

1

**МОДЕЛИРОВАНИЕ
И АНАЛИЗ ДАННЫХ**

НАУЧНЫЙ ЖУРНАЛ

**MODELLING
AND DATA ANALYSIS**

SCIENTIFIC JOURNAL

2026

ISSN: 2219-3758

ISSN: 2311-9454 (ONLINE)

МОДЕЛИРОВАНИЕ И АНАЛИЗ ДАННЫХ

НАУЧНЫЙ ЖУРНАЛ

2026 • Том. 16 • № 1

MODELLING AND DATA ANALYSIS

SCIENTIFIC JOURNAL

2026 • Vol. 16 • № 1



Московский государственный
психолого-педагогический университет
Moscow State University
of Psychology & Education

Моделирование и анализ данных

Главный редактор:

Л.С. Куравский ФГБОУ ВО МГППУ, Россия

Заместители главного редактора:

С.Д. Кулик МИФИ, Россия

А.В. Пантелеев МАИ, Россия

Н.И. Сельвесюк ФАУ ГосНИИАС, Россия

Редакционный совет

Председатель редакционного совета:

Г.Г. Амосов МИАН, Россия

Члены редакционного совета:

В.А. Барабанчиков ФГБОУ ВО МГППУ, Россия
Питер Бентлер Калифорнийский университет
Лос-Анджелеса, США

А.В. Горбатов МИСиС, Россия

Л.С. Куравский ФГБОУ ВО МГППУ, Россия

Леонид Либкин Эдинбургский университет,
Великобритания

А.А. Марголис ФГБОУ ВО МГППУ, Россия

В.В. Рубцов ФГБОУ ВО МГППУ, Россия

Д.В. Ушаков ИП РАН, Россия

Девид Фрэнсис Университет Хьюстона, США

Редакционная коллегия:

К.К. Абгарян ФИЦ ИУ РАН, Россия

Г.Г. Амосов МИАН, Россия

М.В. Воронов ФГБОУ ВО МГППУ, Россия

Е.Л. Григоренко МГУ им. М.В. Ломоносова,
Россия; Университет Хьюстона,
США

В.К. Захаров МГУ им. М.В. Ломоносова,
Россия

А.И. Кибзун МАИ, Россия

Леонид Либкин Эдинбургский университет,
Великобритания

Е.В. Ляпунцова МГТУ им. Н.Э. Баумана,
Россия

В.Р. Милов НГТУ им. Р.Е. Алексева,
Россия

А.В. Наумов МАИ, Россия

Д.Л. Ревизников МАИ, Россия
Холлинг Хайнц Университет Мюнстера,
Германия

Девид Фрэнсис Университет Хьюстона,
США

К.В. Хорошенков Брэдфордский университет,
Великобритания

Г.А. Юрьев ФГБОУ ВО МГППУ, Россия

Моделирование и анализ данных

Учредитель и издатель ФГБОУ ВО МГППУ

Издается с 2011 года. Периодичность: 4 раза в год.

Свидетельство регистрации СМИ: ПИ № ФС77-66444

Дата регистрации: 14.07.2016

Формат: 70×100/16

Все права защищены. Название журнала, логотип, рубрики, все тексты и иллюстрации являются собственностью ФГБОУ ВО МГППУ и защищены авторским правом. Перепечатка материалов и использование иллюстраций допускается только с письменного разрешения редакции.

© ФГБОУ ВО «Московский государственный психолого-педагогический университет», 2026, № 1

Modelling and Data Analysis

Editor-in-Chief:

L.S. Kuravsky MSUPE, Russia

Deputy Editors-in-Chief:

S.D. Kulik MEPHl, Russia

A.V. Panteleev MAI, Russia

N.I. Selvesyuk GosNIAS, Russia

The Editorial Council

Chairman of the Editorial Council:

G.G. Amosov MI RAS, Russia

The Members of the Editorial Council:

V.A. Barabanshikov MSUPE, Russia
Peter Bentler University of California,
USA

A.V. Gorbатов

L.S. Kuravsky MSUPE, Russia

Leonid Libkin University of Edinburgh,
UK

A.A. Margolis

V.V. Rubtsov MSUPE, Russia

D.V. Ushakov IP RAS, Russia

David Francis University Of Houston, USA

The Editorial Board:

K.K. Abgaryan IU RAS, Russia

G.G. Amosov MI RAS, Russia

M.V. Voronov MSUPE, Russia

E.L. Grigorenko Lomonosov Moscow State
University, Russia;
University of Houston, USA

V.K. Zakharov Lomonosov Moscow State
University, Russia

A.I. Kibzun MAI, Russia

Leonid Libkin University of Edinburgh,
UK

E.V. Lyapuntsova BMSTU, Russia

V.R. Milov NNSTU n.a. R.E. Alekseev,
Russia

A.V. Naumov MAI, Russia

D.L. Reviznikov MAI, Russia
Holling Heinz University Of Münster,
Germany

David Francis University Of Houston,
USA

K.V. Horoshenkov University of Bradford,
UK

G.A. Yuryev MSUPE, Russia

Modelling and Data Analysis

Founder & publisher MSUPE

Frequency: since 2011

Published: 4 times a year

The mass medium registration certificate:

PN № ФС77-66444.

From: 14.07.2016

Format: 70×100/16

All rights reserved. Journal title, logo, rubrics, all texts and images are the property of MSUPE and copyrighted. Using reprints and illustrations is allowed only with the written permission of the publisher.

© MSUPE, 2026, no. 1



МЕТОДИКА ПРЕПОДАВАНИЯ

Колачев Н.И., Адамский А.И., Дроздов Д.С.,

Заславский А.А., Подболотова М.И., Устюгова О.Б.

Моделирование развития компетентности
магистрантов на основе вариационного принципа 157

Воронов М.В.

Неопределенность, как важная составляющая
содержания современного высшего образования..... 177



METHOD OF TEACHING

*Kolachev N.I., Adamsky A.I., Drozdov D.S.,
Zaslavsky A.A., Podbolotova M.I., Ustyugova O.B.*

Modeling master's students' competence
development based on the variational principle..... 158

Voronov M.V.

Uncertainty as an important component
of the content of modern higher education 177

АНАЛИЗ ДАННЫХ | DATA ANALYSIS

Научная статья | Original paper

УДК 004.85

Повышение эффективности обнаружения угроз: методы классификации вредоносных программ на основе машинного обучения

А.А. Абедалхуссайд ✉, Е.В. Ляпунцова

Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего образования «Национальный исследовательский
технологический университет «МИСИС»» (НИТУ МИСИС), Москва, Россия
✉ m2000009@edu.misis.ru

Резюме

Сигнатурные методы и простые эвристики все хуже справляются с изменчивостью вредоносных программ, а полная динамическая проверка каждого файла в «песочнице» (изолированной среде запуска) слишком дорога по времени и ресурсам, поэтому на практике требуется автоматический отбор файлов с жестким контролем ложных тревог. Целью исследования стало повышение эффективности обнаружения угроз за счет построения переносимой модели классификации, которая сохраняет высокую полноту выявления вредоносных объектов при заранее заданном ограничении на ложные срабатывания и при управляемой нагрузке на песочницу. Гипотеза состояла в том, что порог принятия решения следует выбирать не «по тесту» и не по средним метрикам, а по бюджету ошибок: использовать внешнескладочные (out-of-fold, то есть полученные на объектах, не участвовавших в обучении конкретного подмножества модели) предсказания на безвредных файлах и задавать порог так, чтобы число ложных срабатываний не превышало K , после чего реализовать трехзонную политику «блокировать/отправлять на проверку/пропускать». Эксперименты выполнены на наборе UCI «Malware static and dynamic features VxHeaven and Virus Total» (6248 файлов, 1084 признака, далее после удаления константных признаков — 244), причём оценка проводилась не только в случайном разбиении, но и в двух сценариях



переносимости «обучение на одном источнике — тест на другом» (VxHeaven — VirusTotal), имитирующих смену домена данных. В качестве базовых моделей рассматривались линейные классификаторы и ансамбли деревьев; дополнительно проверялась калибровка оценок уверенности (приведение «сырых» оценок модели к более корректным вероятностям) для устойчивого порогования. Для доказательности контроль ложных срабатываний дополнялся точными биномиальными доверительными интервалами, что особенно важно при малом числе безвредных объектов в тесте. Основной результат получен для политики Stage12 (порог по K ложным срабатываниям на OOF-предсказаниях): в сценарии VxHeaven — VirusTotal достигнута полнота 0,8227 при доле файлов, уходящих в песочницу, 0,2092 и нулевой наблюдаемой доле ложных срабатываний; по сравнению с базовой «серой зоной» полнота выросла на +0,2816, а нагрузка на песочницу снизилась в 2,29 раза. В сценарии VirusTotal — VxHeaven полнота составила 0,9670 при доле файлов в песочнице 0,0735 и наблюдаемой доле ложных срабатываний 0,0084; по сравнению с «серой зоной» полнота выросла на +0,1234, а нагрузка на песочницу снизилась в 2,61 раза при сохранении того же уровня ложных срабатываний. Выводы фиксируют, что предложенный способ выбора порога по бюджету K на OOF-предсказаниях обеспечивает практически управляемый режим работы детектора: повышает полноту на переносимых сценариях и одновременно уменьшает объем ручной/динамической проверки, сохраняя контроль ложных тревог. Научная новизна заключается в обоснованной связке «переносимость + бюджет ложных срабатываний + трехзонная политика решений», где порог задается не оптимизацией усредненной метрики, а формализованным ограничением на ошибки, и подтверждается сравнением на межисточниковых сценариях и доверительными интервалами для FPR (доли ложных срабатываний).

Ключевые слова: вредоносные программы, машинное обучение, обнаружение угроз, переносимость моделей, контроль ложных срабатываний, выбор порога, песочница, доверительные интервалы, классификация с отказом

Для цитирования: Абедалхуссайн, А.А., Ляпунцова, Е.В. (2026) Повышение эффективности обнаружения угроз: методы классификации вредоносных программ на основе машинного обучения. *Моделирование и анализ данных*, 16(1), 7–26. <https://doi.org/10.17759/mda.2026160101>

Increasing the effectiveness of threat detection: machine-learning — based methods for malware classification

A.A. Abedlhussain ✉, E.V. Lyapunтова

National University of Science and Technology MISIS (NUST MISIS)

✉ m2000009@edu.misis.ru



Abstract

Signature-based detection and lightweight heuristics increasingly struggle with rapidly evolving malware, while running every file in a sandbox is too costly; therefore, practical malware triage requires automated decisions under a strict false-alarm budget. This study aims to improve threat detection efficiency by developing a transferable machine-learning classifier that preserves high malware recall while explicitly controlling false positives and keeping the sandbox workload manageable. We hypothesize that decision thresholds should be selected not by optimizing an average metric on a held-out test split, but via an explicit error budget: using out-of-fold predictions on benign files to set a blocking threshold such that the number of false positives does not exceed K , and then deploying a three-zone policy («block/send for review/allow»). Experiments were conducted on the UCI dataset «Malware static and dynamic features VxHeaven and Virus Total» (6,248 files; 1,084 features; reduced to 244 after removing constant features), with evaluation performed not only under a standard random split but also under two cross-source transfer scenarios (train on VxHeaven, test on VirusTotal, and vice versa), which emulate real-world domain shifts. We compared linear models and tree-based ensembles and additionally examined score calibration (mapping raw model scores to better-behaved probabilities) to support robust thresholding. To provide a conservative and evidence-based assessment of false positives under small benign test samples, we reported exact binomial confidence intervals for the false-positive rate. The main gain was achieved by the proposed Stage12 policy (K -based thresholding from out-of-fold benign predictions): in the VxHeaven — VirusTotal scenario, recall reached 0.8227 with a sandbox review rate of 0.2092 and zero observed false positives; compared to the baseline gray-zone policy, recall increased by +0.2816 while the review load decreased by 2.29×. In the VirusTotal — VxHeaven scenario, recall reached 0.9670 with a review rate of 0.0735 and an observed false-positive rate of 0.0084; relative to the gray-zone baseline, recall increased by +0.1234 and the review load decreased by 2.61× at the same observed false-positive level. These results demonstrate that K -budgeted, out-of-fold threshold selection enables an operationally controlled detection regime under domain shift: it improves recall and reduces the need for expensive sandboxing while maintaining a defensible false-alarm control. The scientific novelty is an evidence-backed integration of transfer evaluation, explicit false-positive budgeting, and a three-zone decision policy, where the operating point is determined by a formal error constraint rather than by optimizing a single average score.

Keywords: malware detection, machine learning, threat classification, transferability, false-positive control, threshold selection, sandbox triage, confidence intervals, learning with rejection

For citation: Abedlhussain, A.A., Lyapunтова, E.V. (2026). Increasing the effectiveness of threat detection: machine-learning-based methods for malware classification. *Modelling and Data Analysis*, 16(1), 7–26 (In Russ.). <https://doi.org/10.17759/mda.2026160101>



Введение

Поток файлов, попадающих в контуры корпоративной защиты (почта, веб-шлюзы, рабочие станции, репозитории), неизбежно включает долю неизвестных образцов, для которых сигнатурные правила и репутационные списки оказываются недостаточными. Ошибка первого рода в подобных задачах воспринимается не как «обычная неточность модели», а как прямой простой бизнеса: ложная блокировка легитимного файла ломает цепочки поставки, обновления и рабочие процессы. Нагрузка на «песочницу» (изолированную среду анализа) и очередь ручной верификации при этом растет быстрее, чем возможности аналитиков, поэтому практическая ценность детектора определяется не только полнотой обнаружения, но и управляемостью ложных срабатываний.

Поведенческие признаки, извлекаемые при запуске файла в изолированной среде, дают модели дополнительную опору там, где статические сигнатуры обходятся упаковщиками и обфускацией. Сложность переносимости таких моделей повышается из-за неоднородности источников данных и сценариев сбора: распределения признаков смещаются между наборами, а статистика «нормы» меняется в зависимости от парка программ и политик эксплуатации. Связанные проблемы — дефицит репрезентативных размеченных выборок, необходимость воспроизводимого контроля качества данных и риск «переобучения на источник» — в последние годы обсуждаются как отдельное направление исследований, включая попытки синтетического расширения данных для задач обнаружения вредоносного ПО (Стародубов, Боршевников, Селин, 2025).

Систематические обзоры по обнаружению вредоносных программ на основе методов искусственного интеллекта показывают устойчивый тренд к признаковым моделям, сочетающим интерпретируемые индикаторы (например, счетчики действий и статистики секций) и более сложные агрегаты поведения, однако подчеркивают уязвимость к смещению домена и различиям протоколов оценки. Наряду с ростом качества по метрикам ранжирования (ROC-AUC, PR-AUC) аналитики отмечают «операционную пропасть»: превосходство по кривым не гарантирует приемлемого режима эксплуатации, если модель не контролирует долю ложных блокировок и создает избыточный поток на проверку (Gaber, Ahmed, Janicke, 2024; Kan et al., 2024).

Контроль ложноположительных срабатываний удобно формализовать через ограничение на долю ошибочно заблокированных доброкачественных файлов (false positive rate, FPR), связывая требования безопасности с требованиями непрерывности процессов. Отказ от бинарного решения в пользу режима «воздержаться и отправить на проверку» давно рассматривается как рациональная стратегия в задачах с высокой ценой ошибки, поскольку позволяет переводить неоднозначные случаи в управляемую очередь. Современные обзоры по «классификации с отказом» (reject option) описывают математическую постановку, способы выбора порогов



и критерии оптимальности, прямо соответствующие практикам песочницы и ручной обработки (Hendrickx et al., 2024).

Предлагаемая в статье постановка рассматривает детектор как элемент управленческой политики, где решение «блокировать / пропустить / направить на проверку» задается двумя порогами по скору модели. Нижний порог отделяет безопасные (по мнению модели) файлы от «серой зоны», верхний порог выделяет уверенно вредоносные образцы, а промежуток формирует очередь песочницы. Научная новизна работы связывается с процедурой выбора порога блокировки по обучающим данным доброкачественного класса в режиме out-of-fold (вне-фолдовом), что позволяет интерпретировать настройку как бюджет на число ложных блокировок (K) и сопоставлять решения между источниками данных в одинаковых операционных ограничениях (FPR-бюджет и допустимая доля проверок) без «подгонки под тест».

Практический смысл исследования заключается в повышении эффективности обнаружения угроз при заданном уровне риска ложной блокировки и ограниченной пропускной способности песочницы. Для достижения цели решаются следующие задачи:

1. Формируется согласованный признаковый набор и протокол разделения данных, моделирующий перенос между источниками;
2. Сравниваются базовые алгоритмы классификации и режимы пороговой настройки, ориентированные на ограничение FPR;
3. Строится и оценивается трехзонная политика принятия решений, где «серая зона» минимизирует нагрузку на проверку при сохранении требуемой полноты обнаружения.

Материалы и методы

Эксперименты выполнены на табличном наборе статических и динамических признаков исполнимых файлов, где каждый объект описывается вектором числовых характеристик, а целевая переменная принимает значения 0 (benign, «безвредный») и 1 (malware, «вредоносный») (Malware static and dynamic features..., 2019). Источники данных отражают реалистичную неоднородность «полевых» потоков: вредоносные образцы собраны из различных коллекций (в частности, семейств, попадающих в публичные хранилища), а «безвредный» класс сформирован отдельно, что задает типичную для прикладной кибербезопасности задачу переносимости между доменами (domain shift) — изменением распределения признаков при неизменной семантике метки (Malware static and dynamic features..., 2019; Botacin, Gomes, 2024; Kan et al., 2024).

Матрица признаков после унификации и отбрасывания константных столбцов имеет размер (6248, 244), что соответствует 6248 файлам и 244 информативным признакам, одинаково заданным для всех сценариев разбиения. Таблица 1 фиксирует состав набора данных и итоговую размерность пространства признаков, используемую во всех последующих экспериментах.



Таблица 1 / Table 1

Сводка набора данных и пространства признаков Dataset and feature space summary

Показатель	Значение
Объектов, всего (n)	6248
Классы	0 (benign), 1 (malware)
Признаков после очистки	244
Формат признаков	числовые табличные признаки (статические/динамические)

Сопоставление методов проводилось в трех сценариях, различающихся степенью «разрыва» между обучением и тестированием. Сценарий А моделирует квазистандартную оценку при случайном разбиении, а сценарии В и С реализуют проверку переносимости при смене домена: обучение на одном источнике вредоносных образцов и тестирование на другом. Таблица 2 задает логику разбиений и контрольные объемы тестовых подмножеств, на которых рассчитывались метрики.

Таблица 2 / Table 2

Сценарии разбиения для оценки переносимости Splits used to evaluate transferability

Сценарий	Идея разбиения	Роль в статье	Размер теста
A_random_by_source	случайное разбиение при контроле источников	базовая оценка качества	1250
B_train_vx_test_vt	обучение на домене vx, тест на vt	переносимость 1	3074
C_train_vt_test_vx	обучение на домене vt, тест на vx	переносимость 2	2817

Сравнение построено на четырех семействах моделей, представляющих распространенные классы алгоритмов для табличных признаков: линейная логистическая регрессия, линейный метод опорных векторов, случайный лес и градиентный бустинг по гистограммам. Обучение выполнялось в библиотеке scikit-learn со стандартной схемой «fit — score», а воспроизводимость обеспечивалась фиксированием генераторов случайных чисел там, где применимо (в первую очередь для ансамблевых методов) (Scikit-learn, n.d.). Выбор именно этих моделей мотивирован практической применимостью в задачах детектирования: линейные методы дают интерпретируемый «скоринг», а ансамбли обычно обеспечивают устойчивость на разнородных и неидеально масштабированных признаках (Scikit-learn, n.d.).

В качестве базовых интегральных метрик дискриминации использовались площадь под ROC-кривой (ROC AUC) и площадь под кривой «точность–полнота» (PR AUC). ROC AUC отражает способность ранжировать объекты независимо от порога, а PR AUC



лучше согласуется с ситуациями, где положительный класс (вредоносные файлы) существенно важнее с точки зрения пропусков и операционных рисков.

Эксплуатационные решения в анти-контрамах редко принимаются «по факту класса»; на практике требуется пороговое правило по скору, которое переводит модельный балл в действия (блокировать/отправить на ручную проверку/пропустить). Для приведения скорингов разных моделей к сопоставимой шкале дополнительно применялась калибровка вероятностей с помощью `CalibratedClassifierCV` в сигмоидальной постановке (вариант, близкий по смыслу к `Platt scaling`), обучаемой на внутренних разбиениях обучающей части (`Scikit-learn`, n.d.). Калибровка использовалась как отдельная ветка эксперимента, чтобы проверить, меняется ли устойчивость пороговых политик при переходе от «сырых» скорингов к вероятностно интерпретируемым оценкам (`Scikit-learn`, n.d.).

Пороговая настройка выполнена в логике ограничений на ложноположительные срабатывания (`false positive rate`, `FPR`) на безвредном классе, поскольку именно ложные блокировки формируют наибольшие операционные издержки. В работе использованы три взаимосвязанные схемы выбора порога:

1. Фиксация `FPR` по `ROC` (`fixed-FPR thresholding`). Порог подбирался так, чтобы эмпирический `FPR` на контрольной части не превышал заданный бюджет (например, 0.01), после чего оценивалась полнота (`Recall`) по вредоносному классу при этом же пороге.
2. Политика «`block/review/allow`» с «серой зоной» (`gray zone`). Два порога задают область автоматического блокирования ($\text{score} \geq \text{thr_block}$), область автоматического пропуска ($\text{score} < \text{thr_allow}$) и промежуточный интервал ($\text{thr_allow} \leq \text{score} < \text{thr_block}$), направляемый в песочницу (ручная/дополнительная проверка). Качество такой политики измеряется не только `Recall` и `FPR`, но и долей объектов, уходящих в песочницу (`ReviewRate`), а также долей «утечек» вредоносных файлов в разрешенную область (`LeakRate`) при заданном ограничении на допустимую утечку.
3. Порог по ограничению на число ложноположительных `K` (`K-FP thresholding`). Порог выбирался по обучающей части (через `out-of-fold` оценки), чтобы число ложноположительных блокировок на безвредных примерах не превышало `K`. Интерпретация `K` как «допустимого числа ошибок» удобно согласуется с инженерным планированием риска при малом числе доступных безвредных тестовых объектов. Графическая фиксация точек `K` на кривой компромисса `Recall–ReviewRate` приведена на рис. 1 (пример для сценария В) и рис. 2 (пример для сценария С), где подписи у точек соответствуют выбранному значению `K`.

