случайные 100 межкластерных связей в других частях сети удалялись. Это гарантировало, что глобальные параметры сети остаются неизменными, а возросшая центральность целевых узлов не является артефактом общего уплотнения связей. После коррекции проверялось, что целевые узлы сохранили повышенные значения центральности относительно исходной сети.

Для моделирования динамики сети использовалось уравнение (13). Значения параметров, использованных при моделировании, показаны в Таблице. Все нейроны получали независимый пуассоновский шумовой сигнал со средней частотой 20 Гц. Субпопуляция контрольных нейронов в первом кластере подвергалась дополнительному внешнему токовому стимулу (10 Гц, 1000 пА). Во всех нейронах второго кластера регистрировалась средняя частота спайковой активности. Динамика нейронов моделировалась в течение 5 секунд для достижения устойчивого состояния активности с помощью симулятора Brian 2 (Stimberg, Brette, Goodman, 2019).

Таблица / Table

**Значения параметров, использованных при моделировании**  
**Values of the parameters used in the simulation**

$I_0$	1000 пА
$f$	10 Гц
$\varphi$	0
$R$	80 МОм
$\tau$	20 мс
$w$	1 мВ

Для сравнения нами также моделировалась сеть, в которой контрольные нейроны выбирались случайным образом, и процедура бустинга не использовалась.

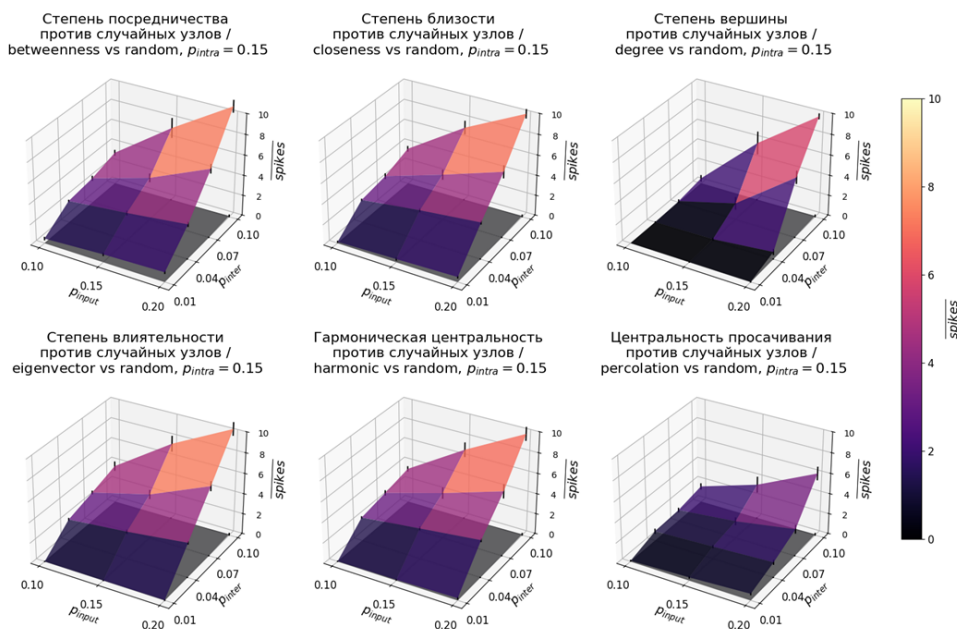
## Результаты

Популяционная активность в нестимулированном кластере анализировалась в зависимости от количества контрольных нейронов и межкластерной связности (рис. 3). Все рассмотренные метрики центральности при  $p_{inter} < 0,04$  не вызывали активность во втором кластере; при  $p_{inter} = 0,04 - 0,07$  средняя частота спайков во втором кластере поднималась до 1—4 Гц, а при  $p_{inter} = 0,1$  происходил рост средней частоты до  $\approx 3 - 12$  Гц. Центральность просачивания подчинялась той же пороговой динамике,



но прирост активности был заметно слабее. Даже при  $p_{inter} = 0,1$  средняя активность во второй популяции при использовании этой центральности составляла лишь  $\approx 1$ –6 Гц, тогда как для остальных метрик активность достигала  $\approx 10$ –12 Гц (рис. 3).

Популяционная активность демонстрирует только факт возбуждения второй нейронной популяции с помощью воздействия на управляющие нейроны в первой. Для демонстрации передачи сигнала и синхронизации двух популяций мы дополнительно рассчитали спектральную плотность мощности нейронной активности во второй популяции. Спектральная плотность мощности (СПМ) — это функция, описывающая распределение средней мощности (или «энергии в среднем за единицу времени») стационарного сигнала по частотам (Miller, Childers, 2012).



**Рис. 3.** Средняя активность во второй популяции, рассчитанная за 1-секундный временной интервал, при выборе контрольных узлов на основе различных метрик центральности (верхняя поверхность), и для узлов, выбранных случайным образом (нижняя поверхность)

**Fig. 3.** The average population activity within the second cluster, calculated over a 1-second time window, is depicted for driver nodes selected based on various centrality measures for the upper surface, and for driver nodes chosen at random for the lower surface

Пусть у нас есть дискретный временной ряд частоты срабатывания спайков, усредненный по нейронам в популяции:

$$r[n], n = 0, 1, \dots, N - 1,$$



где  $N$  — общее число отсчетов (длина массива). Отсчеты сделаны с равным шагом  $\Delta t$ . Тогда частота дискретизации  $f_s = \frac{1}{\Delta t}$  (Гц). Временная метка для  $n$ -го отсчета равна

$$t[n] = n\Delta t.$$

Сначала центрируем сигнал, убирая его среднее

$$\bar{r} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} r[n],$$

$$\tilde{r}[n] = r[n] - \bar{r}.$$

Затем накладываем на центрированный ряд окно Хеннинга

$$w[n] = \frac{1}{N} \left( 1 - \cos \left( \frac{2\pi n}{N-1} \right) \right),$$

$$x[n] = \tilde{r}[n] w[n].$$

Применяем  $N$ -точечное дискретное преобразования Фурье (ДПФ) к  $x[n]$ :

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-2\pi i \frac{kn}{N}}, k = 0, 1, \dots, N-1.$$

Здесь  $k$  — индекс спектрального бина. Каждому  $k$  соответствует частота

$$f_k = \frac{k}{N} f_s.$$

Так как  $r[n]$  — вещественный сигнал, для представления ДПФ достаточно взять бины  $k = 0, 1, \dots, N/2$ . Нормированная односторонняя спектральная плотность мощности определяется как

$$P(f_k) = \frac{1}{N} |X[k]| \text{ при } 0 \leq f_k \leq f_{\max},$$

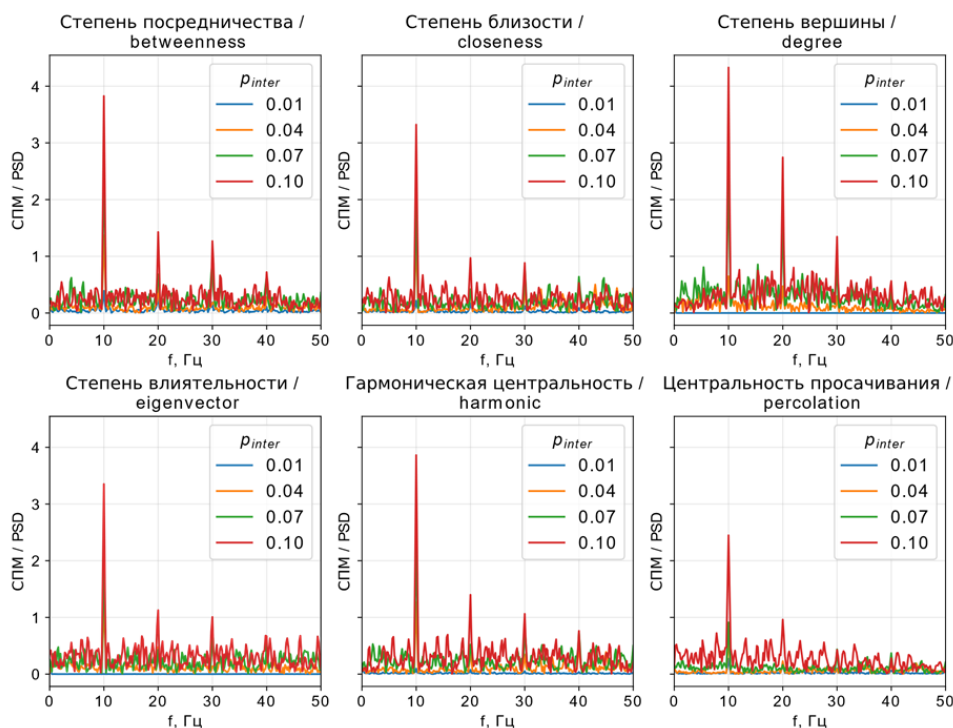
где  $f_{\max}$  — верхняя граница отображаемых частот. На выходе строится график  $P(f_k)$  от  $f_k$ .

Спектральная плотность мощности во второй нейронной популяции представлена на рис. 4. При низком уровне связности между популяциями  $p_{\text{inter}} = 0,01$  спектр остаётся практически плоским и не содержит ярко выраженных пиков. По мере увеличения  $p_{\text{inter}}$  до промежуточных значений (около 0,04—0,07) в спектре начинают проступать лёгкие резонансные полосы, а при  $p_{\text{inter}} = 0,1$  проявляется четко выраженный основной пик около 10 Гц (рис. 4) и более слабые вторичные и третичные



гармоники приблизительно на 20 Гц и 30 Гц. Сигнал на частоте 10 Гц возникает во второй популяции только при выборе контрольных узлов на основе показателей центральности. При этом выбор контрольных узлов на основе центральности просачивания приводит к менее выраженным пикам СПМ по сравнению с другими подходами, что указывает на ее ограниченную эффективность в задаче достижения синхронизации. Случайный выбор узлов для управляющих воздействий остается неспособным произвести заметные осцилляции во второй популяции.

## Обсуждение результатов



**Рис. 4.** Спектральная плотность мощности (СПМ) для активности во второй популяции при  $p_{intra} = 0,15$  и  $p_{input} = 0,2$  и при выборе контрольных узлов на основе различных метрик центральности

**Fig. 4.** Power spectrum density (PSD) for the activity in the second population for  $p_{intra} = 0,15$  and  $p_{input} = 0,2$ , and for control nodes selected based on different centrality metrics

Проведенные численные эксперименты показали, что синхронизация между двумя слабо связанными кластерами может быть достигнута путем избирательной стимуляции определенных нейронов в одной из популяций. Причем выбор контрольных



узлов на основе любой из рассмотренных центральностей оказывается лучше для передачи сигнала между популяциями, чем их случайный выбор. Численный эксперимент показал, что выбор управляющих узлов на основе любых метрик имеет примерно одинаковую эффективность для передачи сигнала между нейронными популяциями. Исключение составляет центральность просачивания, которая показывает несколько худшие результаты.

Наши исследования показывают, что для эффективной передачи сигнала между популяциями меры центральности контрольных узлов должны заметно превышать среднюю меру центральности по сети. В нашем подходе мы увеличивали меры центральности для контрольных узлов искусственно. В биологических нейронных сетях хабы с большими мерами центральностей являются неотъемлемым свойством подобных сетей (Fornito, Zalesky, Bullmore, 2016). Однако вопрос, насколько они будут эффективны для передачи сигнала между популяциями требует дополнительных исследований.

Общие найденные закономерности состоят в том, что передача сигнала между популяциями улучшается при увеличении количества контрольных узлов и при увеличении количества связей между популяциями (рис. 3). При этом существуют критические значения вероятности межкластерной связности  $p_{inter}$  и доли контрольных узлов  $p_{input}$ , ниже которых передача сигнала между популяциями отсутствует.

## Заключение

В результате проведенного исследования были получены следующие ключевые результаты. Во-первых, выбор контрольных узлов на основе метрик центральности обеспечивает значительно более эффективное достижение синхронной активности в моделируемых нейронных сетях по сравнению с случайным выбором контрольных узлов. Во-вторых, избирательная стимуляция данных узлов приводит к значительному увеличению популяционной активности и синхронизации между кластерами, что подтверждает гипотезу о том, что структурные особенности коннектома, выраженные через специфические метрики центральности и межкластерную связность, определяют динамику распространения активности.

Полученные результаты демонстрируют, что целенаправленное воздействие на узлы с высокими значениями центральности может служить перспективной основой для разработки новых методов нейромодуляции и терапии неврологических заболеваний, связанных с нарушением синхронизации. Кроме того, предложенный подход к усилению центральности отдельных узлов позволяет моделировать влияние локальных топологических изменений на глобальную динамику сети, что открывает возможности для дальнейших исследований в области управления сложными нейронными системами.

Перспективы дальнейших исследований включают расширение анализа на многокластерные гетерогенные сети, использование более биологически реалистичных ненаправленных графов, а также более глубокое изучение взаимодействия различных метрик центральности и их вклада в регуляцию синхронной активности. В нашем



исследовании мы полагали силу синаптических связей между отдельными узлами неизменными. Отдельный интерес представляет исследование сетей, обладающих синаптической пластичностью.

### Список источников / References

1. Fell, J., Axmacher, N. (2011). The role of phase synchronization in memory processes. *Nature Reviews. Neuroscience*, 12(2), 105–118. <https://doi.org/10.1038/nrn2979>
2. Ward, L.M. (2003). Synchronous neural oscillations and cognitive processes. *Trends in Cognitive Sciences*, 7(12), 553–559. <https://doi.org/10.1016/j.tics.2003.10.012>
3. Uhlhaas, P.J., Singer, W. (2006). Neural synchrony in brain disorders: relevance for cognitive dysfunctions and pathophysiology. *Neuron*, 52(1), 155–168. <https://doi.org/10.1016/j.neuron.2006.09.020>
4. Bayati, M., Valizadeh, A., Abbassian, A., Cheng, S. (2015). Self-organization of synchronous activity propagation in neuronal networks driven by local excitation. *Frontiers in Computational Neuroscience*, 9, 69. <https://doi.org/10.3389/fncom.2015.00069>
5. Fletcher, J.M., Wennekers, T. (2018). From Structure to Activity: Using Centrality Measures to Predict Neuronal Activity. *International Journal of Neural Systems*, 28(2), 1750013. <https://doi.org/10.1142/S0129065717500137>
6. Liu, Y.-Y., Slotine, J.-J., Barabási, A.-L. (2011). Controllability of complex networks. *Nature*, 473(7346), 167–173. <https://doi.org/10.1038/nature10011>
7. Gu, S., Pasqualetti, F., Cieslak, M., Telesford, Q.K., Yu, A.B., Kahn, A.E., Medaglia, J.D., Vettel, J.M., Miller, M.B., Grafton, S.T., Bassett, D.S. (2015). Controllability of structural brain networks. *Nature Communications*, 6(1), 8414. <https://doi.org/10.1038/ncomms9414>
8. Dörfler, F., Chertkov, M., Bullo, F. (2013). Synchronization in complex oscillator networks and smart grids. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, 110(6), 2005–2010. <https://doi.org/10.1073/pnas.1212134110>
9. Holland, P.W., Laskey, K.B., Leinhardt, S. (1983). Stochastic blockmodels: First steps. *Social Networks*, 5(2), 109–137. [https://doi.org/10.1016/0378-8733\(83\)90021-7](https://doi.org/10.1016/0378-8733(83)90021-7)
10. Boccaletti, S., Latora, V., Moreno, Y., Chavez, M., Hwang, D. (2006). Complex networks: Structure and dynamics. *Physics Reports*, 424(4–5), 175–308. <https://doi.org/10.1016/j.physrep.2005.10.009>
11. Bovet, A., Makse, H.A. (2021). Centralities in complex networks. В *Encyclopedia of Complexity and Systems Science* (cc. 1–11). Springer Berlin Heidelberg. [https://doi.org/10.1007/978-3-642-27737-5\\_765-1](https://doi.org/10.1007/978-3-642-27737-5_765-1)
12. Abbott, L.F. (1999). Lapique's introduction of the integrate-and-fire model neuron (1907). *Brain Research Bulletin*, 50(5–6), 303–304. [https://doi.org/10.1016/s0361-9230\(99\)00161-6](https://doi.org/10.1016/s0361-9230(99)00161-6)
13. Stimberg, M., Brette, R., Goodman, D.F. (2019). Brian 2, an intuitive and efficient neural simulator. *eLife*, 8. <https://doi.org/10.7554/eLife.47314>
14. Miller, S., Childers, D. (2012). *Probability and Random Processes: With Applications to Signal Processing and Communications*. San Diego: Academic Press. <https://doi.org/10.1016/C2010-0-67611-5>
15. Fornito, A., Zalesky, A., Bullmore, E. (2016). *Fundamentals of brain network analysis*. New York: Academic press.



### **Информация об авторах**

*Буллат Базаржапович Батуев*, младший научный сотрудник, ИПЭ им. В.А. Котельникова РАН, Москва, Российская Федерация, ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-9322-2635>, e-mail: buligarmouth@gmail.com

*Арсений Андреевич Онучин*, младший научный сотрудник, Сколковский институт науки и технологий, Москва, Российская Федерация, ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-7811-5831>, e-mail: arseniyonuchin04.09.97@gmail.com

*Сергей Владимирович Сухов*, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник, УФИРЭ им. В.А. Котельникова РАН, Ульяновск, Российская Федерация, ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-8966-6030>, e-mail: ssukhov@ulireran.ru

### **Information about the authors**

*Bulat B. Batuev*, Junior Researcher, Kotelnikov Institute of Radioengineering and Electronics of Russian Academy of Sciences, Moscow, Russian Federation, ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-9322-2635>, e-mail: buligarmouth@gmail.com

*Arseny A. Onuchin*, Junior Researcher, Skolkovo Institute of Science and Technology, Moscow, Russian Federation, ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-7811-5831>, e-mail: arseniyonuchin04.09.97@gmail.com

*Sergey V. Sukhov*, Candidate of Science (physics-mathematics), Senior Researcher, Ulyanovsk Branch of Kotelnikov Institute of Radio Engineering and Electronics of Russian Academy of Sciences, Ulyanovsk, Russian Federation, ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-8966-6030>, e-mail: ssukhov@ulireran.ru

### **Вклад авторов**

Сухов С.В. — идеи исследования; написание и оформление рукописи; планирование исследования; контроль за проведением исследования.

Батуев Б.Б. — применение статистических, математических или других методов для анализа данных; проведение эксперимента; сбор и анализ данных; визуализация результатов исследования, написание и оформление рукописи.

Онучин А.А. — применение статистических, математических или других методов для анализа данных; проведение эксперимента; сбор и анализ данных; визуализация результатов исследования, написание и оформление рукописи.

Все авторы приняли участие в обсуждении результатов и согласовали окончательный текст рукописи.

### **Contribution of the authors**

Sukhov S.V. — ideas; writing and design of the manuscript; planning of the research; control over the research.

Batuev B.B. — application of statistical, mathematical or other methods for data analysis; conducting the experiment; data collection and analysis; visualization of research results, writing and design of the manuscript.





Onuchin A.A. — application of statistical, mathematical or other methods for data analysis; conducting the experiment; data collection and analysis; visualization of research results, writing and design of the manuscript.

All authors participated in the discussion of the results and approved the final text of the manuscript.

### ***Конфликт интересов***

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

### ***Conflict of interest***

The authors declare no conflict of interest.

Поступила в редакцию 30.06.2025

Поступила после рецензирования 11.07.2025

Принята к публикации 16.07.2025

Опубликована 30.09.2025

Received 2025.06.30

Revised 2025.07.11

Accepted 2025.07.16

Published 2025.09.30

Научная статья | Original paper

УДК 004.89

## Комплексная оценка эффективности алгоритма АМАІА в прогностическом управлении автономным вождением

Ахмад Али<sup>1</sup>, Е.В. Ляпунцова<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup> университет науки и технологий МИСИС, Москва, Российская Федерация

<sup>2</sup> Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана  
Москва, Российская Федерация

✉ [ali-ahmad9.3@mail.ru](mailto:ali-ahmad9.3@mail.ru)

### Резюме

**Контекст и актуальность:** быстрое развитие встроенных систем, Интернета вещей (IoT) и технологий периферийных вычислений привело к увеличению спроса на микропроцессорные архитектуры, способные эффективно работать в нескольких динамических и энергосберегающих средах. Традиционные методы управления и оптимизации часто не соответствуют балансу одновременных требований энергоэффективности, вычислительной производительности и адаптируемости в режиме реального времени, особенно в системах, сталкивающихся с гетерогенными рабочими нагрузками и изменяющимися операционными контекстами. **Цель:** Цель исследования — представить АМАІА (Адаптивный машинный интеллект для архитектуры), новый алгоритм, основанный на Принципы машинного обучения, предназначенные для оптимизации встроенных микропроцессорных систем путем динамического управления и прогнозирования поведения системы для повышения энергоэффективности и вычислительной стабильности. **Гипотеза:** Предполагается, что алгоритм АМАІА благодаря своим адаптивным и прогностическим возможностям может превосходить традиционные методы управления во встроенных средах за счет достижения более высокой точности, снижения частоты ошибок и повышения энергоэффективности, особенно в сценариях с неопределенными и колеблющимися ограничениями. **Методология:** фреймворк АМАІА включает в себя Model Predictive Control (МРС) для обеспечения адаптации сигналов управления в режиме реального времени на основе состояний системы, прогностического моделирования и предопределенные цели оптимизации. Динамическое масштабирование



напряжения и частоты (DVFS) интегрировано для снижения потребления энергии, в то время как прогнозирование рабочей нагрузки выполняется с использованием моделей временных рядов ARIMA. Устойчивость системы поддерживается с использованием анализа стабильности на основе Ляпунова. Экспериментальные оценки проводились путем сравнительного анализа АМАІА с традиционными ПИД-контроллерами в реальных сценариях вождения (в городских и дорожных условиях). Кроме того, алгоритм был развернут в различных промышленных условиях, включая автономные транспортные средства, автоматизацию промышленных процессов и медицинские носимые системы в реальном времени. **Результаты:** Применение АМАІА привело к заметному улучшению показателей контроля, продемонстрировав снижение средней абсолютной погрешности (MAE) на 36%, снижение среднеквадратичной погрешности (RMSE) на 61% и повышение энергоэффективности на 31% по сравнению с базовыми контроллерами, статистическая проверка с использованием парных t-критериев ( $p < 0,001$ ) подтвердила значительное улучшение точности отслеживания системы, времени установления (2,12 с против 3,45 с) и плавности сигнала контроля. В промышленных развертываниях АМАІА достигла снижения потребления энергии на 18,6% и поддерживала реакцию в реальном времени с задержкой обработки менее 30 мс при анализе медицинских биосигналов. **Выводы:** Исследование устанавливает алгоритм АМАІА как эффективное, масштабируемое и энергосберегающее решение для встроенных микропроцессорных систем, работающих в динамических средах, путем интеграции прогностического управления, адаптивной реакции системы и энергосберегающих стратегий, АМАІА вносит значимый вклад в область адаптивного управления и обеспечивает надежную основу для повышения производительности в критически важных областях, таких как автономная мобильность, управление промышленными процессами и медицинские технологии.

**Ключевые слова:** алгоритм АМАІА, модель прогностического управления (MPC), маломощные микропроцессорные системы, встроенные системы, энергоэффективность

**Для цитирования:** Али, А., Ляпунцова, Е.В. (2025). Комплексная оценка эффективности алгоритма АМАІА в прогностическом управлении автономным вождением. *Моделирование и анализ данных*, 15(3), 113—130. <https://doi.org/10.17759/mda.2025150307>



# Comprehensive evaluation of the AMAIA algorithm efficiency in predictive control for autonomous driving and its industrial application

Ahmad Ali<sup>1</sup>, E.V. Lyapunтова<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup> MISIS University of Science and Technology, Moscow, Russian Federation

<sup>2</sup> Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation

✉ ali-ahmad9.3@mail.ru

## Abstract

**Context and relevance:** The rapid advancement of embedded systems, Internet of Things (IoT), and edge computing technologies has led to an increasing demand for microprocessor architectures capable of operating efficiently under multiple dynamic and energy-constrained environments. Traditional control and optimization techniques often fall short of balancing the simultaneous requirements of energy efficiency, computational performance, and real-time adaptability, particularly in systems facing heterogeneous workloads and changing operational contexts. **Objective:** The study aims to present AMAIA (Adaptive Machine Intelligence for Architecture), a novel algorithm grounded in machine learning principles, designed to optimize embedded microprocessor systems by dynamically controlling and predicting system behavior to improve energy efficiency and computational stability. **Hypothesis:** It is hypothesized that the AMAIA algorithm, through its adaptive and predictive capabilities, can outperform traditional control methods in embedded environments by achieving higher accuracy, reduced error rates, and enhanced energy performance, particularly in scenarios with uncertain and fluctuating constraints. **Methodology:** The AMAIA framework incorporates Model Predictive Control (MPC) to enable real-time adaptation of control signals based on system states, predictive modeling, and predefined optimization goals. Dynamic voltage and frequency scaling (DVFS) is integrated to reduce energy use, while workload forecasting is performed using ARIMA time-series models. System robustness is maintained using Lyapunov-based stability analysis. Experimental evaluations were carried out by benchmarking AMAIA against traditional PID controllers in real-world driving scenarios (urban and highway conditions). Additionally, the algorithm was deployed in various industrial contexts including autonomous vehicles, industrial process automation, and real-time medical wearable systems. **Results:** The application of AMAIA yielded notable improvements in control performance, demonstrating a 36% reduction in Mean Absolute Error (MAE), a 61% decrease in Root Mean Square Error (RMSE), and a 31% gain in energy efficiency compared to baseline controllers. Statistical validation using paired t-tests ( $p < 0.001$ ) confirmed significant enhancements in system tracking accuracy, settling time (2.12 s vs. 3.45 s), and control signal smoothness. In industrial deployments, AMAIA achieved an 18.6% reduction in energy consumption and maintained real-time response with processing latency under 30 ms in medical bio signal analysis. **Conclusions:** The study establishes the AMAIA



algorithm as an effective, scalable, and energy-aware solution for embedded microprocessor systems operating in dynamic environments, by integrating predictive control, adaptive system response, and energy-conscious strategies, AMAIA contributes meaningfully to the field of adaptive control and provides a robust framework for enhancing performance in mission-critical domains such as autonomous mobility, industrial process control, and medical technology.