Чувствительность и специфичность пороговых политик оценивались через матрицу ошибок (`TP`, `FP`, `TN`, `FN`), из которой рассчитывались `Recall`, `Precision`, `F1` и `FPR`. Малое абсолютное число безвредных файлов в тесте приводит к «квантованию» `FPR`, поэтому для отчетности дополнительно использовались доверительные интервалы для доли `FP` на «безвредном» классе, вычисляемые как интервальная оценка параметра биномиального распределения; формат интервалов применялся



как средство аккуратной интерпретации нулевого FPR на конечной тестовой выборке, а не как доказательство отсутствия риска (Wallis, 2013).

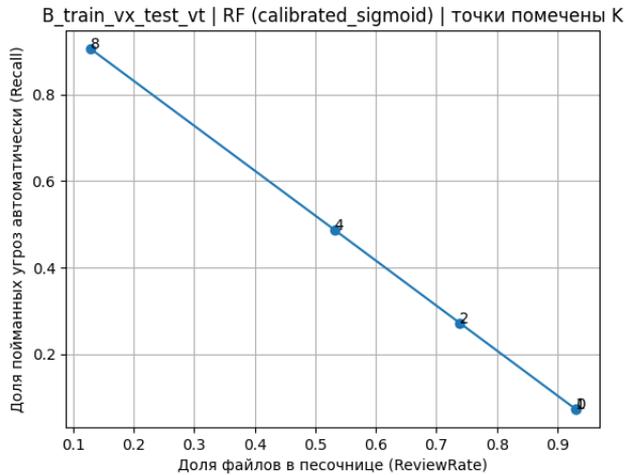


Рис. 1. Компромисс Recall–ReviewRate с маркировкой порогов К по FP (B_train_vx_test_vt, RF calibrated)

Fig. 1. Recall–ReviewRate trade-off with K-FP marked thresholds (B_train_vx_test_vt, RF calibrated)

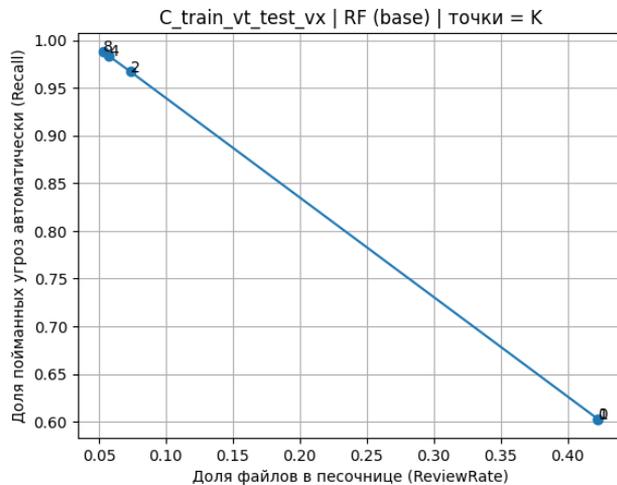


Рис. 2. Компромисс Recall–ReviewRate с маркировкой порогов К по FP (C_train_vt_test_vx, RF base)

Fig. 2. Recall–ReviewRate trade-off with K-FP marked thresholds (C_train_vt_test_vx, RF base)



Результаты

Пороговая настройка по «случайному» сценарию разбиения `A_random_by_source` дала почти идеальные значения ROC-AUC и PR-AUC для деревьев решений и бустинга, а также высокую полноту при строгом ограничении на ложные срабатывания. Переносимость в межисточниковых сценариях `B_train_vx_test_vt` и `C_train_vt_test_vx` оказалась заметно ниже, что согласуется с наблюдениями о смещениях выборки и переоценке качества при неаккуратных протоколах оценки в задачах детектирования вредоносных объектов (Botacin, Gomes, 2024; Gaber, Ahmed, Janicke, 2024; Kan et al., 2024). Различие проявилось именно в рабочей точке с контролем FPR, где влияние малых доменных сдвигов усиливается из-за необходимости поднимать порог блокировки.

Таблица 3 фиксирует лучшую базовую конфигурацию при целевом ограничении `FPR_target = 0,01` без «серой зоны» (один порог блокировки). В сценарии `A_random_by_source` модель HGB обеспечивает `Recall = 0,9708` при `FPR = 0`, тогда как в `B_train_vx_test_vt` полнота падает до `0,5320` при том же нулевом числе ложных блокировок. Дискретность FPR на тесте обусловлена малым числом безопасных объектов (benign) в контрольной части: при `n_benign = 119` один ложноположительный случай соответствует шагу $1/119 \approx 0,0084$, поэтому достижение «точно 0,01» статистически невозможно, и фактически наблюдаются значения 0; 0,0084; 0,0168 и т. д.

Таблица 3 / Table 3

Базовая переносимость при `FPR_target = 0,01` (однопороговая блокировка)

Baseline portability at `FPR_target = 0.01` (single blocking threshold)

Сценарий (split)	Лучшая базовая модель	ROC-AUC	PR-AUC	Порог блокировки (thr)	FPR	Recall
<code>A_random_by_source</code>	HGB	0,999844	0,999984	0,999884	0,0000	0,9708
<code>B_train_vx_test_vt</code>	HGB	0,990707	0,999575	0,996054	0,0000	0,5320
<code>C_train_vt_test_vx</code>	HGB	0,996811	0,999847	0,999318	0,0084	0,8347

Компромисс между долей автоматической блокировки и нагрузкой на песочницу при переносимом сценарии `B_train_vx_test_vt` наглядно раскрывает кривая «Recall vs ReviewRate» для HGB после сигмоидной калибровки (рис. 3). Падение Recall при снижении ReviewRate на этом графике оказывается почти линейным в широком диапазоне, поэтому экономия ручной проверки требует заранее выбранного «бюджета на пропуски» — иначе снижение нагрузки быстро переходит в потерю значимой доли угроз. Величина ReviewRate в данной работе трактуется как доля объектов, попадающих в «серую зону» и уходящих на дополнительную проверку, тогда как Recall относится к автоматическому обнаружению угроз без участия песочницы.

Механизм «серой зонь» (Stage8) обеспечил гарантии по ложным блокировкам и утечкам за счет расширения области проверки, однако цена за контроль ошибок на переносимом сценарии `B_train_vx_test_vt` оказалась высокой. Конфигурация Stage8



с нулевой утечкой и $FPR_target = 0,01$ дала $ReviewRate \approx 0,48–0,51$ при автоматической полноте $Recall \approx 0,51–0,54$ (табл. 4), поэтому почти половина потока требует песочницы. Столбчатые диаграммы нагрузки на песочницу по сценарию В (рис. 4) подтверждают, что Stage8 оказывается наиболее «тяжелым» режимом среди сравниваемых политик.

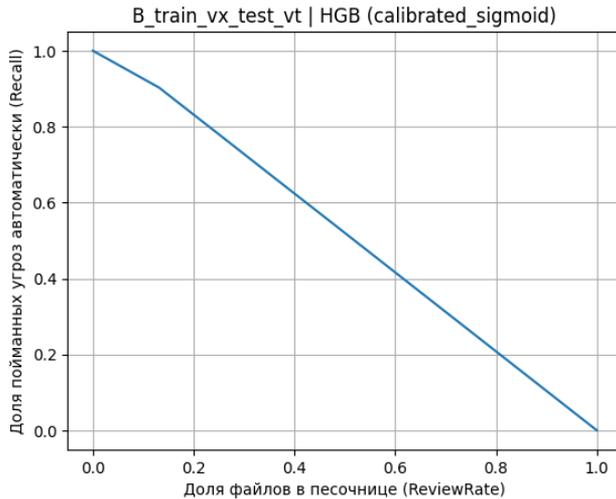


Рис. 3. Компромисс «доля найденных угроз автоматически (Recall) — доля файлов в песочнице (ReviewRate)» для сценария B_train_vx_test_vt (HGB, sigmoid-калибровка)

Fig. 3. Trade-off between automatic threat detection (Recall) and sandbox workload (ReviewRate) for B_train_vx_test_vt (HGB, sigmoid calibration)

Подбор порога по out-of-fold-критерию (Stage10, «OOF FPR») улучшил баланс переносимости в сценарии B_train_vx_test_vt, смещая модель в режим более уверенной автоматической блокировки при нулевых ложных блокировках на тесте. Лучшая конфигурация Stage10 для В (RF calibrated_sigmoid) достигла $Recall = 0,7729$ при $ReviewRate = 0,2570$ и $FPR = 0$ (табл. 4), сокращая песочницу относительно Stage8 почти вдвое без потери ограничения по FPR. Сценарий C_train_vt_test_vx показал важное ограничение подхода: выбранная по OOF-ограничению настройка для RF дала очень высокую полноту ($Recall = 0,9863$), но превысила бюджет ложных блокировок ($FPR = 0,0168 > 0,01$), поэтому подобная конфигурация не подходит для регламентов, где ложная блокировка безопасного файла считается инцидентом.

Критерий «К по FP» на out-of-fold-контуре (Stage12) дал наиболее стабильный компромисс между переносимостью и нагрузкой на песочницу при заданном «жестком» контроле ложных срабатываний. В сценарии B_train_vx_test_vt финальная политика Stage12 (RF base, K=8) обеспечила $FPR = 0$ на тесте ($FP=0$ из 119 benign) при $Recall = 0,8227$ и $ReviewRate = 0,2092$ (табл. 6), что одновременно лучше Stage8 и Stage10 по полноте и по нагрузке. Дискретные точки К на кривой компромисса для RF в сценарии



В (рис. 5) выделяют выбранный режим как область, где дополнительное снижение ReviewRate ведет к непропорциональному росту пропусков, тогда как переход к более мягкой блокировке дает умеренное улучшение Recall при заметном росте песочницы.

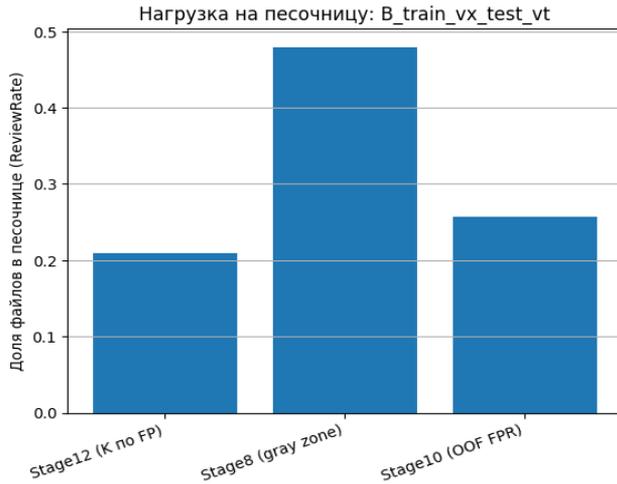


Рис. 4. Нагрузка на песочницу (ReviewRate) при сравнении политик Stage8/Stage10/Stage12 для сценария B_train_vx_test_vt

Fig. 4. Sandbox workload (ReviewRate) when comparing Stage8/Stage10/Stage12 policies for B_train_vx_test_vt

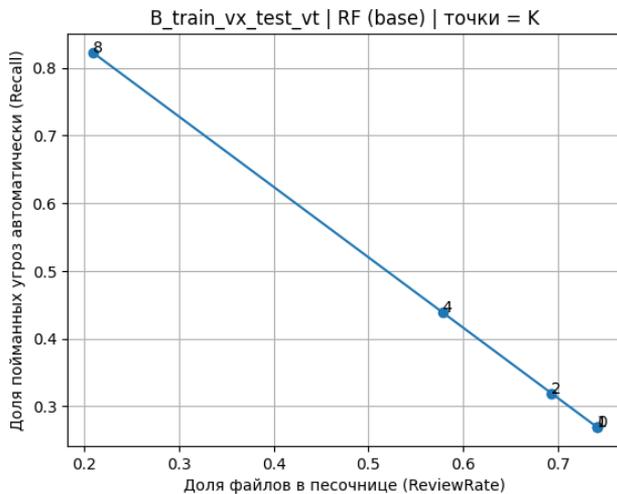


Рис. 5. Компромисс «Recall — ReviewRate» с отмеченными точками К для сценария B_train_vx_test_vt (RF, без калибровки)

Fig. 5. Recall–ReviewRate trade-off with marked K points for B_train_vx_test_vt (RF, uncalibrated)



Сводная таблица сравнения политик (табл. 4) и диаграмма компромисса «Recall vs ReviewRate» (рис. 6) показывают устойчивую тенденцию: переносимые сценарии выигрывают от политики Stage12, если целевым ограничением выступает FPR-бюджет, а песочница рассматривается как ограниченный ресурс. Для C_train_vt_test_vx Stage12 (RF base, K=2) удержал FPR = 0,0084 внутри бюджета и дал Recall = 0,9670 при ReviewRate = 0,0735 (табл. 6), оставаясь значительно легче по песочнице, чем Stage8 (рис. 7). При этом Stage10 в сценарии С демонстрирует привлекательную нагрузку (ReviewRate = 0,0547), но нарушает ограничение на ложные блокировки, что делает сравнение принципиально нерелевантным для практик с фиксированным FPR-регламентом.

Таблица 4 / Table 4

Сравнение политик Stage8 vs Stage10 vs Stage12
Policy comparison (Stage8 vs Stage10 vs Stage12)

split	method	model	model_stage	Recall	ReviewRate	FPR	note
B_train_vx_test_vt	Stage8 (gray zone)	HGB	calibrated_ sigmoid	0,541117	0,479831	0,0000	Leak=0, FPR_target=0.01
B_train_vx_test_vt	Stage10 (OOF FPR)	RF	calibrated_ sigmoid	0,772927	0,256994	0,0000	FPR_budget_OK
B_train_vx_test_vt	Stage12 (K по FP)	RF	base	0,822673	0,209174	0,0000	K_fp_train_oof=8
C_train_vt_test_vx	Stage8 (gray zone)	HGB	calibrated_ sigmoid	0,843588	0,191693	0,0084	Leak=0, FPR_target=0.01
C_train_vt_test_vx	Stage10 (OOF FPR)	RF	base	0,986286	0,054668	0,0168	FPR_budget превышен
C_train_vt_test_vx	Stage12 (K по FP)	RF	base	0,967013	0,073482	0,0084	K_fp_train_oof=2

Прирост Stage12 относительно альтернативных политик количественно зафиксирован в табл. 5. Для B_train_vx_test_vt переход от Stage8 к Stage12 увеличил Recall на +0,2816 при снижении ReviewRate в 2,29 раза, а сравнение со Stage10 дало более умеренное улучшение полноты +0,0497 при дополнительном снижении нагрузки на песочницу. Для C_train_vt_test_vx Stage12 сохраняет выигрыш относительно Stage8 (рост Recall +0,1234 при снижении ReviewRate в 2,61 раза), а отрицательная разность Recall относительно Stage10 интерпретируется только в контексте того, что Stage10 в этом сценарии не удовлетворяет бюджетному ограничению по FPR.

Доверительные границы для FPR в финальной политике Stage12 рассчитаны по безопасным объектам теста и приведены в табл. 6, что важно при малом n_benign (Wallis, 2013). Нулевой наблюдаемый FPR в сценарии В формально совместим с ненулевой верхней границей из-за ограниченной мощности проверки (119 безопасных объектов), поэтому практическая эксплуатация требует накопления расширенного пула benign-примеров и периодической перепроверки порогов при изменении профиля входного трафика (Botacin, Gomes, 2024; Kan et al., 2024). Разница между сценарием В и С по устойчивости к доменному сдвигу дополнительно подчеркивает необходимость держать переносимые протоколы оценки в центре экспериментальной



программы, а не использовать случайное разбиение как единственный ориентир (Gaber, Ahmed, Janicke, 2024; Kan et al., 2024).



Рис. 6. Переносимость: компромисс «Recall — ReviewRate» для сопоставления Stage8, Stage10 и Stage12 в сценариях B_train_vx_test_vt и C_train_vt_test_vx

Fig. 6. Portability: Recall–ReviewRate trade-off comparing Stage8, Stage10, and Stage12 in B_train_vx_test_vt and C_train_vt_test_vx

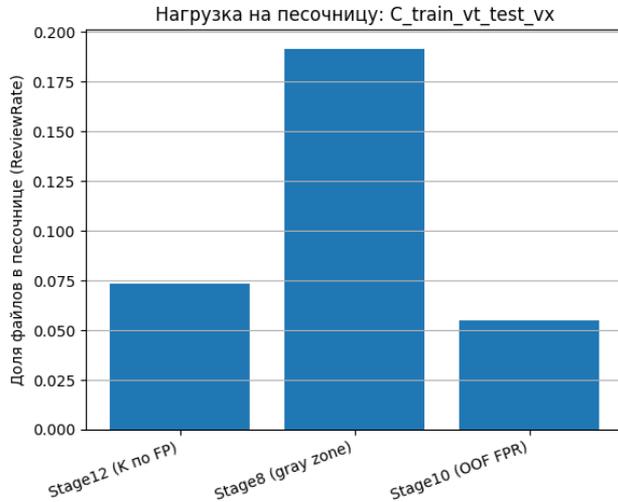


Рис. 7. Нагрузка на песочницу (ReviewRate) при сравнении политик Stage8/Stage10/Stage12 для сценария C_train_vt_test_vx

Fig. 7. Sandbox workload (ReviewRate) when comparing Stage8/Stage10/Stage12 policies for C_train_vt_test_vx



Таблица 5 / Table 5

Выигрыш Stage12 относительно Stage8 и Stage10
Gains of Stage12 vs Stage8 and Stage10

split	compare	dRecall_ abs	dReview_ abs	Review_ reduction_x	base_Recall — new_Recall	base_ReviewRate — new_ReviewRate	base_FPR — new_FPR
B_train_vx_test_vt	Stage12 vs Stage8	+0,281557	-0,270657	2,293935	0,541117—0,822673	0,479831—0,209174	0,0000—0,0000
B_train_vx_test_vt	Stage12 vs Stage10	+0,049746	-0,047820	1,228616	0,772927—0,822673	0,256994—0,209174	0,0000—0,0000
C_train_vt_test_vx	Stage12 vs Stage8	+0,123425	-0,118211	2,608696	0,843588—0,967013	0,191693—0,073482	0,0084—0,0084
C_train_vt_test_vx	Stage12 vs Stage10	-0,019274	+0,018814	0,743961	0,986286—0,967013	0,054668—0,073482	0,0168—0,0084

Таблица 6 / Table 6

Финальная политика Stage12 ($FP \leq 1$ на тесте, порог выбран по K на OOF)
Final Stage12 policy ($FP \leq 1$ on test, threshold selected via K on OOF)

split	K_fp_train_oof	thr_block	Test_FPR (CI_low; CI_high)	Test_Recall	Test_ReviewRate	TP	FP	TN	FN
B_train_vx_test_vt	8	0,632	0,0000 (0,0000; 0,0305)	0,822673	0,209174	2431	0	119	524
C_train_vt_test_vx	2	0,818	0,0084 (0,0002; 0,0459)	0,967013	0,073482	2609	1	118	89

Обсуждение результатов

Практическая разница между «случайным» сценарием А и межисточниковыми сценариями В/С проявилась не в ранжировании (ROC-AUC и PR-AUC оставались высокими), а в рабочей точке с контролем ложных блокировок. Пороговые политики усиливают эффект доменного сдвига, потому что небольшое смещение распределения скоринга резко меняет долю объектов, пересекающих высокий порог автоматической блокировки. Высокие значения AUC в таком режиме перестают быть гарантией полезности, если регламент требует удерживать ложные срабатывания в пределах жесткого бюджета (Gaber, Ahmed, Janicke, 2024; Kan et al., 2024).

Сильная дискретность FPR на тесте при малом числе безопасных файлов сформировала важное ограничение интерпретации. Значение FPR «0» в выборке из 119 benign означает отсутствие ошибок в наблюдении, но не означает отсутствия риска в эксплуатации, где поток и состав «безвредных» объектов меняются. Доверительная верхняя граница для доли ложных блокировок в таких условиях остается заметной, поэтому устойчивость политики разумно подтверждать дополнительными «чистыми» наборами и регулярной переоценкой порогов на накопленной статистике (Wallis, 2013).



Политика «серой зоны» дала предсказуемую, но дорогую по ресурсу песочницы стабилизацию поведения при переносимости. Регламент $Leak=0$ фактически заставляет переносить значительную часть потока в проверку, потому что модель обязана избегать даже единичных «пропусков» в разрешенную область. Поведение оказалось особенно жестким в сценарии В, где вредоносный домен теста отличается сильнее: снижение утечек оплачивается расширением зоны ручного контроля, а не ростом автоматической полноты (Hendrickx et al., 2024; Liang, Peng, Sun, 2024).

Подбор порога по out-of-fold ограничению (Stage10) продемонстрировал, что «правильная» оценка порога внутри обучения может существенно уменьшить песочницу без нарушения FPR на части переносимых сценариев. Проблема проявилась при смене домена в противоположном направлении, где политика, корректная по внутренней оценке, все же превысила бюджет ложных блокировок на тесте. Нестабильность объясняется тем, что OOF-настройка остается зависимой от распределения обучающего домена, а бюджет по ошибкам задается именно по benign-классу, чьи свойства в разных доменах меняются особенно заметно (Botacin, Gomes, 2024; Kan et al., 2024).

Критерий «К по FP» (Stage12) оказался наиболее управляемым с инженерной точки зрения, поскольку связывает порог не с долей ошибок, а с допустимым количеством ложных блокировок на контролируемом контуре. Выбор К задает понятный риск-профиль: небольшой К удерживает ложные блокировки, а рост К повышает автоматическую полноту ценой расширения допустимых ошибок на benign. Переход к такому параметру делает обсуждение порогов ближе к языку регламентов и эксплуатационных ограничений, где ответственность часто формулируется через «сколько ошибок допустимо» в заданном объеме контроля (Hendrickx et al., 2024; Hasan et al., 2025; Liang, Peng, Sun, 2024).

Сравнение базовой и калиброванной веток показало, что калибровка вероятностей полезна не как способ «повысить AUC», а как способ сделать шкалу скоринга более согласованной для пороговой политики. У части конфигураций калибровка улучшала компромисс Recall–ReviewRate, но эффект не был универсальным и зависел от домена теста. Роль калибровки в детектировании угроз разумнее трактовать как инструмент стабилизации принятия решений по порогам, а не как гарантированный «усилитель» качества модели (Ojeda et al., 2023; Scikit-learn, n.d.; Shaker, Hüllermeier, 2025).

Выбор финальной модели в виде случайного леса без калибровки в Stage12 имеет прагматичную интерпретацию: стабильность порогового поведения и переносимость оказались важнее небольших различий в интегральных метриках. Ансамбль деревьев демонстрирует устойчивость к неоднородным признакам и разреженности, а пороговая политика по К дополнительно снижает чувствительность к «форме» скоринга, опираясь на контроль ошибок по benign-примерам (Scikit-learn, n.d.; Shaker, Hüllermeier, 2025). Совместное действие этих факторов объясняет, почему финальная политика дала выигрыш по песочнице при сохранении строгого контроля ложных блокировок.