**Keywords:** AMAIA Algorithm, Model Predictive Control (MPC), Low-Power Microprocessor Systems, Embedded Systems, Energy Efficiency

**For citation:** Ali, A., Lyapunтова, E.V. (2025). Comprehensive evaluation of the AMAIA algorithm efficiency in predictive control for autonomous driving and its industrial application. *Modelling and Data Analysis*, 15(3), 113—130. (In Russ.). <https://doi.org/10.17759/mda.2025150307>

## Введение

Автономные транспортные средства произвели радикальную трансформацию в транспортных концепциях, предвещая будущее, в котором вмешательство человека в процесс вождения будет сокращено. С этим огромным прогрессом возникают сложные задачи, требующие инновационных решений для обеспечения оптимальной производительности, максимальной безопасности и эффективного снижения энергопотребления в условиях постоянной динамики и изменений в таких критических условиях, как переполненные городские дороги и протяженные магистрали, обеспечение точного реагирования в режиме реального времени приобретает первостепенное значение, алгоритм AMAIA (Adaptive Machine Intelligence for Architecture — Адаптивный машинный интеллект для архитектуры) представляет собой новаторское решение, направленное на достижение тонкого баланса между этими конкурирующими требованиями путем интеграции двух взаимодополняющих технологических факторов: управления с помощью моделей прогнозирования (МРС) и машинного обучения. Алгоритм AMAIA представляет собой усовершенствованный подход к интеллектуальному управлению автономными транспортными средствами, превосходя традиционные методы благодаря неустанному стремлению оптимизировать общую производительность системы, эта амбициозная цель достигается за счет динамичного и непрерывного управления вычислительными и энергетическими ресурсами в условиях разнообразных эксплуатационных ограничений, которые включают, но не ограничиваются ими, сведение энергопотребления к минимально возможному уровню, обеспечивая сверхвысокую производительность. быстрое реагирование на изменения окружающей среды и условий вождения, а также поддержание стабильной и надежной вычислительной производительности (Pérez-Lombard, Ortiz, Pout, 2008).

В основе работы алгоритма AMAIA лежит использование Model Predictive Control (МРС), этой передовой технологии, основанной на построении точной математической модели поведения транспортного средства и окружающей его среды.



Используя эту модель, алгоритм предсказывает будущие состояния системы на определенном временном горизонте, на основе этих прогнозов АМАІА оценивает широкий спектр возможных стратегий управления, выбирая оптимальную стратегию, которая обеспечивает наилучший баланс между различными целями, такими как точное отслеживание желаемого пути, поддержание безопасной скорости, а снижение энергопотребления, способность заглядывать в будущее и принимать упреждающие решения — это то, что отличает MPC и дает АМАІА значительное преимущество в работе с постоянно меняющимися динамическими ситуациями (Barak, Sadegh, 2016). В дополнение к возможностям прогнозирования, предоставляемым MPC, АМАІА интегрирует методы машинного обучения для повышения своей способности адаптироваться и непрерывно работать. кроме того, модели машинного обучения могут быть использованы для повышения точности модели MPC с течением времени путем анализа исторических данных о вождении и различных условиях окружающей среды., эти модели могут быть использованы для прогнозирования поведения других водителей и транспортного потока, что позволяет АМАІА принимать более обоснованные решения и эффективно избегать опасных ситуаций.

Кроме того, АМАІА использует сложные механизмы управления энергопотреблением, такие как технология динамического масштабирования напряжения и частоты (DVFS) (Demirbas, 2005). Эта технология позволяет алгоритму адаптировать частоту и быстродействие процессора системы в соответствии с текущими требованиями к управлению, когда вычислительные требования невелики (например, при движении по прямой дороге с постоянной скоростью), АМАІА может снизить рабочую частоту и, таким образом, снизить энергопотребление, и наоборот, когда требуется большая вычислительная мощность (например, при движении в условиях интенсивного движения или выполнении сложных маневров)., алгоритм может увеличивать частоту для обеспечения оптимальной производительности, эта динамическая адаптация не только повышает энергоэффективность, но и способствует продлению срока службы батареи в электрических автономных транспортных средствах. Постоянное развитие систем автономного вождения требует глубокого понимания сложных взаимосвязей между различными переменными, влияющими на реакцию транспортного средства. истинная ценность интегрированного решения АМАІА, которое сочетает в себе точное прогнозирование будущего маршрута и интеллектуальную адаптацию к изменяющимся требованиям к энергопотреблению, а также немедленное и эффективное реагирование на сложные ситуации, которые могут возникнуть во время вождения, включая внезапные изменения желаемого направления движения автомобиля или неожиданные условия окружающей среды, такие как сильный дождь или внезапное появление препятствий на дороге.

Алгоритм АМАІА был подвергнут всесторонней экспериментальной оценке в различных реалистичных сценариях вождения, включая вождение в условиях большого скопления людей в городах и на скоростных автомагистралях. Результаты экспериментов убедительно продемонстрировали превосходство АМАІА над широко используемыми традиционными системами управления, такими как



пропорционально-интегрально-производные (PID) контроллеры, Кроме того, АМАІА добилась значительного снижения на 36% средней абсолютной погрешности (MAE), которая является показателем точности отслеживания траектории, наиболее впечатляюще то, что алгоритм показал значительное снижение на 61% среднеквадратичной ошибки (RMSE), которая является мерой величины ошибок прогнозирования, АМАІА также добилась значительного снижения среднего общего энергопотребления во время вождения на 31% (Zhao, Magoulès, 2012). Значение алгоритма АМАІА заключается в его уникальной способности интегрировать передовые методы управления с интеллектуальными методами прогнозирования для обеспечения точного и эффективного реагирования в постоянно меняющихся динамических условиях вождения. идеальное решение для применения в автономных транспортных средствах, обеспечивающее высокую производительность и надежную работу в самых разных условиях вождения., АМАІА не только представляет собой значительный шаг вперед в развитии технологий автономного вождения, но и обеспечивает инновационную основу для проектирования и разработки маломощных и энергоэффективных интеллектуальных систем, основанных на передовых технологических принципах, открывая новые горизонты для более безопасного и устойчивого будущего в мире транспорта.

## Методология

Методология повышения производительности встраиваемых систем в динамических средах основана на интеграции двух мощных и взаимодополняющих подходов: Model Predictive Control (MPC) и Lyapunov stability analysis. Все начинается с Model Predictive Control, который представляет собой ядро этой стратегии, обеспечивая проактивное видение для управления производительностью системы, а не полагаясь исключительно на немедленную обратную связь, MPC использует динамическую модель системы для прогнозирования ее будущих состояний (Demirbas, 2005), эта прогнозирующая способность позволяет системе принимать обоснованные управляющие решения, направленные на достижение оптимальной производительности как в краткосрочной, так и в долгосрочной перспективе (Zhao, Magoulès, 2012). В каждом рабочем цикле MPC решает сложную оптимизационную задачу, стремясь минимизировать благодаря этому механизму определяется функция затрат, которая учитывает как отклонения от идеальной производительности, так и использование управляющих входов, система становится способной эффективно адаптироваться к изменяющимся условиям и непрерывно корректировать управляющие входы на основе текущих измерений и изменений окружающей среды (Ekici, Aksoy, 2009), тем самым повышая производительность и снижая энергопотребление.

В то время как MPC фокусируется на достижении оптимальной производительности за счет прогнозирования и адаптации, роль анализа стабильности по Ляпунову заключается в обеспечении того, чтобы эта производительность не снижалась в долгосрочной перспективе за счет динамической стабильности системы (Yilmazkaya и др., 2018). Функция Ляпунова выступает в качестве математической меры для оценки



стабильности системы, что указывает на его способность возвращаться в состояние равновесия после воздействия возмущений, обеспечивая строго отрицательное значение производной функции Ляпунова по времени, подтверждено, что система будет постепенно двигаться к желаемому стабильному состоянию и не будет отклоняться от него нежелательным образом, этот анализ дает гарантию того, что динамика системы будет оставаться под контролем даже в сложных условиях эксплуатации (Zhang, Yang, 2015).

Реальная мощь этой методологии заключается в бесшовной интеграции этих двух концепций, MPC обеспечивает возможность эффективной оптимизации производительности за счет упреждающего прогнозирования и планирования., в то время как анализ стабильности по Ляпунову гарантирует, что эти оптимизации не приведут к дестабилизации системы, такая интеграция обеспечивает тонкий баланс между эффективным динамическим откликом и долговременной стабильной и надежной работой, в результате чего получается встроенная система, которая не только способна достигать высокой производительности и адаптироваться к изменяющимся условиям, но и обладает надежностью этот комплексный подход, необходимый для эффективной работы в различных условиях эксплуатации, представляет собой значительную эволюцию в проектировании и эксплуатации сложных встраиваемых систем, это открывает путь к созданию более интеллектуальных, надежных и энергоэффективных приложений.

Математически основная цель модели прогнозирующего управления может быть выражена как минимизация функции затрат  $J$  на определенном временном горизонте  $N$  (Zhao, Magoulès, 2012). Эта функция учитывает прогнозы будущего состояния системы и управляющие входные данные с весами  $Q$  и  $R$ , которые определяют важность отслеживания желаемого состояния и сокращения усилий по управлению Соответственно, что касается анализа устойчивости по Ляпунову (Yilmazkaya и др., 2018), то он основан на нахождении функции  $V(x)$ , которая всегда положительна для всех ненулевых состояний  $x$  и производная которой по времени \ точка  $\{V\}(x)$  всегда отрицательна для всех ненулевых состояний (Zhang, Yang, 2015), таким образом, обеспечивая постепенное приближение состояния системы к точке равновесия, эта интеграция между формулировкой задачи оптимизации в MPC и критериями устойчивости Ляпунова обеспечивает мощную математическую основу для проектирования высокопроизводительных и стабильных систем управления.

$$\text{Min}_{u_k} \sum_{i=0}^{\{N\}} \left[ x_{\{k+i|k\}}^T Q x_{\{k+i|k\}} + u_{\{k+i|k\}}^T R u_{\{k+i|k\}} \right]$$
$$V(x) < 0 \forall x \neq 0$$

Встраиваемые системы требуют точного управления своими ограниченными ресурсами, и там, где оптимизация циклов процессора, памяти и энергопотребления имеет решающее значение для стабильной производительности, интеграция Model Predictive Control (MPC), стабильности по Ляпунову и методов энергосбережения становятся эффективным решением, поскольку MPC использует прогнозирование





будущего состояния системы для принятия управляющих решений, обеспечивающих баланс производительности и энергопотребления, где функция затрат может учитывать энергоэффективность, в отличие от, Анализ стабильности по Ляпунову гарантирует, что эти улучшения не окажут негативного влияния на динамическую стабильность системы, даже при работе компонентов с более низкими напряжениями и частотами для экономии энергии динамическое масштабирование напряжения и частоты (DVFS) (Abdoli и др., 2018) является ключевым инструментом для оптимизации энергопотребления, регулируя частоту и напряжение процессора на основе рабочей нагрузки, интеграция DVFS с MPC позволяет принимать упреждающие решения по регулировке частоты и напряжения на основе прогнозов рабочей нагрузки, принимая во внимание ограничения стабильности, вытекающие из анализа Ляпунова, эта интеграция обеспечивает тонкий баланс между оптимальной производительностью, низким энергопотреблением и стабильностью работы встроенных систем, общее уравнение для энергопотребления  $P_P$  в зависимости от частоты  $f$  и напряжения  $V$  представлено в виде:

$$P_p \propto fV^2$$

Динамическое масштабирование напряжения и частоты (DVFS) является жизненно важным механизмом снижения энергопотребления во встраиваемых системах, особенно в тех, которые работают от батарей, таких как мобильные устройства. За счет снижения частоты и напряжения в периоды низкой рабочей нагрузки достигается значительное снижение энергопотребления, что непосредственно способствует увеличению срока службы батареи (Abdoli и др., 2018). Однако, задача заключается в выборе оптимальных значений частоты и напряжения, которые обеспечивают тонкий баланс между поддержанием требуемого уровня производительности и минимизацией энергопотребления до минимально возможного уровня. В контексте многоядерных процессоров оптимизация производительности становится более сложной задачей. Алгоритмы балансировки нагрузки используются для эффективного распределения вычислительных задач по доступным ядрам, целью этих алгоритмов является достижение максимальной пропускной способности системы (обработка наибольшего объема работы в единицу времени) при минимизации общего энергопотребления (Abramovich, Babanova, 2018), это достигается за счет обеспечения того, чтобы все ядра работали на разумном уровне производительности. загруженность, позволяющая избежать простоя одних ядер в то время, как другие перегружены.

Эти концепции могут быть эффективно интегрированы с ранее рассмотренными методологиями Model Predictive Control (MPC) и анализа стабильности по Ляпунову. MPC может прогнозировать будущую нагрузку на систему и принимать динамические решения по регулировке рабочей частоты и напряжения (с использованием DVFS) и распределению задач между ядрами (с использованием алгоритмов балансировки нагрузки) в оптимальном режиме. Аналогичным образом, функция затрат в MPC может учитывать не только показатели производительности и стабильности,



но и ожидаемое энергопотребление, основанное на рабочих частотах, напряжениях и распределении нагрузки. Анализ стабильности по Ляпунову может быть использован для обеспечения того, чтобы динамические изменения этих параметров не приводили к нестабильности системы. Математически общее энергопотребление системы может быть выражено как функция вклада каждого ядра в энергопотребление за определенный период, что иллюстрирует взаимосвязь между распределением рабочей нагрузки и общим энергопотреблением:

$$\{Energy\ Consumption\} = \sum_{i=1}^{\{n\}} P_i \cdot t_i$$

В следующей таблице .1. представлены данные для встроенной системы, используемой в интеллектуальном транспортном средстве, которая применяет Model Predictive Control (MPC) для оптимизации производительности в управлении энергопотреблением, безопасности и настройках в реальном времени. Частота ЦП относится к рабочей частоте процессора системы, которая может варьироваться от 1,5 ГГц до 2,5 ГГц в зависимости от рабочей нагрузки (Abtahi и др., 2018). Наряду с частотой уровень напряжения колеблется от 3,3 В до 5 В, регулируясь в зависимости от требований к мощности процессора в любой момент времени. Потребление энергии во время нормальной работы обычно составляет от 5 Вт до 10 Вт, что указывает на энергию, используемую встроенной системой в различных условиях (Abu Sharkh, Shami, 2017). Управляющий вход включает в себя такие параметры, как скорость и направление, которые непрерывно регулируются алгоритмом MPC на основе обратной связи с датчиком в режиме реального времени. Эти управляющие входы гарантируют, что система эффективно реагирует на изменения в окружающей среде и на входы пользователя, обратная связь с датчиком имеет решающее значение для принятия решений в режиме реального времени, при этом датчики предоставляют данные со скоростью от 20 Гц до 50 Гц, срок службы батареи является важным фактором, и благодаря эффективному управлению энергией с помощью таких методов, как динамическое масштабирование напряжения и частоты (DVFS), система может работать примерно от 8 до 12 часов на одном заряде, в зависимости от рабочей нагрузки и оптимизации энергии, аспект распределения нагрузки (DVFS) управляет распределением мощности между компонентами системы, регулируя частоту, обычно в диапазоне от 1,5 ГГц при низких нагрузках до 2,5 ГГц при высоких нагрузках, проверка стабильности, обеспечиваемая методами на основе Ляпунова, подтверждает, что система сохраняет стабильность с течением времени, при этом скорость изменения функции Ляпунова всегда остается отрицательной, что гарантирует сближение системы с устойчивым равновесием. Система регулировки скорости непрерывно адаптирует скорость транспортного средства, оптимизируя потребление энергии и производительность на основе входных данных в режиме реального времени (Acharya, D’Mello, 2017). Благодаря комбинации методов MPC и функции Ляпунова система повышает энергоэффективность с приростом эффективности от 15% до 30%, обеспечивая оптимизацию как производительности,



так и энергопотребления. Стабильность системы поддерживается даже в динамических и непредсказуемых условиях, что делает ее устойчивой к изменениям окружающей среды. Эта установка приводит к высокоэффективной, стабильной и адаптивной встроенной системе в интеллектуальных транспортных средствах.

Таблица 1 / Table 1

**Основные эксплуатационные параметры встроенной системы  
МРС в интеллектуальных транспортных средствах**  
**Main operational parameters of the integrated MPC system in intelligent vehicles**

Параметр	Описание	Диапазон значений
Тактовая частота ЦПУ:	Рабочая частота процессора системы	1,0—2,5 ГГц
Уровень напряжения	Подаваемое напряжение приспособливается к потребностям процессора в мощности	3,3—5 В
Расход энергии	Мощность, потребляемая при стандартных операциях	10 Вт
Вход контроля раскачивания	Переменные, такие как скорость и направление, регулируемые с помощью МРС	В режиме реального времени (динамический)
Частота отзывает	Частота обновления данных датчика	50 Гц
Срок службы аккумуляторов	Время работы на одну зарядку с использованием DVFS	8—12 часов
распределение нагрузки	Масштабирование частоты в зависимости от нагрузки	1,5 ГГц (низкая частота) — 2,5 ГГц (высокая частота)
Проверка устойчивости	Валидация на основе Ляпунова, обеспечивающая конвергенцию системы	Функция Ляпунова всегда $< 0$
Настройка скорости	Адаптивная настройка скорости с использованием МРС в реальном времени	Постоянное улучшение характеристик.
Повышение энергоэффективности	Повышение эффективности за счет интеграции ПДК и Ляпунова	15—30%

## Результаты

Это углубленное сравнительное исследование было направлено на проведение всесторонней оценки эффективности двух передовых стратегий управления в контексте встроенных систем интеллектуального транспортного средства: Model Predictive Control (MPC) и алгоритма адаптивного машинного интеллекта для архитектуры (АМАИА). Была разработана усовершенствованная среда моделирования, позволяющая встроенной системе динамически изменяться. изменение структуры нагрузки с целью имитации реальных условий эксплуатации, с которыми сталкиваются интеллектуальные транспортные средства в различных и сложных сценариях вождения.,



основная цель этого исследования — от периодической езды по городу до движения по шоссе с регулируемой скоростью — заключалась в точной оценке способности каждого алгоритма достигать двух важнейших целей: во-первых, с высокой точностью прогнозировать текущее и будущее энергопотребление встроенной системы при таких динамично меняющихся нагрузках; и, во-вторых, поддерживать высокий уровень эффективности системы и быстро реагировать на изменения эксплуатационных требований, обеспечивая тем самым бесперебойную и надежную работу интеллектуального автомобиля в различных условиях.

На рисунке 1 представлен подробный визуальный анализ сравнения фактического энергопотребления встроенной системы с прогнозами, сгенерированными обоими алгоритмами, сплошная черная линия представляет истинные значения энергопотребления, измеренные в течение периода моделирования, напротив, пунктирная зеленая линия показывает результаты прогнозирования алгоритма адаптивного обучения AMAIA, в то время как пунктирная красная линия представляет собой прогнозы, полученные в результате использования традиционного алгоритма MPC.

Результаты, показанные на рисунке 1, показывают явный разрыв в эффективности прогнозирования между двумя алгоритмами, особенно бросается в глаза поразительное совпадение траектории прогнозов AMAIA и черной линии, отображающей фактическое потребление энергии. Это точное соответствие указывает на исключительную способность AMAIA отслеживать динамические изменения в потреблении энергии и реагировать на них с высокой эффективностью. точность, отражающая глубокое понимание поведения встроенной системы в различных условиях эксплуатации, и наоборот, производительность алгоритма MPC демонстрирует заметное и систематическое отклонение от фактического уровня энергопотребления, этот недостаток в точности прогнозирования в первую очередь объясняется тем, что MPC полагается на заранее определенные и фиксированные математические модели, которым по своей природе не хватает гибкости и способности быстро адаптироваться к внезапным временным изменениям или неожиданные динамические условия эксплуатации, которые часто характерны для реальных сценариев вождения, приводят к тому, что MPC не может точно отразить сложности и мгновенные изменения в потреблении энергии.

Эти качественные наблюдения подкрепляются точным количественным анализом результатов, численное сравнение показало, что алгоритм AMAIA зафиксировал значительно меньшую среднеквадратическую ошибку (MSE) по сравнению с алгоритмом MPC, MSE является распространенным статистическим показателем для оценки точности прогнозирования, низкое значение MSE в случае AMAIA, представляющее собой среднее значение квадратов различий между прогнозируемыми и фактическими значениями, указывает на существенно повышенную точность прогнозирования и меньшие отклонения от истинных значений энергопотребления. Это замечательное превосходство в производительности AMAIA обусловлено не только начальной точностью моделирования, но и фундаментальными параметрами. архитектурная структура алгоритма, AMAIA опирается на принципы непрерывного обучения и динамической настройки внутренних параметров, этот механизм позволяет AMAIA



постоянно обновлять свою внутреннюю модель на основе поступающих данных в режиме реального времени, позволяя ИТ адаптироваться к изменениям в поведении системы и условиях окружающей среды более эффективно, чем статические модели, на которые опирается MPC, эта способность к непрерывному обучению и адаптации является фундаментальной характеристикой высокоадаптивных и отзывчивых систем, которым требуется надежная работа в динамичных средах. Эта всесторонняя оценка подтверждает, что алгоритм AMAIA представляет собой качественный прогресс. при разработке интеллектуальных встраиваемых систем, особенно в контексте управления энергопотреблением и прогнозирования, AMAIA предлагает значительно расширенные возможности для прогнозирования управления и будущего энергопотребления, особенно по сравнению с традиционными системами, такими как MPC, в которых отсутствуют необходимые механизмы адаптации к изменениям окружающей среды и динамичным условиям эксплуатации. Основываясь на этих надежных выводах, AMAIA становится многообещающим стратегическим выбором для интеллектуальных транспортных средств, особенно в сценариях, требующих высокой энергии эффективность и оперативность реагирования в режиме реального времени на сложные и постоянно меняющиеся динамические условия, Уникальная способность AMAIA к обучению и адаптации в режиме реального времени делает ее ценным инструментом для достижения интеллектуального и эффективного управления энергетическими ресурсами, тем самым повышая общую производительность и надежность современных интеллектуальных транспортных средств.

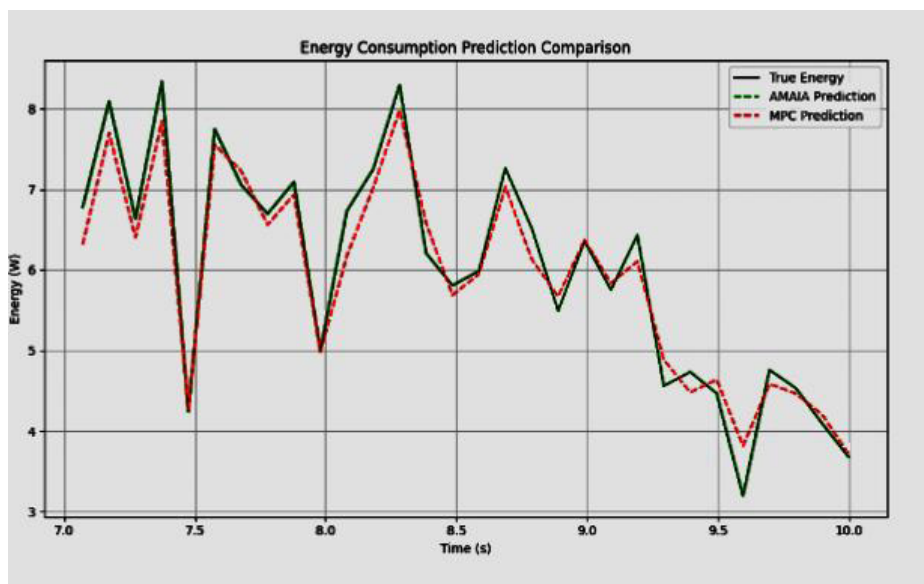


Рис. 1. Сравнение прогнозов энергопотребления между АЛГОРИТМАМИ АМАІА и MPC

Fig. 1. Comparison of energy consumption forecasts between AMAIA and MPC algorithms

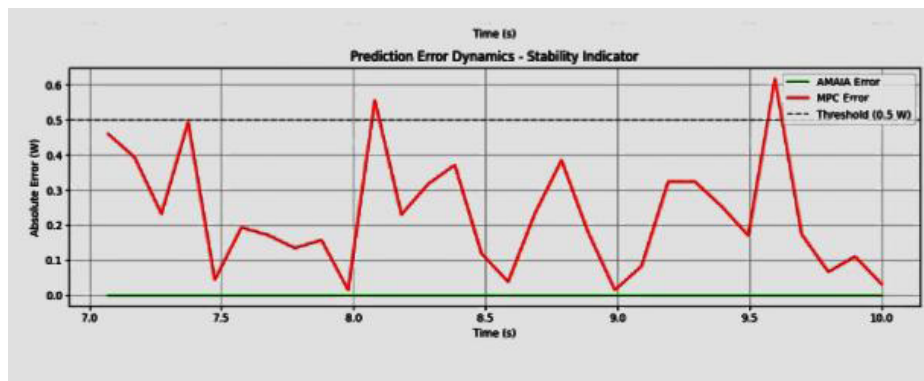


Рис. 2. Динамика ошибки прогнозирования — Индикатор устойчивости

Fig. 2. Dynamics of forecasting error — An indicator of stability

На рисунке 2 представлен подробный анализ ошибок динамического прогнозирования в потреблении энергии для двух разных систем: AMAIA (адаптивная система обучения) и MPC (Model Predictive Control). На этом рисунке показано, как ошибки прогнозирования развиваются с течением времени, отражая точность обеих систем в прогнозировании потребления энергии в интеллектуальном транспортном средстве или встроенной системе. График отслеживает абсолютные ошибки прогнозирования между истинными значениями энергии и предсказаниями системы (как от AMAIA, так и от MPC) с течением времени, Зеленая кривая представляет ошибку предсказания системы AMAIA, в то время как красная кривая показывает ошибку системы MPC, серая пунктирная линия при 0,5 Вт служит порогом для указания того, когда ошибка падает ниже заданного приемлемого уровня, пороговая линия (0,5 Вт) выступает в качестве опорной точки для определения того, когда предсказания системы достаточно близки к фактическим значениям энергопотребления, если ошибка падает ниже этой линии, это означает, что система достигла желаемого уровня точности, демонстрируя эффективную адаптацию или контроль, Точка, в которой ошибка впервые падает ниже этого порога, имеет решающее значение для оценки времени отклика системы и эффективности стабилизации ошибки.