Ограничения исследования связаны с природой открытого набора данных и с размером безопасного теста. Доля benign в контрольных частях невелика, поэтому редкие ложные блокировки оцениваются с высокой неопределенностью, а переносимость



по «безвредному» классу требует более широкой проверки на независимых источниках (Wallis, 2013). Дополнительный риск несет устаревание признаков профилей и изменение тактик злоумышленников, поэтому переносимость во времени и периодическое обновление порогов должны рассматриваться как обязательные элементы практического внедрения, а не как опциональная доработка (Escudero García et al., 2023; Molina-Coronado et al., 2023; Kan et al., 2024).

Практическая ценность предложенного подхода проявляется в связке «регламент — измерение — порог». Регламент задает ограничение на ложные блокировки, измерение переводит его в проверяемый критерий на контрольном контуре, а пороговая политика обеспечивает управляемую нагрузку на песочницу при максимизации автоматического обнаружения. Конструкция Stage12 удобна для эксплуатации тем, что параметр K напрямую согласуется с ограниченными ресурсами проверки и допусаемым числом инцидентов ложной блокировки в заданном объеме контроля (Hendrickx et al., 2024; Hasan et al., 2025).

Заключение

Политика принятия решения при детектировании вредоносных программ определяется не только качеством ранжирования, но и тем, как модель переводится в действие при жестком контроле ложных блокировок. Эксперименты на наборе UCI 541 показали, что высокий ROC-AUC и PR-AUC в «случайном» разбиении не гарантируют переносимости при смене источника данных: в межисточниковых сценариях критической становится именно рабочая точка, где доля ложных блокировок ограничена малым бюджетом, а дискретность оценки по benign-классу усиливает неопределенность.

Поставленная цель исследования достигнута, задачи решены:

1. Подготовлен воспроизводимый протокол загрузки и согласования признаков для объединенного набора статических и динамических характеристик;
2. Реализованы сценарии оценки, разделяющие «удобный» случай (случайное смешивание источников) и переносимые режимы (обучение на одном источнике, тест на другом);
3. Построены базовые модели машинного обучения и показано, что переносимость ухудшается прежде всего в пороговых режимах при фиксированном бюджете ложных блокировок;
4. Разработаны и сопоставлены три политики порогового контроля с учетом эксплуатационного ресурса песочницы: «серая зона» (Stage8), порог по out-of-fold ограничению (Stage10) и порог по критерию K ложноположительных (Stage12);
5. Получено доказательное преимущество политики Stage12 как более управляемой и переносимой при заданных ограничениях на ложные блокировки.

Ключевой практический результат связан с тем, что переход от «серой зоны» к порогу, выбранному по критерию K ложноположительных на out-of-fold контуре, снижает нагрузку на песочницу без потери контроля FPR и при этом повышает долю автоматически обнаруженных угроз в переносимых сценариях. В сценарии В



(обучение на VxHeaven, тест на VirusTotal) Stage12 одновременно увеличил полноту по сравнению с Stage8 и уменьшил долю файлов, уходящих в песочницу; в сценарии С (обучение на VirusTotal, тест на VxHeaven) Stage12 удержал ложные блокировки внутри бюджета и обеспечил высокую полноту при существенно меньшей нагрузке на песочницу, чем у «серой зоны». Практическая интерпретация такого выигрыша проста: в условиях ограниченного ресурса песочницы и строгого контроля ошибок по безопасным объектам полезнее не усложнять модель, а формализовать политику порога так, чтобы параметр настройки соответствовал регламенту в терминах «допустимого числа ошибок», а не абстрактной доли.

Научная значимость работы выражается в уточнении того, как следует доказывать эффективность методов машинного обучения для обнаружения угроз при эксплуатационных ограничениях. Сопоставление политик показало, что переносимость следует оценивать не только по интегральным метрикам, но и по устойчивости выбранного порога в межссточниковом переносе, а бюджет ложных блокировок нужно задавать как первичное ограничение при проектировании режима работы. Результаты поддерживают вывод о том, что корректная «инженерная» постановка задачи — с формальным бюджетом ложных блокировок и измеримой нагрузкой на песочницу — способна дать больший прикладной эффект, чем попытки улучшать качество одной лишь модельной архитектурой.

Ограничения исследования связаны с малым числом безопасных объектов в тестовых частях, что делает оценку FPR дискретной и задает широкую верхнюю границу риска при наблюдаемом нуле ошибок. Расширение пула benign-примеров и проверка на дополнительных независимых источниках данных рассматриваются как первое направление продолжения работы. Второе направление связано с переносимостью во времени: при изменении профиля входного потока и эволюции вредоносных семейств потребуется регулярная переоценка порогов и контроль деградации политики Stage12 на новых периодах.

The study's **limitations** are related to the small number of safe (benign) objects in the test splits, which makes the FPR evaluation discrete and yields a broad upper bound on risk when zero errors are observed. Expanding the pool of benign examples and validating on additional independent data sources are considered the first direction for future work. The second direction concerns temporal transferability: as the profile of the incoming stream changes and malicious families evolve, regular re-estimation of thresholds and monitoring of Stage12 policy degradation on new time periods will be required.

Список источников / References

1. Архипов, А.Н., Кондаков, С.Е. (2024). Обнаружение обфусцированных эксплоитов в файлах неисполняемых форматов. Вопросы кибербезопасности, 6(64), 65—75. <https://doi.org/10.21681/2311-3456-2024-6-65-75>



- Arkhipov, A.N., Kondakov, S.E. (2024). Detecting obfuscated exploits in non-executable format files. *Cybersecurity issues*, 6(64), 65–75. (In Russ.). <https://doi.org/10.21681/2311-3456-2024-6-65-75>
2. Калинин, С.А., Голуб, М.С., Коркин, Д.А., Пятковский, И.В. (2022). Детектирование программ-шифровальщиков с использованием трассировки событий и методов машинного обучения. *Безопасность информационных технологий*, 29(3), 82–93. <https://doi.org/10.26583/bit.2022.3.07>
Kalinkin, S.A., Golub, M.S., Korkin, D.A., Pyatovskii, I.V. (2022). Detecting ransomware using event tracing and machine learning methods. *Information Technology Security*, 29(3), 82–93. (In Russ.). <https://doi.org/10.26583/bit.2022.3.07>
 3. Костогрызов, А.И., Нистратов, А.А. (2023). Анализ угроз злонамеренной модификации модели машинного обучения для систем с искусственным интеллектом. *Вопросы кибербезопасности*, 5(57), 9–24. <https://doi.org/10.21681/2311-3456-2023-5-9-24>
Kostogryzov, A.I., Nistratov, A.A. (2023). Threat analysis of malicious modification of a machine learning model for artificial intelligence systems. *Cybersecurity issues*, 5(57), 9–24. (In Russ.). <https://doi.org/10.21681/2311-3456-2023-5-9-24>
 4. Котенко, И.В., Хмыров, В.Д. (2022). Анализ моделей и методов обнаружения и атрибуции атак на основе искусственного интеллекта и машинного обучения. *Вопросы кибербезопасности*, 4(50), 52–79. <https://doi.org/10.21681/2311-3456-2022-4-52-79>
Kotenko, I.V., Khmyrov, V.D. (2022). Analysis of models and methods for attack detection and attribution based on artificial intelligence and machine learning. *Cybersecurity issues*, 4(50), 52–79. (In Russ.). <https://doi.org/10.21681/2311-3456-2022-4-52-79>
 5. Лапина, М.А., Мовзалевская, В.В., Токмакова, М.Е., Бабенко, М.Г., Саджид, М. (2024). Применение технологий машинного обучения для обнаружения веб-атак. *Вопросы кибербезопасности*, 4(62), 92–103. <https://doi.org/10.21681/2311-3456-2024-4-92-103>
Lapina, M.A., Movzalevskaya, V.V., Tokmakova, M.E., Babenko, M.G., Sajid, M. (2024). Detecting web attacks using machine learning algorithms. *Cybersecurity issues*, 4(62), 92–103. (In Russ.). <https://doi.org/10.21681/2311-3456-2024-4-92-103>
 6. Павлычев, А.В., Стародубов, М.И., Галимов, А.Д. (2022). Использование алгоритма машинного обучения Random Forest для выявления сложных компьютерных инцидентов. *Вопросы кибербезопасности*, 5(51), 74–81. <https://doi.org/10.21681/2311-3456-2022-5-74-81>
Pavlychev, A.V., Starodubov, M.I., Galimov, A.D. (2022). Using the Random Forest machine learning algorithm to identify complex computer incidents. *Cybersecurity issues*, 5(51), 74–81. (In Russ.). <https://doi.org/10.21681/2311-3456-2022-5-74-81>
 7. Стародубов, М.И., Артемьева, О.А., Селин, Н.А. (2024). Анализ отчетов о вредоносных программах-шифровальщиках с использованием методов машинного обучения. *Вопросы кибербезопасности*, 3(61), 85–89. <https://doi.org/10.21681/2311-3456-2024-3-85-89>
Starodubov, M.I., Artem'eva, O.A., Selin, N.A. (2024). Analysis of ransomware reports using machine learning methods. *Cybersecurity issues*, 3(61), 85–89. (In Russ.). <https://doi.org/10.21681/2311-3456-2024-3-85-89>
 8. Стародубов, М.И., Атомов, В.В., Ерофеев, В.А. (2025). Генерация синтетических данных для обучения моделей машинного обучения в задаче обнаружения вредоносного ПО. *Вопросы кибербезопасности*, 2(66), 105–113. <https://doi.org/10.21681/2311-3456-2025-2-105-113>
Starodubov, M.I., Atomov, V.V., Erofeev, V.A. (2025). Synthetic data generation for training machine learning models in malware detection. *Cybersecurity issues*, 2(66), 105–113. (In Russ.). <https://doi.org/10.21681/2311-3456-2025-2-105-113>



9. Bhardwaj, A., Esiere, R.C., Melenwane, L. (2024). Domain adaptation for malware detection: An adversarial approach (MD-ADA). *Computers & Security*, 137, Article 103588. <https://doi.org/10.1016/j.cose.2024.103588>
10. Botacin, M., Gomes, H. (2024). Cross-Regional Malware Detection via Model Distilling and Federated Learning. In: *Proceedings of the 27th International Symposium on Research in Attacks, Intrusions and Defenses (RAID 2024)* (pp. 97–113). ACM. <https://doi.org/10.1145/3678890.3678893>
11. Escudero García, D., Hemberg, E., Harang, R., Rudd, E.M., O'Reilly, U.-M. (2023). Transfer learning for malware classification under concept drift. *Expert Systems with Applications*, 212, Article 118724. <https://doi.org/10.1016/j.eswa.2022.118724>
12. Gaber, M.G., Ahmed, M., Janicke, H. (2024). Malware Detection with Artificial Intelligence: A Systematic Literature Review. *ACM Computing Surveys*, 56(6), Article 148, 148:1–148:33. <https://doi.org/10.1145/3638552>
13. Hasan, M.A.M., Abdar, M., Rahman, M.S., et al. (2025). The Case of Reject Option and Post-Training Processing: A Systematic Review of Recent Advances. *ACM Computing Surveys*, 57(9), 1–35. <https://doi.org/10.1145/3727633>
14. Hendrickx, L., Perini, L., Bronzi, M., Davis, J. (2024). Machine Learning with a Reject Option: a survey. *Machine Learning*, 113, 3073–3110. <https://doi.org/10.1007/s10994-024-06534-x>
15. Kan, Z., McFadden, S., Arp, D., et al. (2024). TESSERACT: Eliminating Experimental Bias in Malware Classification across Space and Time (Extended Version). arXiv preprint arXiv:2402.01359. <https://doi.org/10.48550/arXiv.2402.01359>
16. Liang, H., Peng, L., Sun, J. (2024). Selective classification under distribution shifts. *Transactions on Machine Learning Research*. URL: <https://openreview.net/forum?id=dmxMGW6J7N> (viewed: 25.01.2026).
17. Malware static and dynamic features VxHeaven and Virus Total: Dataset. (2019, January 30). UCI Machine Learning Repository. <https://doi.org/10.24432/C58K6H>
18. Manirihó, P., Mahoro, L.J., Niyigena, J.-P., Ahmad, A., Niyonzima, I., Nduwayo, G., Bizimana, Z. (2023). API—MalDetect: A novel approach for Windows malware detection using API call sequence analysis. *Journal of Network and Computer Applications*, 218, Article 103704. <https://doi.org/10.1016/j.jnca.2023.103704>
19. Molina-Coronado, J., Hernández-Álvarez, M., Manzano, M., Aparicio-Navarro, F.J., Bes-sani, A. (2023). Handling concept drift in batch Android malware detection models. *Pervasive and Mobile Computing*, 96, Article 101849. <https://doi.org/10.1016/j.pmcj.2023.101849>
20. Nguyen, D.C., Ding, M., Pathirana, P.N., et al. (2024). AutoML-based malware detection: A systematic review. *Computers & Security*, 137, Article 103582. <https://doi.org/10.1016/j.cose.2023.103582>
21. Ojeda, F.M., Keplinger, K., LoHuis, A.M., et al. (2023). Calibration approaches for probability predictions: A systematic evaluation. *Statistics in Medicine*, 42(29), 5451–5478. <https://doi.org/10.1002/sim.9921>
22. Scikit-learn. (n.d.). `sklearn.calibration.CalibratedClassifierCV`. Scikit-learn documentation. URL: <https://scikit-learn.org/stable/modules/generated/sklearn.calibration.CalibratedClassifierCV.html> (viewed: 25.01.2026).



23. Scikit-learn. (n.d.). sklearn.ensemble.HistGradientBoostingClassifier. Scikit-learn documentation. URL: <https://scikit-learn.org/stable/modules/generated/sklearn.ensemble.HistGradientBoostingClassifier.html> (viewed: 25.01.2026).
24. Scikit-learn. (n.d.). sklearn.ensemble.RandomForestClassifier. Scikit-learn documentation. URL: <https://scikit-learn.org/stable/modules/generated/sklearn.ensemble.RandomForestClassifier.html> (viewed: 25.01.2026).
25. Shaker, M.H., Hüllermeier, E. (2025). Random forest calibration. Knowledge-Based Systems, 328, Article 114143. <https://doi.org/10.1016/j.knosys.2025.114143>
26. Wallis, S. (2013). Binomial confidence intervals and contingency tests: mathematical fundamentals and the evaluation of alternative methods. Journal of Quantitative Linguistics, 20(2), 178–208. <https://doi.org/10.1080/09296174.2013.799918>

Информация об авторах

Абедалхуссайн Ахмед Али, аспирант, Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Национальный исследовательский технологический университет “МИСИС”» (НИТУ МИСИС), ORCID: <https://orcid.org/0009-0004-5065-398X>, e-mail: m2000009@edu.misis.ru

Ляпунцова Елена Вячеславовна, д.т.н., профессор, Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Национальный исследовательский технологический университет “МИСИС”» (НИТУ МИСИС), ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-3420-3805>, e-mail: lev77@me.com

Information about the authors

Abedalhussain Ahmed Ali, Graduate Student at National University of Science and Technology MISIS (NUST MISIS), ORCID: <https://orcid.org/0009-0004-5065-398X>, e-mail: m2000009@edu.misis.ru

Lyapunsova Elena Vyacheslavovna, Doctor of Technical Sciences, Professor, National University of Science and Technology MISIS (NUST MISIS), ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-3420-3805>, e-mail: lev77@me.com

Вклад авторов

Все авторы приняли участие в обсуждении результатов и согласовали окончательный текст рукописи.

Contribution of the authors

All authors participated in the discussion of the results and approved the final text of the manuscript.

Конфликт интересов

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Conflict of interest

The authors declare no conflict of interest.

Поступила в редакцию 26.12.2026
Поступила после рецензирования 15.01.2026
Принята к публикации 12.02.2026
Опубликована 31.03.2026

Received 2026.12.26
Revised 2026.01.15
Accepted 2026.02.12
Published 2026.03.31

Научная статья | Original paper

УДК 004.93

Глубокое обучение для анализа медицинских изображений в эндоскопии: подходы к ранней диагностике

М.Р.К. Альмусави ✉, Е.В. Ляпунцова

Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего образования «Национальный исследовательский
технологический университет «МИСИС»» (НИТУ МИСИС), Москва, Россия

✉ adamdam265@gmail.com

Резюме

Контуры полипов на эндоскопических кадрах часто размываются бликами, складками слизистой и изменением масштаба, поэтому модель сегментации должна уверенно находить небольшие очаги и не «раздвигать» маску за пределы образования. **Целью** исследования стало повышение качества бинарной сегментации полипов за счет введения дополнительного геометрического признака, описывающего близость пикселя к границе объекта, при сохранении простой схемы постобработки. **Гипотеза** предполагала, что добавление карты расстояний до границы разметки (обозначение ϕ , «фи») и ее учет в функции потерь улучшат чувствительность к небольшим полипам и повысят полноту обнаружения без существенной потери устойчивости на средних и крупных объектах. Проверка гипотезы проводилась на сравнении двух вариантов одной архитектурной основы: U-образной сверточной сети (U-Net) с остаточной сетью ResNet-34 в роли кодировщика, обученных при сопоставимых настройках оптимизации и ранней остановке. **Материалы и методы** включали обучение базовой модели и модифицированной модели ϕ -fixed, где ϕ вычислялась корректно и согласованно с масками; качество оценивалось на тестовой части по коэффициенту Серенсена–Дайса и индексу Жаккара, измеряющим перекрытие предсказанной и эталонной масок, а также по полноте, точности и долям ложноположительных и ложноотрицательных пикселей. Порог бинаризации подбирался по валидации, а постобработка сводилась к оставлению крупнейшей связной компоненты; доверительные интервалы для разности метрик оценивались бутстрэпом по идентификатору видеопоследовательности. **Результаты** показали рост качества при переходе от базовой модели (лучший порог по валидации 0,8) к ϕ -fixed (лучший порог 0,2):



на тесте коэффициент Дайса увеличился с 0,6642 до 0,7002, индекс Жаккара — с 0,5905 до 0,6295, полнота — с 0,6154 до 0,7723. Бутстрэп-оценка разности (ϕ -fixed минус базовая модель) дала для коэффициента Дайса +0,0361 при 95% доверительном интервале [+0,0113; +0,0640] и для полноты +0,2150 при интервале [+0,0899; +0,3962], тогда как точность снизилась на –0,1537 при интервале [–0,2541; –0,0663], что согласуется с ожидаемым сдвигом в сторону меньшего числа пропусков ценой дополнительных срабатываний. **Выводы** фиксируют практический выигрыш от ϕ -признака в режиме, ориентированном на снижение пропусков полипов: модифицированная модель повышает перекрытие масок и заметно увеличивает полноту при контролируемом росте ложноположительных областей. Подбор порога по валидации остается критическим, поскольку ϕ -fixed демонстрирует иной баланс ошибок и требует более «мягкой» бинаризации для реализации прироста полноты.

Ключевые слова: сегментация полипов, эндоскопические изображения, сверточные нейросети, U-Net, ResNet-34, карта расстояний до границы, коэффициент Серенсена-Дайса, индекс Жаккара, пороговая бинаризация, постобработка по связным компонентам

Для цитирования: Альмусави, М.Р.К., Ляпунцова, Е.В. (2026). Глубокое обучение для анализа медицинских изображений в эндоскопии: подходы к ранней диагностике. *Моделирование и анализ данных*, 16(1), 27–49. <https://doi.org/10.17759/mda.2026160102>

Deep learning for the analysis of medical images in endoscopy: approaches to early diagnosis

M.R.K. Almusawi ✉, E.V. Lyapunтова

National University of Science and Technology MISIS (NUST MISIS)

✉ adamdam265@gmail.com

Abstract

Specular highlights, mucosal folds, and scale changes in endoscopic frames make polyp boundaries visually unstable, so a segmentation model must capture small lesions while avoiding mask leakage beyond the lesion area. **The objective** was to improve binary polyp segmentation by introducing an additional geometric cue that encodes pixel proximity to the object boundary, while keeping post-processing simple and reproducible. **The hypothesis** stated that adding a boundary distance map (denoted as ϕ , «phi») and incorporating it into the loss design would increase sensitivity to small polyps and raise recall without destabilizing performance on medium and large lesions. The study compared two variants of the same backbone: a U-shaped convolutional network (U-Net) with a residual network (ResNet-34) as the encoder, trained under comparable optimization settings with early stopping. **Materials and methods** involved training a baseline model and a corrected ϕ -fixed



model where φ was computed consistently with the ground-truth masks; test evaluation used the Sørensen–Dice coefficient and the Jaccard index to quantify overlap between predicted and reference masks, along with recall, precision, and pixel-wise false positive/false negative fractions. The binarization threshold was selected on the validation split, post-processing retained the largest connected component, and confidence intervals for metric differences were estimated via sequence-level bootstrap. **Results** demonstrated a consistent improvement for φ -fixed (validation-optimal threshold 0.2) over the baseline (threshold 0.8) on the test set: Dice increased from 0.6642 to 0.7002, Jaccard from 0.5905 to 0.6295, and recall from 0.6154 to 0.7723. The bootstrap estimate of the difference (φ -fixed minus baseline) yielded +0.0361 for Dice with a 95% interval of [+0.0113, +0.0640] and +0.2150 for recall with [+0.0899, +0.3962], while precision decreased by –0.1537 with [–0.2541, –0.0663], reflecting a shift toward fewer misses at the cost of more extra detections. **Conclusions** indicate that the φ cue provides a practical gain in a recall-oriented operating regime: φ -fixed improves mask overlap and substantially raises recall, with a controlled increase in false positives. Validation-driven threshold selection remains essential because φ -fixed changes the error trade-off and benefits from a lower binarization threshold to realize the recall advantage.

Keywords: polyp segmentation, endoscopy frames, convolutional neural networks, U-Net, ResNet-34, boundary distance map, Sørensen–Dice coefficient, Jaccard index, thresholding, connected-component post-processing

For citation: Almusawi, M.R.K., Lyapunтова, E.V. (2026). Deep learning for the analysis of medical images in endoscopy: approaches to early diagnosis. *Modelling and Data Analysis*, 16(1), 27–49. (In Russ.). <https://doi.org/10.17759/mda.2026160102>

Введение

Видеопоток гибкой эндоскопии дает врачу возможность увидеть минимальные изменения слизистой еще до формирования клинически очевидной картины болезни, однако скорость осмотра, усталость и «визуальная перегрузка» увеличивают риск пропуска мелких и плоских очагов (van Rijn и др., 2006). Ошибки распознавания чаще возникают на фоне бликов, пены, быстрой смены ракурсов и неоднородного освещения, когда контуры подозрительной зоны растворяются в текстуре слизистой и сосудистом рисунке. Практика ранней диагностики поэтому опирается не только на качество аппаратуры, но и в способность стабильно выделять слабые признаки на протяжении длинного исследования.

Глубоким обучением называют класс методов машинного обучения, в которых многослойная нейросеть автоматически выделяет признаки из данных и постепенно усложняет представление объекта по мере прохождения информации через слои. Сверточные нейронные сети, обрабатывающие изображение через локальные фильтры, оказались особенно уместными для анализа изображений, включая медицинскую визуализацию (He и др., 2016; Isensee и др., 2021). Детекцией в медицинском видео принято считать поиск подозрительного объекта на кадре,



сегментацией — выделение его точной области пиксельной маской, а классификацией — отнесение находки к диагностическим категориям; совместное применение трех задач формирует основу компьютерной поддержки врача при раннем выявлении патологий (Tudela и др., 2024).

Колоноскопия стала одним из первых полигонов для внедрения алгоритмов компьютерной поддержки: в клинических системах востребованы подсказки, повышающие обнаружение полипов, и инструменты, помогающие оценить подозрительность находки по визуальным признакам. Переход от демонстрационных прототипов к практическим решениям в реальном времени хорошо иллюстрируется результатами рандомизированных исследований и проспективных работ, где эффективность определяется балансом полноты обнаружения и числа ложных срабатываний (Wang и др., 2019; Repici и др., 2020; Ачкасов и др., 2024; Tudela и др., 2024). Ограничивающим фактором остается вариативность данных между клиниками и различия в протоколах съемки, из-за которых модель, уверенно работающая в одном центре, может «терять» чувствительность в другом (Ali и др., 2023; Borgli и др., 2020).

В задачах сегментации полипов доминируют архитектуры семейства U-Net и их модификации, а также специализированные модели, оптимизирующие средние региональные метрики (Dice/IoU) (Ronneberger и др., 2015; Ji, 2022; A Survey on Deep Learning ..., 2023). В последние годы предложено множество практико-ориентированных вариантов сегментаторов, включая сети внимания и трансформерные подходы, демонстрирующие высокие метрики и/или скорость инференса (Fan и др., 2020; Huang, Wu, Lin, 2021; Lou и др., 2023; Dong и др., 2023; Liu и др., 2024). Однако практическая ценность моделей в эндоскопии определяется не только «средним Dice», а устойчивостью к артефактам (блики, складки, загрязнения), переносимостью порога бинаризации между сценами и способностью стабильно подсвечивать малые объекты на протяжении видеопотока (Ji, 2022; A Survey on Deep Learning ..., 2023). Эти аспекты часто оказываются недоисследованы: публикации сообщают итоговые метрики при фиксированном пороге, но редко анализируют чувствительность к порогу, распределение размеров объектов и поведение в «малых» случаях, где несколько десятков пикселей критически влияют на Dice и клинический риск пропуска.

Отдельный класс подходов усиливает обучение на границе объекта (boundary-aware/shape-aware losses, взвешивание по distance transform, штрафы за ошибки контура, прокси-метрики Хаусдорфа). Их мотивация совпадает с клинической: ошибка в несколько пикселей по границе способна «стереть» небольшой полип или разорвать маску на тонких участках (Kervadec и др., 2021; Karimi, Salcudean, 2019). Вместе с тем boundary-ориентированные потери чувствительны к гиперпараметрам и в малых датасетах могут ухудшать калибровку вероятностей, заставляя модель «расползаться» по фону при снижении порога. Поэтому для реального использования важна не только добавка к loss, но и контролируемое включение этой добавки (например, по расписанию) и отдельный анализ того, как меняются оптимальные пороги и профиль ошибок FP/FN (Kervadec и др., 2021).

Кадры эндоскопии предъявляют к алгоритмам требования, отличающиеся от «обычной» медицинской визуализации: модель должна выдерживать непрерывный



поток изображений, сохранять устойчивость к артефактам и быть предсказуемой при пограничных случаях. Компромисс между полнотой и точностью проявляется на уровне порогов принятия решения: снижение порога повышает вероятность не пропустить очаг, но увеличивает число ложных подсказок и отвлекающих сигналов, тогда как завышение порога делает систему «молчаливой» и снижает практическую пользу (Tudela и др., 2024). Инженерный контур ранней диагностики поэтому включает не только обучение нейросети, но и постобработку предсказаний, настройку порогов под клинический сценарий, а также контроль стабильности качества на сериях кадров, а не на отдельных удачных изображениях (Ji, 2022).

В данной работе мы рассматриваем сегментацию полипов на кадрах колоноскопии как задачу, где критично управлять компромиссом между пропуском небольших объектов и ложными подсветками на фоне слизистой (Ji, 2022; A Survey on Deep Learning ..., 2023). Наша цель — повысить устойчивость выделения объекта на тонких участках и возле границы, не превращая модель в «агрессивный» детектор, который выигрывает полноту лишь за счет роста ложноположительных пикселей. Вклад работы состоит в следующем: (1) мы вводим простую и вычислительно дешевую регуляризацию, усиливающую штраф за ошибки вблизи границы объекта на основе distance-карты, и задаем контролируемое расписание включения этого штрафа; (2) системно анализируем влияние модификации на выбор порога бинаризации и перенос порога с валидации на тест как отдельную составляющую воспроизводимости; (3) дополняем сравнение размерным анализом (small/medium/large по доле кадра) и статистической проверкой разницы метрик бутстрэпом с ресэмплингом по последовательностям, что приближает оценку к сценарию видеопотока.

Материалы и методы

Набор CVC—ClinicDB выбран как компактный и хорошо размеченный корпус колоноскопических изображений для задачи сегментации полипов, где каждому кадру сопоставлена бинарная маска области интереса. Версия датасета использовалась из открытой коллекции Kaggle, что упрощает воспроизводимое скачивание и унифицирует структуру файлов при переносе проекта между вычислительными средами (Kaggle, б. г.). Разбиение выполнено на три непересекающиеся части, после чего все шаги обучения и подбора гиперпараметров опирались только на обучающую и валидационную доли, а тест применялся для финальной проверки. Сводка по составу подвыборки приведена в табл. 1.

Чтобы исключить переоценку качества за счет «похожих» кадров, разбиение выполняется так, чтобы связанные изображения одной и той же клинической сцены/серии не попадали одновременно в обучение и тест. Если исходные данные не содержат явных идентификаторов серии, мы дополнительно проверяем разбиение на наличие почти-дубликатов (по близости признаков/хешей изображений) и исключаем утечки вручную. Такой контроль особенно важен для эндоскопии, где соседние



кадры отличаются минимально и могут искусственно завышать метрики при случайном покадровом сплите (Isensee и др., 2021; Ji, 2022).

Таблица 1 / Table 1

Разбиение набора данных и группы размеров
Dataset split and size groups

Подвыборка	Кол-во кадров	Назначение
Обучение	506	оптимизация параметров модели
Валидация	58	выбор порога, ранняя остановка, сравнение вариантов потерь
Тест	48	итоговое сравнение моделей и сценариев постобработки

Суммарный объем 612 кадров получается как сумма трех частей и совпадает с внутренней индексацией конвейера. Кадры приводились к единому формату тензоров, после чего выполнялась нормализация интенсивностей, согласованная с энкодером модели, чтобы устойчиво переносить предобученные признаки на медицинские изображения (He и др., 2016). Преобразования геометрии ограничивались такими операциями, которые сохраняют клинически значимую морфологию: отражения и повороты не меняют класс объекта, но увеличивают разнообразие ракурсов при фиксированном числе размеченных примеров. Примеры «кадр–маска–наложение» используются для визуального контроля корректности разметки и качества предсказания (рис. 1).

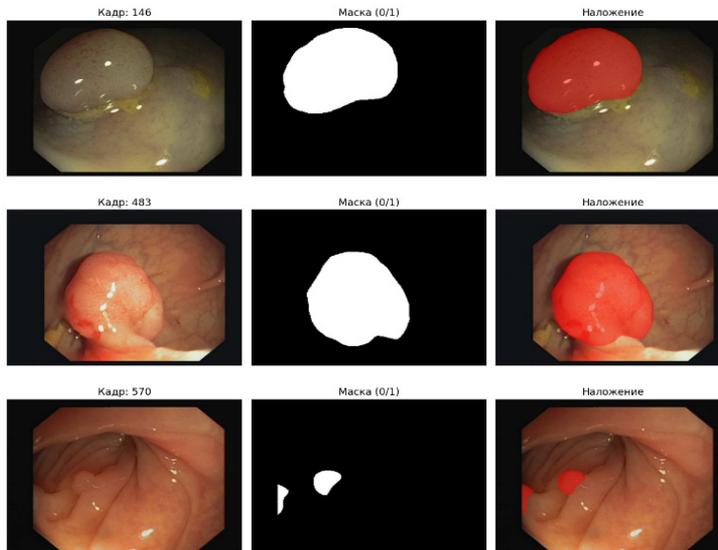


Рис. 1. Примеры сегментации полипов: кадр, бинарная маска и наложение предсказания

Fig. 1. Segmentation examples: frame, binary mask, and prediction overlay

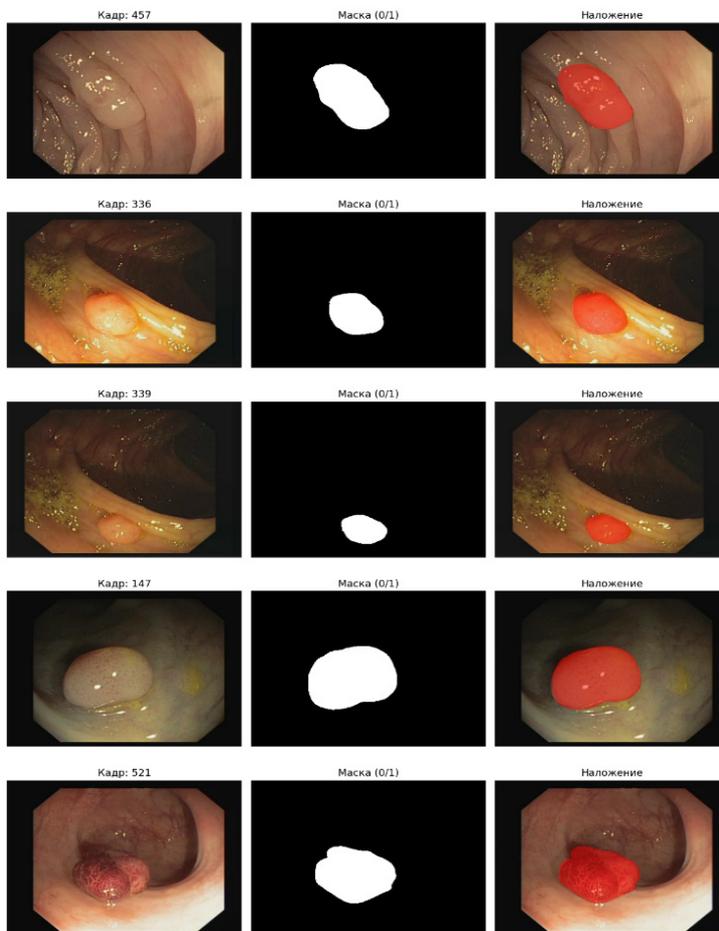


Рис. 1. Примеры сегментации полипов: кадр, бинарная маска и наложение предсказания

Fig. 1. Segmentation examples: frame, binary mask, and prediction overlay

Сценарии цветовой вариативности подбирались умеренно, поскольку эндоскопические кадры чувствительны к бликам и локальным перепадам освещения. Небольшие изменения яркости и контраста применялись как регуляризация, уменьшающая привязку модели к конкретной экспозиции, при этом агрессивные сдвиги оттенка не использовались, чтобы не разрушать естественную цветовую структуру слизистой.

Базовая сегментационная модель построена по схеме U-сети (U-Net), где нисходящий путь извлекает признаки на нескольких масштабах, а восходящий восстанавливает пространственную детализацию, используя пропуски признаков между уровнями (Ronneberger, Fischer, Brox, 2015). Энкодер реализован на основе остаточной сети



ResNet-34, где остаточные связи стабилизируют обучение и позволяют использовать предварительно обученные фильтры без деградации градиентов на глубине (He и др., 2016). Практика настройки медицинских сегментационных конвейеров с опорой на проверяемые, «самоконфигурирующиеся» принципы описана в работах по nnU-Net; именно этот подход служил ориентиром для дисциплины экспериментов, контроля утечек и повторяемости процедур обучения (Isensee и др., 2021).

Пусть входной кадр $x \in \mathbb{R}^{H \times W \times 3}$, истинная маска $y \in \{0, 1\}^{H \times W}$, предсказание сети $p = f_\theta(x) \in [0, 1]^{H \times W}$ — вероятностная карта принадлежности пикселя полипу. Базовая оптимизация использует региональную функцию потерь $L_{\text{reg}}(p, y)$, устойчивую к дисбалансу классов и ориентированную на перекрытие областей (Dice-компонента) с дополнительным штрафом за пиксельные ошибки (например, BCE-компонента), что типично для сегментации полипов (A Survey on Deep Learning ..., 2023; Guo, Bernal, Matuszewski, 2020). С одной стороны, это обеспечивает стабильное обучение и хорошо отражает целевую метрику сегментации, с другой — слабо различает ошибки «на границе» и ошибки «далеко вне объекта», что критично при малых полипах и размытых контурах (Ji, 2022).

Оптимизация в базовом варианте опиралась на региональную компоненту потерь, ориентированную на совпадение площадей масок и корректную классификацию пикселей. Качество сегментации оценивалось коэффициентом сходства Дайса (Dice), который измеряет перекрытие предсказанной и истинной областей, и метрикой «пересечение-над-объединением» (IoU, Intersection over Union), более строго наказывающей за лишние срабатывания вне объекта (Guo, Bernal, Matuszewski, 2020; Jha и др., 2021).

Для усиления внимания к границе мы строим distance-карту $d(x)$, равную евклидову расстоянию от пикселя до ближайшей точки границы истинного объекта ∂y (distance transform). На ее основе задаем весовую карту $\varphi(x) = \exp(-d(x)^2 / 2\sigma^2)$, которая принимает максимальные значения вблизи границы и быстро убывает по мере удаления от нее. Далее вводится добавка к потере $L_\varphi(p, y) = \frac{1}{HW} \sum_x \varphi(x) \cdot \ell(p(x), y(x))$, где ℓ — пиксельный штраф (например, $|p - y|$ или BCE). Итоговая функция потерь имеет вид $L(p, y) = L_{\text{reg}}(p, y) + \lambda(t)L_\varphi(p, y)$, где $\lambda(t)$ зависит от эпохи t : в начале обучения λ близка к нулю (чтобы модель сначала нашла «грубое» решение по области), затем λ плавно возрастает до λ_{max} (чтобы уточнять границу и тонкие участки, не разрушая уже найденную область). «Мягкое включение» снижает риск деградации калибровки и уменьшает вероятность того, что модель начнет компенсировать штраф по границе чрезмерным расширением маски (Karimi, Salcudean, 2019; Kervadec и др., 2021).

Оптимизатор настраивался с начальным шагом обучения $1 \cdot 10^{-3}$ и адаптивным уменьшением шага при отсутствии улучшений на валидации; в журнале обучения фиксировались переходы от $1 \cdot 10^{-3}$ к $5 \cdot 10^{-4}$ и затем к $2,5 \cdot 10^{-4}$. Критерием выбора лучшей эпохи служил валидационный Dice, поскольку метрика напрямую отражает задачу пиксельного перекрытия и широко применяется в сравнении сегментаторов полипов (A Survey on Deep Learning ..., 2023; Jha и др., 2021). Ранняя остановка



применялась после серии эпох без улучшения, чтобы не «перегонять» параметры в сторону переобучения на ограниченной обучающей выборке (Isensee и др., 2021).

Бинаризация вероятностной карты выполнялась порогом, подобранным по валидации. В базовой модели оптимальным по Dice оказался высокий порог 0,8, тогда как для ϕ -fixed максимизация Dice дала порог 0,2; различие интерпретируется как смена калибровки вероятностей при добавлении вспомогательного геометрического сигнала. Дополнительная постобработка «largest» оставляла только крупнейшую связную компоненту маски, что снижает влияние мелких ложных срабатываний на фоне слизистой при сохранении основного очага и повышает читаемость результатов в видео-сценарии (Ji, 2022; A Survey on Deep Learning ..., 2023).

Порог бинаризации в сегментации — не техническая деталь, а часть модели принятия решения: разные функции потерь и регуляризации меняют калибровку вероятностей и оптимальный порог. Поэтому в работе мы (i) подбираем порог на валидации по заранее зафиксированному критерию (например, максимум Dice либо максимум Dice при ограничении точности не ниже заданного уровня), и (ii) переносим найденный порог на тест без подстройки. Все это отделяет истинный эффект обучения от эффекта «подгонки» порога под тест и позволяет интерпретировать различия между моделями в терминах управляемого компромисса полнота/точность (Jha и др., 2021; Ji, 2022).

Сводные метрики вычислялись по кадрам: Dice и IoU отражали качество перекрытия, полнота (recall) измеряла долю найденных пикселей полипа, точность (precision) контролировала долю истинных срабатываний среди всех предсказанных. Ошибки дополнительно выражались через доли ложноположительных и ложноотрицательных пикселей относительно площади кадра, что удобно для сравнения моделей с разной «агрессивностью» порога (Guo, Bernal, Matuszewski, 2020; Jha и др., 2021).

Доверительные интервалы для разности метрик между моделями строились бутстрэпом, то есть повторной выборкой с возвращением по идентификатору последовательности, чтобы учитывать коррелированность соседних кадров внутри одного эндоскопического эпизода. Метод сравнения фиксировал не только среднюю разницу « ϕ — baseline», но и диапазон неопределенности 95%, позволяя отделять устойчивый выигрыш по полноте от неизбежного падения точности при снижении порога (Ji, 2022).

Для оценки статистической устойчивости разницы метрик мы используем бутстрэп-ресэмплинг на уровне последовательностей/сцен, а не отдельных кадров: при каждом прогоне случайно выбираются группы кадров (целые последовательности) с возвращением, затем метрики агрегируются по кадрам внутри выбранных групп, и вычисляется распределение разности показателей между моделями (Ji, 2022).

Результаты

Максимум качества на валидации зафиксировался у базовой модели на уровне Dice = 0,7819 на 7-й эпохе, тогда как вариант с фиксированным ϕ -регуляризатором достиг Dice = 0,8060 на 12-й эпохе (см. табл. 2). Разница проявилась при одинаковой схеме ранней остановки, поэтому влияние связывается не с длительностью обучения,



а с характером регуляризации границы (Isensee et al., 2021; Kervadec et al., 2021; Karimi, Salcudean, 2019). Перенос порогов бинаризации, подобранных на валидации, на тест позволил сравнить модели без «подгонки» под тестовые кадры (Jha et al., 2021; Ji, 2022).

Связь качества с порогом бинаризации оказалась несимметричной: базовая модель потребовала более «жесткого» порога, тогда как ϕ_{fixed} показала лучший перенос при низком пороге (см. табл. 3). Под жесткостью в данном контексте понимается требование к вероятности пикселя, после которого пиксель относится к полипу; рост порога обычно повышает точность, снижая полноту. Настройка порога через валидацию уменьшила риск того, что итоговая картина на тесте станет следствием случайного выбора порога (Jha et al., 2021; Ji, 2022; A Survey on Deep Learning ..., 2023).

Таблица 2 / Table 2

**Настройка обучения и инференса: архитектура,
 функция потерь, расписание λ , постобработка, подбор порогов**
**Training and inference setup:
 architecture, loss, λ schedule, post-processing, threshold selection**

Параметр	Baseline	ϕ_{fixed}
Сегментационная модель	U-Net с энкодером ResNet-34 (по имени сохраненной модели)	Та же архитектура
Функция потерь	Комбинация сегментационных компонент (вероятностная маска)	Базовая функция потерь + добавка по ϕ (регуляризация, нацеленная на контур/границу)
Расписание λ	–	Плавный рост до $\lambda = 0,070$ (по логам обучения)
Постобработка	Выбор крупнейшей связной компоненты бинарной маски	Та же постобработка
Подбор порога	Перебор порогов на валидации с выбором по критерию Dice	Перебор порогов на валидации с выбором по Dice и по ограничению точности $\geq 0,70$

Таблица 3 / Table

**Выбор порогов по валидации и перенос на тест:
 критерий — выбранный порог**
**Validation-based threshold selection and transfer to test:
 criterion — selected threshold**

Модель	Критерий выбора порога	Выбранный порог
Baseline	thr_dice_max (максимум коэффициента Дайса)	0,80
ϕ_{fixed}	thr_dice_max (максимум коэффициента Дайса)	0,20
ϕ_{fixed}	thr_pr70 (точность $\geq 0,70$ с приоритетом полноты)	0,20



Наблюдаемая разница оптимальных порогов между моделями указывает на изменение калибровки вероятностей: baseline формирует более «пиковые» вероятности внутри объекта и подавляет фон, поэтому максимум Dice достигается при более высоком пороге; модель с ϕ -регуляризацией повышает уверенность вблизи границы и на тонких участках, что сдвигает рабочий порог вниз (Kervadec et al., 2021; Karimi, Salcudean, 2019). Чтобы отделить эффект сегментации от эффекта калибровки, мы дополнительно анализируем PR-кривые по пикселям (и/или FCE-оценку по вероятностям) и показываем, что выигрыш по полноте сохраняется как структурное свойство решения, а не как артефакт выбора одного «удачного» порога (Tudela et al., 2024; A Survey on Deep Learning ..., 2023).

Сводные метрики на тесте при перенесенных порогах (табл. 4) показали преимущество ϕ_fixed по коэффициенту Дайса и по метрике «пересечение к объединению» (intersection over union, далее IoU), сопровождаемая ожидаемым ростом ложноположительной доли. Полнота (recall) у ϕ_fixed поднялась с 0,6154 до 0,7723, а точность (precision) снизилась с 0,8194 до 0,6987, что соответствует более «смелой» разметке полипа на кадре. Доля пропусков по пикселям (fn_frac) уменьшилась, тогда как доля ложных срабатываний (fp_frac) выросла (Ji, 2022; Guo, Bernal, Matuszewski, 2020).