Время, необходимое для того, чтобы ошибка упала ниже порогового значения, имеет решающее значение для оценки времени отклика каждой системы. Для AMAIA время отклика отмечается вертикальной зеленой линией, в то время как для MPC время отклика указывается красной вертикальной линией. Эти линии обозначают конкретные случаи времени, когда ошибка предсказания каждой системы впервые падает ниже 0,5 Вт. На рисунке также подчеркиваются различия в динамике ошибок обеих систем, AMAIA, как адаптивной обучающейся система может демонстрировать более быструю и точную сходимость к низким уровням ошибок, в то время как MPC, более традиционная модель, может потребоваться больше времени для достижения той же точности, что отражено различиями во времени их соответствующих





времен отклика. Общая тенденция, наблюдаемая на этом графике, дает четкое представление о стабильности обеих моделей прогнозирования с течением времени. Чем быстрее ошибка системы стабилизируется ниже порогового значения, тем эффективнее она адаптируется к изменениям в окружающей среде, таким как колебания нагрузок на встроенной системе. По сути, этот рисунок иллюстрирует прогностическую способность обеих систем и подчеркивает потенциальные преимущества АМАІА с точки зрения более быстрой адаптации и более точных энергетических прогнозов по сравнению с более статичной и менее адаптивной системой MPC.

## Обсуждение

Моделирование производительности в динамических условиях эксплуатации продемонстрировало явное превосходство АМАІА в точности прогнозирования энергопотребления, это превосходство в первую очередь объясняется способностью АМАІА постоянно изучать и обновлять свою внутреннюю модель на основе поступающих данных в режиме реального времени, что позволяет ей эффективно адаптироваться к внезапным изменениям нагрузок и моделей потребления, которые могут привести к часто характеризующие реальные сценарии вождения, напротив, MPC, который опирается на фиксированные математические модели, показал заметные отклонения от фактического потребления энергии, что указывает на ограниченность его способности справляться с изменяющейся динамикой системы.

Эта выдающаяся производительность АМАІА соответствует современным тенденциям в области управления энергопотреблением, которые подчеркивают эффективность передовых алгоритмов машинного обучения для достижения высокой точности прогнозирования и повышения энергоэффективности в различных приложениях (Adamović и др., 2018; Adnan, Dahlan, Musirin, 2017; Ahmad, Mourshed, Rezgui, 2017; Ahmad и др., 2018). Как показали исследования с использованием искусственных нейронных сетей для оценки производства энергии из твердых отходов (Adamović и др., 2018) и при оценке экономии энергии (Adnan, Dahlan, Musirin, 2017) Способность моделей на основе искусственного интеллекта извлекать сложные закономерности из данных дает им значительное преимущество в приложениях прогнозирования. Способность АМАІА реагировать в режиме реального времени на изменения условий эксплуатации, как в интеллектуальных системах кондиционирования воздуха, основанных на распознавании присутствия пассажиров в режиме реального времени (Aftab и др., 2017), делает ее особенно перспективным вариантом для интеллектуальных транспортных средств, которым требуется интеллектуальное и эффективное управление энергопотреблением в динамичных и сложных условиях.

Кроме того, способность АМАІА оптимизировать прогнозы в различных эксплуатационных контекстах, например, для повышения производительности энергетических систем с использованием методов мягких вычислений (Aghbashlo и др., 2017), повышает ее гибкость и применимость в различных сценариях вождения, а сравнение различных методов машинного обучения для прогнозирования энергопотребления



(Ahmad, Mourshed, Rezgui, 2017; Ahmad и др., 2018) также подчеркивает значительный потенциал АМАІА. модели глубокого обучения, аналогичные тем, которые используются в архитектуре АМАІА, при достижении превосходной точности прогнозирования оценка производительности временных рядов и моделей машинного обучения в других секторах, таких как больницы (Aghbashlo и др., 2019), и прогнозирование потребления электроэнергии в учебных заведениях с использованием рекуррентных нейронных сетей (Aghbashlo, Tabatabaei, Hossein pour, 2018) еще раз подтверждают идею о том, что адаптивные модели, основанные на машинном обучении, превосходно справляются со сложными задачами. динамика данных, в целом, результаты показывают, что АМАІА представляет собой значительный прогресс в разработке интеллектуальных систем управления энергопотреблением для транспортных средств, обладает значительным потенциалом для повышения топливной экономичности, сокращения выбросов вредных веществ и повышения общей производительности современных интеллектуальных транспортных средств благодаря превосходной точности прогнозирования и способности адаптироваться в режиме реального времени к изменяющимся условиям эксплуатации.

## Заключение

В этом исследовании мы сравнили эффективность двух стратегий управления, Model Predictive Control (MPC) и адаптивного алгоритма АМАІА, во встроенной системе для интеллектуальных транспортных средств, путем моделирования реальных условий с динамически изменяющимися нагрузками, мы стремились оценить способность каждого алгоритма прогнозировать потребление энергии с высокой точностью при сохранении эффективности и отзывчивости системы. Результаты показали, что алгоритм АМАІА превзошел стратегию MPC как по точности прогнозирования, так и по адаптируемости к изменяющимся условиям окружающей среды. Механизм непрерывного обучения АМАІА позволил ему быстро приспосабливаться к колебаниям нагрузки и поддерживать более тесное соответствие с данными об истинном потреблении энергии. Напротив, алгоритм MPC показал заметные отклонения из-за своей зависимости от фиксированных моделей, которые не смогли адекватно реагировать на внезапные изменения в динамике системы. Численный анализ, особенно значительно более низкая средняя квадратичная ошибка (MSE), зарегистрированная АМАІА, дополнительно обосновала свои превосходные прогностические возможности, способность АМАІА постоянно адаптировать свои внутренние параметры позволяет ей предоставлять более точные и своевременные прогнозы, что важно для приложения, требующие управления энергией в режиме реального времени в динамических средах. Это исследование подчеркивает потенциал АМАІА как более эффективного решения для интеллектуальных встроенных систем, особенно в таких контекстах, как интеллектуальные транспортные средства, где энергоэффективность и отзывчивость в режиме реального времени имеют решающее значение. Напротив, обычные системы, такие как MPC, могут испытывать трудности с достижением





аналогичной производительности, особенно в сложных и динамических операционных сценариях. В заключение, алгоритм АМАІА предлагает значительное продвижение в области адаптивного управления и прогнозного моделирования, что делает его многообещающим выбором для интеллектуальных систем следующего поколения, которые требуют высокой производительности, точности и адаптивности. Дальнейшие исследования и разработки могут изучить интеграцию АМАІА в более широкий спектр приложений, прокладывая путь для более эффективных и отзывчивых систем управления в различных областях.

### Список источников / References

1. Pérez-Lombard, L., Ortiz, J., & Pout, C. (2008), A review on buildings energy consumption information Energy and Buildings, 40(3), 394—398.
2. Barak, S., & Sadeh, S.S. (2016), Forecasting energy consumption using ensemble ARIMA—ANFIS hybrid algorithm International Journal of Electrical Power & Energy Systems, 82, 92—104.
3. Demirbas, A. (2005), potential applications of renewable energy sources, biomass combustion problems in boiler power systems and combustion related environmental issues, progress in Energy and Combustion Science, 31(2), 171—192.
4. Zhao, H.-X., & Magoulès, F. (2012), A review on the prediction of building energy consumption Renewable and Sustainable Energy Reviews, 16(6), 3586—3592.
5. Ekici, B.B., & Aksoy, U.T. (2009), prediction of building energy consumption by using artificial neural networks, Advances in Engineering Software, 40(5), 356—362.
6. Yilmazkaya, E., et al. (2018), prediction of mono-wire cutting machine performance parameters using artificial neural network and regression models, Engineering Geology, 239, 96—108.
7. Zhang, W., & Yang, J. (2015), Forecasting natural gas consumption in China by Bayesian model averaging, Energy Reports, 1, 216—220, H
8. Abdoli, B., et al. (2018), Evaluation of the air-borne ultrasound on fluidized bed drying of shelled corn: Effectiveness, grain quality, and energy consumption, Drying Technology, 36(14), 1749—1766.
9. Abramovich, B.N., & Babanova, I.S. (2018), Development of neural network models to predict and control power consumption in mineral mining industry, Mining Informational and Analytical Bulletin, 2018(5), 206—213.
10. Abtahi, T., et al. (2018), Accelerating Convolutional Neural Network with FFT on Embedded Hardware, IEEE Transactions on Very Large Scale Integration (VLSI) Systems, 26(9), 1737—1749.
11. Abu Sharkh, M., & Shami, A. (2017), An evergreen cloud: Optimizing energy efficiency in heterogeneous cloud computing architectures. Vehicular Communications, 9, 199—210.
12. Acharya, S., & D'Mello, D.A. (2017), Energy and cost-efficient dynamic load balancing mechanism for resource provisioning in cloud computing, International Journal of Applied Engineering Research, 12(24), 15782—15790.
13. Acharya, S., & Tripathy, C.R. (2018), An ANFIS estimator-based data aggregation scheme, Energy Reports, 4, 124—132.



14. Adamović, V.M., et al. (2018), An artificial neural network approach for the estimation of the primary production of energy from municipal solid waste and its application to the Balkan countries, *Waste Management*, 78, 955–968.
15. Adnan, W.N.W.M., Dahlan, N.Y., & Musirin, I. (2017), Development of hybrid artificial neural network for quantifying energy saving using measurement and verification, *Indonesian Journal of Electrical Engineering and Computer Science*, 8(1), 137–145.
16. Aftab, M., et al. (2017), Automatic HVAC control with real-time occupancy recognition and simulation-guided model predictive control in low-cost embedded system *Energy and Buildings*, 154, 141–156.
17. Aghbashlo, M., et al. (2017), Fuzzy modeling and optimization of the synthesis of biodiesel from waste cooking oil (WCO) by a low power, high frequency piezo-ultrasonic reactor, *Energy*, 132, 65–78.
18. Aghbashlo, M., et al. (2019), multi-objective exergetic and technical optimization of a piezoelectric ultrasonic reactor applied to synthesize biodiesel from waste cooking oil (WCO) using soft computing techniques, *Fuel*, 235, 100–112.
19. Aghbashlo, M., Tabatabaei, M., & Hossein pour, S. (2018), on the exergoeconomic and exergoenvironmental evaluation and optimization of biodiesel synthesis from waste cooking oil (WCO) using a low power, high frequency ultrasonic reactor, *Energy Conversion and Management*, 164, 385–398.
20. Ahmad, M.W., et al. (2018), Deep highway networks and tree-based ensemble for predicting short-term building energy consumption, *Energies*, 11(12).
21. Ahmad, M.W., Mourshed, M., & Rezgui, Y. (2017), Trees vs Neurons: Comparison between random forest and ANN for high-resolution prediction of building energy consumption, *Energy and Buildings*, 147, 77–89.

### ***Информация об авторах***

*Ахмад Али*, аспирант кафедры «автоматизированного проектирования и дизайна», университет науки и технологий МИСИС, Россия, Москва. e-mail: ali-ahmad9.3@mail.ru

*Ляпунцова Елена Вячеславовна* — доктор технических наук, профессор ФГБОУ ВО «Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана (Национальный исследовательский университет)» (МГТУ имени Н.Э. Баумана) Россия, 105005, Москва, улица 2-я Бауманская, д. 5, к. 1. e-mail: lev86@bmstu.ru

### ***Information about the authors***

*Ahmad Ali*, graduate student of the Department of Computer-Aided Engineering and Design, MISIS University of Science and Technology, Russia, Moscow. e-mail: ali-ahmad9.3@mail.ru

*Lyapunтова Елена Вячеславовна*, Doctor of Technical Sciences, Professor at Bauman Moscow State Technical University (National Research University) (Bauman Moscow State Technical University). Russia, 105005, Moscow, 2nd Baumanskaya Street, 5, room 1. e-mail: lev86@bmstu.ru



### ***Вклад авторов***

Ахмед Али — разработка идеи исследования; применение статистических, математических и иных методов анализа данных; сбор и обработка данных; визуализация результатов, применение статистических, математических или других методов для анализа данных; проведение эксперимента

Ляпунцова Елена Вячеславовна — аннотирование, написание и оформление рукописи; планирование и проведение исследования

Все авторы приняли участие в обсуждении результатов и согласовали окончательный текст рукописи.

### ***Contribution of the authors***

Ahmed Ali — development of research ideas; application of statistical, mathematical and other methods of data analysis; data collection and processing; visualization of results, application of statistical, mathematical or other methods for data analysis; conducting an experiment

Lyapunтова Elena Vyacheslavovna — annotation, writing and design of the manuscript; planning and conducting research

All authors participated in the discussion of the results and approved the final text of the manuscript.

Поступила в редакцию 04.06.2025

Поступила после рецензирования 18.06.2025

Принята к публикации 27.06.2025

Опубликована 30.09.2025

Received 2025.05.06

Revised 2025.05.13

Accepted 2025.05.25

Published 2025.09.30

## ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ | NUMERICAL METHODS

Научная статья | Original paper

УДК 537.226:519.6:004.942

### Математическая модель переключения поляризации, основанная на обобщенном уравнении Ландау — Халатникова — Тани: численная реализация

Л.И. Мороз✉, О.С. Дорошков

Амурский государственный университет, Благовещенск, Российская Федерация

✉ [lubover@mail.ru](mailto:lubover@mail.ru)

#### Резюме

**Контекст и актуальность.** Сегнетоэлектрические материалы активно применяются в современных устройствах. Функциональность сегнетоэлектриков обусловлена наличием спонтанной поляризации и способностью к её переключению под действием внешнего воздействия. Для математического описания фазовых переходов и динамики спонтанной поляризации в сегнетоэлектриках широко применяется термодинамическая теория Ландау. Однако классическая модель Ландау — Халатникова, основанная на дифференциальном уравнении первого порядка, не учитывает инерционные эффекты, что ограничивает её применение. Это обуславливает необходимость использования обобщённой модели Ландау — Халатникова — Тани, включающей инерционное слагаемое, флуктуации параметра порядка, и описывающей динамику поляризации через нелинейное уравнение гиперболического типа, аналитическое решение которых, во многих случаях вызывает затруднения, поэтому поставленную задачу приходится решать численно, например, с помощью метода конечных разностей. **Цель.** Проведение численной реализации математической модели переключения поляризации в сегнетоэлектриках, основанной на обобщенном уравнении Ландау — Халатникова — Тани. **Гипотеза.** Предполагается, что учёт инерционных эффектов позволяет точнее описывать переключение поляризации в сегнетоэлектриках и воспроизвести эффекты, которые не отображает классическая модель Ландау — Халатникова. **Методы и материалы.** Для решения начально-краевой задачи



для нелинейного уравнения в частных производных гиперболического типа разработана неявная конечно-разностная схема. Проведена программная реализация в ППП Matlab. **Результаты.** Получены временные зависимости поляризации и ее скорости переключения, гистерезисные петли, демонстрирующие влияние частоты, амплитуды поля и толщины пленки. Модель корректно воспроизводит инерционные эффекты и устойчивое гистерезисное поведение. **Заключение.** Показано, что обобщенная модель Ландау — Халатникова — Тани воспроизводит характерные особенности гистерезиса, а также наличие инерционных эффектов при переключении поляризации. Полученные результаты согласуются с физическими представлениями о переключении поляризации в сегнетоэлектриках и подтверждают возможность использования модели Ландау — Халатникова — Тани для описания нестационарных процессов.

**Ключевые слова:** уравнение Ландау — Халатникова — Тани, неявная конечно-разностная схема, сегнетоэлектрик, поляризационный гистерезис, вычислительный эксперимент

**Для цитирования:** Мороз, Л.И., Дорошков, О.С. (2025). Математическая модель переключения поляризации, основанная на обобщенном уравнении Ландау — Халатникова — Тани: численная реализация. *Моделирование и анализ данных*, 15(3), 131—147. <https://doi.org/10.17759/mda.2025150308>

## Mathematical model of polarization switching based on the generalised Landau–Khalatnikov–Tani equation: numerical implementation

L.I. Moroz✉, O.S. Doroshkov

Amur State University, Blagoveshchensk, Russian Federation

✉ [lubovep@mail.ru](mailto:lubovep@mail.ru)

### Abstract

**Context and relevance.** Ferroelectric materials are widely used in modern electronic devices. Their functionality arises from the presence of spontaneous polarization and the ability to switch it under external stimuli. The Landau thermodynamic theory is commonly employed to describe phase transitions and the dynamics of spontaneous polarization in ferroelectrics. However, the classical Landau — Khalatnikov model, based on a first-order differential equation, does not account for inertial effects, which limits its applicability in high-frequency or fast-switching regimes. This necessitates the use of the generalised Landau — Khalatnikov — Tani model, which includes an inertial term and fluctuations of the order parameter, describing polarization



dynamics through a nonlinear hyperbolic partial differential equation. Analytical solutions to such equations are often unattainable, making numerical methods — such as the finite-difference method — essential for solving the problem. **Objective.** To perform a numerical implementation of a mathematical model for polarization switching in ferroelectrics based on the generalised Landau — Khalatnikov — Tani equation. **Hypothesis.** It is hypothesised that incorporating inertial effects enables a more accurate description of polarization switching in ferroelectrics and allows the reproduction of phenomena not captured by the classical Landau — Khalatnikov model. **Methods and materials.** An implicit finite-difference scheme was developed to solve the initial-boundary value problem for the nonlinear hyperbolic partial differential equation. The numerical algorithm was implemented using MATLAB. **Results.** Time-dependent polarization profiles, switching kinetics, and hysteresis loops were obtained, demonstrating the influence of electric field frequency, amplitude, and film thickness. The model successfully reproduces inertial effects and stable hysteretic behaviour. **Conclusions.** The generalised Landau — Khalatnikov — Tani model accurately captures key features of ferroelectric hysteresis and inertial switching dynamics. The results align with physical understanding of polarization reversal and confirm the model's suitability for describing non-stationary processes in ferroelectric materials.

**Keywords:** Landau — Khalatnikov — Tani equation, implicit finite-difference scheme, ferroelectric, polarization hysteresis, computational experiment

**For citation:** Moroz, L.I., Doroshkov, O.S. (2025). Mathematical model of polarization switching based on the generalized Landau — Khalatnikov — Tani equation: numerical implementation. *Modeling and Data Analysis*, 15 (3), 131—147. <https://doi.org/10.17759/mda.2025150308>

## Введение

Математическое моделирование играет важную роль в исследованиях физики твердого тела, в частности, при изучении сложных динамических процессов в сегнетоэлектрических материалах. Например, можно описывать и предсказывать поведение доменных структур, переключение поляризации и отклики материалов на внешние электрические, магнитные или механические воздействия (Пабе, 2015; Мороз, Масловская, 2018; Ducharme, Newell, Sebald, 2020; Li, Zhang, Wen, Dong, 2024). Модели, основанные на термодинамической теории переходов или методах молекулярной динамики, позволяют глубже понять микроскопические механизмы, лежащие в основе макроскопических свойств сегнетоэлектриков, а также способствуют разработке новых функциональных материалов. В общем случае под сегнетоэлектриками понимают вещества, обладающие спонтанной электрической поляризацией, которая может быть изменена под действием внешнего электрического поля (Scott, 2000; Wang et al., 2003; Mazur, Stefanovich, Yurchenko, 2016; Zhang et al., 2025). Отличительными свойствами сегнетоэлектрических материалов являются диэлектрический гистерезис, высокая нелинейность отклика и устойчивость к разрушению при многократном переключении. Эти особенности делают сегнетоэлектрики незаменимыми в различных устройствах микроэлектроники,



таких как оперативная память (FeRAM), датчики, конденсаторы, энергосберегающие устройства (Landau, Ginzburg, 1965; Ducharne, Newell, Sebal, 2020; Akshayveer et al., 2025). К наиболее известным сегнетоэлектрикам относятся триглицинсульфат), титанат бария ( $\text{BaTiO}_3$ ), сегнетова соль (титанат свинца ( $\text{PbTiO}_3$ ), цирконат-титанат свинца (PZT) и полимерные материалы, например, поливинилиденфторид-трифторэтилен (P(VDF-TrFE)) (Рабе, 2015; Akshayveer et al., 2025).

Для моделирования поведения сегнетоэлектриков применяются различные подходы: стохастические, феноменологические и детерминированные (Рабе, 2015; Bain, Chand, 2017). Стохастические методы учитывают случайные флуктуации и дефекты материала, что особенно важно при описании неоднородных образцов или систем с высоким уровнем шума (Alessandri et al., 2019). Феноменологические подходы, напротив, опираются на эмпирические зависимости, полученные из экспериментальных данных, и позволяют строить упрощённые модели, удобные для практического применения (Cao, 2004; Ducharne, Newell, Sebal, 2020). В свою очередь детерминированные модели, основаны на строгих физических законах и уравнениях, описывающих поведение системы без учёта случайных факторов. Они предполагают, что состояние системы однозначно определяется начальными условиями и внешними воздействиями. Детерминированный подход особенно эффективен при исследовании систем, где случайные шумы и дефекты играют второстепенную роль, и требуется высокая точность прогнозирования поведения материала (Uchino, 1997; Song et al., 2003). Кроме того, существуют модели, в которых данные подходы объединяются для более полного описания сложных процессов в сегнетоэлектриках.

Особое место среди перечисленных подходов занимает теория фазовых переходов, разработанная Львом Ландау в 1930-х годах. Эта теория стала одной из ключевых концепций в физике твёрдого тела и нашла широкое применение при исследовании сегнетоэлектриков (Cao, 2004; Рабе, 2015; Roy, Swayambhoo, 2020). Основной идеей стало описание состояния вещества через параметр порядка — величину, которая отлична от нуля только в упорядоченной фазе. Для сегнетоэлектриков таким параметром служит спонтанная поляризация. В рамках модели энергия системы представляется в виде разложения по степеням поляризации, что позволяет определять условия термодинамической устойчивости различных фаз и предсказывать тип фазового перехода (Cao, 2004; Рабе, 2015). Развитие теории Ландау привело к созданию феноменологической модели Ландау — Гинзбурга — Девоншира — Халатникова, расширяющей её возможности за счёт учёта пространственной неоднородности поляризации и временной динамики (Chen, 2002; Tang et al., 2022; He et al., 2023). Она позволяет моделировать такие явления, как образование доменов, переключение поляризации под действием внешнего электрического поля и гистерезисный отклик (Tang et al., 2022; He et al., 2023; Maslovskaya et al., 2021; Roy, Paul, Dattagupta, 2010; Richman, Rulis, Caruso, 2017). Эта модель активно используется для анализа тонкоплёночных структур и многослойных устройств, где необходимо учитывать влияние напряжений, граничных условий и взаимодействия между слоями.



Тем не менее, модель Ландау — Гинзбурга — Девоншира — Халатникова имеет некоторые ограничения. Она базируется на феноменологическом подходе и не учитывает микроскопические механизмы поведения материала. Кроме того, классическая модель не всегда адекватно описывает сильно нелинейные и динамические процессы, происходящие в современных наноразмерных и композитных системах. Поэтому в последние десятилетия предпринимались шаги по её модификации и обобщению. Одним из важных направлений развития является модель Ландау — Халатникова — Тани, позволяющая учитывать инерционные эффекты и диссипацию в динамике параметра порядка. Эта модель описывает временную эволюцию спонтанной поляризации с помощью дифференциального уравнения второго порядка по времени, которое включает члены, отвечающие за инерцию, вязкость и нелинейность отклика на внешнее воздействие. Такой подход особенно важен при моделировании высокочастотных процессов, быстрого переключения поляризации и нестационарных режимов работы сегнетоэлектрических устройств (Maslovskaya et al., 2021; Roy, Paul, Dattagupta, 2010; Richman, Rulis, Caruso, 2017).

Целью данной работы является численная реализация математической модели переключения поляризации в сегнетоэлектриках, основанная на обобщенном уравнении Ландау — Халатникова — Тани.

## Математическая постановка задачи

Основной принцип термодинамической теории заключается в том, что состояние полярных диэлектриков определяется набором термодинамических параметров: температурой, поляризацией, электрическим полем, напряжением и деформацией. Феноменологическое описание основывается на задании свободной энергии — термодинамической функции, зависящей от параметра порядка (плотности свободной энергии) —  $F$ , Дж·м<sup>-3</sup> (Рабе, 2015).

Для одноосных сегнетоэлектриков свободную энергию можно представить в виде разложения по степеням единственной компоненты поляризации, при этом, для упрощения модели, полем деформаций можно пренебречь.

$$F = \frac{1}{2}AP^2 + \frac{1}{4}BP^4 + \frac{1}{6}BP^6 - EP, \text{ Дж} \cdot \text{м}^{-3}, \quad (1)$$

где  $P$  — спонтанная поляризация, Кл·м<sup>-2</sup>;  $A = A_0(T - T_{cw})$ , м·Ф<sup>-1</sup>;  $B$ , м<sup>5</sup>·(Кл<sup>2</sup>×Ф<sup>-1</sup>);  $C$ , м<sup>9</sup>·(Кл<sup>4</sup>×Ф<sup>-1</sup>) — термодинамические постоянные.