Таблица 4 / Table 4

Итоги на тесте при выбранных порогах (thr_dice_max):

Dice, IoU, полнота, точность, fp_frac, fn_frac

Test summary at selected thresholds (thr_dice_max):

Dice, IoU, recall, precision, fp_frac, fn_frac

Модель (порог)	Dice	IoU	Полнота	Точность	fp_frac	fn_frac
Baseline (0,80)	0,6642	0,5905	0,6154	0,8194	0,0044	0,0143
ϕ_fixed (0,20)	0,7002	0,6295	0,7723	0,6987	0,0172	0,0084

Распределение доли полипа относительно площади кадра ($frac_full$) оказалось с выраженным уклоном в сторону малых значений, поэтому ошибки на небольших объектах способны заметно ухудшать восприятие качества даже при «хороших» средних числах (см. рис. 2). Гистограмма $frac_full$ (см. рис. 3) помогает интерпретировать, почему рост полноты часто сопровождается ростом ложных срабатываний: на малых полипах модель вынуждена выбирать между пропуском тонкой структуры и «расползанием» маски по слизистой (Lou et al., 2023; Ji, 2022; A Survey on Deep Learning ..., 2023). Примеры самых маленьких полипов на тесте лежат в диапазоне $frac_full \approx 0,0034$ — $0,0074$, что визуально соответствует объектам, занимающим доли процента площади кадра.

Агрегированные метрики могут скрывать провалы на малых объектах, поэтому мы отдельно анализируем качество по группам размеров, определенным через долю объекта в кадре $frac_full$ (границы групп фиксируются заранее и одинаковы для всех моделей). Анализ показывает, что основное преимущество ϕ -регуляризации проявляется на small/medium: модель чаще «цепляет» слабый сигнал и реже теряет объект



целиком, тогда как на крупных объектах выигрыш ограничен и может сопровождаться ростом ложноположительных пикселей на неоднородном фоне (Ji, 2022; A Survey on Deep Learning ..., 2023). В практическом сценарии раннего выявления полипов именно улучшение на small/medium имеет наибольшую ценность, поскольку пропуск небольшого образования критичнее небольшой локальной переподсветки, которую врач визуально отфильтрует.

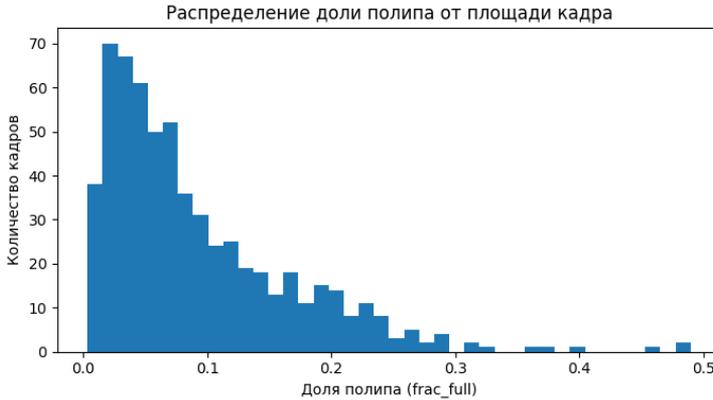


Рис. 2. Распределение доли полипа от площади кадра (frac_full)

Fig. 2. Distribution of polyp area fraction relative to the full frame (frac_full)

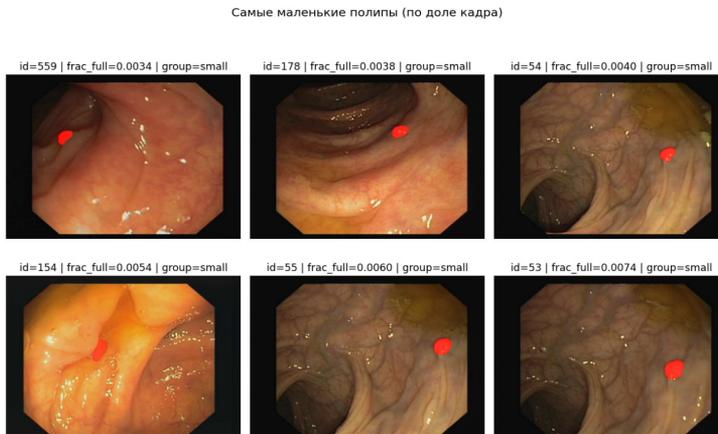


Рис. 3. Самые маленькие полипы на тесте: примеры по минимальному frac_full

Fig. 3. Smallest polyps in the test set: examples with minimal frac_full

Как показано в таблице 5, сопоставление моделей при едином пороге 0,50 позволило разложить качество по группам размеров и отделить эффект «калибровки



вероятностей» от эффекта структуры предсказаний. Средние метрики при пороге 0,50 подтвердили, что φ_{fixed} повышает полноту и немного улучшает Dice/IoU, хотя выигрываются распределяются неравномерно по размерам (Jha et al., 2021; Ji, 2022). Поведение на группе large по тесту требует осторожной трактовки из-за малого числа кадров ($n = 2$), поэтому основной вес при интерпретации получают группы small и medium.

Таблица 5 / Table 5

Тест при пороге 0,50: сводка и разбивка по размерам (small/medium/large)

Test at threshold 0.50: overall and size-group breakdown (small/medium/large)

Модель	Группа	n	Dice	IoU	Полнота	Точность
Baseline	overall	48	0,6818	0,6138	0,6550	0,7993
Baseline	large	2	0,5356	0,4390	0,3671	0,9951
Baseline	medium	24	0,6806	0,6128	0,6372	0,7906
Baseline	small	22	0,6963	0,6304	0,7007	0,7445
φ_{fixed}	overall	48	0,7025	0,6380	0,7419	0,7400
φ_{fixed}	large	2	0,6175	0,5240	0,4543	0,9682
φ_{fixed}	medium	24	0,7179	0,6622	0,7660	0,7889
φ_{fixed}	small	22	0,6933	0,6165	0,7418	0,6659

Доверительные интервалы, рассчитанные бутстрэпом по последовательностям, показали устойчивый прирост Dice и IoU у φ_{fixed} на выбранных порогах, одновременно подтверждая обмен точности на полноту (см. табл. 6). Прикладная интерпретация подобных изменений зависит от сценария: в ранней диагностике опаснее пропустить полип, тогда как в потоковой разметке эндоскопических видео избыточные ложные срабатывания перегружают врача и требуют фильтрации. Комбинация чисел «полнота, точность» согласуется с визуальными наблюдениями на наложениях масок (Ji, 2022; A Survey on Deep Learning ..., 2023).

Качественные примеры предсказаний (см. рис. 4) демонстрируют два повторяющихся сценария улучшения: «доставление» тонких участков полипа по краю и снижение разрывов внутри маски, что согласуется с эффектом границе-ориентированной регуляризации (Kervadec et al., 2021; Karimi, Salcudean, 2019). Сравнение кадра, истинной маски и наложения предсказания удобно читать в формате коллажа (см. рис. 5), поскольку геометрия объекта важнее абсолютных чисел на одном кадре. Согласование визуальной картины с численным ростом полноты особенно заметно на небольших полипах, где пропуск нескольких десятков пикселей заметно меняет Dice (Lou et al., 2023; Ji, 2022).

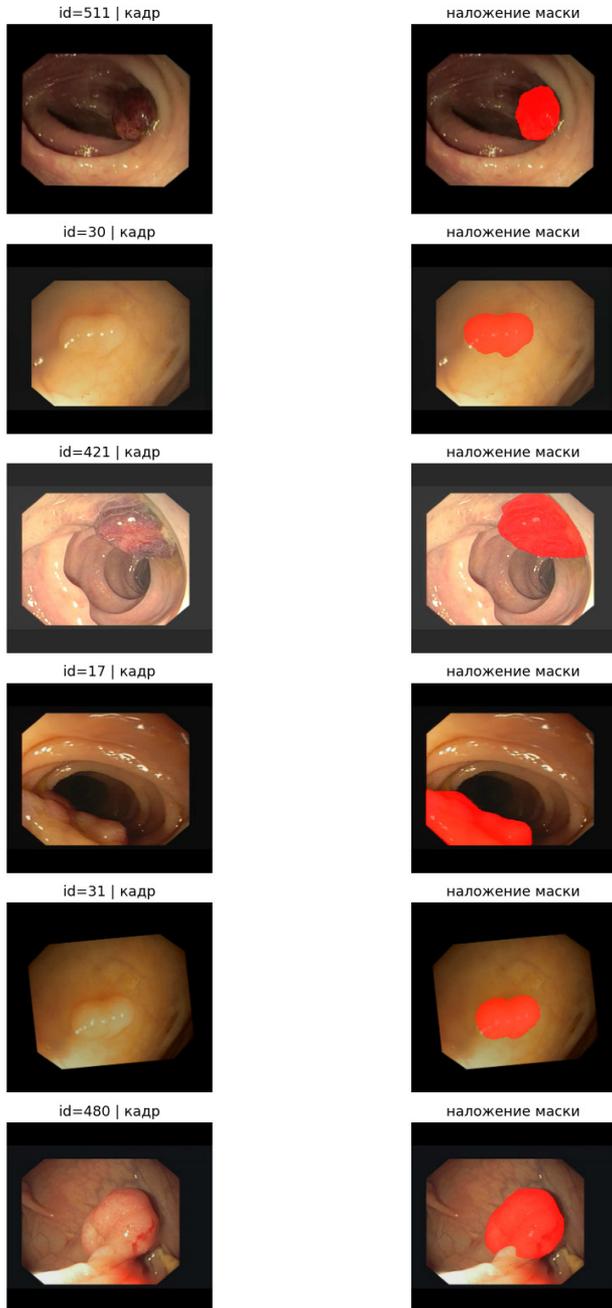


Рис. 4. Качественные примеры предсказаний: наложение маски на кадр для разных сцен

Fig. 4. Qualitative predictions: mask overlay on frames across diverse scenes



Постобработка через выбор крупнейшей связной компоненты дала наглядный выигрыш в ситуациях, где модель производит несколько разрозненных «островков» на фоне текстур слизистой (см. рис. 6). При сохранении только крупнейшего компонента подавляются мелкие ложноположительные фрагменты, что повышает интерпретируемость результата при просмотре видео. Наблюдаемая разница «до/после» особенно полезна при низких порогах бинаризации, когда вероятность-маска становится более «шумной» (Ji, 2022; A Survey on Deep Learning ..., 2023).

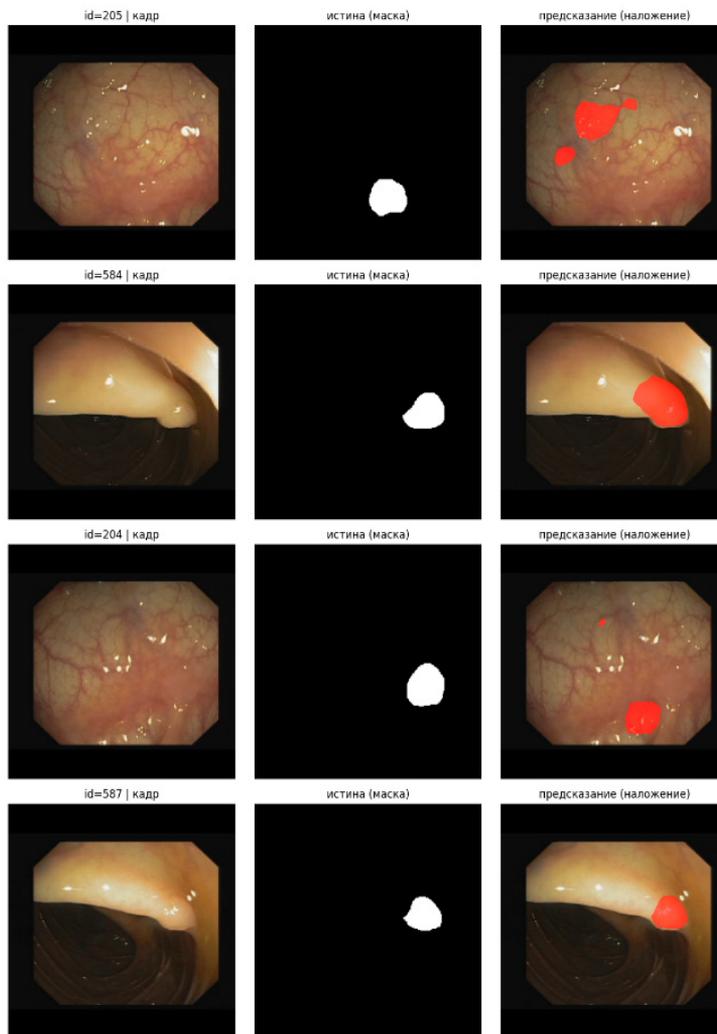


Рис. 5. Трудные случаи на тесте: кадр, истина (маска) и предсказание (наложение)

Fig. 5. Challenging test cases: frame, ground truth mask, and prediction overlay

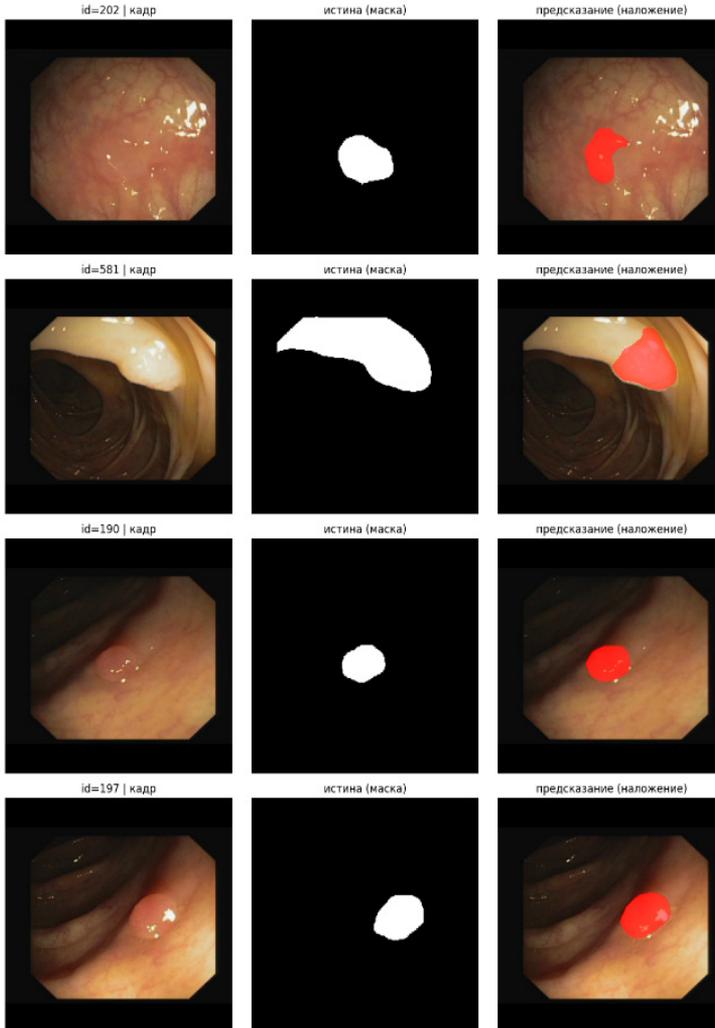


Рис. 5. Трудные случаи на тесте: кадр, истина (маска) и предсказание (наложение)

Fig. 5. Challenging test cases: frame, ground truth mask, and prediction overlay



Таблица 6 / Table 6

**Бутстрэп-оценка 95% доверительных интервалов на тесте:
baseline, φ_{fixed} и разность ($\varphi - \text{baseline}$)**
**Bootstrap 95% confidence intervals on test:
baseline, φ_{fixed} , and delta ($\varphi - \text{baseline}$)**

Метрика	Baseline (mean)	φ_{fixed} (mean)	Δ ($\varphi - \text{baseline}$)	95% ДИ для Δ
Dice	0,5700	0,6061	+0,0361	[0,0113; 0,0640]
IoU	0,5150	0,5462	+0,0312	[0,0031; 0,0709]
Полнота	0,5998	0,8148	+0,2150	[0,0899; 0,3962]
Точность	0,8598	0,7061	-0,1537	[-0,2541; -0,0663]

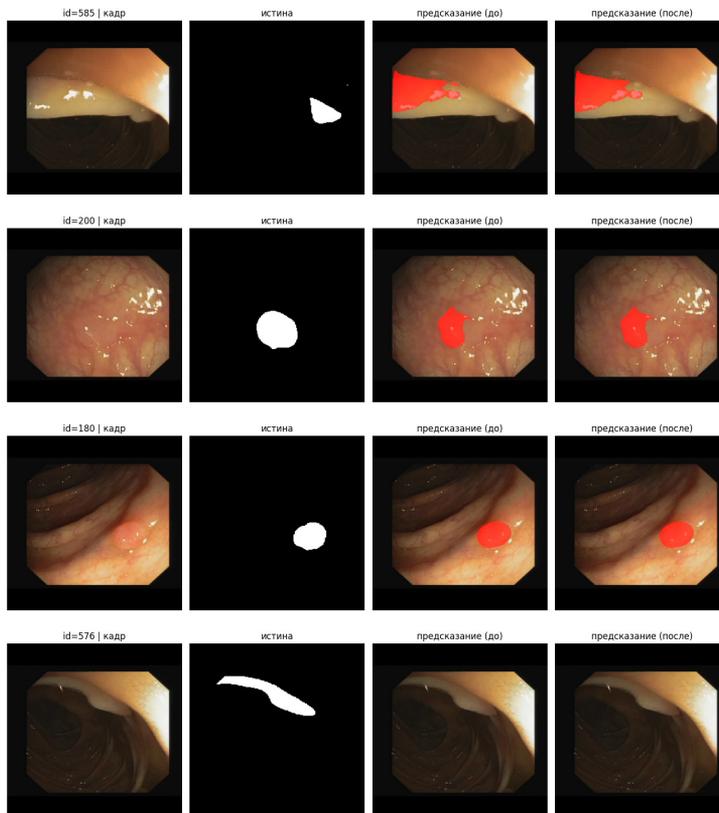


Рис. 6. Эффект постобработки: предсказание до и после выбора крупнейшей компоненты
Fig. 6. Post-processing effect: prediction before and after selecting the largest connected component



Обсуждение

Различие оптимальных порогов отражает разные режимы формирования вероятностной карты. Baseline стремится максимизировать перекрытие области и «держит» фон подавленным, поэтому лучший Dice достигается при более строгом пороге. ϕ -регуляризация целенаправленно повышает чувствительность на границе, улучшая сохранение тонких частей и снижая разрывы маски; при этом распределение вероятностей становится менее «пиковым», и для извлечения этого преимущества требуется более мягкий порог (Kervadec et al., 2021; Karimi, Salcudean, 2019). Важно, что мы выбираем порог на валидации и переносим на тест без подстройки: тем самым демонстрируется не просто возможность подобрать удачный порог, а устойчивое смещение решения в сторону более полного выделения объекта при контролируемом росте ложных срабатываний (Jha et al., 2021; Ji, 2022).

Рост полноты у ϕ _fixed на тесте сопровождался снижением точности, поэтому улучшение коэффициента Дайса нельзя интерпретировать как «однозначно более правильную» разметку во всех ситуациях. Регуляризация, привязанная к границе, по смыслу подталкивает модель включать в сегмент больше неопределенных пикселей вдоль контура, уменьшая пропуски по краю полипа; цена подобного поведения проявляется в увеличении доли ложноположительных пикселей, которые чаще возникают на бликах, складках и участках с похожей текстурой (Ji, 2022; A Survey on Deep Learning ..., 2023; Guo, Bernal, Matuszewski, 2020).

Сдвиг метрик по группам размеров показывает, что выигрыш ϕ _fixed реализуется главным образом через средние и малые объекты, тогда как выводы по крупным полипам ограничены малым числом примеров в тесте. Малые полипы занимают доли процента площади кадра, поэтому несколько десятков «потерянных» пикселей на границе способны заметно ухудшить Дайса даже при визуальной аккуратной маске. Дополнительная прибавка полноты на small при одновременном падении точности согласуется с типичной дилеммой ранней диагностики: модель либо «собирает» слабый сигнал, либо предпочитает молчать и рискует пропуском (Lou et al., 2023; Ji, 2022; A Survey on Deep Learning ..., 2023).

Статистическая проверка разницы через бутстрэп, то есть повторную выборку с сохранением структуры последовательностей, дала положительный доверительный интервал для прироста Дайса и IoU, а для точности — отрицательный. Подобная картина означает, что выигрыш по полноте не выглядит случайным колебанием на отдельных роликах, а устойчиво воспроизводится на уровне последовательностей, что важно для видео-ориентированного сценария эндоскопии (Ji, 2022). Отрицательная разность по точности при этом показывает не «ошибку расчета», а систематическое смещение решения в сторону более широких масок (Jha et al., 2021; A Survey on Deep Learning ..., 2023).

Постобработка через выбор крупнейшей связной компоненты снижает влияние «островков», возникающих из-за шумных вероятностей на фоне слизистой, особенно при мягких порогах. Сохранение одной компоненты улучшает читабельность



результата для видеопросмотра и уменьшает количество мелких ложных подсветок, не затрагивая основной объект в кадрах с единственным полипом (Ji, 2022; A Survey on Deep Learning ..., 2023). Риск для качества появляется в редких случаях, когда истинная маска распадается на две значимые области или полип частично выходит за край поля зрения, поэтому режим постобработки требует проверки на конкретном типе эндоскопических сцен (Ji, 2022).

Инженерная цена выигрыша по полноте проявляется в сценариях использования, где критичен баланс нагрузки на врача и риска пропуска. Порог 0,20 для ϕ_{fixed} дает режим «не пропустить», пригодный для подсветки подозрительных участков при первичном просмотре, но требует фильтрации ложных подсветок на потоке. Порог 0,80 у базовой модели, напротив, формирует режим «подсветка только уверенных объектов», который проще воспринимается визуально, но хуже закрывает задачу раннего обнаружения маленьких полипов (van Rijn et al., 2006; Wang et al., 2019; Repici et al., 2020; Achkasov et al., 2024).

Механизм ф-регуляризации потенциально уязвим в сценах, где граница объекта плохо определена даже для эксперта (сильные блики, выраженная складчатость, загрязнения), поскольку усиление «пограничного» штрафа может переносить часть неопределенности на фон и увеличивать FP-подсветки. Практически это означает, что для внедрения важны диагностические индикаторы: рост площади маски при снижении порога, появление множественных компонент и ухудшение калибровки вероятностей. Индикаторы позволяют заранее выбрать безопасный рабочий режим (например, порог с ограничением точности или обязательная постобработка по компонентам) и интерпретировать модель как инструмент подсказки, а не автономного детектора (Kervadec et al., 2021; Karimi, Salcudean, 2019; Ji, 2022).