Характер сегнетоэлектрического фазового перехода и тип поведения поляризации при  $T < T_{cw}$  зависят от знака константы  $B$  (1). При  $B < 0$  поляризация изменяется скачкообразно с температурой, что соответствует фазовому переходу I рода, тогда как при  $B > 0$  поляризация изменяется непрерывно, указывая на фазовый переход II рода. Для фазового перехода II рода вклад пятой степени в выражении плотности свободной энергии (1) можно не учитывать. Термодинамические параметры  $A_0$  и  $C$  положительны





для известных сегнетоэлектриков. Далее будем рассматривать сегнетоэлектрики с фазовыми переходами I рода.

Простейшая математическая модель гистерезисной зависимости поляризации от внешнего поля основана на представлении равновесной конфигурации как минимума свободной энергии  $\frac{\partial F}{\partial P} = 0$ , т.е.  $A_0(T - T_{cw})P + BP^3 + CP^5 - E = 0$  или  $AP + BP^3 + CP^5 - E = 0$ .

Поле  $E$  можно представить как периодическую функцию  $E(t) = E_0 \sin(\omega t)$ . Здесь  $E_0$  — амплитуда поля, В·м<sup>-1</sup>;  $\omega = 2\pi f$  — угловая частота, рад·с<sup>-1</sup>;  $f$  — частота колебаний электрического поля, Гц.

Нестационарное уравнение Ландау — Халатникова описывает динамику изменения полярного состояния сегнетоэлектрика в рамках теории Ландау (Рабе, 2015; Maslovskaya et al., 2021; Roy, Paul, Dattagupta, 2010):

$$\delta \frac{dP}{dt} = -\frac{\partial F}{\partial P},$$

где  $\delta$  — кинетический коэффициент, В·м·с·Кл<sup>-1</sup>.

Подставляя выражение для плотности свободной энергии в уравнение (1), можно вывести следующее дифференциальное уравнение:

$$\delta \frac{dP}{dt} = -AP - BP^3 - CP^5 + E. \quad (2)$$

Подход Ландау опирается на теорию самосогласованного поля, поэтому уравнение не учитывает флуктуации параметра порядка — поляризации. В соответствии с концепцией Гинзбурга, для учета флуктуаций в сегнетоэлектриках уравнение можно дополнить, включив градиентный член или корреляционную энергию  $\psi(\nabla P)^2$ , где  $\psi$  — положительная термодинамическая константа, м<sup>3</sup>·Ф<sup>-1</sup> (Рабе, 2015). Если предположить, что поляризация зависит только от одной пространственной координаты, то для одной из компонент поляризации уравнение Ландау — Халатникова принимает следующий вид:

$$\delta \frac{\partial P}{\partial t} = \psi \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} - AP - BP^3 - CP^5 + vE, \quad 0 < x < L, \quad 0 < t \leq \theta, \quad (3)$$

где  $L$  — толщина образца, м;  $v$  — масштабирующий коэффициент.

Масштабирующий коэффициент  $v$  вводят, чтобы обеспечить согласованность размерностей и избежать численных проблем при решении уравнения, т.е. приводят внешнее поле  $E$  к тому же масштабу, что и поляризация  $P$  (Song et al., 2003).

Для завершения математической постановки задачи необходимо указать начальное

$$P|_{t=0} = P_0, \quad 0 \leq x \leq L,$$



и граничные условия

$$\left. \frac{\partial P}{\partial x} \right|_{x=0} = \frac{P}{\lambda}, \quad \left. \frac{\partial P}{\partial x} \right|_{x=L} = -\frac{P}{\lambda}, \quad 0 \leq t \leq \theta,$$

где  $\lambda$  – длина экстраполяции, характеризующая скорость уменьшения поляризации на границе образца, м (Мороз, Масловская, 2018; Maslovskaya et al., 2021; Roy, Paul, Dattagupta 2010).

Классическое уравнение (3) является уравнением первого порядка по времени, что не учитывает инерционные эффекты. Поэтому при моделировании системы под действием переменного электрического поля с высокой частотой точность предсказаний этого уравнения может значительно снижаться с ростом частоты (Wang et al., 2003; Richman, Rulis, Caruso, 2017). Обобщённая модель Ландау — Халатникова — Тани, является развитием классической феноменологической теории Ландау, дополненной инерционными эффектами, предложенными Тани, и адаптированной для описания динамики сегнетоэлектриков под воздействием синусоидального электрического поля. Эта модель основана на уравнении второго порядка по времени, что позволяет учитывать резонансные явления и высокочастотные режимы.

Учитывая инерцию зарядов и пространственные флуктуации системы, получаем:

$$\delta \frac{dP}{dt} = -\rho \frac{d^2 P}{dt^2} + \psi \frac{d^2 P}{dx^2} - AP - BP^3 - CP^5 + \nu E, \quad 0 < x < L, \quad 0 < t \leq \theta, \quad (4)$$

где  $\rho$  представляет собой инерцию поляризации, м·В·с<sup>2</sup>·Кл<sup>-1</sup> (Wang et al., 2003; Tang et al., 2022; Richman, Rulis, Caruso, 2017). Более подробный вывод уравнения (4) представлен в работах (Wang et al., 2003; Richman, Rulis, Caruso, 2017).

В этом случае задача дополняется начальными и граничными условиями:

$$P|_{t=0} = P_0, \quad \left. \frac{\partial P}{\partial t} \right|_{t=0} = \tilde{P}_0, \quad \left. \frac{\partial P}{\partial x} \right|_{x=0} = \frac{P}{\lambda}, \quad \left. \frac{\partial P}{\partial x} \right|_{x=L} = -\frac{P}{\lambda}. \quad (5)$$

Отметим, что уравнение вида (4) без градиентного слагаемого в (Tang et al., 2022) использовалось для описания динамики доменных стенок и спин-поляризационных взаимодействий.

Базовая термодинамическая модель, описывающая поляризационное состояние сегнетоэлектриков, формулируется как начально-граничная задача для полулинейного гиперболического уравнения с нелинейными слагаемыми третьей и пятой степеней.

Поднимая вопрос о существовании и единственности решения представленных задач, можно рассмотреть работу (Maslovskaya et al., 2021), в которой приведено доказательство существования и единственности слабого решения для начально-краевой задачи для обобщённого уравнения Ландау — Халатникова. В (Aliev, Isayeva, 2018)



рассмотрена смешанная краевая задача для нелинейных гиперболических уравнений с нелинейной диссипацией. Доказаны существование, единственность и экспоненциальное затухание глобальных решений этой задачи с фокусирующими нелинейными источниками. Кроме того, работа (Barbu, Lasiecka, Rammaha, 2005) посвящена доказательству существования и единственности слабых решений для нелинейного волнового уравнения с вырождающимся демпфированием и нелинейным источником.

В литературе уравнение (4) известно как телеграфное уравнение или волновое уравнение с затуханием в зависимости от области применения. Получение аналитического решения подобных уравнений во многих случаях вызывает существенные сложности. Поэтому оправданным является применение численных методов. Среди численных методов, используемых для решения рассматриваемого класса уравнений, можно выделить: метод конечных разностей (Li, Hu, Zhang, 2023), метод конечных элементов (Sap, 2025), спектральные методы (Abdelwahed, Chorfi, 2022). Однако наибольшее распространение получил метод сеток, реализуемый в рамках конечно-разностных схем. Особенно актуальными при решении нелинейных гиперболических уравнений такого рода являются неявные конечно-разностные схемы, обладающие лучшими свойствами устойчивости по сравнению с явными схемами. В литературе известны случаи применения неявных схем для уравнений данного типа. Например, в работе (Gao, Xie, 2012) представлены двух- и трёхслойные компактные неявные схемы для численного решения одномерных и двумерных линейных телеграфных уравнений. Приведены оценки устойчивости и погрешности. Скорости сходимости представленных схем имеют второй порядок по времени и четвертый по координате. В (Chew, Sulaiman, 2018) получено численное решение с помощью неявной конечно-разностной схемы с использованием итерационной процедуры для одномерных уравнений гиперболического типа. В рамках данной работы остановимся на классической неявной конечно-разностной схеме для волнового уравнения.

### Вычислительная схема

На пространственно-временной сетке  $\Omega_{\Delta x}^{\Delta t} = \{x_i = i(\Delta x), i = \overline{0, M}, t^j = j(\Delta t), j = \overline{0, N}\}$ , покрывающей расчетную область, где  $\Delta x$  — шаг по координате,  $\Delta t$  — шаг по времени, построим вычислительную схему.

Для удобства вычислений предварительно преобразуем уравнение (4) к виду:

$$\frac{\rho}{\delta} \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} + \frac{\partial P}{\partial t} = \frac{\psi}{\delta} \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} - \frac{1}{\delta} P(A + BP^2 + CP^4) + \frac{\nu}{\delta} E, \quad (6)$$

где  $D = \frac{\psi}{\delta}$ .

При построении вычислительной схемы необходимо заменить производные функции на их конечно-разностные аналоги (Формалев, Ревизников, 2006).

Производные по времени и координате аппроксимируем соответствующими формулами центральных разностей



$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \approx \frac{u_i^{j+1} - 2u_i^j + u_i^{j-1}}{\Delta t^2} + O((\Delta t)^2) \quad \text{и} \quad \frac{\partial u}{\partial t} \approx \frac{u_i^{j+1} - u_i^{j-1}}{2\Delta t} + O((\Delta t)^2), \quad (7)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \approx \frac{u_{i+1}^{j+1} - 2u_i^{j+1} + u_{i-1}^{j+1}}{\Delta x^2} + O((\Delta x)^2). \quad (8)$$

Более того, из-за наличия в уравнении (4) слагаемых третьей и пятой степеней проведем линеаризацию нелинейной части уравнения с последующим введением итерационной процедуры: для каждого временного слоя  $j$  заменяем  $\left(P_i^{(s)}\right)^3 \approx \left(P_i^{(s-1)}\right)^2 P_i^{(s)}$ ,  $\left(P_i^{(s)}\right)^5 \approx \left(P_i^{(s-1)}\right)^4 P_i^{(s)}$ , где  $s=1,2,\dots$  — номер итерации, начиная с некоторого  $P_i^{(s)} = P_i^j$ .

Подставляя формулы (7) и (8) в уравнение (4), получим

$$\begin{aligned} & \left( \frac{-D(\Delta t)^2}{(\Delta x)^2} \right) P_{i-1}^{j+1} + \left( \rho \cdot \frac{1}{\delta} + \Delta t + \frac{2D(\Delta t)^2}{(\Delta x)^2} + (\Delta t)^2 \frac{1}{\delta} (A + BP_i^j + CP_i^{j^4}) \right) P_i^{j+1} + \left( \frac{-D(\Delta t)^2}{(\Delta x)^2} \right) P_{i+1}^{j+1} = \\ & = -\rho \cdot \frac{1}{\delta} P_i^{j-1} + (\Delta t) P_i^j + (\Delta t)^2 \frac{1}{\delta} \cdot \nu E^j + 2\rho \frac{1}{\delta} P_i^j, \quad i = \overline{1, M-1}, \quad j = \overline{1, N-1}. \end{aligned} \quad (9)$$

Дополним (9) начальными условиями  $P_i^0 = P_0$ ,  $\frac{P_i^1 - P_i^0}{\Delta t} = \tilde{P}_0$ ,  $i = \overline{0, M}$  и несимметричными конечно-разностными аппроксимациями для производных из граничных условий

$$\frac{-3P_0^{j+1} + 4P_1^{j+1} - P_2^{j+1}}{2(\Delta x)} = \frac{P_0^{j+1}}{\lambda}, \quad \frac{3P_M^{j+1} - 4P_{M-1}^{j+1} + P_{M-2}^{j+1}}{2(\Delta x)} = -\frac{P_M^{j+1}}{\lambda}, \quad j = \overline{1, N-1}. \quad (10)$$

Комбинирование метода конечных разностей с итерационной процедурой позволяет решать прикладные задачи без утраты точности всей вычислительной схемы. В результате построенная схема приводит к системе линейных алгебраических уравнений. При этом первое и последнее уравнения для каждого временного слоя необходимо скорректировать с учётом граничных условий. Общая система алгебраических уравнений решается методом Гаусса, что гарантирует решение с погрешностью, определяемой точностью вычислений. Неявная схема для линейного волнового уравнения обладает абсолютной устойчивостью и обеспечивает первый порядок точности по времени и второй по координате.

## Результаты вычислительных экспериментов

В одноосных сегнетоэлектриках, к которым относятся такие материалы, как ниобат лития, ниобат бария стронция и другие, существует лишь два возможных направления вектора спонтанной поляризации, которые расположены вдоль единственной



полярной оси. В результате их доменная структура состоит из доменов с противоположно направленными векторами поляризации, разделённых  $180^\circ$  доменными стенками. Напротив, в многоосных сегнетоэлектриках, например, в титанате бария или титанате свинца, доменная структура значительно сложнее. Это связано с тем, что вектор спонтанной поляризации может быть ориентирован вдоль одной из нескольких доступных кристаллографических полярных осей.

Чтобы поляризацию можно было считать однокомпонентной для титаната свинца, необходимо, чтобы вся пленка оказалась в одном доменном состоянии, то есть все диполи в материале были ориентированы в одну сторону.

Будем считать, что в выращенной пленке  $\text{PbTiO}_3$  кристаллическая ось  $c$  направлена перпендикулярно подложке. Тогда спонтанная поляризация может быть направлена либо вверх, либо вниз относительно подложки. Поле приложено перпендикулярно плоскости пленки, то есть вдоль оси  $c$  (между верхним и нижним электродами). Переключение доменов происходит в два этапа: начальное зарождение и рост сегнетоэлектрического домена, за которым следует расширение домена посредством бокового движения доменных стенок, пока направление поляризации во всей области не изменится на противоположное (Wang et al., 2003).

В качестве объекта исследования рассмотрим тонкие пленки титаната свинца  $\text{PbTiO}_3$ . Входные параметры, которые использовались при моделировании (Рабе, 2015; Tang et al., 2022; Maslovskaya et al., 2021), представлены в таблице.

Таблица / Table

### Параметры материала $\text{PbTiO}_3$

#### Material Parameters of $\text{PbTiO}_3$

Параметры / Parameters	Значение / Numerical value	Единицы измерения / Unit
Толщина пленки / Film Thickness, $L$	1—30	нм/nm
Амплитуда поля / Field Amplitude, $E_0$	$2 \times 10^5$ — $5 \times 10^5$	$\text{В} \cdot \text{м}^{-1} / \text{V} \cdot \text{м}^{-1}$
Начальное значение поляризации / Initial Polarization Value, $P_0$ , $\bar{P}_0$	0	$\text{Кл} \cdot \text{м}^{-2} / \text{C} \cdot \text{м}^{-2}$
Кинетический коэффициент / Kinetic Coefficient, $K$	$1 \times 10^{-7}$	$\text{м} \times \text{с} \cdot \Phi^{-1} / \text{м} \times \text{с} \cdot \text{F}^{-1}$
Инерция поляризации / Polarization Inertia, $\rho$	$10^9$	$\text{м} \cdot \text{В} \cdot \text{с}^2 \cdot \text{Кл}^{-1} / \text{м} \cdot \text{В} \cdot \text{с}^2 \cdot \text{C}^{-1}$
Градиентный коэффициент / Gradient Coefficient, $\psi$	$0.5 \times 10^{-9}$	$\text{м}^3 \cdot \Phi^{-1} / \text{м}^3 \cdot \text{F}^{-1}$
Частота поля / Field Frequency, $f$	50—200	Гц / Hz
Время эксперимента / Time, $\theta$	0.03	с / s
Термодинамические параметры (при $20^\circ \text{C}$ ) / Thermodynamic Parameters (at $20^\circ \text{C}$ )		
$A$	$-1.74 \times 10^8$	$\text{м} \cdot \Phi^{-1} / \text{м} \cdot \text{F}^{-1}$
$B$	$-0.73 \times 10^8$	$\text{м}^5 \cdot \text{Кл}^{-2} \times \Phi^{-1} / \text{м}^5 \cdot \text{C}^{-2} \times \text{F}^{-1}$
$C$	$2.6 \times 10^8$	$\text{м}^9 \cdot \text{Кл}^{-4} \times \Phi^{-1} / \text{м}^9 \cdot \text{C}^{-4} \times \text{F}^{-1}$

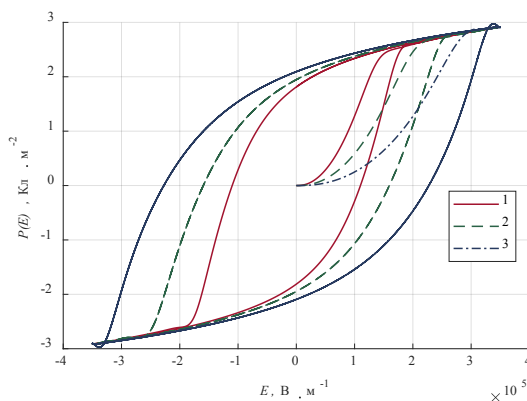


Проведенный вычислительный эксперимент позволяет исследовать динамику гистерезисных свойств сегнетоэлектрика при различных условиях. Также показаны временная эволюция системы, скорость переключения поляризации и влияние частоты и амплитуды приложенного поля на форму гистерезисной петли.

Далее представлены результаты моделирования, демонстрирующие основные закономерности и особенности поведения системы. В ходе исследования проведен анализ зависимости площади петли гистерезиса от ключевых параметров системы — толщины пленки, амплитуды и частоты внешнего электрического поля. Для этого использовалась обобщенная модель Ландау — Халатникова — Тани (4)–(5). Результаты моделирования представлены на рисунках 1—3. Следует отметить, что в работах (Wang et al., 2003; Richman, Rulis, Caruso, 2017) рассматриваемая модель уже применялась для описания поведения материала как функции, зависящей от частоты и амплитуды приложенного поля. Изменение частоты и амплитуды приводит к изменению формы петли. С увеличением этих параметров петля становится более широкой, что указывает на увеличение потерь энергии и более медленное переключение поляризации.

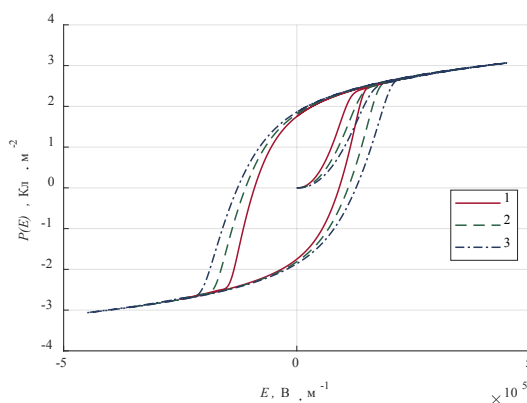
Кроме того, наблюдается зависимость угла наклона петли гистерезиса от амплитуды  $E_0$  и частоты  $f$  внешнего электрического поля. При уменьшении значений данных параметров петля гистерезиса приобретает более вертикальную ориентацию и характеризуется менее плавной формой.

Некоторые исследования (Hong, Fang, 2008) также подчеркивают важность влияния толщины пленки на проявление сегнетоэлектрических свойств: при уменьшении толщины до определённого предела характерные особенности сегнетоэлектриков, такие как гистерезис, исчезают, и их поведение становится похожим на поведение обычных диэлектриков. Зависимость поляризационного гистерезиса от толщины пленки, представленная на рисунке 3. Такое изменение электрофизических характеристик может существенно влиять на эффективность функционирования электронных устройств, основанных на использовании полярных диэлектриков.



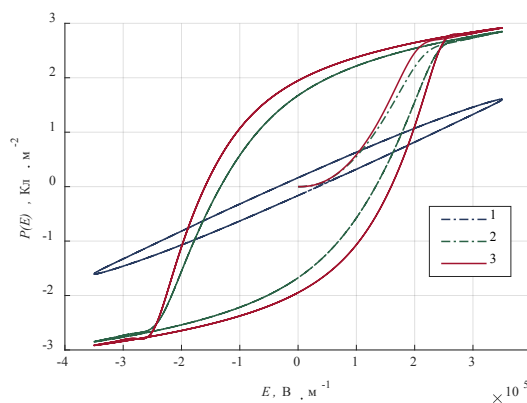
**Рис. 1.** Гистерезисная зависимость  $P(E)$  для пленки  $\text{PbTiO}_3$  при варьировании частоты внешнего поля  $f = 50$  Гц (1),  $f = 100$  Гц (2),  $f = 200$  Гц (3)

**Fig. 1.** Hysteresis dependence  $P(E)$  for  $\text{PbTiO}_3$  film for the variation of the external field frequency  $f = 50$  Hz (1),  $f = 100$  Hz (2),  $f = 200$  Hz (3)



**Рис. 2.** Гистерезисная зависимость  $P(E)$  для пленки  $\text{PbTiO}_3$  при варьировании амплитуды внешнего поля  $E_0 = 2 \cdot 10^{-5} \text{ В} \cdot \text{м}^{-1}$  — (1);  $E_0 = 3 \cdot 10^{-5} \text{ В} \cdot \text{м}^{-1}$  — (2);  $E_0 = 5 \cdot 10^{-5} \text{ В} \cdot \text{м}^{-1}$  — (3)

**Fig. 2.** Hysteresis dependence  $P(E)$  for  $\text{PbTiO}_3$  film for the variation of the amplitude of the external field  $E_0 = 2 \cdot 10^{-5} \text{ В} \cdot \text{м}^{-1}$  — (1);  $E_0 = 3 \cdot 10^{-5} \text{ В} \cdot \text{м}^{-1}$  — (2);  $E_0 = 5 \cdot 10^{-5} \text{ В} \cdot \text{м}^{-1}$  — (3)



**Рис. 3.** Гистерезисная зависимость  $P(E)$  при заданной толщине пленки  $\text{PbTiO}_3$   $L = 2 \text{ нм}$  — (1);  $L = 10 \text{ нм}$  — (2);  $L = 30 \text{ нм}$  — (3)

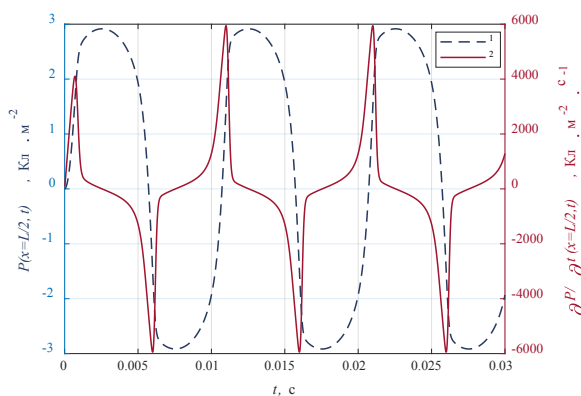
**Fig. 3.** Hysteresis dependence  $P(E)$  for a given thickness of the  $\text{PbTiO}_3$  film  $L = 2 \text{ нм}$  — (1);  $L = 10 \text{ нм}$  — (2);  $L = 30 \text{ нм}$  — (3)



Также в рамках исследования выполнено сравнение графиков переключения поляризации  $P$  и ее скорости  $\frac{\partial P}{\partial t}$  при  $x=L/2$  ( $L=30\text{нм}$ ), рассчитанных с использованием классической модели Ландау — Халатникова и обобщённой модели Ландау — Халатникова — Тани. В целом форма кривых остаётся схожей, что указывает на сохранение основного механизма переключения поляризации в обеих моделях. Однако кривая скорости переключения поляризации на рисунке 4 демонстрирует плавные и гладкие переходы кривой по сравнению с кривой  $\frac{\partial P}{\partial t}$  на рисунке 5, что приводит к меньшей амплитуде колебаний и более низкой скорости переключения. Вместе с тем, классическая модель Ландау — Халатникова не позволяет воспроизвести резонансный пик, связанный с диэлектрическим откликом сегнетоэлектрика при воздействии внешнего поля.

Как отмечают авторы (Wang et al., 2003; Richman, Rulis, Caruso, 2017) указанное ограничение становится особенно значимым при моделировании поведения материалов в условиях высокочастотного возбуждения  $f > 100$  Гц.

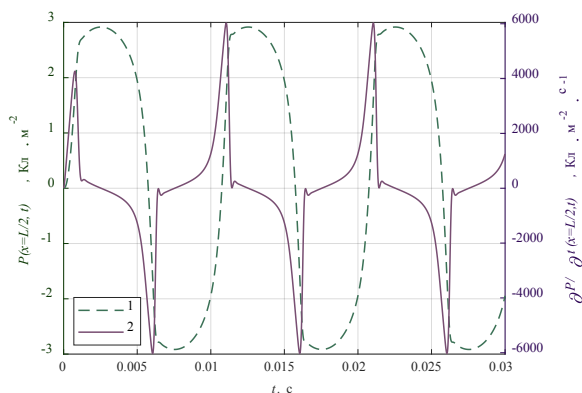
Полученные результаты моделирования динамики поляризации и скорости её переключения в тонкой пленке титаната бария демонстрируют, что использование расширенных физических моделей, таких как модель Ландау — Халатникова — Тани, позволяет более точно описывать сложные фазовые переходы и гистерезисные процессы в сегнетоэлектрических материалах по сравнению с классическими подходами. В отличие от классической модели Ландау–Халатникова, в которой переходы поляризации имеют более резкий и дискретный характер, расширенная модель учитывает дополнительные факторы, такие как пространственно-временная неоднородность, релаксационные процессы и взаимодействие доменов, что приводит к более реалистичной динамике переключения поляризации.



**Рис. 4.** Эволюция поляризации  $P$  и ее скорости  $\partial P/\partial t$  при фиксированном  $x=L/2$ , полученная с помощью классической модели Ландау–Халатникова

**Fig. 4.** Evolution of polarization  $P$  and its velocity  $\partial P/\partial t$  at fixed  $x=L/2$ , obtained using the classical Landau–Khalatnikov model





**Рис. 5.** Эволюция поляризации  $P$  и ее скорости  $\partial P/\partial t$  при фиксированном  $x=L/2$ , полученная с помощью модели Ландау — Халатникова — Тани

**Fig. 5.** Evolution of polarization  $P$  and its velocity  $\partial P/\partial t$  at fixed  $x=L/2$ , obtained using the classical Landau — Khalatnikov — Tani model

Эти особенности важны при исследовании наноразмерных и тонкопленочных структур, где проявляются масштабно-зависимые эффекты, влияющие на фазовые переходы и устойчивость поляризованного состояния. Более плавные и сглаженные изменения поляризации, наблюдаемые в модели Ландау — Халатникова — Тани, указывают на её способность учитывать не только термодинамические, но и кинетические эффекты, связанные с динамикой доменных стенок и локальными флуктуациями.

## Заключение

В данной работе представлены результаты численного моделирования динамики переключения поляризации в сегнетоэлектриках на основе обобщённой модели Ландау — Халатникова — Тани, учитывающей инерционные эффекты и пространственные флуктуации. Разработанная модель применена для анализа поведения сегнетоэлектрических материалов с фазовым переходом первого рода под воздействием синусоидального электрического поля, что позволило детально изучить гистерезисные характеристики материала, включая форму петли гистерезиса, скорость переключения поляризации и влияние внешних параметров, таких как частота и амплитуда поля.

Полученные результаты продемонстрировали, что увеличение частоты внешнего электрического поля приводит к расширению гистерезисной петли, увеличению коэрцитивного поля и изменению её формы, что указывает на фазовый сдвиг между полем и поляризацией. С ростом амплитуды поля наблюдается увеличение ширины петли и более раннее достижение насыщения поляризации, что согласуется с физическими ожиданиями и экспериментальными данными. Анализ скорости переключения



поляризации выявил резкие пики, связанные с инерцией параметра порядка, что подчеркивает важность учёта второго порядка производных по времени в модели.

Таким образом, обобщённая модель Ландау — Халатникова — Тани позволяет эффективно описывать сложные динамические процессы в сегнетоэлектриках, включая нелинейные эффекты и влияние внешнего электрического поля.

### Список источников / References

1. Рабе, К.М. (Ред.). (2015). *Физика сегнетоэлектриков: современный взгляд*. Москва: Лаборатория знаний, 443 с.  
Rabe, K.M. (Ed.). (2015). *Physics of Ferroelectrics: A Modern Perspective*. Moscow: Laboratory of Knowledge, 443 p. (In Russ.)
2. Мороз, Л.И., Масловская, А.Г. (2018). Метод прогноза и коррекции в задаче численного моделирования фрактальной динамики доменных границ сегнетоэлектриков. *Вестник Амурского государственного университета. Серия: Естественные и экономические науки*, (83), 3—8.  
Moroz, L.I., Maslovskaya, A.G. (2018). Method of prediction and correction in the problem of numerical modeling of fractal dynamics of ferroelectric domain boundaries. *Vestnik Amurskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Estestvennye i ekonomicheskie nauki*, (83), 3—8. (In Russ.)
3. Ducharme, B., Newell, B., Sebald, G. (2020). Unique fractional derivative operator to simulate all dynamic piezoceramic dielectric manifestations: from aging to frequency-dependent hysteresis. *IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency Control*, 67(1), 197—206. <https://doi.org/10.1109/TUFFC.2019.2938891>
4. Li, Z., Zhang, Y., Wen, H., Dong, C. (2024). Strain and ferroelectric polarization influence on perpendicular magnetic anisotropy of CoFe<sub>3</sub>N/BaTiO<sub>3</sub> heterostructure. *Results in Physics* 57, 107388. <https://doi.org/10.1016/j.rinp.2024.107388>
5. Scott, J.F. (2000). *Ferroelectric Memories*. Heidelberg: Springer Science & Business Media, 248 p.
6. Wang, B., Xia, R., Fan, H., Woo, C.H. (2003). Dynamic process of domain switching in ferroelectric films. *J. Appl. Phys.*, 94, 3384. <https://doi.org/10.1063/1.1599958>
7. Mazur, O.Y., Stefanovich, L.I., Yurchenko, V.M. (2016). Effect of a weak external electric field on the kinetics of the ordering of ferroelectrics upon first-order phase transitions. *Phys. Solid State* 58, 1596—1604. <https://doi.org/10.1134/S1063783416080205>
8. Zhang, R., Lin, C., Dong, H. *et al.* (2025). Compositionally-graded ferroelectric thin films by solution epitaxy produce excellent dielectric stability. *Nature Communications*, 16(98), 1—10. <https://doi.org/10.1038/s41467-024-55411-7>
9. Landau, L.D., Ginzburg, V.L. (1965). On the theory of superconductivity. *Collected Papers of L.D. Landau*, 546—568. <https://doi.org/10.1016/B978-0-08-010586-4.50078-X>
10. Akshayveer, A., Buroni, F.C., Melnik, R., Rodriguez Tembleque, L., Saez, A. (2025). Environment friendly technologies with lead free piezoelectric materials: A review of recent developments, applications, and modelling approaches. *arXiv preprint*, arXiv:2502.13929. <https://doi.org/10.48550/arXiv.2502.20250>
11. Bain, A.K., Chand, B. (2017). *Ferroelectrics: Principles and Applications*. Chennai: SPi Global Private Limited, 317 p.
12. Alessandri, C., Pandey, P., Abusleme, A., Seabaugh, A. (2019). Monte Carlo Simulation of Switching Dynamics in Polycrystalline Ferroelectric Capacitors. *Transactions on Electron Devices*, 66(8), 3527—3534. <https://doi.org/10.1109/TED.2019.2922268>



13. Cao, W. (2004). Phenomenological theories of ferroelectric phase transitions. *British Ceramic Transactions*, 103(2), 71—75. <https://doi.org/10.1179/096797804225012774>
14. Uchino, K. (1997). *Ferroelectric Devices*. New York: Marcel Dekker. 312 p.
15. Song, T.K., Kim, J.S., Kim, M.H., Lim, W., Kim, Y.S., Lee, J.C. (2003). Landau–Khalatnikov simulations for the effects of external stress on the ferroelectric properties of Pb(Zr, Ti)O<sub>3</sub> thin films. *Thin Solid Films*, 424(1), 84—87. [https://doi.org/10.1016/S0040-6090\(02\)00920-3](https://doi.org/10.1016/S0040-6090(02)00920-3)
16. Roy, M.K., Swayambhoo M. (2020). Stochastic Dynamics of 180° domains. *Journal of Mathematical Control Science and Applications*, 6(1), 93—105.
17. Chen, L.Q. (2002). Phase-field models for microstructure evolution in ferroelectric materials. *Annual Review of Materials Research*, 32, 113—140. <https://doi.org/10.1016/j.commatsci.2023.112510>
18. Tang, P., Iguchi, R., Uchida, K., Bauer, G.E.W. (2022). Excitations of the ferroelectric order. *Physical Review B*, 106, L081105. <https://doi.org/10.1103/PhysRevB.106.L081105>
19. He, R., Wang, H., Liu, F., Liu, S., Liu, H., Zhong, Z. (2023). Unconventional ferroelectric domain switching dynamics in CuInP<sub>2</sub>S<sub>6</sub> from first principles. *Physical Review B*, 108, 024305. <https://doi.org/10.1103/PhysRevB.108.024305>
20. Maslovskaya, A.G., Moroz, L.I., Chebotarev, A.Y., Kovtanyuk, A.E. (2021). Theoretical and numerical analysis of the Landau–Khalatnikov model of ferroelectric hysteresis. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 93, 105524. <https://doi.org/10.1016/j.cnsns.2020.105524>
21. Roy, M.K., Paul, J., Dattagupta, S. (2010). Domain dynamics and fractal growth analysis in thin ferroelectric films. *IEEE Xplore*, 108, 014108(4). <https://doi.org/10.1063/1.3456505>
22. Richman, M.S., Rulis P., Caruso A.N. (2017). Ferroelectric system dynamics simulated by a second-order Landau model. *Journal of Applied Physics*, 122, 094101. <https://doi.org/10.1063/1.5000139>
23. Aliev, A.B., Isayeva, S.E. (2018). The Existence and Behavior of Global Solutions to a Mixed Problem with Acoustic Transmission Conditions for Nonlinear Hyperbolic Equations with Nonlinear Dissipation. *Dokl. Math.*, 98, 555—558. <https://doi.org/10.1134/S1064562418070062>
24. Barbu, V., Lasiecka, I., Rammaha, M.A. (2005). Existence and uniqueness of solutions to wave equations with nonlinear degenerate damping and source terms. *Control and Cybernetics*, 34(3).
25. Li, P.-W., Hu, S., Zhang, M. (2023). Numerical Solutions of the Nonlinear Dispersive Shallow Water Wave Equations Based on the Space–Time Coupled Generalized Finite Difference Scheme. *Applied Sciences*, 13(14), 8504. <https://doi.org/10.3390/app13148504>
26. Sap, D. (2025). A hybrid isogeometric and finite element method: NURBS-enhanced finite element method for hexahedral meshes. *arXiv preprint*, arXiv:2506.13694. <https://doi.org/10.48550/arXiv.2506.13694>
27. Abdelwahed, M., Chorfi, N. (2022). Numerical resolution of the wave equation using the spectral method. *Boundary Value Problems*, 2022, 15. <https://doi.org/10.1186/s13661-022-01601-5>
28. Gao, Z., Xie, S. (2012). Fourth-order compact difference and alternating direction implicit schemes for telegraph equations. *Computer Physics Communications*, 183(3), 552—569. <https://doi.org/10.1016/j.cpc.2011.11.023>
29. Chew, J.V.L., Sulaiman, J. (2018). Implicit finite difference solution of one-dimensional porous medium equations using Half-Sweep Newton-Explicit Group iterative method. *Journal of Engineering and Applied Sciences*, 13(5), 1286—1290.
30. Формалев, В.Ф., Ревизников, Д.Л. (2006). Численные методы. Москва: ФИЗМАТЛИТ, 400 с.  
Formalev, V.F., Reyznikov, D.L. (2006). *Numerical Methods*. Moscow: FIZMATLIT, 400 p. (In Russ.)



31. Hong, J., Fang, D. (2008). Size-dependent ferroelectric behaviors of BaTiO<sub>3</sub> nanowires. *Applied Physics Letters*, 92, 012906. <https://doi.org/10.1063/1.2830662>

### **Информация об авторах**

*Мороз Любовь Игоревна*, кандидат физ.-мат. наук, доцент кафедры математического анализа и моделирования, Институт компьютерных и инженерных наук, Амурский государственный университет, г. Благовещенск, Российская Федерация, ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-4450-3200>, e-mail: [lubovep@mail.ru](mailto:lubovep@mail.ru)

*Дорошков Олег Сергеевич*, бакалавр по направлению подготовки 01.03.02 — «Прикладная математика и информатика», Институт компьютерных и инженерных наук, Амурский государственный университет, г. Благовещенск, Российская Федерация, e-mail: [oleg2003dos@gmail.com](mailto:oleg2003dos@gmail.com)

### **Information about the authors**

*Moroz Lyubov Igorevna*, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor of the Department of Mathematical Analysis and Modeling, Institute of Computer and Engineering Sciences, Amur State University, Blagoveshchensk, Russian Federation, ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-4450-3200>, e-mail: [lubovep@mail.ru](mailto:lubovep@mail.ru)

*Doroshkov Oleg Sergeevich*, Bachelor's degree in Applied Mathematics and Computer Science (01.03.02), Institute of Computer and Engineering Sciences, Amur State University, Blagoveshchensk, Russian Federation, e-mail: [oleg2003dos@gmail.com](mailto:oleg2003dos@gmail.com)

### **Вклад авторов**

Мороз Л.И. — идеи исследования, аннотирование и написание рукописи, контроль за проведением исследования.

Дорошков О.С. — применение численных методов, проведение экспериментов, написание программы, сбор и анализ данных, визуализация полученных результатов.

Все авторы приняли участие в обсуждении результатов и согласовали окончательный текст рукописи.

### **Contribution of the authors**

Moroz L.I. — research concept, annotation, manuscript writing, supervision of the study.

Doroshkov O.S. — application of numerical methods, conducting experiments, programming, data collection and analysis, visualization of results.

All authors participated in the discussion of results and approved the final manuscript text.

### **Конфликт интересов**

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

### **Conflict of interest**

The authors declare no conflict of interest.

Поступила в редакцию 03.08.2025

Поступила после рецензирования 13.08.2025

Принята к публикации 15.08.2025

Опубликована 30.09.2025

Received 2025.08.03

Revised 2025.08.13

Accepted 2025.08.15

Published 2025.09.30

## КОМПЛЕКСЫ ПРОГРАММ | SOFTWARE PACKAGES

Научная статья | Original paper

УДК 37.016:519.217

### Формирование адаптивной траектории обучения в компьютерных системах на основе марковских представлений

Д.А. Катышев

Московский государственный психолого-педагогический университет

Москва, Российская Федерация

✉ [katyshevda@mgppu.ru](mailto:katyshevda@mgppu.ru)

#### Резюме

**Контекст и актуальность.** Развитие цифровых систем предоставляет новые возможности по автоматизации учебного процесса в средних школах и высших учебных заведениях. Современная организация учебных занятий не всегда позволяет точно выявлять пробелы в знаниях при решении задач, которые опираются на ранее усвоенные дидактические материалы. В данной статье представлен механизм формирования адаптивной траектории обучения в компьютерных системах на основе марковских представлений для решения задач индивидуализации учебного процесса и выявления пробелов в ранее пройденных учебных материалах. **Цель.** Разработка механизма формирования адаптивной траектории обучения для индивидуализации процесса освоения учебного материала по математике в компьютерных системах на основе марковских представлений. **Гипотеза.** Адаптивная траектория обучения позволит индивидуализировать учебный процесс и автоматизировать выявление пробелов у учащихся в ранее пройденных учебных материалах. **Методы и материалы.** Математическую основу для формирования адаптивной траектории обучения представляет марковский процесс с дискретным количеством состояний и непрерывным временем. Для создания банка задач, ошибок и подсказок были использованы учебные материалы по математике с первого по четвертый класс начальной школы. **Результаты.** В рамках исследования был представлен механизм по формированию адаптивной траектории обучения в компьютерных системах на основе марковских моделей, который позволяет автоматизировать



процесс выявления пробелов в знаниях учащихся за счёт предоставления задач, соответствующих текущему индивидуальному уровню подготовки каждого ученика. **Выводы.** Разработанный механизм позволяет автоматизировать контроль педагога за успеваемостью учащихся, используя систему в качестве помощника для выявления пробелов в знаниях при решении задач, по ранее пройденным учебным темам.

**Ключевые слова:** адаптивное обучение, индивидуализация обучения, траектория обучения, марковский процесс, искусственный интеллект, информационная система

**Для цитирования:** Катyshev, Д.А. (2025). Формирование адаптивной траектории обучения в компьютерных системах на основе марковских представлений. *Моделирование и анализ данных*, 15(3), 148–160. <https://doi.org/10.17759/mda.2025150309>

## Formation of adaptive learning trajectories in computer systems based on Markov representations

**D.A. Katyshev**

Moscow State University of Psychology and Education, Moscow, Russian Federation

✉ [katyshevda@mgppu.ru](mailto:katyshevda@mgppu.ru)

### **Abstract**

**Context and relevance.** The development of digital systems provides new opportunities for automating the educational process in secondary schools and higher education institutions. The modern organization of educational activities does not always allow for the precise identification of gaps in knowledge when solving problems based on previously learned didactic materials. This article presents a mechanism for forming an adaptive learning trajectory in computer systems based on Markov representations to solve problems of individualizing the educational process and identifying gaps in previously covered educational materials. **Objective.** Development of a mechanism for forming an adaptive learning trajectory for individualizing the process of mastering mathematical material in computer systems based on Markov representations. **Hypothesis.** An adaptive learning path will allow for the individualization of the learning process and the automated identification of gaps in students' knowledge of previously covered material. **Methods and materials.** The mathematical basis for forming an adaptive learning trajectory is a Markov process with a discrete number of states and continuous time. To create a bank of tasks, errors, and hints, we used mathematics teaching materials from the first to fourth grades of elementary school.



**Results.** The study presented a mechanism for forming an adaptive learning trajectory in computer systems based on Markov models, which allows automating the process of identifying gaps in students' knowledge by providing tasks that correspond to the current individual level of preparation of each student. **Conclusions.** The developed mechanism allows teachers to automate the monitoring of student performance, using the system as an assistant to identify gaps in knowledge when solving problems related to previously covered topics.

**Keywords:** adaptive learning, individualized learning, learning trajectory, Markov process, artificial intelligence, information system

**For citation:** Katyshev, D.A. (2025). Formation of adaptive learning trajectories in computer systems based on Markov representations. *Modeling and Data Analysis*, 15 (3), 148—160. <https://doi.org/10.17759/mda.202515030809>

## Введение

Внедрение цифровых систем в обучение является важнейшей вехой для решения задач и проблем современной педагогики. Автоматизация процесса контроля за успеваемостью и разработка индивидуальной траектории обучения для каждого ученика призвано улучшить качество образования и снять часть рутинной работы с преподавателя. Использование компьютеризированного адаптивного подхода к задачам психологической диагностики и обучения открыло новые возможности для эффективного обучения (Ермаков, Савенков, Шепелева, 2023). Создание новых математических моделей самообучающихся адаптивных тренажеров привело к появлению новых альтернатив современной теории тестирования (Куравский и др., 2021), а также к появлению новых программных реализаций для автоматизации и адаптации процесса обучения (Поминов, 2020; Ксемидов, Абгарян, 2024). Важность персонализации обучения и создание новых подходов к адаптивному обучению много раз отмечалась в современной литературе (Куравский и др., 2016; Кравченко и др., 2020; Амелина, 2023; Казанцева, 2024; Широколобова, 2024).

Создание механизма формирования адаптивной траектории обучения в цифровых системах призвано предоставить каждому пользователю индивидуальный путь освоения учебной дисциплины. Особую важность здесь принимает фактор предоставления учащемуся только тех задач, которые лучше всего подходят его уровню подготовки. Если пользователю будут предъявляться одни и те же задания, которые он не может пройти на определенном этапе, то это может негативно сказаться на его мотивации.

Для каждой группы задач в цифровой системе можно определить путь от базовых понятий и заданий к более сложным. Таким образом, возможно охватить весь базовый материал, который требуется для решения выбранной группы задач. Важно отметить, что не всегда есть возможность создать путь обучения для группы особо тривиальных задач.





Примером этого может служить сложение и вычитание чисел в первом классе. Если одно задание включает в себя множество математических операций, то оно уже может создать индивидуальный путь обучения для учащегося. Это нужно в ситуации, когда пользователь испытывает трудности с определенным видом математических операций, что так или иначе приводит к неверному ответу в сложных задачах. Не всегда удастся интерпретировать ответ пользователя на задачу и связать его с определенной ошибкой. Поэтапное предъявление пользователю несложных для него задач на каждую математическую операцию, при возникновении проблем в задачах с множественными операциями, является одним из вариантов построения адаптивной траектории обучения. Таким образом, можно зафиксировать время выполнения одного типа математической операции, а также сам факт её успешности. Эта фиксация времени дает аналитическую информацию для педагога о том, где в рамках сложной задачи учащийся испытывает трудности.

Формирование адаптивной траектории обучения для каждого состояния марковского процесса предназначено для предоставления новых состояний и соответствующих переходов между ними в соответствии с текущими знаниями пользователя. Одним из ключевых параметров при выбранной реализации остается время пребывания в каждом из состояний. На основе неё формируется аналитическая информация, для педагога. Из-за разной степени подготовки учащихся, у большинства пользователей траектория обучения в рамках марковского процесса будет различна. Исключением здесь являются только отличники, которые могут пройти все состояния марковского процесса без выбора неверного варианта ответа, что, в результате, приведет к фиксированному количеству пройденных состояний.

## Материалы и методы

Для формирования адаптивной траектории обучения в цифровой системе за математическую основу взят марковский процесс с дискретным количеством состояний и непрерывным временем (Артеменков и др., 2017). Модель (рис. 1) включает в себя состояния процесса и интенсивность переходов между ними и описывает динамику взаимодействия пользователя с системой, путем постепенного прохода пар состояний марковского процесса слева-направо. Парой состояний здесь выступает связка обычного состояния и состояния ловушки. При входе в обычное состояние происходит случайный выбор материалов в виде заданий или вопросов с последующим предъявлением его пользователю в рамках системы. При даче неверного ответа происходит переход в состояние ловушки с последующим корректирующим взаимодействием со стороны системы. Это подразумевает под собой выдачу подсказки или облегчённого варианта задания на основе интерпретации ошибочного ответа пользователя. При повторном неверном ответе пользователь остается в ловушке до дачи верного ответа на представленную задачу. Дав верный ответ, он переходит назад в обычное состояние. При даче верных ответов в обычных состояниях он переходит в следующую пару состояний. С каждой парой растет не только сложность, но и трудность представленных пользователю материалов.



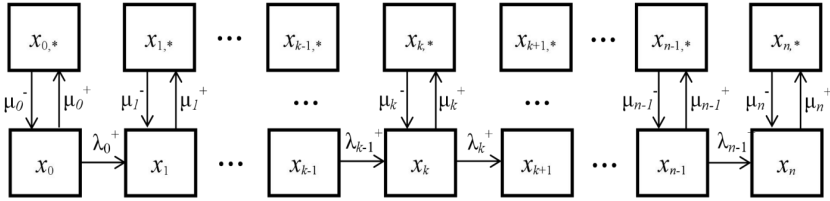


Рис. 1. Марковский процесс с дискретными состояниями и непрерывным временем

Fig. 1. Markov process with discrete states and continuous time

где  $\{x_i\}_{i=0,\dots,n}$  и  $\{x_i^*\}_{i=0,\dots,n}$  — состояния процесса,

$\lambda = (\lambda_0^+, \dots, \lambda_{n-1}^+, \mu_0^+, \dots, \mu_n^+, \mu_0^-, \dots, \mu_n^-)^T$  — интенсивности переходов между состояниями.

Представленные в работах Л.С. Куравского (Куравский и др., 2017; Куравский и др., 2022) вероятности пребывания в состояниях процесса, как функции времени, определяются следующей системой обыкновенных дифференциальных уравнений Колмогорова в матричной форме:

$$\frac{d\mathbf{p}(t)}{dt} = \mathbf{M}(\lambda)\mathbf{p}$$

где  $0 \leq t \leq T$  ( $T$  — конечный момент времени),

$\mathbf{p}(t) = (p_0(t), \dots, p_n(t), p_{0*}(t), \dots, p_{n*}(t))^T$  — вероятности пребывания в состояниях процесса,  $\mathbf{M}$  — матрица интенсивностей переходов между состояниями порядка  $2n+2$ . Переходы между состояниями определяются результатами выполнения заданий.

Определение значений свободных параметров марковской цепи  $\lambda = (\lambda_0^+, \dots, \lambda_{n-1}^+, \mu_0^+, \dots, \mu_n^+, \mu_0^-, \dots, \mu_n^-)^T$  осуществляется путем сравнения наблюдаемых и прогнозируемых распределений частот пребывания в состояниях модели. Для этого определяется набор интенсивностей, обеспечивающий наименьшее значение статистики Пирсона:

$$\chi^2(\lambda) = \sum_{d=0}^{D-1} \sum_{i=0}^n \left[ \frac{(p_i(t_d)N_d - F_{i,d})^2}{p_i(t_d)N_d} + \frac{(p_{i*}(t_d)N_d - F_{i*,d})^2}{p_{i*}(t_d)N_d} \right]$$

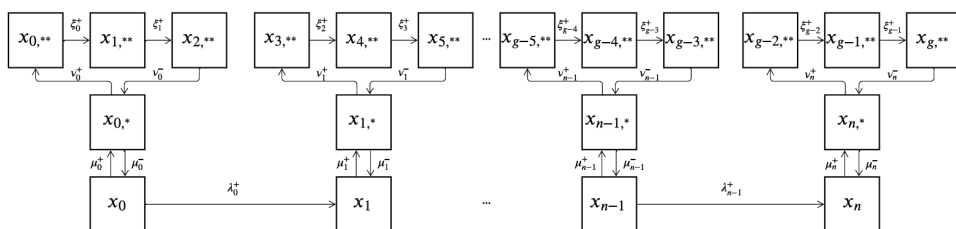
где  $N_d = \sum_{i=0}^n (F_{i,d} + F_{i*,d})$ ,  $F_{i,d}$ ,  $F_{i*,d}$  — наблюдаемые частоты пребывания в состояниях процесса в моменты времени  $\{t_d\}_{d=0,\dots,D-1}$ .

В рамках модели подразумевается, что пары состояний будут содержать материалы, объединённые одним курсом обучения. Это позволяет автоматизировать процесс выявления пробелов в знаниях учащихся и предоставить необходимую аналитическую информацию для учителя. Данная информация формируется на основе времени



пребывания пользователя в каждом из состояний марковского процесса, выданных системой типов готовности (не готов, условно готов и готов) формируемых на основе пороговых значений, а также допущенных ошибок. Каждый пользователь системы постепенно проходит пары состояний в определенном порядке слева-направо, что приводит к фиксированному порядку следования тем для каждого учащегося. Из-за этого пользователь с пробелами в знаниях в рамках выбранной темы может застрять в одной из пар состояний и находиться там до истечения времени, отведенного на прохождение всего марковского процесса. Важной информацией для аналитики здесь выступает та пара состояний где остановился пользователь и выбранные им неверные варианты ответов. К сожалению, не всегда получается по неверным вариантам ответов детально определить места где у учащегося сформировались пробелы в знаниях, что требует от учителя провести дополнительное время с ним.

Фиксированность тем для пар состояний не дает возможности по дальнейшему улучшению траектории обучения для учащихся в рамках данной модели. Формирование более адаптивной траектории обучения требует дополнения текущей модели новыми состояниями марковского процесса и переходами между ними. Новые состояния призваны хранить материалы предшествующих курсов обучения, связываясь с ловушками каждой пары состояний (рис. 2).