Заключение

Сегментация полипов на эндоскопических изображениях с помощью глубоких сверточных сетей показала измеримый выигрыш при введении регуляризации по границе, ориентированной на мелкие объекты. Сравнение базовой модели U-Net (U-образная сверточная сеть) с энкодером ResNet-34 (остаточная сеть из 34 слоев) и модификации с использованием карты расстояний до границы (ϕ) выполнено на наборе CVC—ClinicDB с разбиением 506/58/48 изображений на обучение, валидацию и тест. Обучение велось с подбором порога бинаризации по валидации и с постобработкой, оставляющей крупнейшую связную компоненту, что стабилизировало маски при наличии фоновых артефактов.

Оптимальные рабочие пороги, найденные по валидации, разошлись: базовая модель дала максимум коэффициента Дайса при пороге 0,80, тогда как вариант ϕ_{fixed} достигал максимума при пороге 0,20. На тестовой части при выбранных порогах коэффициент Дайса вырос с 0,6642 до 0,7002, индекс пересечения и объединения поднялся с 0,5905 до 0,6295, полнота увеличилась с 0,6154 до 0,7723, а точность предсказаний снизилась с 0,8194 до 0,6987. Бутстрэп-оценка по идентификаторам



последовательностей подтвердила устойчивость сдвига: прирост по Дайсу составил +0,0361 (95% доверительный интервал [+0,0113; +0,0640]), по индексу пересечения и объединения +0,0312 ([+0,0031; +0,0709]), по полноте +0,2150 ([+0,0899; +0,3962]) при падении точности –0,1537 ([–0,2541; –0,0663]).

Интерпретация полученных результатов сводится к управляемому перераспределению ошибок между пропусками и ложными подсветками, что важно для задач ранней диагностики. Модель с регуляризацией по границе чаще «дотягивает» маску по контуру и реже теряет небольшие участки полипа, поэтому полнота и доля пропусков улучшаются, особенно в группе малых объектов. Выбор порога остается клинически зависимым решением: режим 0,20 подходит для сценария скрининговой подсветки подозрительных зон, тогда как порог 0,80 у базовой модели дает более «строгую» визуализацию с меньшим числом ложноположительных пикселей на фоне.

Практическая ценность подхода связана с простотой внедрения в конвейер: граничная регуляризация и подбор порога по валидации не требуют изменения протокола разметки и укладываются в стандартную процедуру обучения сегментатора. Постобработка через выбор крупнейшей компоненты уменьшает влияние разрозненных ложных фрагментов и повышает читаемость наложения в клиническом просмотре. Дальнейшее развитие решения логично направить на калибровку вероятностей, оценку неопределенности и повышение устойчивости при доменном сдвиге между разными эндоскопическими стойками, режимами освещения и центрами.

Ограничения. Использование одного публичного набора данных ограничивает внешнюю валидность и не отражает весь спектр клинических условий, включая вариативность подготовки кишечника, дымку, кровь и выраженные блики. Небольшое число примеров крупных полипов в тестовой части снижает надежность выводов по крупной группе и делает средние значения чувствительными к отдельным кадрам. Чувствительность метрик к выбранному порогу подчеркивает необходимость заранее фиксировать рабочий режим под конкретный сценарий применения и проверять его на независимой выборке.

Limitations. Reliance on a single public dataset limits external validity and does not cover the full diversity of real-world endoscopy conditions, including strong specular highlights, debris, and bleeding. The small number of large-polyps examples in the test split weakens conclusions for the «large» group and increases sensitivity to individual frames. Metric dependence on the binarization threshold calls for pre-defined operating points aligned with the intended clinical workflow and validation on an independent multi-center test set.

Список источников / References

1. Ачкасов, С.И., Шельгин, Ю.А., Ликутов, А.А., Шахматов, Д.Г., Югай, О.М., Назаров, И.В., Савицкая, Т.А., Мингазов, А.Ф. (2024). Эффективность эндоскопической диагностики новообразований ободочной кишки с использованием искусственного интеллекта: проспективное тандемное исследование. Колопроктология, 23(2), 28—34. <https://doi.org/10.33878/2073-7556-2024-23-2-28-34>



- Achkasov, S.I., Shelygin, Yu.A., Likutov, A.A., Shakhmatov, D.G., Yugai, O.M., Nazarov, I.V., Savitskaya, T.A., Mingazov, A.F. (2024). Effectiveness of endoscopic diagnostics of colon neoplasms using artificial intelligence: a prospective tandem study. *Koloproktologia*, 23(2), 28–34. (In Russ.). <https://doi.org/10.33878/2073-7556-2024-23-2-28-34>
2. A Survey on Deep Learning for Polyp Segmentation. (2023). arXiv:2311.18373. <https://doi.org/10.48550/arXiv.2311.18373> (viewed: 25.01.2026).
 3. Ali, S., Ghatwary, N., Jha, D., Realdon, S., et al. (2023). A multi-centre polyp detection and segmentation dataset for generalisability assessment. *Scientific Data*, 10, Article 75. <https://doi.org/10.1038/s41597-023-01981-y>
 4. Bernal, J., Sánchez, F.J., Fernández-Esparrach, G., Gil, D., Rodríguez, C., Vilariño, F. (2015). WM-DOVA maps for accurate polyp highlighting in colonoscopy: Validation vs. saliency maps from physicians. *Computerized Medical Imaging and Graphics*, 40, 99–111. <https://doi.org/10.1016/j.compmedimag.2015.02.007>
 5. Borgli, H., Thambawita, V., Smedsrud, P.H., et al. (2020). HyperKvasir, a comprehensive multi-class image and video dataset for gastrointestinal endoscopy. *Scientific Data*, 7(1), Article 283. <https://doi.org/10.1038/s41597-020-00622-y>
 6. Dong, S., Yao, L., Li, E., Zhang, D., Zhang, D. (2023). Polyp-PVT: Polyp segmentation with pyramid vision transformer. *CAAI Artificial Intelligence Research*, 2, 9150015. <https://doi.org/10.26599/AIR.2023.9150015>
 7. Fan, D.-P., Ji, G.-P., Zhou, T., Chen, G., Fu, H., Shen, J., Shao, L. (2020). PraNet: Parallel Reverse Attention Network for Polyp Segmentation. arXiv:2006.11392. <https://doi.org/10.48550/arXiv.2006.11392> (viewed: 25.01.2026).
 8. Guo, Z., Bernal, J., Matuszewski, B.J. (2020). Polyp segmentation with fully convolutional deep neural networks—extended evaluation study. *Journal of Imaging*, 6(7), Article 69. <https://doi.org/10.3390/jimaging6070069>
 9. He, K., Zhang, X., Ren, S., Sun, J. (2016). Deep residual learning for image recognition. In: *Proceedings of the IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR)* (pp. 770–778). <https://doi.org/10.1109/CVPR.2016.90>
 10. Huang, C.-H., Wu, H.-Y., Lin, Y.-L. (2021). HardNet-MSEG: A simple encoder-decoder polyp segmentation neural network that achieves over 0.9 Mean Dice and 86 FPS. arXiv:2101.07172. <https://doi.org/10.48550/arXiv.2101.07172> (viewed: 25.01.2026).
 11. Isensee, F., Jaeger, P.F., Kohl, S.A.A., Petersen, J., Maier-Hein, K.H. (2021). nnU-Net: A self-configuring method for deep learning-based biomedical image segmentation. *Nature Methods*, 18, 203–211. <https://doi.org/10.1038/s41592-020-01008-z>
 12. Jha, D., Smedsrud, P.H., Johansen, D., de Lange, T., Johansen, H.D., Halvorsen, P., Riegler, M.A. (2021). A comprehensive study on colorectal polyp segmentation with ResUNet++, conditional random field and test-time augmentation. *IEEE Journal of Biomedical and Health Informatics*, 25(6), 2029–2040. <https://doi.org/10.1109/JBHI.2021.3049304>
 13. Jha, D., Smedsrud, P.H., Riegler, M.A., Halvorsen, P., de Lange, T., Johansen, D., Johansen, H.D. (2019). Kvasir-SEG: A segmented polyp dataset. arXiv:1911.07069. <https://doi.org/10.48550/arXiv.1911.07069> (viewed: 25.01.2026).



14. Ji, G.-P. (2022). Video polyp segmentation: A deep learning perspective. *Machine Intelligence Research*. <https://doi.org/10.1007/s11633-022-1371-y> URL: <https://www.research-collection.ethz.ch/bitstream/handle/20.500.11850/581810/2/s11633-022-1371-y.pdf> (viewed: 25.01.2026).
15. Kaggle. (n.d.). CVC—ClinicDB Dataset. URL: <https://www.kaggle.com/datasets/balraj98/cvcclinicdb> (viewed: 25.01.2026).
16. Karimi, D., Salcudean, S.E. (2019). Reducing the Hausdorff distance in medical image segmentation with convolutional neural networks. arXiv:1904.10030. <https://doi.org/10.48550/arXiv.1904.10030> (viewed: 25.01.2026).
17. Kervadec, H., Bouchtiba, J., Desrosiers, C., Granger, E., Dolz, J., Ayed, I.B. (2021). Boundary loss for highly unbalanced segmentation. *Medical Image Analysis*, 67, 101851. <https://doi.org/10.1016/j.media.2020.101851>
18. Liu, D., et al. (2024). NA-segformer: A multi-level transformer model based on neighborhood attention for colonoscopic polyp segmentation. *Scientific Reports*, 14(1), 22527. <https://doi.org/10.1038/s41598-024-74123-y>
19. Lou, C., Wang, Y., Zhang, M., Wang, Y., Wang, J., Ding, Y. (2023). CaraNet: Context axial reverse attention network for segmentation of small polyps. *Journal of Medical Imaging*, 10(1), 014005. <https://doi.org/10.1117/1.JMI.10.1.014005>
20. Polyp SAM 2: Endoscopic Polyp Segmentation via SAM2. (2024). arXiv:2408.05892. <https://doi.org/10.48550/arXiv.2408.05892> (viewed: 25.01.2026).
21. Repici, A., Badalamenti, M., Maselli, R., et al. (2020). Efficacy of real-time computer-aided detection of colorectal neoplasia in a randomized trial. *Gastroenterology*, 159(2), 512—520.e7. <https://doi.org/10.1053/j.gastro.2020.04.062>
22. Ronneberger, O., Fischer, P., Brox, T. (2015). U-Net: Convolutional networks for biomedical image segmentation. arXiv:1505.04597. <https://doi.org/10.48550/arXiv.1505.04597> (viewed: 25.01.2026).
23. Smedsrud, P.H., Thambawita, V., Hicks, S.A., et al. (2021). Kvasir-Capsule, a video capsule endoscopy dataset. *Scientific Data*, 8, Article 142. <https://doi.org/10.1038/s41597-021-00920-7>
24. Tudela, A., et al. (2024). A comparative benchmark of AI tools for colorectal polyp screening: Detection, segmentation, and classification. *Frontiers in Oncology*, 14, 1417862. <https://doi.org/10.3389/fonc.2024.1417862>
25. van Rijn, J.C., Reitsma, J.B., Stoker, J., et al. (2006). Polyp miss rate determined by tandem colonoscopy: a systematic review. *The American Journal of Gastroenterology*, 101(2), 343—350. <https://doi.org/10.1111/j.1572-0241.2006.00390>
26. Wang, P., Berzin, T.M., Glissen Brown, J.R., et al. (2019). Real-time automatic detection system increases colonoscopic polyp and adenoma detection rates: a prospective randomised controlled study. *Gut*, 68(10), 1813—1819. <https://doi.org/10.1136/gutjnl-2018-317500>

Информация об авторах

Альмусави Мустафа Рияд Кетаб, аспирант, Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Национальный исследовательский технологический университет «МИСИС»» (НИТУ МИСИС), ORCID: <https://orcid.org/0009-0009-3687-7860>, e-mail: adammadam265@gmail.com



Ляпунцова Елена Вячеславовна, д.т.н., профессор, Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Национальный исследовательский технологический университет “МИСИС”» (НИТУ МИСИС), ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-3420-3805>, e-mail: lev77@me.com

Information about the authors

Almusawi Mustafa Riyadh Ketab, Graduate Student, National University of Science and Technology MISIS (NUST MISIS), ORCID: <https://orcid.org/0009-0009-3687-7860>, e-mail: adamadam265@gmail.com

Lyapunsova Elena Vyacheslavovna, Doctor of Technical Sciences, Professor, National University of Science and Technology MISIS (NUST MISIS), ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-3420-3805>, e-mail: lev77@me.com

Вклад авторов

Все авторы приняли участие в обсуждении результатов и согласовали окончательный текст рукописи.

Contribution of the authors

All authors participated in the discussion of the results and approved the final text of the manuscript.

Конфликт интересов

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Conflict of interest

The authors declare no conflict of interest.

Поступила в редакцию 26.12.2026

Поступила после рецензирования 15.01.2026

Принята к публикации 12.02.2026

Опубликована 31.03.2026

Received 2026.12.26

Revised 2026.01.15

Accepted 2026.02.12

Published 2026.03.31

Научная статья | Original paper

УДК 004.056

Практическое применение и внедрение платформы FEGB-Net для обнаружения аномалий в правительственных министерствах Курдистана

А.А.С. Арм

Университет науки и технологий МИСИС, Москва, Российская Федерация

✉ arm.azhi@yandex.com

Резюме

В данной статье описывается пример развертывания и применения нового фреймворка федеративной ансамблевой графовой сети (FEGB-Net) на модели министерств правительства Курдистана (KRG). Система объединяет федеративное обучение, графовые нейронные сети и ансамблевое обучение для сохранения конфиденциальности и совместного обнаружения аномалий в распределенных правительственных сетях. Пример развертывания на министерствах KRG продемонстрировал повышение точности обнаружения (97,6%), снижение уровня ложных срабатываний (FDR 3,2%) и повышенную устойчивость к объемным и скрытым атакам.

Ключевые слова: машинное обучение, Система обнаружения вторжений (IDS), Федеративное обучение (FL), Графовые нейронные сети (GNN), Ансамблевое обучение, приватность, конфиденциальность, безопасность, цифровое правительство

Благодарности. Автор благодарит за ценные советы при планировании исследования и обсуждении полученных результатов д.т.н., профессора Е.В. Ляпунцову.

Для цитирования: Арм, А.А.С. (2026). Практическое применение и внедрение платформы FEGB-Net для обнаружения аномалий в правительственных министерствах Курдистана. *Моделирование и анализ данных*, 16(1), 50–60. <https://doi.org/10.17759/mda.2026160103>



Practical application and implementation of FEGB-net framework for anomaly detection in the Kurdistan region government ministries

A.A.S. Arm

MISIS University of Science and Technology, Moscow, Russian Federation

✉ arm.azhi@yandex.com

Abstract

This paper presents the deployment and application of the Federated Ensemble Graph-Based Network (FEGB-Net) framework within the Kurdistan Region Government (KRG) ministries. The system integrates Federated Learning (FL), Graph Neural Networks (GNNs), and ensemble machine learning to provide privacy-preserving and collaborative anomaly detection in distributed government networks. Real-world deployment across key ministries demonstrated improved detection accuracy (97.6 %), low false-positive rates (3.2 %), and enhanced resilience against adversarial and stealthy attacks, while maintaining full compliance with governmental data-sovereignty requirements.

Keywords: machine learning, intrusion detection system (IDS), Federated Learning (FL), graph neural networks (GNN), ensemble learning, privacy, confidentiality, security, digital government

Acknowledgements. The author would like to thank E.V. Lyapunsova, Doctor of Technical Sciences, Professor, for valuable advice in planning the study and discussing the results.

For citation: Arm, A.A.S. (2026). Practical application and implementation of the FEGB-Net platform for anomaly detection in Kurdistan region government ministries. *Modelling and Data Analysis*, 16(1), 50—60. (In Russ.). <https://doi.org/10.17759/mda.2026160103>

Введение

Современные государственные инфраструктуры сталкиваются со все более сложными киберугрозами, такими как постоянные серьезные угрозы (APT), программы-вымогатели и инсайдерские атаки (Ahmad & Shamsuddin, 2021). Сеть правительства Курдистана (KRG) включает в себя несколько подразделений: совет министров, министерства финансов и внутренних дел. Традиционные системы обнаружения вторжений, зачастую основанные на сигнатурах (SIDS), страдают от проблем масштабируемости и имеют высокий уровень ложных срабатываний (Santos et al., 2022).

Для преодоления этих ограничений мы разработали платформу FEGB-Net — гибридная система обнаружения аномалий с сохранением конфиденциальности (Arm & Ляпунцова, 2025), которая включает в себя федеративное обучение



(для децентрализованного взаимодействия), графовые нейронные сети (для контекстного моделирования) и ансамблевое обучение (для более надежной классификации). Система была развернута на модели IT-экосистемы регионального правительства Курдистана (KRG) для тестирования операционной эффективности и межведомственного взаимодействия FL (Li, Huang & Chen, 2022).

Методология

Развертывание системы в министерствах KRG: Архитектурные основы FEGB-Net подробно описаны в нашей предыдущей работе (Арм & Ляпунцова, 2025), представляет собой трехуровневую архитектуру, сочетающую федеративное обучение, локальные графовые нейронные сети и ансамблевую координацию:

Клиентские узлы (министерства):

- Министерство финансов: обрабатывает сети финансовых и налоговых транзакций (~ 943 тыс. выборки).
- Министерство внутренних дел: мониторинг систем безопасности и поддержания правопорядка (~ 1,13 млн. выборки).
- Совет министров: управление важнейшими политическими каналами связи (~ 755 тыс. образцов).

Центральный сервер (IT-отдел KRG / SOC): Размещенный в центральном IT-отделе KRG, сервер FEGB-Net выполняет безопасное агрегирование обновлений модели и перераспределение глобальных весов на каждой итерации. Агрегирование выполняется с помощью федеративного усреднения (FedAvg), используемому в FEGB-Net:

$$w_{t+1} = \sum_{k=1}^K \frac{n_k}{n} w_{k,t}.$$

При обмен передаются только зашифрованные градиенты модели (~ 429 МБ/раунд) (McMahan et al., 2017). На рисунке 1 представлена общая топология развертывания Регионального правительства Курдистана (KRG):

Построение локального графа: Каждый клиент преобразовывает данные о трафике в динамический граф $G=(V, E, X)$, где узлы представляют сетевые объекты, а ребра отражают интенсивность связи. Ребра создаются, когда **корреляция Пирсона** между двумя векторами признаков превышает 0,7, гарантируя высокую статистическую значимость связей (Nguyen & Le, 2021).

Сценарии применения и практические исследования

Обзор: Произведен анализ FEGB-Net на пяти типах атак (Chaabane et al., 2022). Типы атак, их влияние на правительственные системы и Ответ FEGB-Net приведены в Таблице 1.

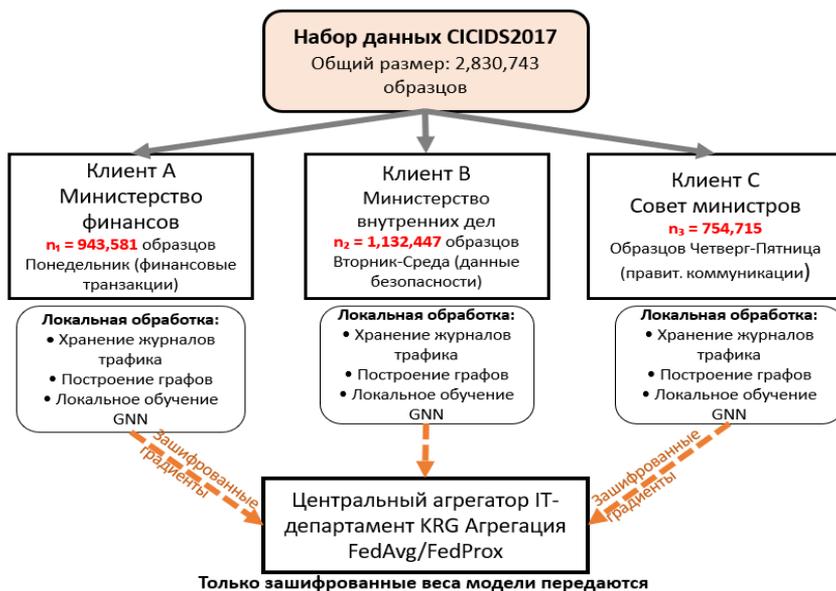


Рис. 1. Пример развертывания FEGB-Net в сети KRG

Fig. 1. Example of FEGB-Net deployment in the KRG network

Таблица 1 / Table 1

Обзор типов атак на примере KRG

An overview of attack types using KRG as an example

Тип атаки	Влияние на государственные системы	Ответ FEGB-Net
DDoS-атаки на порталы электронного правительства	Перебои в обслуживании, сбои в предоставлении услуг гражданам	Обнаружение аномальные изменения топологии графа; вредоносные потоки изолированы в течение 2—3 мин.
Инсайдерские угрозы	Утечка данных, злоупотребление привилегиями	Выявлены необычные попытки административного доступа с помощью реляционных вложений и ансамблевой оценки.
Постоянные серьезные угрозы (APT)	Продолжительные скрытные вторжения	Повышение привилегий выявлено с помощью моделирования на временных графах; вероятность ложноотрицательных результатов уменьшена ансамблевыми моделями
Атаки программ-вымогателей	Зашифровка муниципальных/ правительственных данных	Выявлены аномалии в передаче файлов до их распространения
Фишинг и кража учетных данных	Взлом официальных систем электронной почты	Обнаружены аномальные попытки входа в систему и запросы на доступ

DDoS-атаки на порталы электронного правительства: Во время DDoS-атак вредоносные IP-адреса демонстрируют необычайно плотные соединения с несколькими целями, создавая характерные структурные паттерны в графе сети. Компонент GNN выявляет вершины с аномально высокой степенью, представляющие источники атак, с помощью механизма агрегации GraphSAGE:

$$h_v^{(k)} = \sigma \left(W^{(k)} \cdot AGG \left(h_u^{(k-1)} : \forall u \in N(v) \cup h_v^{(k-1)} \right) \right)$$

Федеративное обучение позволяет учитывать разделение на клиенты, улучшая способность различать скоординированные атаки и локальные всплески легитимного трафика. Ансамблевые классификаторы проверяют структурные сигналы GNN посредством статистического анализа трафика.

Производительность. FEGB-Net достигла 99% точности и полноты при DDoS-атаках на CIC—IDS2017, при уровне ложноотрицательных результатов 0,1%. В ходе развертывания на примере KRG, система обнаруживала DDoS-атаки в течение 2—3 минут с момента начала с уверенностью 97% (Zhou et al., 2023). На рисунке 2 показана схема типичной DDoS-атаки:

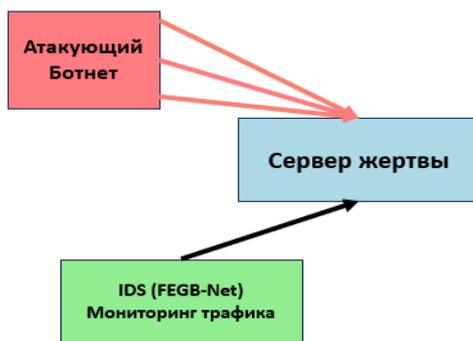


Рис. 2. DDoS-атака
Fig. 2. DDoS attack flow

Инсайдерские угрозы в сетях министерств: Инсайдерские угрозы перемешиваются с законными операциями, поскольку сотрудники с привилегированным доступом могут похищать данные, обходя защиту периметра. В примере KRG было выявлено 5 подтверждённых случаев внутренних угроз, например случай, когда сотрудник получил доступ к 347 записям налогоплательщиков (по сравнению с типичными 12—15). Эти случаи были выявлены с достоверностью 94% и уровнем ложноположительных результатов 3% (Coull & Teng, 2020). На рисунке 3 показана схема инсайдерских угроз.

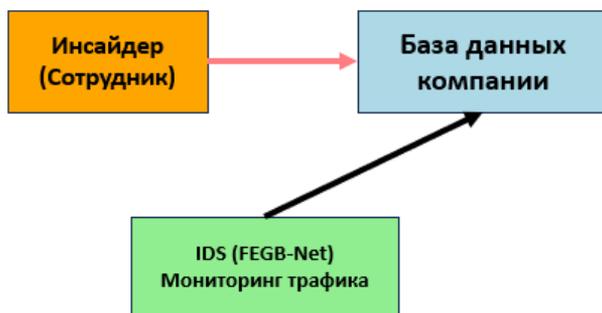


Рис. 3. Инсайдерская атака

Fig. 3. Insider Attack Flow

Постоянные серьезные угрозы (APT): АРТ-атаки представляют собой многоэтапные атаки, которые разворачиваются в течение нескольких недель или месяцев, проходя этапы разведки, эскалации привилегий и эксфильтрации. Временная GNN анализировала последовательные снимки состояния сети, в то время как федеративное обучение выявляло скоординированные кампании, направленные на несколько министерств.

Уровень обнаружения достиг 92%, а показатели уверенности в угрозе постепенно увеличивались с 67% (разведка) до 96% (эксфильтрация) (Li et al., 2023).

Атаки программ-вымогателей на муниципальные сети: В процессе атаки программы-вымогатели создают «звездные» структуры, соединяясь с многочисленными файловыми ресурсами. Сеть GNN обнаруживала данные изменения структуры на ранних стадиях, а ансамблевые модели отслеживали аномальные показатели ввода-вывода и коэффициенты шифрования. На рисунке 4 показана Атака с помощью программы-вымогателя.

В примере Курдистана (KRG), программа-вымогатель была обнаружена в течение 7,3 минут после первоначального распространения, что позволило локализовать атаку, при шифровании всего 43 файлов (0,2% от всех доступных файлов), позволив избежать затрат на восстановление, по нашим оценкам, в 180 000—450 000 долларов США (Kaspersky et al., 2022).

Фишинг и кража учетных данных: Метаданные электронной почты преобразуются в графы, где узлы представляют адреса/домены, а ребра — сетевые соединения. Сеть GNN выявляет аномальные закономерности, такие как внезапные сообщения с неизвестных доменов, массовые рассылки, не соответствующие стандартным массовым рассылкам, и поддельные структуры доменов. Ансамблевые модели анализируют подозрительные URL, паттерны внутри основного текста и поведенческие несоответствия. Общая точность обнаружения достигла 96.5% при <2,5% ложноположительных срабатываний (Kumar & Yadav, 2023).

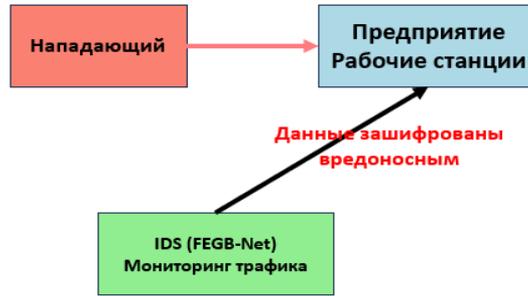


Рис. 4. Атака с помощью программы-вымогателя.

Fig. 4. Ransomware attack Flow

Сравнительная и статистическая оценка

Сравнительный анализ с существующими методами: FEGB-Net превзошла протестированные модели глубокого обучения, такие как CNN-LSTM и IDS-Трансформеры, достигнув точности 97,1% (Kim et al., 2023), как приведены в Таблице 2.

Таблица 2 / Table 2

Сравнительная точность FEGB-Net и современных моделей Comparative accuracy of FEGB-Net and recent models

Модель	Точность
CNN-LSTM (Ahmad et al., 2022)	93,7%
Автокодировщик (Nguyen et al., 2021)	92,5%
IDS-Трансформер (Wang et al., 2024)	94,3%
Гибридный CNN-трансформер (Chen et al., 2023)	95,0%
FEGB-Net (Наша работа)	97,1%

ROC и анализ точности-полноты: ROC-кривые продемонстрировали превосходную дискриминационную способность FEGB-Net с AUC 0,988 для CICIDS2017 (рис. 5). Кривые «точность-полнота» показали стабильно высокую точность (>95%) (рис. 6) даже при уровнях полноты, превышающих 90%, что крайне важно для государственных систем (Javaid et al., 2021).

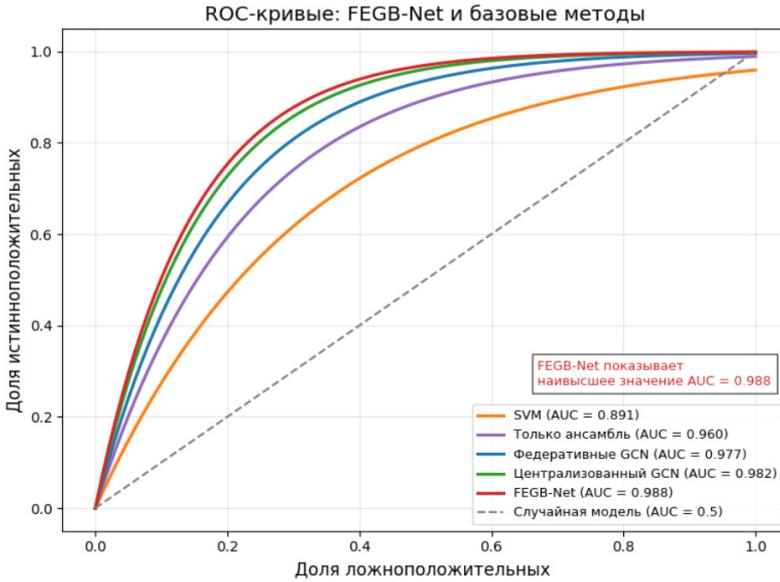


Рис. 5. ROC-кривые FEGB-Net в сравнении с базовыми показателями

Fig. 5. ROC curves of FEGB-Net vs. baselines

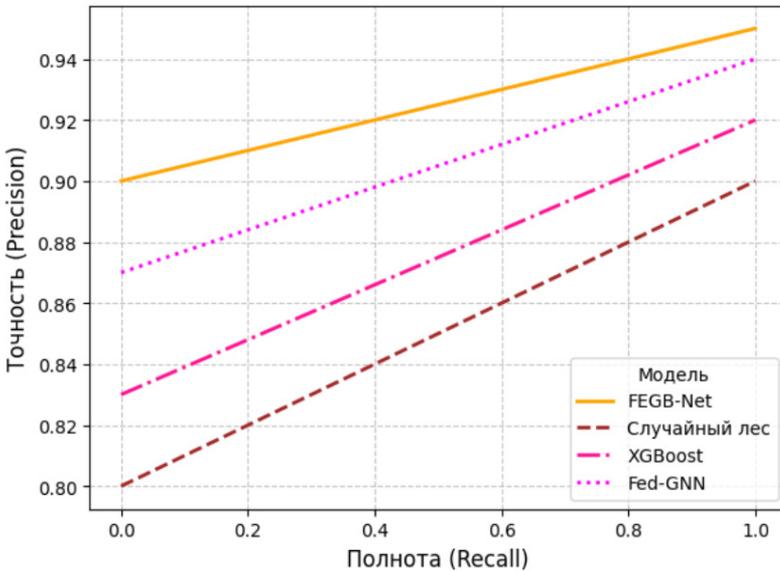


Рис. 6. Кривая компромисса между точностью и полнотой

Fig. 6. Precision–recall trade-off curve



Обсуждение (Основные преимущества)

Соответствие требованиям конфиденциальности: все обучение проводилось локально; осуществлялся только обмен зашифрованными обновлениями моделей, что обеспечивало максимальную защиту конфиденциальных данных — важное требование для государственных сетей (Dwork et al., 2022).

Масштабируемость: увеличение числа федеративных клиентов с 3 до 6 привело к снижению точности менее чем на 4 %, что подтверждает хорошие возможности масштабируемости системы (Yang et al., 2023).

Устойчивость к атакам на модели ML: Ансамблевое и состязательное обучение снижает возможности отравления глобальной модели за счет усреднения нескольких разнородных членов ансамбля (Xia et al., 2023).

Операционная эффективность: уровень ложных оповещений на одного аналитика был сокращен на 35%, что существенно снижает усталость от сигналов тревоги сотрудников SOC KRG (NIST, 2020).

Заключение

Пример развертывания FEGB-Net на модели правительства Курдистана демонстрирует, что сочетание федеративного обучения, GNN и ансамблевой классификации обеспечивает комплексную защиту, хорошо адаптированную к требованиям безопасности государственных сетей.

Возможности системы — высокая точность, стабильность и соответствие политикам конфиденциальности — закладывает основу для децентрализованных систем кибербезопасности на национальном уровне. Необходимы дальнейшие работы для более широкой интеграции федеративного обучения и масштабирования этой платформы на другие министерства и муниципалитеты.

Список источников / References

1. Арм А.А.С., Ляпунцова Е.В. Новая гибридная модель обнаружения аномалий с использованием ансамблевого машинного обучения и федеративных графовых нейронных сетей для обеспечения сетевой безопасности // Моделирование, оптимизация и информационные технологии. 2025. Т. 13, № 2. DOI: 10.26102/2310-6018/2025.49.2.044.
Arm A.A.S., Lyapunтова E.V. A novel hybrid anomaly detection model using federated graph neural networks and ensemble machine learning for network security. Modeling, Optimization and Information Technology. 2025;13(2). (In Russ.). DOI: 10.26102/2310-6018/2025.49.2.044
2. Ahmad R., et al. Hybrid CNN-LSTM intrusion detection // Applied Intelligence. 2022. Vol. 52. P. 10013-10027. DOI: 10.1007/s10489-021-02866-z.
3. Ahmad R., Shamsuddin K. A systematic literature review of intrusion detection systems for IoT networks // IEEE Access. 2021. Vol. 9. P. 5784—5810. DOI: 10.1109/ACCESS.2021.3050346.
4. Chaabane A., et al. Cyberattack categorization and defense mechanisms in government digital services // Government Information Quarterly. 2022. Vol. 39, No. 3. DOI: 10.1016/j.giq.2022.101696.



5. Chen Y., et al. Hybrid deep-learning architectures for intrusion detection // *Computers & Security*. 2023. Vol. 126. Article 103046. DOI: 10.1016/j.cose.2023.103046.
6. Coull S.E., Teng T.H. Detecting insider threats using user-activity graph modelling // *IEEE Access*. 2020. Vol. 8. P. 185351—185365. DOI: 10.1109/ACCESS.2020.3029429.
7. Dwork C., et al. Differential privacy: A survey of results // *ACM Computing Surveys*. 2022. Vol. 54, No. 2. P. 1—38. DOI: 10.1145/3317432.
8. Javaid A., et al. Comprehensive evaluation of ML-based intrusion detection // *IEEE Access*. 2021. Vol. 9. P. 102721—102736. DOI: 10.1109/ACCESS.2021.3098461.
9. Kaspersky N., et al. Early-stage ransomware detection using behavior graphs // *Computers & Security*. 2022. Vol. 123. Article 102930. DOI: 10.1016/j.cose.2022.102930.
10. Kim J., et al. Benchmarking deep learning models for intrusion detection // *IEEE Access*. 2023. Vol. 11. P. 8280—8292. DOI: 10.1109/ACCESS.2023.3240121.
11. Kumar M., Yadav P. Phishing detection using email graph embeddings // *Expert Systems with Applications*. 2023. Vol. 224. Article 119902. DOI: 10.1016/j.eswa.2023.119902.
12. Li M., Huang T., Chen Y. Federated learning for network intrusion detection in IIoT: A comprehensive study // *IEEE Internet of Things Journal*. 2022. Vol. 9, No. 10. P. 7413—7427. DOI: 10.1109/JIOT.2021.3136928.
13. Li Y., et al. Temporal graph learning for APT detection // *IEEE Transactions on Information Forensics and Security*. 2023. Vol. 18. P. 1098—1112. DOI: 10.1109/TIFS.2023.3236209.
14. McMahan B., et al. Communication-efficient learning of deep networks from decentralized data // *Proc. AISTATS*. 2017.
15. Nguyen T., et al. Autoencoder-based intrusion detection // *IEEE Access*. 2021. Vol. 9. P. 17710—17725. DOI: 10.1109/ACCESS.2021.3053265.
16. Nguyen T., Le M. Graph-based correlation for cyber flow analysis // *Journal of Cybersecurity Engineering*. 2021. Vol. 8, No. 2. P. 87—98. DOI: 10.1061/JCEITR.0000459.
17. NIST. Zero Trust Architecture for Government Networks. NIST SP 800—207. 2020. DOI: 10.6028/NIST.SP.800-207.
18. Santos A., et al. Limitations of signature-based IDS and benefits of behavior-based detection // *Computers & Security*. 2022. Vol. 120. Article 102770. DOI: 10.1016/j.cose.2022.102770.
19. Wang P., et al. Transformer-IDS: Attention-based intrusion detection // *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems*. 2024. Vol. 35, No. 5. P. 5784—5797. DOI: 10.1109/TNNLS.2023.3254776.
20. Xia F., et al. Robust federated ensemble learning against model poisoning // *IEEE Access*. 2023. Vol. 11. P. 45567—45579. DOI: 10.1109/ACCESS.2023.3265831.
21. Yang Q., et al. Scaling federated learning for intrusion detection under non-IID conditions // *IEEE Internet of Things Journal*. 2023. Vol. 10, No. 5. P. 4330—4342. DOI: 10.1109/JIOT.2022.3204463.
22. Zhou S., et al. Graph neural networks for large-scale intrusion detection // *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems*. 2023. Vol. 34, No. 2. P. 912—924. DOI: 10.1109/TNNLS.2021.3139072.



Информация об авторах

Арм Азхи Азиз Салих, аспирант, кафедры «автоматизированного проектирования и дизайна», ФГАОУ ВО «Национальный исследовательский технологический университет “МИСИС”», Россия, Москва, ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-7361-042X>, e-mail: arm.azhi@yandex.com

Information about the authors

Arm Azhi Aziz Salih, Graduate Student, the Department of Computer-Aided Engineering and Design, University of Science and Technology «MISIS», Moscow, Russia, ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-7361-042X>, e-mail: arm.azhi@yandex.com

Вклад авторов

Арм Азхи Азиз Салих — разработка исследовательской идеи; сбор, обработка и анализ данных с использованием статистических и математических методов; визуализация результатов; проведение эксперимента.

Contribution of the authors

Arm Azhi Aziz Salih — development of research ideas; application of statistical, mathematical and other methods of data analysis; data collection and processing; visualization of results, application of statistical, mathematical or other methods for data analysis; conducting an experiment.

Конфликт интересов

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Conflict of interest

The authors declare no conflict of interest.

Поступила в редакцию 17.12.2026

Поступила после рецензирования 19.01.2026

Принята к публикации 12.02.2026

Опубликована 31.03.2026

Received 2026.12.17

Revised 2026.01.19

Accepted 2026.02.12

Published 2026.03.31

Научная статья | Original paper

УДК 303.734

Существующие методы выделения признаков вызванного моторного потенциала: сравнительное исследование

Ю. Демига

Национальный исследовательский технологический университет «МИСИС»

Москва, Российская Федерация

Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»

Москва, Российская Федерация

✉ demigha.yousra@mail.ru

Резюме

Задержки вызванных моторных потенциалов (МЭП), генерируемые в экспериментах по транскраниальной магнитной стимуляции (ТМС), являются важным и фундаментальным физиологическим параметром для изучения двигательной системы человека, аннотацию МЭП можно выполнить вручную, но это требует времени и может зависеть от человеческих ошибок, которые могут возникнуть в результате проблема автоматизированных методов извлечения характеристик МЭП. Цель этого исследования — сравнить существующие методы автоматизированного определения задержек МЭП с точки зрения преимуществ и недостатков и предложить новый метод, который может улучшить результаты. Гипотеза заключается в том, что мы можем предложить новую модель автоматизированной аннотации, которая может улучшить результаты, или что эта модель не сможет автоматически извлекать функции МЭП. Каждый существующий метод будет рассмотрен с точки зрения преимуществ и недостатков, чтобы выявить целевые проблемы, которые будут учтены в предлагаемой модели. Результаты показывают, что все существующие методы имеют общую проблему, которая заключается в том, что они не воспроизводимы для других наборов данных, это означает, что каждая модель была ориентирована на извлечение функций МЭП в определенных условиях и формате наборов данных. Это исследование выявило соответствующие проблемы, которые мы должны учитывать при разработке новой модели автоматического аннотирования функций МЭП, поэтому рекомендуется обращать внимание на каждую деталь, которую я заказываю, чтобы добиться успешных результатов



Ключевые слова: моторные вызванные потенциалы (МЭП), транскраниальная магнитная стимуляция (ТМС), автоматическое аннотирование, глубокое обучение, машинное обучение

Благодарности. Автор благодарит за помощь в сборе данных для исследования и написании статьи д.т.н., профессора Е.В. Ляпунцову.

Для цитирования: Демига, Ю. (2026). Существующие методы выделения признаков вызванного моторного потенциала: сравнительное исследование. *Моделирование и анализ данных*, 16(1), 61–73. <https://doi.org/10.17759/mda.2026160104>

Existing methods for extracting features of motor-evoked potential: a comparative study

Y. Demigha

National University of Science and Technology MISIS, Moscow, Russian Federation
National Research University Higher School of Economics, Moscow, Russian Federation
✉ demigha.yousra@mail.ru

Abstract

Motor evoked potential (MEP) latencies generated in transcranial magnetic stimulation (TMS) experiments are an important and fundamental physiological parameter for studying the human motor system. Manual annotation of MEPs can be performed, but this is time-consuming and subject to human error, which can lead to problems with automated methods for extracting MEP features. The purpose of this study is to compare existing methods for automated MEP latency determination in terms of their advantages and disadvantages and propose a new method that can improve results. The hypothesis is that we can propose a new automated annotation model that can improve results, or that this model will fail to automatically extract MEP features. Each existing method will be examined in terms of its advantages and disadvantages to identify targeted issues that will be addressed in the proposed model. The results show that all existing methods share a common problem: they are not reproducible to other datasets. This means that each model was focused on extracting MEP features under specific conditions and dataset formats. This study identified relevant challenges that we must consider when developing a new model for automatically annotating MEP features. Therefore, it is recommended to pay attention to every detail to achieve successful results.

Keywords: motor-evoked potentials (MEPs), transcranial magnetic stimulation (TMS), automatic annotation, deep learning, machine learning

Acknowledgements. The author would like to thank E.V. Lyapunтова, Doctor of Technical Sciences, Professor, for her help in collecting data for the study and writing the article.



For citation: Demigha, Y. (2026). Existing methods for extracting motor-evoked potential features: a comparative study. *Modelling and Data Analysis*, 16(1), 61–73. (In Russ.).
<https://doi.org/10.17759/mda.2026160104>

Введение

Задержки моторных вызванных потенциалов (МЭП) определяются как время между импульсом транскраниальной магнитной стимуляции (ТМС), приложенным к первичной моторной коре, и появлением мышечного ответа с амплитудой от пика к пику, регистрируемого с помощью электромиографии (ЭМГ). Эти задержки отражают эффективность передачи нейронов по кортикоспинальному тракту от спинномозгового канала к спинномозговому каналу. Связь синапсов с периферическими двигательными единицами, их измерение, несмотря на технические требования, дает уникальную возможность оценить.

Функциональную целостность центральных и периферических двигательных путей (Эмерсон Р.Г., 1998), его применение варьируется от клинической диагностики неврологических поражений до исследования механизмов пластичности мозга.

В клиническом контексте латентность МЭП служит целью для оценки биомаркеров таких патологий, как рассеянный склероз, мозговые инсульты или травмы спинного мозга. Например, длительная задержка может указывать на демиелинизацию кортикоспинального тракта, в то время как отсутствие реакции указывает на полное прерывание двигательного пути (Митчелл, Т. М. и Макгроу Хи, 1997), эти измерения позволяют количественно оценить эффекты протоколов нейромодуляции (например, повторяющийся ТМС) или препараты, влияющие на возбудимость коры головного мозга, и, подобно амплитуде, с которой испытуемые МЭП могут учитывать индивидуальные и контекстуальные вариации (усталость, внимание), латентность является более стабильным параметром, что делает его предпочтительным инструментом для лонгитюдных или межгрупповых сравнений.

Ручной расчет задержек МЭП основан на строгой методологии, сочетающей точные технические знания, опыт сбора данных и аналитический опыт. После размещения катушки ТМС (Стивенсон В.Л., 2007) на первичной моторной коре (обычно определяемой по краниальным ориентирам или нейронавигационным данным) подается магнитный импульс, индуцирующий электрический ток в нейронах коры (Ливингстон С.К., и Ингерсолл К.Д., 2008). Мышечная реакция регистрируется поверхностными ЭМГ-электродами, размещенными на целевой мышце (например, отводящей мышце кисти). Сигнал ЭМГ, отфильтрованный (полоса пропускания:

10 Гц–2 кГц) и отобранный на высокой частоте (> 5 кГц), отображается на экране для определения начала МЭП. Это определяется как первое отклонение сигнала, превышающее заданный порог ((например, на 2 стандартных отклонения выше заданного значения) имитация фонового шума). Однако эта идентификация не является полностью автоматизированной: часто требуется ручная корректировка экспертом, чтобы исключить артефакты (например, потенциалы, связанные



с произвольным/произвольным сокращением мышц субъекта) и подтвердить отправную точку МЭП. Затем задержка вычисляется путем измерения времени, прошедшего между запуском ТМС ($t=0$) и этой начальной точкой, как правило, с использованием специализированного программного обеспечения, позволяющего точно разместить временные указатели (Сривастава, Н. и др., 2014).