**Рис. 2.** Дополненный марковский процесс  
с дискретными состояниями и непрерывным временем

**Fig. 2.** Extended Markov process with discrete states and continuous time

где  $\{x_i\}_{i=0,\dots,n}$  и  $\{x_i^*\}_{i=0,\dots,n}$  — состояния процесса,

$\{x_i^{**}\}_{i=0,\dots,g}$  — добавленные состояния процесса,

$\lambda = (\lambda_0^+, \dots, \lambda_{n-1}^+, \mu_0^+, \dots, \mu_n^+, \mu_0^-, \dots, \mu_n^-, \nu_0^+, \dots, \nu_n^+, \nu_0^-, \dots, \nu_n^-, \xi_0^+, \dots, \xi_{g-1}^+)^T$  — интенсивности переходов между состояниями.

Дополнение марковского процесса новыми состояниями позволило реализовать трехуровневую группировку состояний. Первый уровень состояний  $\{x_i\}_{i=0,\dots,n}$  отвечает за предоставление пользователю заданий без поддержки со стороны системы в виде подсказок или иных средств. На основе ответа пользователя решается вопрос перевода его в новую пару состояний или отправки его на верхний уровень. Второй уровень состояний  $\{x_i^*\}_{i=0,\dots,n}$  предназначен для пользователей, которые испытывают некоторые трудности с выбранной темой. Это может быть обусловлено трудностью



задания выбранной системой или другими факторами где нельзя однозначно сказать, что учащийся испытывает серьезные затруднения в выбранной теме. В рамках этих состояний система выполняет корректирующую роль, призванную указать на ошибку и дать подсказку. Также возможно предоставление облегченных вариантов задач, связанных с выбранной темой. Если пользователь застревает на этом уровне давая неверные ответы, то это свидетельствует о пробелах в знаниях по выбранной теме. Для выявления пробелов в знаниях и формирования адаптивной траектории обучения в рамках выбранной модели добавляется последний уровень состояний. Попадая в него пользователь вынужден последовательно пройти связанные с ловушкой состояния третьего уровня для того, чтобы вернуться назад на второй уровень. На (рис. 2) для каждого состояния ловушки подсоединены три состояния третьего уровня. Количество состояний здесь не обязательно должно быть равно трем. Исходя из предметной области их количество может варьироваться от нуля и выше, так как, формируя марковский процесс для первичного курса выбранной области, не всегда можно выделить задания или вопросы, которые предшествуют им. Работая над третьим уровнем, педагог может сформировать последовательность из заданий и вопросов, которые предшествовали выбранной теме для пары состояний первого и второго уровня, начиная с базовых понятий и завершая заданиями средней сложности. Система на третьем уровне состояний должна предоставить максимальное содействие пользователю в выполнении заданий за исключением предоставления верных ответов на задания. Это подразумевает выдачу пользователю максимально подробной подсказки для решения. Задача этого уровня как можно быстрее выявить пробел, который не позволяет учащемуся продвинуться дальше в рамках марковского процесса.

Адаптивная траектория обучения формируется за счет третьего уровня состояний так как не каждый обучающийся будет переходить на этот уровень из-за разной подготовки. Один учащийся может плохо разбираться в теме второй пары состояний марковского процесса, а другой знать на отлично, что приведёт только к единичному переходу на третий уровень. Отличник может ни разу не перейти на третий уровень во всех парах состояний. Таким образом траектория обучения для каждого пользователя будет различна за счёт разнообразия состояний, которые они проходят. Адаптивность в рамках системы выполняется за счет предоставления пользователю состояний, которые соответствуют его текущему уровню подготовки.

## Результаты

В рамках исследовательской работы был доработан прототип веб-приложения тренажера, предназначенный для обучения школьников начальных классов. Для наполнения системы были сформированы материалы на основе заданий по математике с первого по четвертый класс. Материалы для каждого учебного класса группируются по темам начиная с самых легких и заканчивая заданиями повышенной сложности. В случае если тема подразумевает наличие простых и сложных заданий одновременно, более трудные переносятся в состояние ближе к концу марковского процесса. На основе



материалов для первого и второго класса были сформированы марковские процессы с 5 парами состояний и переходами между ними (рис. 3).

### 1-й класс



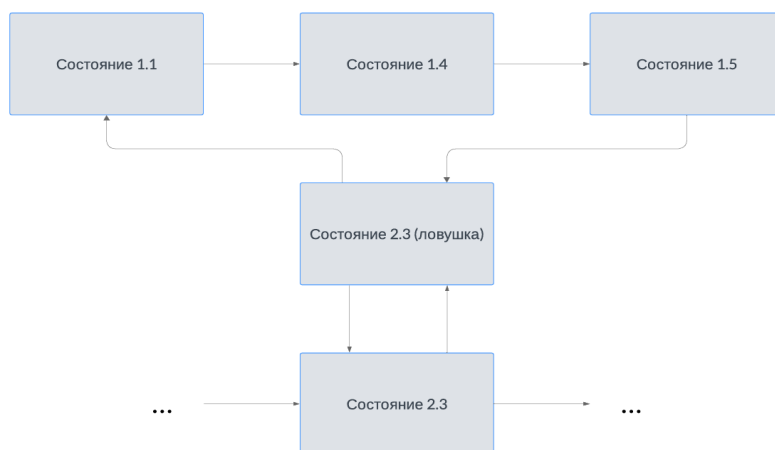
### 2-й класс



**Рис. 3.** Марковский процесс с пятью парами состояний и переходами между ними

**Fig. 3.** Markov process with five pairs of states and transitions between them

Для формирования адаптивной траектории обучения следует определить взаимосвязь тем начиная со второго класса с ранее изученными материалами, представленными в парах состояний младших классов. Это позволяет сформировать учебную траекторию для каждой темы пар состояний начиная с простейших заданий и понятий (рис. 4).



**Рис. 4.** Трехуровневая группировка состояний марковского процесса

**Fig. 4.** Three-level grouping of states of a Markov process



Школьнику второго класса, попавшему в состояние 2.3 (рис. 4), система выдает задание формата “Вычисли:  $50 + (60 - 20) = ?$ ”. Если он не справляется, то попадает в состояния 2.3 (ловушка) где ему предоставляется индивидуализированная подсказка на основе выбранного варианта ответа пользователя с просьбой повторно решить выбранный вариант задания. Повторно не решив задание, он попадает в адаптивную траекторию обучения для выбранной пары состояний. Состояние марковского процесса с примерами вида “Вычисли:  $50 + (60 - 20) = ?$ ” можно связать с ранними состояниями, которые включают в себя работу по сложению и вычитанию чисел, а также с порядком выполнения действий при наличии скобок. Состояние 1.1 в данном случае может включать в себя примеры вида “Вычисли:  $50 + 20 = ?$ ” связанные со сложением двухзначных чисел. Состояние 1.4 предоставляет пример вида “Вычисли:  $60 - 20 = ?$ ”. Состояние 1.5 предложит выбрать порядок выполнения действий при решении примера со скобками. Проходя данные три состояния, система записывает время нахождения в каждом из них. Это актуально для каждого состояния марковского процесса. Также система выставляет для каждого состояния степень готовности пользователя на основе пороговых значений. Данные значения индивидуальные для каждого состояния и относят его к одному из трех типов: «не готов», «условно готов», «готов». Полученная информация предоставляет учителю подробные данные о местах пробелов своих учеников. Если ученик долго находится в одном из состояний и его соотносят с типом «не готов», то это является важным звонком к необходимости подробно разобрать тему, связанную с выбранным состоянием. Попав из ловушки в адаптивную траекторию обучения, включающую состояния 1.1, 1.4 и 1.5 пользователь вынужден пройти её полностью для того, чтобы он мог вернуться назад.

## Обсуждение результатов

Обновление модели прототипа веб-приложения позволило реализовать адаптивную траекторию обучения для каждого пользователя. Теперь пользователю предоставляются состояния марковского процесса, которые наиболее соответствуют его уровню подготовки. Подобная реализация позволяет выявить пробелы в знаниях учеников и, по возможности на основе подсказок, закрыть самые маленькие из них, так как не всегда представляется возможность средствами системы за ограниченный период времени донести необходимую информацию до учащегося.

Подобная система призвана работать в паре с учителем для автоматизации процесса выявления пробелов в знаниях учеников. В рамках статьи приведены простые примеры распределения материалов по состояниям марковского процесса. Каждый пользователь системы может самостоятельно составить свою траекторию обучения для каждой из пары состояний в соответствии со своими потребностями.

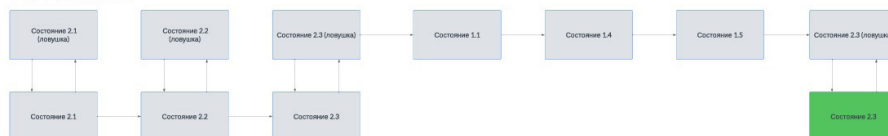
В рамках системы каждый пользователь проходит свой путь по состояниям марковского процесса (рис. 5).

На рисунке выше представлена траектория обучения трех школьников в рамках разработанной системы. Зеленым выделены состояния выхода из марковского процесса



по его завершению или истечению времени, выделенному на его выполнение. Первый школьник успешно прошел две пары состояний и испытал трудности с третьей. Ему были предоставлены дополнительные состояния марковского процесса для прохождения и выявления пробелов, которые мешали ему решить задачу из третьей пары состояний. После прохождения трех состояний он вернулся к решению задачи где он допустил ошибку. Решив её, он вернулся в обычное состояние где у него закончилось время. Следующий школьник верно решил первую пару состояний и столкнулся с проблемами во второй. Последний верно решил все пары состояний и ни разу не попал в дополнительные состояния. Таким образом траектория обучения для всех стала уникальной и наиболее соответствовала их подготовке.

#### 1-й школьник



#### 2-й школьник



#### 3-й школьник



**Рис. 5.** Адаптивная траектория обучения в рамках системы

**Fig. 5.** Adaptive learning trajectory within the system

## Заключение

Внедрение цифровых систем в образование призвано улучшить процесс обучения за счет автоматизации рутинных задач учителя. Выявление пробелов в знаниях учащихся является одной из них. Не всегда представляется возможность детально понять на каком уровне обучения возникли трудности с освоением материала. Это приводит к невозможности решения более сложных задач, идущих дальше по программе. С помощью цифровых систем данный труд можно автоматизировать и предоставить учителю детальную информацию на каком этапе ученик испытывает трудности.



Дополнение марковского процесса новыми состояниями позволило реализовать адаптивную траекторию обучения для каждого обучающегося, предоставляя состояния с задачами, которые наиболее хорошо подходят к индивидуальному уровню подготовки.

Разработанный механизм также позволяет автоматизировать контроль педагога за успеваемостью учеников, используя систему в качестве помощника для выявления пробелов в знаниях при решении задач, основывающихся на ранее пройденных учебных материалах.

### Список источников / References

1. Ермаков, С.С., Савенков, Е.А., Шепелева, Е.А. (2023). Анализ возможностей компьютеризированного адаптивного подхода к задачам психологической диагностики и обучения. *Экспериментальная психология*, 16(3), 182—196. <https://doi.org/10.17759/exppsy.2023160312>  
Ermafov, S.S., Savenkov, E.A., Shepeleva, E.A. (2023). Analysis the Possibilities of the Computerized Adaptive Approach to the Problems of Psychological Diagnostics and Training. *Experimental Psychology (Russia)*, 16(3), 182—196. (In Russ.). <https://doi.org/10.17759/exppsy.2023160312>
2. Куравский, Л.С., Поминов, Д.А., Юрьев, Г.А., Юрьева, Н.Е., Сафронова, М.А., Куланин, Е.Д., Антипова, С.Н. (2021). Концепция адаптивного тренажера и оценка его эффективности в математическом обучении. *Моделирование и анализ данных*, 11(4), 5—20. <https://doi.org/10.17759/mda.2021110401>  
Kuravsky, L.S., Pominov, D.A., Yuryev, G.A., Yuryeva, N.E., Safronova, M.A., Kulandin, Y.D., Antipova, S.N. (2021). The Concept of an Adaptive Trainer and Assessing Its Effectiveness in a Mathematical Application. *Modelling and Data Analysis*, 11(4), 5—20. <https://doi.org/10.17759/mda.2021110401>
3. Поминов, Д.А. (2020). Модель процесса адаптивного обучения и его программная реализация. *Моделирование и анализ данных*, 10(3), 39—52. <https://doi.org/10.17759/mda.2020100303>  
Pominov, D.A. (2020). Model of Adaptive Learning and His Implementation. *Modelling and Data Analysis*, 10(3), 39—52. (In Russ.). <https://doi.org/10.17759/mda.2020100303>
4. Ксемидов, Б.С., Абгарян, К.К. (2024). Адаптивная интеллектуальная обучающая система. *Моделирование и анализ данных*, 14(2), 152—165. <https://doi.org/10.17759/mda.2024140211>  
Ksemidov, B.S., Abgaryan, K.K. (2024). Adaptive Intelligent Tutoring System. *Modelling and Data Analysis*, 14(2), 152—165. (In Russ.). <https://doi.org/10.17759/mda.2024140211>
5. Куравский, Л.С., Марголис, А.А., Мармалюк, П.А., Панфилова, А.С., Юрьев, Г.А. (2016). Математические аспекты концепции адаптивного тренажера. *Психологическая наука и образование*, 21(2), 84—95. <https://doi.org/10.17759/pse.2016210210>  
Kuravsky, L.S., Margolis, A.A., Marmalyuk, P.A., Panfilova, A.S., Yuryev, G.A. (2016). Mathematical Aspects of the Concept of Adaptive Training Device. *Psychological Science and Education*, 21(2), 84—95. (In Russ.). <https://doi.org/10.17759/pse.2016210210>
6. Кравченко, Д.А., Блескина, И.А., Каляева, Е.Н., Землякова, Е.А., Аббакумов, Д.Ф. (2020). Персонализация в образовании: от программируемого к адаптивному обучению. *Современная зарубежная психология*, 9(3), 34—46. <https://doi.org/10.17759/jmfp.2020090303>  
Kravchenko, D.A., Bleskina, I.A., Kalyaeva, E.N., Zemlyakova, E.A., Abbakumov, D.F. (2020). Personalization in education: from programmed to adaptive learning. *Journal of Modern Foreign Psychology*, 9(3), 34—46. (In Russ.). <https://doi.org/10.17759/jmfp.2020090303>



7. Амелина, Ю.М. Оптимизация образовательного процесса: интеграция цифровых образовательных технологий с применением научно обоснованных методов преподавания // Цифровая гуманитаристика и технологии в образовании (DHTE 2023): сб. статей IV Международной научно-практической конференции. 16—17 ноября 2023 г. | Digital Humanities and Technology in Education (DHTE 2023): Collection of Articles of the IV International Scientific and Practical Conference. November 16—17, 2023. / Под ред. В.В. Рубцова, М.Г. Сороковой, Н.П. Радчиковой. — Москва: ФГБОУ ВО МГППУ, 2023. С. 616—632.  
Amelina, Y.M. Optimizing the Educational Process: Integrating Digital Educational Technologies with Evidence-Based Teaching Methods. Digital Humanities and Technology in Education (DHTE 2023), pp. 616—632.
8. Казанцева, О.Г. Персонализированное обучение студентов: результаты эмпирического исследования // Цифровая гуманитаристика и технологии в образовании (DHTE 2024): сб. статей V международной научно-практической конференции. 14—15 ноября 2024 г. / Под ред. В.В. Рубцова, М.Г. Сороковой, Н.П. Радчиковой М.: Издательство ФГБОУ ВО МГППУ, 2024. С. 116—126.  
Kazantseva, O.G. Personalized Learning for Students: Results of an Empirical Study. Digital Humanities and Technology in Education (DHTE 2024): Collection of Articles of the V International Scientific and Practical Conference. November 14—15, 2024 / V.V. Rubtsov, M.G. Sorokova, N.P. Radchikova (Eds). Moscow: Publishing house MSUPE, 2024., pp. 116—126.
9. Широколобова, А.Г. Платформенные образовательные решения как инструмент цифровой дидактики // Цифровая гуманитаристика и технологии в образовании (DHTE 2024): сб. статей V международной научно-практической конференции. 14—15 ноября 2024 г. / Под ред. В.В. Рубцова, М.Г. Сороковой, Н.П. Радчиковой М.: Издательство ФГБОУ ВО МГППУ, 2024. С. 249—259.  
Shirokolobova, A.G. Platform Educational Solutions as a Tool of Digital Didactics. Digital Humanities and Technology in Education (DHTE 2024): Collection of Articles of the V International Scientific and Practical Conference. November 14—15, 2024 / V.V. Rubtsov, M.G. Sorokova, N.P. Radchikova (Eds). Moscow: Publishing house MSUPE, 2024., pp. 249—259.
10. Артеменков, С.Л. и др. (2017). Марковские модели в задачах диагностики и прогнозирования: Учебное пособие. / Под ред. Л.С. Куравского. — 2-е изд. доп. М.: Изд-во МГППУ. 203 с.  
Artemenkov, S.L. i dr. (2017). Markov Models in Diagnostics and Forecasting Problems: Textbook. / Pod red. L.S. Kuravskogo. — 2-e izd. dop. M.: Izd-vo MGPPU. 203 s.
11. Куравский, Л.С., Артеменков, С.Л., Юрьев, Г.А., Григоренко, Е.Л. (2017). Новый подход к компьютеризированному адаптивному тестированию. Экспериментальная психология, 10(3), 33—45. <https://doi.org/10.17759/exppsy.2017100303>  
Kuravsky, L.S., Artemenkov, S.L., Yuryev, G.A., Grigorenko, E.L. (2017). A new approach to computerized adaptive testing. Experimental Psychology (Russia), 10(3), 33—45. <https://doi.org/10.17759/exppsy.2017100303>
12. Куравский, Л.С., Юрьев, Г.А., Юрьева, Н.Е., Исаков, С.С., Несимова, А.О., Николаев, И.А. (2022). Адаптивная технология психологической диагностики на основе марковских и квантовых представлений процесса выполнения заданий. Моделирование и анализ данных, 12(4), 36—55. <https://doi.org/10.17759/mda.2022120403>  
Kuravsky, L.S., Yuryev, G.A., Yuryeva, N.E., Isakov, S.S., Nesimova, A.O., Nikolaev, I.A. (2022). Adaptive Technology of Psychological Diagnostics Based on the Markovian and Quantum





Representations of the Task Performing Process. Modelling and Data Analysis, 12(4), 36—55.  
(In Russ.). <https://doi.org/10.17759/mda.2022120403>

### ***Информация об авторах***

*Катышев Дмитрий Алексеевич*, аспирант, Московский государственный психолого-педагогический университет (ФГБОУ ВО МГППУ), Москва, Российская Федерация, ORCID: <https://orcid.org/0009-0002-7900-6431>, e-mail: [katyshevda@mgppu.ru](mailto:katyshevda@mgppu.ru)

### ***Information about the authors***

*Dmitry A. Katyshev*, PhD student, Moscow State University of Psychology and Education, Moscow, Russian Federation, ORCID: <https://orcid.org/0009-0002-7900-6431>, e-mail: [katyshevda@mgppu.ru](mailto:katyshevda@mgppu.ru)

### ***Вклад авторов***

Катышев Д.А. — разработка механизма формирования адаптивной траектории обучения; тестирование; аннотирование, написание и оформление рукописи.

Все авторы приняли участие в обсуждении результатов и согласовали окончательный текст рукописи.

### ***Contribution of the authors***

Dmitry A. Katyshev — development of a mechanism for forming an adaptive learning trajectory; testing; annotation, writing, and formatting of the manuscript.

All authors participated in the discussion of the results and approved the final text of the manuscript.

Поступила в редакцию 11.08.2025

Поступила после рецензирования 25.08.2025

Принята к публикации 04.09.2025

Опубликована 30.09.2025

Received 2025.08.11

Revised 2025.08.25

Accepted 2025.09.04

Published 2025.09.30

# МЕТОДИКА ПРЕПОДАВАНИЯ | TEACHING METHODS

Научная статья | Original paper

УДК 004.421.2:004.4:378.147

## Учебный тренажёр по теории алгоритмов

Л.Н. Чернышов<sup>1</sup>, В.Н. Лукин<sup>2</sup>✉

<sup>1</sup> Финансовый университет при Правительстве Российской Федерации  
Москва, Российская Федерация

<sup>2</sup> Московский государственный психолого-педагогический университет  
Москва, Российская Федерация

✉ [lukinvn@list.ru](mailto:lukinvn@list.ru)

### Резюме

**Контекст и актуальность.** В рабочих программах дисциплин «Теория алгоритмов», «Методы компиляции», «Дискретная математика» и других, входящих в образовательные программы специальностей по информационным технологиям, важное место занимают понятия алгоритма, конечных автоматов и формальных языков. Освоение этих понятий требует от студентов способностей к абстрактному мышлению и зачастую вызывают существенные затруднения. **Цель.** Повысить качество усвоения учебного материала по дисциплинам, связанным с понятием алгоритма, используя специальные программные средства для визуализации и моделирования различных конечных автоматов. **Гипотеза.** Использование учебных тренажеров для демонстрации моделей алгоритмов позволяет преподавателю максимально понятно подать материал, а студентам лучше усвоить материал и получить навыки решения задач по теории алгоритмов. **Методы и материалы.** В исследовании рассмотрены существующие программные средства для построения графов, диаграмм автоматов, машин Тьюринга. Анализ выявил недостатки отдельных средств, а именно: ограниченность возможностей, неудобный интерфейс, необходимость соблюдения лицензирования. **Результаты.** Разработано web-приложение «FSM-Designer», которое играет роль учебного тренажера по теории алгоритмов. Приложение имеет простой интерфейс, возможности построения и моделирования конечных автоматов, автоматов с магазинной памятью и машин Тьюринга. Опыт использования тренажера показал, что студенты лучше стали справляться с задачами. Кроме того, выяснилось, что студенты испытывали затруднения с использованием искусственного интеллекта при решении задач,



и это легко выявлялось. **Выводы.** Применение учебного тренажера подтвердило важность использования специальных программных средств для усвоения материала по теории алгоритмов.

**Ключевые слова:** теория алгоритмов, теория формальных языков и автоматов, преподавание информатики, инструментальные средства, моделирование автоматов, машина Тьюринга, использование искусственного интеллекта

**Для цитирования:** Чернышов, Л.Н., Лукин, В.Н. (2025). Учебный тренажёр по теории алгоритмов. *Моделирование и анализ данных*, 15(3), 161—171. <https://doi.org/10.17759/mda.2025150310>

## Training simulator for algorithm theory

L.N. Chernyshov<sup>1</sup>, V.N. Lukin<sup>2</sup>✉

<sup>1</sup> Financial University under the Government of the Russian Federation  
Moscow, Russian Federation

<sup>2</sup> Moscow State University of Psychology and Pedagogy, Moscow, Russian Federation

✉ lukinvn@list.ru

### Abstract

**Context and relevance.** In the work programs of the disciplines «Theory of Algorithms», «Compilation Methods», «Discrete Mathematics» and others included in the educational programs of specialties in information technology, the concepts of algorithm, finite automata and formal languages occupy an important place. Mastering these concepts requires abstract thinking abilities from students and often cause significant difficulties. **Purpose.** Improve the quality of assimilation of educational material in disciplines related to the concept of an algorithm using special software tools for visualization and modeling of various finite state machines. **Hypothesis.** The use of training simulators to demonstrate algorithm models allows the teacher to present the material as clearly as possible, and it is better for students to master the material and gain skills in solving problems in algorithm theory. **Methods and materials.** The study examined existing software tools for constructing graphs, diagrams of automata, Turing machines. The analysis revealed the shortcomings of individual tools, namely: limited capabilities, inconvenient interface, the need to comply with licensing. **Results.** A web application «FSM-Desiner» has been developed, which plays the role of a training simulator in algorithm theory. The application has a simple interface, the ability to build and simulate finite state machines, store memory machines and Turing machines. The experience of using the simulator showed that students began to cope with tasks better. In addition, it turned out that students had difficulty using artificial intelligence when solving problems, and this was easily detected. **Conclusions.** The use of the training simulator confirmed the importance of using special software tools for mastering the material on the theory of algorithms.



**Keywords:** theory of algorithms, theory of formal languages and automata, teaching computer science, tools, modeling automata, Turing machine, using artificial intelligence

**For citation:** Chernyshov, L.N., Lukin, V.N. (2025). Training simulator for algorithm theory. *Modelling and Data Analysis*, 15(3), 161—171. (In Russ.). <https://doi.org/10.17759/mda.2025150310>

Изучение теории алгоритмов включается в образовательные программы вузов по специальностям 09.02.03 «Программирование в компьютерных системах», 09.03.01 «Программная инженерия и компьютерные науки», 02.03.03 «Математическое обеспечение и администрирование информационных систем». Её цель — формирование знаний об основных результатах теории алгоритмов; развитие логической и алгоритмической интуиции как в математике, так и в информатике; формирование и развитие у студентов понимания уровня строгости математической модели. Здесь ключевая математическая модель — машина Тьюринга (МТ). В учебниках и учебных пособиях теме о конечных автоматах и МТ уделяется значительное внимание (Поляков, Скорубский, 2012), (Лукин, Чернышов, 2021), (Чернецкая, 2022).

Практика показывает, что студенты нередко испытывают трудности в изучении дисциплин, связанных с теорией автоматов. Причина кроется в том, что для этого требуется высокий уровень абстракции, в то время как автомат обычно ассоциируется с чем-то материальным. Поэтому у преподавателя стоит задача подать материал максимально наглядно без потери строгости. Здесь большую пользу может принести программное средство для демонстрации как статического представления автомата, так и его работу, что способствуют лучшему усвоению материала.

Базовые знания и теория в полном объеме даются в известных монографиях (Ахо, Ульман, 1978) и (Хопкрофт, Мотвани, Ульман, 2002).

Рассмотрим представление машины Тьюринга. Она задаётся перечислением символов алфавита, множеством состояний и набором правил перехода, по которым она работает. Диаграмму состояний можно определить в виде графа, на дугах которого отмечаются действия машины: перемещение головки по ленте и запись символа на ленту. Подобные диаграммы строятся и для других моделей вычислений.

Существует множество различных инструментов для построения диаграмм состояний, графов и машин Тьюринга (Редактор графов, 2025), (Эмулятор машины Тьюринга, 2025), (Finite Automata Designer, 2025), (Инструмент для построения диаграммы состояния, 2025) и др. Однако не все они удобны для демонстрации: как правило, нет возможности анимации действий не только машин Тьюринга, но и существенно более простых моделей: автоматов с магазинной памятью (МП-автоматов) и конечных автоматов (КА). Кроме того, они обычно предназначены для решения ограниченного набора задач для конкретных моделей и имеют сложный интерфейс.

Наиболее известный и популярный инструмент для визуализации объектов теории формальных языков — программа JFLAP, разрабатываемая в университете



Дьюка с 1990 года (JFLAB, 2018). Она имеет развитый функционал, позволяет моделировать автоматы разных типов, она мультиплатформенная (написана на языке Java). Но для её установки требуется регистрация (проприетарная лицензия). Кроме того, она достаточно объемная: более 300 папок и 6000 файлов, что затрудняет ее изучение и модификацию.

Для проведения практических занятий на построение автоматов и грамматик есть онлайн-сервис (AutomataTutor, 2025), распространяемый под лицензией Apache 2.0. Он позволяет преподавателям составлять упражнения, а студентам отправлять выполненные задания, который автоматически проверяются.

В курсе теории алгоритмов тема машин Тьюринга основная, но лишь одна из многих. Общим для всех видов автоматов является граф состояний. Существует множество различных программ для построения графов и решения задач с их помощью. Наиболее подходящей для использования оказалась программа с открытым кодом, разработанная И. Уоллесом (Wallace Evan, 2010). Программа имеет простой интерфейс и позволяет строить размеченные графы, в которых можно выделить конечные состояния. Построенные графы статичны и сохраняются в локальной памяти с помощью средства localStorage.

Однако для учебных целей необходима не только возможность визуализации автоматов. Нужна и анимация их работы, и пригодность для решения задач. Важно показать как формальное определение автоматов, так и динамику работы в виде последовательности конфигураций. Для машин Тьюринга есть программа (Эмулятор машины Тьюринга, 2025), разработанная именно для обучения, но в ней нет диаграмм. Диаграммы МТ строятся в системе (The busy beaver challenge, 2025), но для этого необходимо написать программу определения автомата на некотором псевдокоде.

Для использования в учебном процессе желательно иметь удобный инструмент, допускающий расширения для разных моделей и разных задач. Основой должен служить построитель графов, на элементы которого налагаются ограничения, соответствующие выбранной модели. Этот инструмент должен предоставлять преподавателю среду для подготовки демонстрационных примеров (презентаций) к лекциям, разработки заданий для контрольных и лабораторных работ. Кроме того, нужно, чтобы студенты, в свою очередь, могли использовать его при изучении соответствующих тем, решать задачи и готовить отчеты к ним.

Одним из авторов (Чернышовым Л.Н.) построено как раз такое программное средство: построитель конечных автоматов FSMД (см. [www.chernyshov.com/FSM](http://www.chernyshov.com/FSM)). Его основная цель — графическое представление конечных автоматов. В свою очередь, графическая форма может быть легко преобразована в текстовую. Это позволяет встраивать изображение в документы разных форматов: SVG — в HTML-документы, LaTeX — в офисные документы, JSON — в JavaScript-программы. Кроме того, предусмотрено преобразование графов в специальные представления, которые удобно использовать в программах на разных языках (в частности, в Haskell).

Основные возможности программы следующие:

- построение диаграмм конечных автоматов, автоматов с магазинной памятью, машин Тьюринга;



- экспорт диаграмм в JSON, SVG, LaTeX;
- импорт диаграмм (как отдельной диаграммы, так и набора) в JSON-формате;
- генерация по диаграммам формальных определений КА, МР-автомата, МТ, регулярных грамматик с проверкой корректности диаграмм;
- задание команд МТ в сокращенном виде (можно не указывать запись текущего символа и движение головки);
- задание МТ и автоматическая генерация диаграмм по компактному стандартному описанию;
- возможность определения детерминированности автоматов;
- нахождение пустых и недостижимых состояний в автоматах;
- сохранение рабочей диаграммы и комментария к ней в локальной памяти;
- формирование наборов диаграмм и хранение их в локальном хранилище;
- демонстрация пошаговой работы автоматов с визуализацией рабочей ленты (магазинной памяти для МП-автомата) и конфигураций как в ручном режиме, так и в автоматическом с заданием интервала времени;
- демонстрация вывода цепочек в регулярной грамматике;
- генерация случайных диаграмм;
- хранение на сервере демонстрационных наборов автоматов;
- доступ к базе данных МТ определенного вида для их исследования.

Для использования в учебном процессе созданы демонстрационные наборы автоматов. Они служат вспомогательным материалом при чтении лекций и на практических занятиях. Примеры, на которых они построены, взяты из монографий (Ахо, Ульман, 1978), (Хопкрофт, Мотвани, Ульман, 2002) и учебных пособий (Поляков, Скорубский, 2012), (Лукин, Чернышов, 2021). Там они снабжены комментариями и подробно разбираются.

Важная особенность интерфейса программы состоит в том, что на экране одновременно показаны формальное определение автомата, диаграмма состояний и последовательность конфигураций (рис. 1). Зачастую студенты с трудом могут дать формальное математическое определение автомата и результата его работы. Отображение различных форм одной и той же абстракции поможет понять суть и запомнить определения.

Программный код FSMД, как и ядро строителя диаграмм, открытый. Это даёт возможность ставить задачи по расширению возможностей и развивать силами студентов.

В программе предусмотрены параметры для настройки отображаемой ленты: ее размеры, число клеток на экране, ограничение с одного из концов и начальное состояние. Часть примеров МТ соответствует правилам, принятым в (Хопкрофт, Мотвани, Ульман, 2002), а именно: пустые клетки заполнены символом «В», который включается в алфавит МТ. При этом отмечается только клетки, которые расположены непосредственно слева и справа от обрабатываемой цепочки. В другом режиме лента полностью заполняется нулями, и МТ может начинать работу, когда на ленте нет символов, отличных от нуля.

В случае двухсимвольного алфавита  $\{0,1\}$  МТ можно задать не только диаграммой, но и описанием в виде строки. Строка составляется из последовательности подстрок, разделенных знаком « $\_$ ». Первая подстрока определяется командами перехода из начального состояния А в зависимости от 0 и 1 в текущей позиции на ленте.



Например, если  $f(A,0) = (B, 1, R)$  и  $f(A,1) = (C, 0, L)$ , то строкой будет «1RB0LC». Далее следуют подстроки, полученные для состояний В. С и т. д. Последнее состояние считается конечным. Если перехода по какому-либо символу нет, соответствующая подстрока заменяется на «---». Диаграмма по такой строке, которая задается в комментариях, строится автоматически.

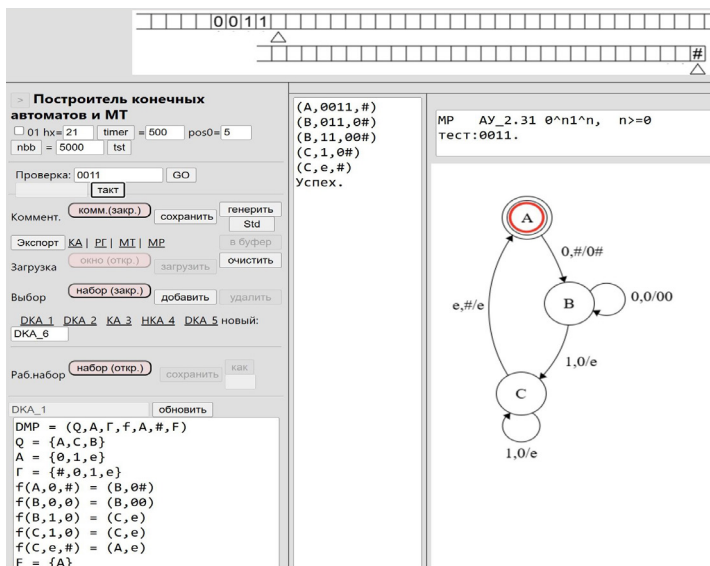


Рис. 1. Моделирование работы МП-автомата

Fig. 1. Simulation of pushdown automaton

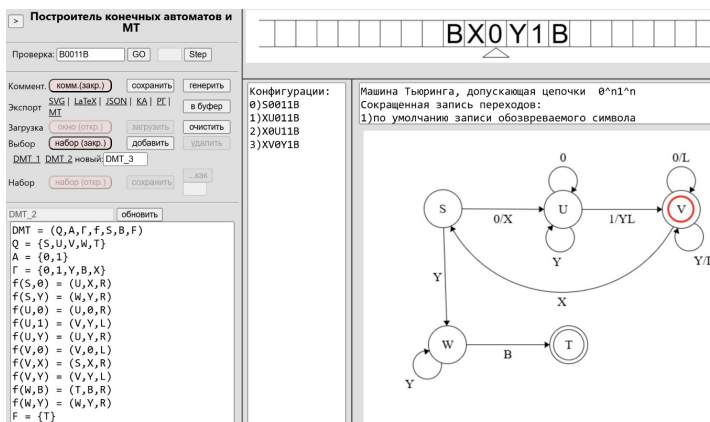
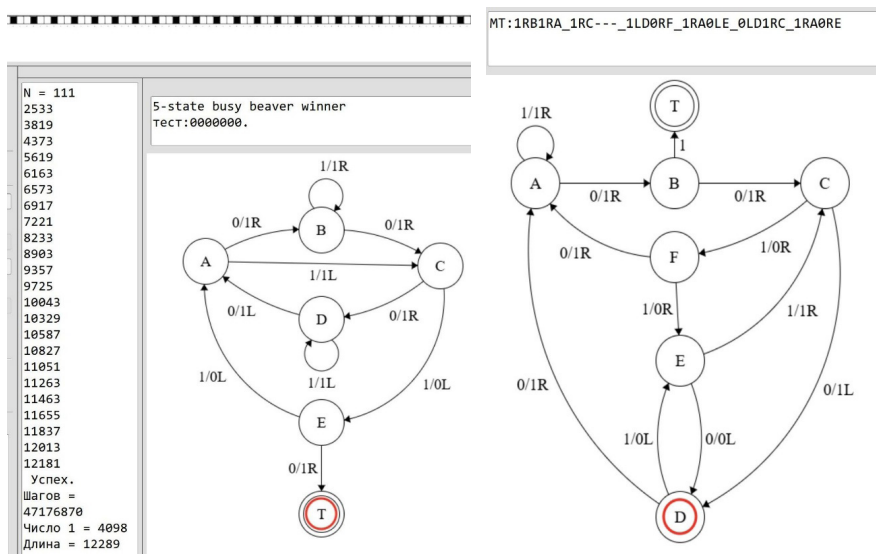


Рис. 2. Моделирование работы машины Тьюринга

Fig. 2. Simulation of Turing machine operation

Для МТ с начальной нулевой лентой естественным образом возникает задача, известная как проблема «усердного бобра» (The busy beaver challenge, 2025). Она состоит в том, чтобы среди всех МТ с  $n$ -состояниями и алфавитом  $\{0,1\}$  (их конечное число) найти машину  $BB(n)$ , которая делает максимальное число шагов  $S(n)$  до остановки и записывает на ленту максимальное число единиц  $\Sigma(n)$ .

Алан Тьюринг в 1936 году доказал, что не существует алгоритма, который для любой МТ мог бы определить, остановится ли она. Поэтому задача нахождения значений функций  $S(n)$  и  $\Sigma(n)$  для  $n > 4$  оказывается непростой. Для  $n=5$  задача была решена только в 2024 году. В программе FSMD приводится набор решений для  $n$  от 1 до 5, а для  $n=6$  и  $n=7$  построены наилучшие решения, обнаруженные в июне и мае 2025 года соответственно. На рисунке 3 приводятся диаграммы МТ для  $n=5$  и  $n=6$ .



**Рис. 3.** Диаграммы МТ для ВВ(5) и кандидата ВВ(6)

**Fig. 3.** MT charts for BB(5) and candidate BB(6)

Машина BB(5) останавливается через 47176870 шагов, и это можно промоделировать в программе. На рисунке для BB(5) показано заключительное состояние. В окне конфигураций через каждые 2 миллиона шагов указывается длина текущей цепочки, на ленте — часть последней цепочки длиной 111.

Для машин ВВ(6) и ВВ(7) значения функций S и  $\Sigma$  настолько огромны, что для их определения найдены только нижние границы:  $S(6) > \Sigma(6) > 2 > 2^{\uparrow\uparrow\uparrow 5}$  и  $S(7) > \Sigma(7) > 2^{\uparrow\uparrow 11} 2^{\uparrow\uparrow 13}$  (запись больших чисел в нотации Д. Кнута).

Доказательство BB(5) потребовало не только больших вычислительных ресурсов, но и уникальных математических методов. Для некоторых МТ были использованы инструменты автоматизации доказательств, в частности, язык Lean (Lean, 2025).





В программе имеется доступ к базе данных из 10000 машин с шестью состояниями, для которых можно ставить задачи исследования их поведения.

Один из ведущих исследователей в области теории алгоритмов, Скотт Ааронсон, так отозвался о проблеме ВВ: «... изучение «бобров» делает философские открытия Гёделя и Тьюринга «количественными и конкретными». Мы больше не говорим абстрактно о «каких-то» пределах — мы пытаемся нащупать их руками. Найти машину Тьюринга, поведение которой непредсказуемо, — это всё равно что найти первую трещину в здании общепринятой математики» (Самая сложная задача математики, 2025).

По тематике проблемы ВВ достаточно много публикаций, и знакомство с ними может заинтересовать студентов и побудить к исследованиям.

Предполагается продолжить разработку программы FSMD для реализации следующих возможностей:

- генерация случайных диаграмм с заданными характеристиками (числом вершин, дуг, алфавита символов и т.п.);
- задание и сохранение набора тестовых цепочек для автоматов;
- решение задач по аналогии с программой JFLAB;
- решения задачи построения регулярного выражения по КА;
- автоматизация удаления пустых и недостижимых состояний в КА и МТ-автоматах;
- решение задачи удаления пустых переходов;
- реализация возможности генерации отчета по задаче построения автоматов;
- построение пространственно-временных диаграмм для МТ.

В заключение приведём краткий обзор результатов использования программы FMT в учебном процессе.

В течение учебного года 2024/25 в Финансовом университете были прочитаны лекции и проведены семинарские занятия по дисциплинам «Теория компиляции» и «Теория алгоритмов». В рабочих программах этих дисциплин предусмотрено решение задач на построение конечных автоматов и машин Тьюринга. Разработанная программа оказалась очень полезным инструментом: студенты легко осваивали работу в программе и справлялись с подобными задачами. На зачетах были предложены задачи, отличные от тех, что разбирались на занятиях. Некоторые студенты, в основном те, которые пропускали занятия или не были активными, понадеялись на помощь искусственного интеллекта (ИИ). Но они просчитались: при проверке решений легко обнаруживалось, что они этим пользовались. По условию задач результат должен был представлен в виде JSON-файла, который загружался бы в программу FSMD. Но ИИ, хотя и выдавал JSON, но формат не соответствовал требованиям программы. При использовании FSMD файл формируется автоматически в требуемом формате. Кроме того, в диаграммах от ИИ присутствовали склеенные дуги и неудачное размещение вершин. При запросе к ИИ можно было бы сформулировать уточняющие детали представления решений, но это требовало дополнительных усилий со стороны студентов.

Использование ИИ студентами носит массовый характер, и этому трудно препятствовать. Решение задач в любой дисциплине способствует не только лучшему усвоению материала, но и развитию логического мышления, приобретению полезных



навыков в применении соответствующих инструментов. Студент, который вместо того, чтобы самостоятельно решать задачи, прибегает к помощи ИИ, не сможет освоить дисциплину в должной степени, получить новые знания и навыки. Поэтому правильно поставить его в условия, когда использование ИИ было бы затруднительным. Именно применение специализированных программ, подобных FSMD, позволяет это сделать. Решение задач в среде таких программ может быть обусловлено различными динамически настраиваемыми особенностями, которые ИИ не сможет учесть.

### Список источников / References

1. Ахо, А., Ульман, Дж. (1978). Теория синтаксического анализа, перевода и компиляции. М.: Мир. Aho, A., & Ullman, J. (1978). *The Theory of Parsing, Translation, and Compiling*. Moscow: Mir. (In Russ.).
2. Лукин, В.Н., Чернышов, Л.Н. (2021). Вычислительные процессы: теория трансляции, управление данными и сети Петри. М.: Вузовская книга. Lukin, V.N., & Chernyshov, L.N. (2021). *Computational Processes: Translation Theory, Data Management, and Petri Nets*. Moscow: Vuzovskaya kniga. (In Russ.).
3. Поляков, В.И., Скорубский, В.И. (2012). Основы теории алгоритмов. СПб.: СПб НИУ ИТМО. Polyakov, V.I., & Skorubsky, V.I. (2012). *Fundamentals of Algorithm Theory*. St. Petersburg: ITMO University. (In Russ.).
4. Хопкрофт, Дж.Э., Мотвани, Р., Ульман, Дж. (2002). Введение в теорию автоматов, языков и вычислений (2-е изд.). М.: Издательский дом «Вильямс». Hopcroft, J.E., Motwani, R., & Ullman, J. (2002). *Introduction to Automata Theory, Languages, and Computation* (2nd ed.). Moscow: Williams Publishing House. (In Russ.).
5. Чернецкая, И.Е. (2022). Применение конечных автоматов для поиска и распознавания подстрок: методические рекомендации к лабораторной работе. Курск: Юго-Зап. гос. ун-т. URL: [https://swsu.ru/sveden/files/MU\\_LZNo\\_2\\_Teoriya\\_avtomatov.pdf](https://swsu.ru/sveden/files/MU_LZNo_2_Teoriya_avtomatov.pdf) (дата обращения: 10.08.2025). Chernetskaya, I.E. (2022). *Application of Finite Automata for Searching and Recognizing Substrings: Methodological Guidelines for a Laboratory Work*. Kursk: Southwest State University. URL: [https://swsu.ru/sveden/files/MU\\_LZNo\\_2\\_Teoriya\\_avtomatov.pdf](https://swsu.ru/sveden/files/MU_LZNo_2_Teoriya_avtomatov.pdf) (viewed: 10.08.2025). (In Russ.).
6. Инструмент для построения диаграммы состояния (2025). URL: <https://creately.com> (дата обращения: 10.08.2025). State diagramming tool (2025). URL: <https://creately.com> (viewed: 10.08.2025).
7. Редактор графов. URL: <https://programforyou.ru/graph-redactor> (дата обращения: 10.08.2025). Graph editor. URL: <https://programforyou.ru/graph-redactor> (viewed: 10.08.2025). (In Russ.).
8. Самая сложная задача математики? Математики ищут число, которое определит предел познания. URL: <https://www.ixbt.com/live/science/samaya-slozhnaya-zadacha-matematiki-matematiki-ischut-chislo-kotoroe-opredelit-predel-poznaniya.html> (дата обращения: 10.08.2025). The hardest problem in mathematics? Mathematicians are searching for a number that will determine the limits of knowledge. URL: <https://www.ixbt.com/live/science/samaya-slozhnaya-zadacha-matematiki-matematiki-ischut-chislo-kotoroe-opredelit-predel-poznaniya.html> (viewed: 10.08.2025). (In Russ.).



9. Эмулятор машины Тьюринга. URL: <https://programforyou.ru/calculators/turing-machine-emulator> (дата обращения: 10.08.2025).  
Turing machine emulator. URL: <https://programforyou.ru/calculators/turing-machine-emulator> (viewed: 10.08.2025). (In Russ.).
10. AutomataTutor. URL: <https://automatatutor.com> (viewed: 10.08.2025).
11. Busy Beaver. URL: [https://ru.wikipedia.org/wiki/Busy\\_beaver](https://ru.wikipedia.org/wiki/Busy_beaver) (дата обращения: 10.08.2025).  
Busy Beaver. URL: [https://ru.wikipedia.org/wiki/Busy\\_beaver](https://ru.wikipedia.org/wiki/Busy_beaver) (viewed: 10.08.2025). (In Russ.).
12. JFLAP Version 7.1 released July 27 (2018). URL: <https://www.jflap.org> (viewed: 10.08.2025).
13. Finite Automata Designer. URL: <https://fa.akdev.ir> (viewed: 10.08.2025).
14. Lean — инструмент интерактивного доказательства теорем (2025). URL: <https://ru.wikipedia.org/wiki/Lean> (дата обращения: 10.08.2025).  
Lean — an interactive theorem prover (2025). URL: <https://ru.wikipedia.org/wiki/Lean> (viewed: 10.08.2025). (In Russ.).
15. The Busy Beaver Challenge (2025). URL: <https://wiki.bbchallenge.org> (viewed: 10.08.2025).
16. Turing Machine Visualization. URL: <https://turingmachine.io> (viewed: 10.08.2025).
17. Finite State Machine Designer. URL: <https://madebyevan.com> (viewed: 10.08.2025).

### ***Информация об авторах***

*Лев Николаевич Чернышов*, кандидат физико-математических наук, доцент, доцент, Финансовый университет при Правительстве Российской Федерации, (ФГБОУ ВО Финансовый университет), Москва, Российская Федерация, ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-1512-4052>, e-mail: [lnchernyshov@fa.ru](mailto:lnchernyshov@fa.ru)

*Владимир Николаевич Лукин*, кандидат физико-математических наук, доцент, профессор, Московский государственный психолого-педагогический университет (ФГБОУ ВО МГППУ), Москва, Российская Федерация, ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-8906-2686>, e-mail: [lukinvn@list.ru](mailto:lukinvn@list.ru)

### ***Information about the authors***

*Lev N. Chernyshov*, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Financial University under the Government of the Russian Federation, (FSBEI HE Financial University), Moscow, Russian Federation, ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-1512-4052>, e-mail: [lnchernyshov@fa.ru](mailto:lnchernyshov@fa.ru)

*Vladimir N. Lukin*, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Moscow State University of Psychology and Education (MSUPE), Moscow, Russian Federation, ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-8906-2686>, e-mail: [lukinvn@list.ru](mailto:lukinvn@list.ru)

### ***Вклад авторов***

Авторы внесли равный вклад в концепцию, проведение исследования, анализ данных и подготовку рукописи.

### ***Contribution of the authors***

Authors contributed equally to the conception, conduct of the study, data analysis, and preparation of the manuscript



### ***Конфликт интересов***

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

### ***Conflict of interest***

The authors declare no conflict of interest.

Поступила в редакцию 24.08.2025

Поступила после рецензирования 01.09.2025

Принята к публикации 02.09.2025

Опубликована 30.09.2025

Received 2025.08.24

Revised 2025.09.01

Accepted 2025.09.02

Published 2025.09.30

## КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ | BRIEF MESSAGES

Научная статья | Original paper

УДК 004.8:62-5

### Анализ существующих моделей компоновки клавиш с позиции пользовательской адаптации

И.С. Колотовкин✉, В.В. Чернышев

Московский государственный психолого- педагогический университет  
(ФГБОУ ВО МГППУ), г. Москва, Российская Федерация

✉ [is@kolotovkin.pro](mailto:is@kolotovkin.pro)

#### Резюме

Статья посвящена анализу существующих клавиатурных раскладок (QWERTY, Dvorak, Colemak) с точки зрения эргономики и адаптации под пользователя, а также обоснованию необходимости перехода к персонализируемым сенсорным клавиатурам. В ней предлагается концепция полностью настраиваемой раскладки, где пользователь может самостоятельно конфигурировать расположение клавиш с учетом физиологических и профессиональных особенностей, что повышает комфорт, скорость и точность ввода.

**Ключевые слова:** сенсорная клавиатура, персонализированная раскладка, эргономика ввода, адаптивный интерфейс, моделирование пользовательских схем

**Для цитирования:** Колотовкин, И.С., Чернышев, В.В. (2025). Анализ существующих моделей компоновки клавиш с позиции пользовательской адаптации. *Моделирование и анализ данных*, 15(3), 172—179. <https://doi.org/10.17759/mda.2025150311>

### Analysis of existing keyboard layout models from the perspective of user adaptation

I.S. Kolotovkin✉, V.V. Chernyshev

Moscow State University of Psychology and Education (MSUPE)  
Moscow, Russian Federation

✉ [is@kolotovkin.pro](mailto:is@kolotovkin.pro)



## **Abstract**

This paper analyzes existing keyboard layouts (QWERTY, Dvorak, Colemak) from the standpoint of ergonomics and user adaptation. It argues for the necessity of transitioning to fully customizable touchscreen keyboards. The proposed concept involves a flexible layout system in which the user can configure the position of keys independently, based on individual physiological and professional characteristics, thereby enhancing input comfort, speed, and accuracy.

**Keywords:** touchscreen keyboard, personalized layout, typing ergonomics, adaptive interface, user layout modeling

**For citation:** Kolotovkin, I.S., Chernyshev, V.V. (2025). Analysis of existing keyboard layout models from the perspective of user adaptation. *Modelling and Data Analysis*, 15(3), 172—179. (In Russ.). <https://doi.org/10.17759/mda.2025150311>

## **Введение**

Современные сенсорные клавиатуры становятся все более востребованными в контексте развития гибких интерфейсов и персонализации пользовательского опыта. Традиционные механические и мембранные клавиатуры имеют ограниченную возможность адаптации под индивидуальные предпочтения и задачи пользователей, что снижает эффективность ввода и комфорт работы.

Персонализация раскладки клавиш и конфигурация функциональных элементов сенсорных клавиатур способны значительно улучшить эргономику, повысить скорость и точность ввода, а также расширить доступность устройств для людей с особыми потребностями.

В данной работе рассматривается концепция разработки полностью сенсорной клавиатуры с возможностью кастомизации раскладки и расположения клавиш, включая анализ существующих решений и определение ключевых требований для эффективной реализации такой системы. Основное внимание уделено обоснованию необходимости гибкой конфигурации и ее влиянию на пользовательский опыт.

## **Анализ существующих раскладок клавиатуры**

Классическим примером является QWERTY — компоновка, разработанная К. Шоулзом (*Christopher Latham Sholes*) в 1870-х годах для печатных машин. Буквы в ней намеренно разнесены для предотвращения заклинивания рычагов. Эта раскладка стала промышленным стандартом, несмотря на свою эргономическую неэффективность: символы высокой частоты (например, «Е» в английском, составляющий около 12.7% всех символов) вынесены в неудобные позиции, отсутствует равномерное распределение нагрузки по рукам, последовательности часто приходится вводить одной рукой или одним пальцем подряд. По данным MacKenzie и Zhang (1999), в QWERTY



примерно 30% всех нажатий приходится на левую руку, а 70% — на правую, что приводит к дисбалансу и увеличению утомляемости. Dvorak (1936) ориентирован на размещение гласных и частотных согласных на домашнем ряду, обеспечивая до 70% ударов без перемещения пальцев, что снижает физическую нагрузку и повышает скорость набора (Norman, 2001). Colemak (2006) — компромиссный вариант с сохранением горячих клавиш QWERTY и уменьшением среднего перемещения пальцев на 30%, упрощая адаптацию.

Таблица 1 / Table 1

Раскладка	Процент ударов по домашнему ряду	Среднее расстояние перемещения пальцев (мм)	Процент ударов одной рукой
QWERTY	32%	220	36%
Dvorak	70%	130	4%
Colemak	63%	150	15%

Однако все эти раскладки фиксированы и не учитывают индивидуальные особенности пользователей — размер кисти, силу пальцев, доминирующую руку, профессиональные предпочтения. Huang и др. (2018) выявили, что универсальные раскладки не оптимальны для разных групп пользователей с точки зрения скорости и комфорта.

На графике ниже представлен пример распределения нагрузки на пальцы на основе исследований MacKenzie и Zhang (1999):

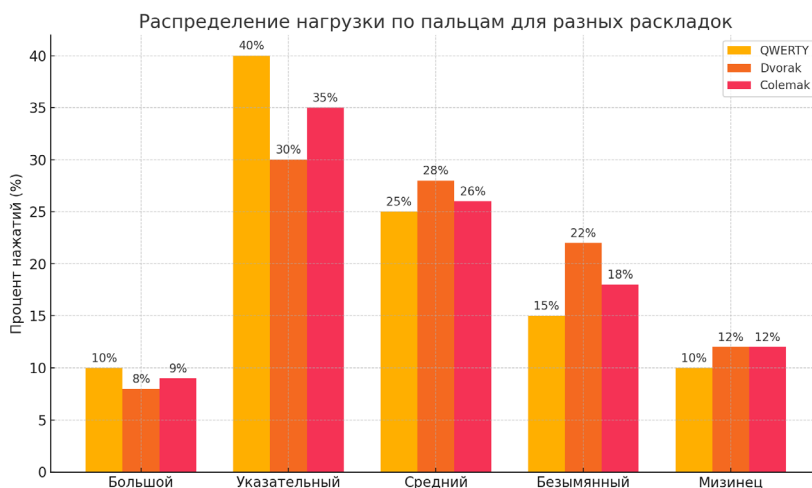


Рис. 1. Распределение нагрузки на пальцы

Fig. 1. Load distribution on the fingers

Современные технологии сенсорных экранов и программно-определяемых интерфейсов позволяют уйти от фиксированных раскладок. Теперь клавиатура может



адаптироваться под конкретного пользователя, снижая когнитивную и физическую нагрузку, увеличивая скорость набора и улучшая пользовательский опыт.

## **Концепция гипотетической раскладки с возможностью персонализации**

Полностью сенсорная клавиатура представляет собой поверхность, лишенную фиксированной геометрии клавиш, что принципиально отличает ее от традиционных механических моделей. Это позволяет реализовать концепцию раскладки, где положение, размер и форма клавиш могут настраиваться произвольно — как заранее, так и в процессе эксплуатации. Основное преимущество сенсорной среды заключается в том, что она предоставляет возможность непосредственного взаимодействия пользователя с конфигурацией интерфейса, в том числе — на этапе проектирования раскладки.

В предлагаемой модели ручной настройки пользователь сам определяет размещение клавиш, ориентируясь на физиологические, когнитивные и профессиональные особенности. Такой подход предполагает отсутствие универсального эталона — вместо него используются наборы критериев и эвристик, позволяющие получить удобную, функциональную и эргономичную раскладку в конкретных условиях использования.

Процесс формирования индивидуальной схемы может быть как полностью интуитивным (на основе субъективных предпочтений пользователя), так и системным — если он основывается на ряде объективных критериев, обоснованных с точки зрения эргономики, частотного анализа и теории ввода. Концептуально ручная настройка должна быть подкреплена возможностью оценки эффективности раскладки по заданным метрикам, что позволяет сделать выбор осознанным.

Следует подчеркнуть, что в условиях сенсорного интерфейса не только возможна, но и необходима индивидуализация: отсутствие физических ограничений делает неоправданным использование единого стандарта для всех пользователей, а механизмы отображения позволяют реализовать наглядную, контекстно зависимую структуру клавиатуры.

## **Критерии формирования раскладки**

Эффективность пользовательской раскладки может оцениваться по целому ряду параметров, некоторые из которых уже применяются в анализе традиционных клавиатурных схем. Однако в контексте сенсорной поверхности они приобретают дополнительную значимость, так как могут быть непосредственно реализованы средствами пользовательского интерфейса. Ниже представлены основные критерии, которые могут использоваться как ориентиры при проектировании персональной схемы размещения клавиш.

### ***Минимизация суммарного пути движения пальцев***

Классическая метрика, применяемая в эргономических моделях, включает оценку расстояний, проходимых пальцами при наборе текста. В случае сенсорной клавиатуры пользователю предоставляется возможность самостоятельно переместить





наиболее частотные символы в ближние зоны, тем самым снижая как утомляемость, так и среднее время набора.

Особую значимость приобретает не только линейное расстояние, но и топологическая близость символов, формирующих биграммы или триграммы. Этим обеспечивается плавность ввода, приближающаяся к непрерывному движению.

### ***Балансировка нагрузки между пальцами и руками***

Исследования в области биомеханики (см., напр., К. Кромер, 2001) показывают, что разные пальцы имеют неодинаковую силу, выносливость и точность. Так, мизинцы обладают значительно меньшей подвижностью и скоростью, чем указательные и средние пальцы. Соответственно, распределение символов по пальцам должно учитывать эти различия.

Сенсорная клавиатура позволяет компенсировать слабые стороны анатомии пользователя за счет гибкой настройки: уменьшения нагрузки на менее развитые пальцы и перераспределения ввода в сторону более надежных зон.

### ***Чередование рук и пальцев***

Механизмы ритмичного набора (alternating hands/fingers) хорошо изучены в рамках моделей клавиатурной эффективности (например, в анализах Dvorak и Colemak). Чередование позволяет не только повысить скорость ввода, но и предотвратить локальную перегрузку сухожилий.

Для сенсорных систем это требование может быть реализовано через аналитическую проверку распределения биграмм по рукам и пальцам, обеспечивая чередование на уровне структурного анализа раскладки.

### ***Частотные сочетания символов***

В языках с высокой степенью морфологической связности (русский, немецкий) значительная доля нагрузки приходится на устойчивые сочетания букв. Расположение таких последовательностей рядом или на смежных пальцах позволяет сократить количество движений и обеспечить более плавный ввод (roll-паттерны). На сенсорной клавиатуре это выражается в возможности размещать такие символы в смежных сенсорных зонах, формируя удобные движения без перескоков.

### ***Контекстная адаптация***

Хотя основная идея заключается в ручной настройке, следует учесть, что пользователь может работать в различных профессиональных и языковых контекстах. Программирование, математический ввод, техническое письмо требуют разных символов в зоне быстрого доступа. Поэтому предусматривается возможность формирования нескольких профилей, каждый из которых оптимизирован под определенный сценарий.

## **Заключение**

Рассмотренные в работе аспекты построения раскладок клавиш с позиции пользовательской настройки на сенсорной клавиатуре демонстрируют, что отказ от фиксированной физической архитектуры открывает путь к глубокой индивидуализации



интерфейса ввода. В отличие от универсальных схем, ориентированных на «среднего» пользователя, сенсорная среда допускает произвольную конфигурацию зон ввода и их параметров, что позволяет адаптировать раскладку под конкретные физиологические и профессиональные особенности человека.

Предложенная концепция ручной настройки персонализированной раскладки опирается на ряд эргономических и функциональных критериев — таких как минимизация моторной нагрузки, равномерное распределение усилий между пальцами и руками, учет частотных сочетаний символов и возможность контекстной адаптации под задачи пользователя. Использование данных критериев в качестве ориентиров позволяет формировать удобные, осознанно спроектированные схемы ввода без привлечения методов машинного обучения и автоматизированной оптимизации.

Разработка интерфейсов, в которых пользователь может самостоятельно формировать и оценивать раскладку с опорой на структурированные рекомендации, представляется наиболее перспективным направлением практической реализации данной модели. В дальнейшем может быть предложена формализованная методика построения пользовательских схем на основе набора приоритетов, а также система оценки эффективности раскладок по совокупности метрик.

Дополнительно интерес представляет разработка унифицированных форматов описания раскладок для обеспечения переносимости между устройствами и исследования влияния персонализированной настройки на производительность и утомляемость при длительной работе. Таким образом, персонализированная сенсорная клавиатура выступает не только как средство ввода, но и как настраиваемый интерфейс, способный учитывать индивидуальные особенности пользователя на принципиально новом уровне.

### Список источников / References

1. Юрьева, Н.Е. Выбор и программная реализация методов визуализации данных клавиатурного почерка // *Моделирование и анализ данных*. — 2017. — Т. 7. — № 1. — С. 89—102.  
Yurieva, N.E. Selection and software implementation of methods for visualizing keyboard typing data. *Modelling and Data Analysis*, 2017, vol. 7, no. 1, pp. 89—102. (In Russian)
2. Лясковский, М.А., Горячкин, Б.С., Лещев, А.О., Мельников К.И. Разработка метода оптимизации раскладки клавиатуры «ЙЦУКЕН» // *Тенденции развития науки и образования*. — 2020. — № 62—4. — С. 69—80. — DOI: 10.18411/lj-06-2020-84. — EDN: QT1HDK.  
Lyaskovsky, M.A., Goryachkin, B.S., Leshchev, A.O., Melnikov, K.I. Development of a method for optimizing the “YTsUKEN” keyboard layout. *Trends in Science and Education*, 2020, no. 62—4, pp. 69—80. DOI: 10.18411/lj-06-2020-84. (In Russian)
3. Серый, М.С. Сравнение эффективности различных раскладок клавиатуры // *Стимулирование научно-технического потенциала общества в стратегическом периоде: сб. ст. по итогам Междунар. науч.-практ. конф., Ижевск, 3 февр. 2024 г.* — Стерлитамак: Агентство международных исследований, 2024. — С. 103—107. — EDN: TFMBFJ.  
Sery, M.S. Comparison of the efficiency of various keyboard layouts. In: *Stimulating the Scientific and Technical Potential of Society in the Strategic Period: Proceedings of the International*



*Scientific and Practical Conference*, Izhevsk, February 3, 2024. Sterlitamak: Agency of International Research, 2024, pp. 103–107. (In Russian)

4. Зубачев, А.В. Эволюционированная раскладка клавиатуры. — М.: Логос, 2015. — 256 с.  
Zubachev, A.V. *The Evolved Keyboard Layout*. Moscow: Logos, 2015. 256 p. (In Russian)
5. Черненко, Н.В. Раскладка Зубачева: эффективность и удобство // *Информатика и разработка*. — 2017. — № 2. — С. 42–50.  
Chernenko, N.V. The Zubachev layout: efficiency and convenience. *Informatics and Development*, 2017, no. 2, pp. 42–50. (In Russian)
6. Белов, Д.С. Сравнительный анализ раскладок клавиатур для русскоязычного текста // *Информационные технологии и компьютерные системы: материалы конф.* — 2019. — С. 112–118.  
Belov, D.S. Comparative analysis of keyboard layouts for Russian-language text. In: *Information Technologies and Computer Systems: Conference Proceedings*, 2019, pp. 112–118. (In Russian)
7. Сидоров, В.К. Анализ распределения нагрузки на пальцы при использовании различных раскладок клавиатуры // *Эргономика и дизайн*. — 2021. — Т. 10. — № 2. — С. 23–32.  
Sidorov, V.K. Analysis of finger load distribution using different keyboard layouts. *Ergonomics and Design*, 2021, vol. 10, no. 2, pp. 23–32. (In Russian)
8. Petrova, E.A. Study of keyboard layout efficiency based on statistical data. Doctoral dissertation. Moscow State University, 2020. 180 p. (In Russian)

### **Информация об авторах**

*Игорь Сергеевич Колотовкин*, младший научный сотрудник центра информационных технологий для психологических исследований, Московский государственный психолого-педагогический университет (ФГБОУ ВО МГППУ), Москва, Российская Федерация, ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-6126-4849>, SPIN-код: 2604—4731, e-mail: [is@kolotovkin.pro](mailto:is@kolotovkin.pro)

*Чернышев Владимир Витальевич*, студент, Московский государственный психолого-педагогический университет (ФГБОУ ВО МГППУ), г. Москва, Российская Федерация, ORCID: <https://orcid.org/0009-0007-1389-1710>, e-mail: [vovachern18@list.ru](mailto:vovachern18@list.ru)

### **Information about the authors**

*Igor S. Kolotovkin*, Junior Researcher at the Center for Information Technologies in Psychological Research, Moscow State University of Psychology and Education (MSUPE), Moscow, Russian Federation, ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-6126-4849>, SPIN: 2604—4731, e-mail: [is@kolotovkin.pro](mailto:is@kolotovkin.pro)

*Vladimir V. Chernyshev*, Student, Moscow State University of Psychology and Education (MSUPE), Moscow, Russian Federation, ORCID: <https://orcid.org/0009-0007-1389-1710>, e-mail: [vovachern18@list.ru](mailto:vovachern18@list.ru)

### **Вклад авторов**

Все авторы внесли равный вклад в концепцию, проведение исследования, анализ данных и подготовку рукописи



### ***Authors contribution***

The authors contributed equally to the research, data analysis, and preparation of this manuscript

### ***Конфликт интересов***

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

### **Conflict of Interest**

The authors declare no conflict of interest.

Поступила в редакцию 04.08.2025

Поступила после рецензирования 18.08.2025

Принята к публикации 25.08.2025

Опубликована 30.09.2025

Received 2025.08.04

Revised 2025.08.18

Accepted 2025.08.25

Published 2025.09.30

Научная статья | Original paper

УДК 004.43:004.738.5

## Особенности написания небуферизированного асинхронного алгоритма получения данных на языке JavaScript

**С.С. Исаков**

Московский государственный психолого-педагогический университет

Москва, Российская Федерация

✉ [phebra@yandex.ru](mailto:phebra@yandex.ru)

### *Резюме*

В статье рассматриваются два распространенных подхода к реализации скачивания файлов в веб-приложениях на JavaScript: использование HTML-тега `<a>` и асинхронная загрузка с помощью AJAX (`fetch/XHR`). Автор проводит сравнительный анализ их преимуществ и недостатков, уделяя особое внимание влиянию объема оперативной памяти пользовательского устройства на надежность работы каждого метода. Основной акцент сделан на проблему сбоев при использовании метода `response.blob()` для загрузки больших файлов в условиях ограниченной памяти. В качестве эффективного решения предлагается альтернативный метод с применением `response.bytes()`, обеспечивающий буферизированное, поэтапное скачивание и повышающий стабильность работы приложения. Материал будет полезен фронтенд-разработчикам, сталкивающимся с задачами реализации надежного и контролируемого процесса загрузки файлов.

**Ключевые слова:** программирование, Web-технологии, алгоритмы загрузки, оптимизация оперативной памяти, сетевая передача данных

**Для цитирования:** Исаков, С.С. (2025). Особенности написания небуферизированного асинхронного алгоритма получения данных на языке JavaScript. *Моделирование и анализ данных*, 15(3), 180—185. <https://doi.org/10.17759/mda.2025150312>



## Features of writing an unbuffered asynchronous algorithm for receiving data in JavaScript

**S.S. Isakov**

Moscow State University of Psychology and Education, Moscow, Russian Federation

✉ phebra@yandex.ru

### *Abstract*

The article discusses two common approaches to implementing file downloads in JavaScript web applications: using the HTML `<a>` tag and asynchronous downloading with AJAX (`fetch/XHR`). The author conducts a comparative analysis of their advantages and disadvantages, paying special attention to the impact of the user's device RAM on the reliability of each method. The main emphasis is on the problem of failures when using the `response.blob()` method to download large files under limited memory conditions. An alternative method using `response.bytes()` is proposed as an effective solution, providing buffered, step-by-step downloading and increasing the stability of the application. The material will be useful for front-end developers faced with the task of implementing a reliable and controlled file download process.

**Keywords:** programming, web technologies, loading algorithms, RAM optimization, network data transmission

**For citation:** Isakov, S.S. (2025). Features of writing an unbuffered asynchronous algorithm for receiving data in JavaScript. *Modelling and Data Analysis*, 15(3), 180—185. <https://doi.org/10.17759/mda.2025150312>

### Введение

Рассматривается эффективный приём сетевой загрузки файлов, реализуемый на языке JavaScript (JS). Данный приём может быть актуален при создании как веб-ресурсов, так и десктопных приложений.

При создании страниц веб-сайтов нередко возникает потребность в предоставлении возможности скачивания файла для пользователя. Эта задача часто возникает при разработке ПО, и в большинстве случаев включает особые требования, в том числе анимированный процесс загрузки, отвечающий общему визуальному концепту разрабатываемого сайта. В большинстве случаев, при решении данной задачи используют два распространённых подхода:

- скачивание посредством использования HTML тэга `<a>`;
- асинхронное скачивание путём формирования AJAX запроса;



Однако два этих подхода будут по-разному функционировать в рамках исполнения JS кода браузером, особенно в условиях недостаточного объёма оперативной памяти компьютера.

## Скачивание путём размещения ссылки на странице

При использовании данного подхода на странице размещается тэг ссылка, ведущая к URL адресу для скачивания файла, например, следующим образом:

```
<a href="https://example.com/file.pdf" download> Download  
PDF </a>
```

Подобная ссылка будет открыта браузером ровно так же, как и совершается переход на новую страницу сайта. В случае исполнения традиционного перехода на новую страницу браузер получает заголовок `Content-Type: text/html; charset=UTF-8`, что указывает браузеру на то, что полезные данные, которые будут получены под данным заголовком, следует отобразить как HTML страницу. Но, в отличие от перехода на новую страницу сайта, при чтении заголовков ответа от сервера браузер получит следующие заголовки, диктующие особые инструкции по открытию данной ссылки:

```
Content-Type: application/pdf  
Content-Disposition: attachment; filename="document.pdf"  
Content-Length: 512000
```

В случае с заголовком `Content-Type: application/pdf` и двумя сопутствующими, браузер получает инструкцию что полезные данные в данной передаче необходимо воспринимать как файл, для последующего размещения браузером внутри файловой системы согласно настройкам браузера.

В некоторых случаях, для выполнения успешного скачивания на стороне сервера программистом формируются значения для данных заголовков, с последующей передачей в качестве ответа клиентской части в рамках организации HTTP взаимодействия. Чаще всего формирование заголовков требуется при использовании ссылки, явно не указывающей на расположение целевого файла на стороне сервера.

## Преимущества и недостатки данного подхода

Весомым преимуществом данного подхода является то, что процесс получения данных с клиентской стороны и индикация процесса загрузки организована алгоритмами браузера. При скачивании файлов большого объёма браузер выполнит скачивание напрямую на жесткий диск, блоками в несколько этапов, незаметных пользователю, что делает такой подход независимым от оперативной памяти компьютера. С другой стороны, разработчик клиентской части сайта не имеет возможности контролировать, регулировать и анимировать процесс загрузки файла, что иногда бывает необходимым.



## Скачивание путём исполнения асинхронного запроса

Другим подходом при скачивании файла является написание асинхронного алгоритма получения данных. Программную реализацию данного алгоритма можно обеспечить при помощи распространённых библиотек, таких как *jQuery*, *axios*, или же с использованием штатной функции языка JavaScript — *fetch*. Ниже представлен небольшой пример использования функции *fetch*:

```
fetch («file.pdf») .then (response => {})
```

Более старым аналогом данной функции в рамках языка является алгоритм с использованием объекта XMLHttpRequest:

```
const xhr = new XMLHttpRequest();  
xhr.open("GET", "file.pdf", true);  
xhr.responseType = "blob";
```

Особенностью таких алгоритмов является то, что процесс скачивания и получения полезных данных описывается программистом, разрабатывающим клиентскую часть веб-приложения. При необходимости данный процесс может вообще не отображаться пользователю. В силу того, что появляется возможность контролировать и отображать пользователю процесс загрузки в свободной анимированной форме, такой подход чаще используется программистами.

Согласно подавляющему большинству информационных источников в сети интернет, самым простым алгоритмом получения полезных данных является следующий набор строчек:

```
fetch («file.pdf»)  
  .then(response => {  
    if (!response.ok) {  
      throw new Error(`HTTP error! status: ${response.  
        status}`);  
    }  
    return response.blob();  
  })  
  .then(blob => {  
    // выполнение операций с объектом BLOB  
  })  
  .catch(error => {  
    console.error("Download failed:", error);  
  });
```

В данном фрагменте инициатором процесса получения данных файла является строка: `return response.blob();`<sup>1</sup> Однако, в условиях малой оперативной

<sup>1</sup> Response: blob() method URL: <https://developer.mozilla.org/en-US/docs/Web/API/Response/blob> (дата обращения: 10.07.2025).





памяти компьютера, на котором размещён браузер, и большого объёма скачиваемого файла, такой алгоритм остановится, получив первый блок скачиваемых данных. Максимальный допустимый объём одного фрагмента всего файла определяется оперативной памятью, выделяемой браузеру операционной системой, и может изменяться динамически, что ведёт к ошибке неполноты скачиваемых данных и делает алгоритм неработоспособным. Если же объём файла достаточно близок к максимальному допустимому объёму одного фрагмента скачивания, то со стороны пользователя ошибка становится «плавающей» и делает работу сайта нестабильной, а диагностику неисправности более трудоёмкой.

Решением данной проблемы является использование функции `response.bytes()`<sup>2</sup>, которая выполнит буферизированное скачивание файла поэтапно, или же блоками:

```
fetch("file.pdf").then(response => {  
    return response.bytes();  
})  
.then(bytes => {  
    var blob = new Blob([bytes], {type: "application/pdf"})  
    // выполнение операций с объектом BLOB  
})
```

В данном примере в переменную `blob` будет записан объект класса `Blob`, ровно как и в примере с использованием функции `response.blob()`, рассмотренному выше, что делает эти два подхода взаимозаменяемыми.

### Список источников / References

1. Response: blob() method URL: <https://developer.mozilla.org/en-US/docs/Web/API/Response/blob> (дата обращения: 10.07.2025).  
Response: blob() method URL: <https://developer.mozilla.org/en-US/docs/Web/API/Response/blob> (viewed: 10.07.2025).
2. Response: bytes() method URL: <https://developer.mozilla.org/en-US/docs/Web/API/Response/bytes> (дата обращения: 10.07.2025).  
Response: bytes () method URL: <https://developer.mozilla.org/en-US/docs/Web/API/Response/bytes> (viewed: 10.07.2025).

### Информация об авторах

Исаков Сергей Сергеевич, младший научный сотрудник кафедры прикладной информатики и мультимедийных технологий, факультет информационных технологий, Московский государственный психолого-педагогический университет (ФГБОУ ВО МГППУ), Москва, Российская Федерация, ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-1719-2355>, e-mail: [phebra@yandex.ru](mailto:phebra@yandex.ru)

<sup>2</sup> Response: blob() method URL: <https://developer.mozilla.org/en-US/docs/Web/API/Response/blob> (viewed: 10.07.2025).



### Information about the authors

*Isakov Sergey Sergeevich*, Junior Researcher, Department of Applied Informatics and Multimedia Technologies, Faculty of Information Technology, Moscow State University of Psychology and Education, Moscow, Russian Federation, ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-1719-2355>, e-mail: [phebra@yandex.ru](mailto:phebra@yandex.ru)

Поступила в редакцию 14.07.2025

Поступила после рецензирования 28.07.2025

Принята к публикации 06.08.2025

Опубликована 30.09.2025

Received 2025.07.14

Revised 2025.07.28

Accepted 2025.08.06

Published 2025.09.30

**Моделирование и анализ данных 2025. Том 15. № 3.**

Научный журнал

Издаётся с 2011 года

Учредитель

Федеральное государственное бюджетное  
образовательное учреждение высшего образования  
«Московский государственный психолого-педагогический университет»

Адрес редколлегии:

г. Москва, ул. Сретенка, 29, факультет информационных технологий

Тел.: +7 (499) 167-66-74

E-mail: mad.mgppu@gmail.com

Журнал зарегистрирован в Государственном комитете РФ по печати.

Свидетельство о регистрации средств массовой информации

ПИ № ФС77-66444 от 14 июля 2016 года

ISSN: 2219-3758

ISSN: 2311-9454 (online)

Подписано в печать: 17.09.2025.

Формат: 70\*100/16. Гарнитура Times.

Усл. печ. л. 14,4. Усл.-изд. л. 12,4.

Тираж 100 экз.