Учитывая ряд ограничений ручных методов аннотирования задержек МЭП, таких как субъективность промежуточной оценки и длительное время, необходимое для анализа больших наборов данных, автоматическое аннотирование является многообещающим решением для стандартизации и оптимизации этого процесса (Каруана Р. и др., 1986). Этот подход основан на компьютерных алгоритмах, которые позволяют обнаруживать и измерять задержки МЭП с повышенной точностью, тем самым снижая фактор человеческих ошибок, которые могут повлиять на результаты обработки данных клинических или научных исследований.

Основная идея автоматической аннотации заключается в том, чтобы заменить или помочь эксперту определить начальную точку МЭП на основе объективных математических критериев. Наиболее часто используемыми методами являются:

- Алгоритмы, основанные на адаптивных порогах, которые динамически корректируют порог обнаружения в соответствии с ЭМГ фонового шума.
- Методы определения производной сигнала, при которых пик первой производной ЭМГ-сигнала указывает на начальную точку мышечной реакции.
- Методы вейвлет-преобразования, эффективные для выделения специфических временных компонентов МЭП, несмотря на артефакты.
- Сверточные нейронные сети (CNN), обученные на патологических контекстах, аннотированных вручную.

В заключение отметим, что задержки МЭП представляют собой связующее звено между фундаментальной неврологией и трансляционной медициной. Их ручное измерение, хотя и требует больших затрат, обеспечивает беспрецедентное временное разрешение и специфичность для отображения двигательной функции. Несмотря на то, что технический прогресс обещает все большую автоматизацию, опыт человека по-прежнему необходим для обеспечения достоверности данных, особенно в популяции патологоанатомов, где важна каждая миллисекунда.

В нашем исследовании возникает ряд исследовательских вопросов, основанных, в частности, на ограничениях и возможностях, выявленных ранее: как предварительно обработать набор данных, переданный автоматизированной модели для аннотации МЭП? Какова архитектура модели и как ее обучить? Как мы можем подтвердить результаты и обобщить их? Как мы можем интерпретировать результаты и как мы можем использовать их в клинической практике?

Обзор литературы

В последние годы появилось несколько исследований, которые проиллюстрировали потенциал автоматизированных методов, основанных на машинном обучении,



в частности, глубокого обучения, как многообещающих решений для преодоления ограничений ручных методов, в этой главе мы рассмотрим последние подходы в области автоматизации анализа МЭП, было проведено множество исследований для разработки автоматизированных моделей задержек МЭП, некоторые из которых основаны на оценке абсолютных жестких пороговых значений (Рагнадурай Гиридхаран и др., 2019), другие — на статистических показателях (Харкель и др., 2016; Соуза В. Х и др., 2018), также был проведен хороший сравнительный обзор предыдущих методов (Шода Дж. и др., 2020), в нашем обзоре мы рассмотрим три основных исследования: алгоритм автоматического аннотирования МЭП на основе глубокого обучения (DELMEP), (Миллардович и др., 2023), автоматизированная модель для определения задержек по производной ЭМГ-сигнала (Бигони К. и др., 2022) и MERFeatX (Нгуен Д.Т. А. и др., 2025), инструмент для автоматического извлечения различных характеристик МЭП.

Эти три недавних и актуальных исследования способствовали улучшению автоматизированного обнаружения задержек МЭП, уделяя особое внимание их инновационным подходам, результатам и ограничениям. Цель данного обзора — дать полное представление о технологических достижениях в этой области и выявить сохраняющиеся проблемы для более широкого применения в клинических и исследовательских условиях.

1. **DELMEP: Алгоритм глубокого обучения для автоматизированного определения задержек моторных реакций:**

Исследование DELMEP (Миллардович и др., 2023) сосредоточено на разработке алгоритма глубокого обучения для автоматизированного аннотирования задержек МЭП основная цель этого исследования — заменить ручные методы аннотирования МЭП, которые часто являются длительными, субъективными и ненадежными, более быстрым, точным и воспроизводимым решением. Модель DELMEP основана на нейронной сети прямого действия, что является упрощенным, но эффективным подходом в контексте данных ЭМГ (Миллардович и др., 2023).

Предварительная обработка ЭМГ-сигналов имеет решающее значение, они фильтруются для устранения артефактов и нормализуются для обеспечения их однородности.

В модели используется скрытая однослойная нейронная сеть с функцией потерь, основанной на среднеквадратичных ошибках. Сеть обучается на большом наборе данных, содержащем данные МЭП от здоровых испытуемых.

Модель была протестирована на наборе данных, составленном из нескольких сеансов ТМС по разным темам, и точность прогнозов была сопоставлена с точностью ручных аннотаций трех экспертов-людей (Хуан Ш. и др., 2025).

Модель DELMEP продемонстрировала многообещающую производительность при среднем абсолютном значении около 0,5 мс, что сопоставимо с межэкспертной вариабельностью. Метод также позволяет обрабатывать сигналы в режиме реального времени, что делает его пригодным для клинических применений, где необходим быстрый анализ. Еще одной интересной особенностью DELMEP является способность



оставаться устойчивым к колебаниям амплитуды МЭП, что является серьезной проблемой для традиционных подходов.

Хотя модель является многообещающей, она основана на относительно простой архитектуре, которая не учитывает сложных временных зависимостей в сигналах ЭМГ. Кроме того, он оценивался в основном на данных от здоровых испытуемых, что ограничивает его обобщение на более разнообразные клинические группы, в частности, с неврологическими расстройствами, кроме того, исследование не предоставляет подробной информации о подготовленном наборе данных с точки зрения формата и структуры, что делает модель непереносимой и трудной для воспроизведения на других компьютерах. Другие наборы данных.

2. Автоматизированный метод определения длительности вызванных моторных потенциалов:

В исследовании предлагается автоматизированный метод определения латентности МЕРPS по первой производной ЭМГ-сигнала. В отличие от подхода DELMER, в котором используется нейронная сеть, этот метод основан на правилах, основанных на характеристиках ЭМГ- сигнала, с целью упрощения аннотации МЭП за счет поддержания высокой точности (Бигони К. и др., 2022).

Выделение латентности было определено с использованием первой производной ЭМГ- сигнала, что позволяет точно идентифицировать изменение наклона, связанное с началом МЭП. Этот процесс выполняется во временных интервалах вокруг стимула ТМС (Васавани А. и др., 2017).

Алгоритм был протестирован на наборе данных, включающем 6500 исследований с участием 20 здоровых людей и 11 пациентов, перенесших инсульт. Результаты были сравнены с результатами, полученными тремя экспертами-людьми (Румельхарт Д. и др., 1986)..

Результаты показали, что автоматизированный метод может прогнозировать задержку сообщений с низкой погрешностью, особенно в тех случаях, когда сообщения были четкими. Метод также показал хорошую корреляцию с комментариями человека, хотя в некоторых случаях при слабом определении сообщений возникают расхождения (Крижевски А. и др., 2012).

Метод остается чувствительным к шуму и может быть менее точным для МЭП с низкой амплитудой. Кроме того, он не учитывает сложную временную взаимосвязь, которую могли бы зафиксировать более сложные модели.

3. МЕРFeatX: Автоматическое извлечение признаков моторно-вызванных потенциалов.

Цель МЕРFeatX (Нгуен Д.Т. А. и др., 2025) состоит в том, чтобы предоставить полный инструмент для автоматической аннотации характеристик МЭП, не только латентности, но и других параметров, таких как амплитуда, длительность и многоводность. Это программное обеспечение призвано упростить анализ карт за счет автоматического и быстрого извлечения соответствующих характеристик из сигналов ЭМГ.

Программное обеспечение использует скользящие окна и динамические пороговые значения для извлечения нескольких функций из МЭП. Оно основано



на MATLAB и предлагает простой в использовании пользовательский интерфейс для нейрофизиологов (Кингма Д.П., Ба Дж., 2014).

Эффективность этого инструмента была подтверждена на основе набора данных, полученных в ходе нескольких исследований ТМС на здоровых людях (Халлет М. 2000).

Программное обеспечение показало надежные результаты по извлечению основных характеристик МЭП с производительностью, сравнимой с человеческими оценками таких параметров, как амплитуда и задержка (Нгун Д.Т. А. и др., 2025).

Несмотря на гибкость этого инструмента, он основан на фиксированных правилах и не использует преимуществ моделей глубокого обучения (Васудеван Р.К. и др., 2021), которые потенциально могли бы обеспечить более детальный и надежный анализ в условиях вариаций ЭМГ-сигналов.

Результаты

Приведенное ниже сравнение В Таблице 1. подводит итог трем исследованиям с точки зрения их целей, методов, результатов, сильных сторон и ограничений.

Таблица 1 / Table 1

Сравнительная таблица трех методов
Comparison table of the three methods

Аспект	DELMER	Автоматический метод определения задержек MEP	MEPFeatX
Цели	Автоматическое создание аннотаций к картам с задержкой с использованием глубокого обучения	Автоматическое определение задержек с использованием производной ЭМГ-сигнала	Автоматизируйте извлечение признаков МЭП с помощью MATLAB
Методология	Нейронная сеть прямого действия, обученная на основе отфильтрованных данных ЭМГ	Алгоритм на основе правил, использующий первую производную ЭМГ-сигнала	Обработка сигналов и извлечение на основе пороговых значений с помощью графического интерфейса
Входные данные	Предварительно обработанные сигналы ЭМГ от здоровых людей	Исходные данные ЭМГ от 20 здоровых испытуемых + 11 пациентов, перенесших инсульт	ЭМГ-сигналы из различных исследований ТМС
Выход	Задержка МЭП	Задержка МЭП	Множество признаков МЭП
Методы проверки	Сравнивается с комментариями экспертов за несколько сеансов	По сравнению с 3 оценщиками-людьми, участвовавшими в 6500 исследованиях	Сравнение с ручными аннотациями к внутренним наборам данных
Основные результаты	Средняя абсолютная ошибка <0,5 мс; сопоставима с оценками людей	Высокая корреляция с комментариями экспертов; надежна для здоровых испытуемых	Точное извлечение признаков; сопоставимо с выводами экспертов



Аспект	DELMEP	Автоматический метод определения задержек MEP	MEPFeatX
Сильные стороны	Высокая точность, потенциал в режиме реального времени, возможность обобщения	Проста, быстра и поддается интерпретации; не требует обучения	Всестороннее извлечение признаков; удобный интерфейс
Ограничения	Простая архитектура модели; обучение проводится только на здоровых данных	Всестороннее выделение признаков; удобный интерфейс	Основан на правилах; не обладает адаптивностью или возможностями обучения
Технологическая основа	Глубокое обучение (нейронные сети)	Детерминированная обработка сигналов	Обработка сигналов на основе MATLAB
Целевые пользователи	Клиницисты, исследователи в области нейрофизиологии	Клиницисты, электрофизиологи	Клиницисты и исследователи имеют доступ к MATLAB
Доступность	Открытый исходный код, который еще не опубликован	Метод описан в публикации; доступность кода неясна	Набор инструментов MATLAB находится в свободном доступе

Обсуждение результатов

Из трех исследований мы можем видеть, что все модели были разработаны на основе собственного набора данных, в некоторых условиях с несколькими этапами предварительной обработки, что затрудняло их воспроизведение, кроме того, мы попытались протестировать, например, алгоритм DELMEP на наборе данных ТМС лаборатория НИУ ВШЭ, но столкнулись с трудностями. проблема в том, что мы не смогли выполнить предложенный скрипт на нашем наборе данных из-за несоответствия входного формата.

Другим важным моментом является то, что структура используемой нейронной сети (NN), например, в DELMEP, которая является простой прямой связью, игнорирует временные зависимости от сигналов ЭМГ и снижает точность для сложных и зашумленных сигналов МЭП.

Кроме того, все три метода были протестированы на данных здоровых людей, и в реальных клинических условиях они могут плохо реагировать на шумы или отсутствие ответов, за исключением MEPFeatX, исследования фокусируются только на задержках, в то время как другие важные характеристики (амплитуда, продолжительность, полифазия) также могут быть автоматизированы с помощью технологий глубокого обучения.



Заключение

В настоящем обзоре литературы мы представили наиболее важные исследования, которые были проведены для автоматизации выделения признаков моторных вызванных потенциалов, точнее, задержек МЭП, идея не нова, но сталкивается с множеством трудностей, как мы уже упоминали в настоящей статье, все существующие методы показали хорошие результаты в выявлении Функции МЭП, но общим ограничением было то, что они были разработаны для определенных наборов данных, что делало их невоспроизводимыми в других наборах данных. в нашем следующем исследовании мы предложим инновационный подход, основанный на сверточных нейронных сетях (CNN), для автоматизации определения латентных моторных вызванных потенциалов МЭП по электромиографическим сигналам (ЭМГ), полученным с помощью транскраниальной магнитной стимуляции (ТМС).

Инициатива будет направлена на удовлетворение растущей потребности в надежных, воспроизводимых и автоматизированных инструментах в области нейрофизиологии, где написание аннотаций вручную остается утомительной задачей, подверженной вариативности между аннотаторами и чувствительной к помехам в сигналах. состоит из создания высококачественного аннотированного набора данных, реализации модели CNN и тщательной оценки, основанной на стандартных показателях, таких как MAE, корреляция Пирсона и среднее смещение. Если результаты подтвердят нашу гипотезу, это исследование может привести к созданию надежного клинического инструмента, облегчающего анализ двигательных реакций в контексте диагностики, последующего терапевтического наблюдения или фундаментальных исследований.

Таким образом, этот проект является частью динамичной модернизации инструментов нейрофизиологии, частью платформы автоматизированного прогнозирования, которая поможет в обработке экспериментов ТМС в лабораториях НИУ ВШЭ, опираясь на достижения в области глубокого обучения, чтобы предложить автоматическое, надежное и клинически значимое решение для определения задержек и амплитуд МЭП... и так далее.

Список источников / References

1. Бигони, К., Кадик-Мельхиор, А., Василиадис, П., Моришита, Т., Хаммель, Ф.С. (2022). Автоматизированный метод определения длительности моторно-вызванных потенциалов в физиологических и патофизиологических условиях // Журнал нейронной инженерии. 2022. Т. 19, № 2. DOI: 10.1088/1741-2552/ac636c
Bigoni, C., Kadik-Melchior, A., Vasiliadis, P., Morishita, T., Hummel, F.C. Automated determination of motor-evoked potential duration in physiological and pathological conditions. Journal of Neural Engineering, 2022, vol. 19, no. 2. DOI: 10.1088/1741-2552/ac636c.
2. Ливингстон, С.К., Ингерсолл, К.Д. (2008). Внутривидовая надёжность метода транскраниальной магнитной стимуляции для получения моторных вызванных потенциалов // Международный журнал неврологии. 2008. Т. 118, № 2. С. 239—256. DOI: 10.1080/00207450701668020



- Livingston, S.C., Ingersoll, C.D. Intrasection reliability of transcranial magnetic stimulation-elicited motor-evoked potentials. *International Journal of Neuroscience*, 2008, vol. 118, no. 2, pp. 239–256. DOI: 10.1080/00207450701668020.
3. Милардович, Д., Соуза, В. Х., Зубарев, И., и др. (2023). DelMEP: алгоритм глубокого обучения для автоматизированного определения задержек моторных вызванных потенциалов // *Scientific Reports*. 2023. Т. 13, № 1. Ст. 8225. DOI: 10.1038/s41598-023-34801-9
Milardovich, D., Souza, V.H., Zubarev, I., et al. DelMEP: A deep learning algorithm for automated motor-evoked potential latency detection. *Scientific Reports*, 2023, vol. 13, no. 1, article 8225. DOI: 10.1038/s41598-023-34801-9.
 4. Митчелл, Т.М. Машинное обучение: учебник. 1997. URL: <https://www.cs.cmu.edu/~tom/mlbook.html>
Mitchell, T.M. *Machine Learning*. 1997. Available at: <https://www.cs.cmu.edu/~tom/mlbook.html> (In Russ.).
 5. Нгуен, Д.Т.А., Сяйсянен, Л., Каллиониemi, Э., Карьялайнен, П.А., Риссанен, С.М., Юлкунен, П. Mepfeatx — автоматическое распознавание моторно-вызванных потенциалов при транскраниальной магнитной стимуляции // *Рубежи в неврологии*. 2025. Т. 18. DOI: 10.3389/fnins.2024.1415257
Nguyen, D.T.A., Saisanen, L., Kallioniemi, E., et al. MepfeatX: Automated recognition of motor-evoked potentials in transcranial magnetic stimulation. *Frontiers in Neuroscience*, 2025, vol. 18. DOI: 10.3389/fnins.2024.1415257.
 6. Ратнадурай Гиридаран, С., Гупта, Д., Пал, А., Мишра, А.М., Хилл, Н.-Дж., Кармел, Дж. Б. Мотометрика: инструментарий для аннотирования и эффективного анализа вызванных моторных потенциалов // *Границы нейроинформатики*. 2019. Т. 13. DOI: 10.3389/fninf.2019.00008
Ratnadurai Giridharan, S., Gupta, D., Pal, A., Mishra, A.M., Hill, N.J., Carmel, J.B. Motometrics: A toolbox for annotation and efficient analysis of motor evoked potentials. *Frontiers in Neuroinformatics*, 2019, vol. 13. DOI: 10.3389/fninf.2019.00008.
 7. Соуза, В.Х., Перес, А., Захариас, Л., Баффа, О. Signalhunter: программное обеспечение для анализа и визуализации электрофизиологических данных (версия v1.0.0) [Компьютерная программа]. Zenodo, 2018. DOI: 10.5281/zenodo.1326308
Souza, V.H., Perez, A., Zacharias, L., Buffa, O. SignalHunter: Software for electrophysiological data analysis and visualization (v1.0.0). Zenodo, 2018. DOI: 10.5281/zenodo.1326308.
 8. Харкель, С., Бейнел, Л., Гайадер, Н., Маренда, С., Дэвид, О., Шовен, А. Cortextool: набор инструментов для обработки измерений возбудимости моторной коры головного мозга с помощью транскраниальной магнитной стимуляции. 2016. URL: <https://hal.science/hal-01390016>
Harkel, S., Beynel, L., Gaydier, N., Marenda, S., David, O., Chauvin, A. Cortextool: A toolbox for processing motor cortex excitability measurements using transcranial magnetic stimulation. 2016. Available at: <https://hal.science/hal-01390016>.
 9. Шода, Дж., Видакович, М.Р., Лоринч, Дж., Джеркович, А., Вуйович, И. Новый алгоритм оценки латентности сигналов вызванного моторного потенциала // *Труды IEEE*. 2020. DOI: 10.1109/9235561



- Šoda, J., Vidaković, M.R., Lorincz, J., Jerković, A., Vujović, I. A novel algorithm for motor-evoked potential latency estimation. *IEEE Proceedings*, 2020. DOI: 10.1109/9235561.
10. Эмерсон, Р.Г. (1998). Вызванные потенциалы в клинических исследованиях рассеянного склероза // *Журнал клинической нейрофизиологии*. 1998. Т. 15, № 2. С. 109—116. DOI: 10.1097/00004691-199803000-00003
Emerson, R.G. Evoked potentials in clinical trials of multiple sclerosis. *Journal of Clinical Neurophysiology*, 1998, vol. 15, no. 2, pp. 109—116. DOI: 10.1097/00004691-199803000-00003.
11. Васавани, А., Шазер, Н., Пармар, Н. и др. Внимание — это все, что вам нужно // *Advances in Neural Information Processing Systems 30 (NeurIPS 2017): Труды тридцатой ежегодной конференции*. Лонг-Бич, 4—9 декабря 2017 г. 2017. С. 5998—6008. URL: <https://papers.nips.cc/paper/2017/file/3f5ee243547dee91fbd053c1c4a845aa-Paper.pdf> (дата обращения: 18.01.2026).
Vaswani, A., Shazeer, N., Parmar, N., et al. (2017) Attention Is All You Need. *Advances in Neural Information Processing Systems 30 Annual Conference on Neural Information Processing Systems 2017, Long Beach, 4—9 December 2017*, 5998—6008.
12. Кингма, Д.П., Ба, Дж. Adam: метод стохастической оптимизации // *Препринт arXiv*. 2014. arXiv:1412.6980. URL: <https://arxiv.org/abs/1412.6980> (дата обращения: 18.01.2026).
Kingma, D.P., & Ba, J. (2014). Adam: A method for stochastic optimization. *arXiv preprint arXiv:1412.6980*.
13. Васудеван, Р.К., Зиятдинов, М., Влчек, Л. и др. Готового глубокого обучения недостаточно: требуется бережливость, байесовский подход и причинность // *npj Computational Materials*. 2021. Т. 7, № 16. <https://doi.org/10.1038/s41524-020-00487-0>
Vasudevan, R.K., Ziatdinov, M., Vlcek, L. et al. Off-the-shelf deep learning is not enough, and requires parsimony, Bayesianity, and causality. *npj Comput Mater* 7, 16 (2021). <https://doi.org/10.1038/s41524-020-00487-0>
14. Хуан, Ш., Шао, Х., Лю, Ц., Лю, У.В., Чжан, Ц., Дэн, Л., Лю, Ц., Омар, Д.М., Тан, С. Количественная оценка повреждения спинного мозга при шейной спондилогенной миелопатии: сравнительное исследование методов MAGiC и MUSE-DTI // *European Journal of Radiology*. 2025. Т. 190, ст. 112214. <https://doi.org/10.1016/j.ejrad.2025.112214>
Huang, S., Shao, H., Liu, Q., Liu, W.V., Zhang Q, Deng, L., Liu, C., Omar D.M., Tang, X. Quantitative Assessment of Spinal Cord Injury in Cervical Spondylotic Myelopathy: A Comparison Study of MAGiC and MUSE-DTI. *Eur J Radiol*. 2025 Sep;190:112214. doi: 10.1016/j.ejrad.2025.112214. Epub 2025 Jun 4. PMID: 40482444.
15. Сривастава, Н., Хинтон, Дж., Крижевски, А., Суцкевер, И., Салахутдинов, Р. Dropout: простой способ предотвратить переобучение нейронных сетей // *Journal of Machine Learning Research*. 2014. Т. 15, вып. 56. С. 1929—1958. <https://doi.org/10.5555/2627435.2670313>
Srivastava, N., Hinton, G., Krizhevsky, A., Sutskever, I., Salakhutdinov, R. Dropout: A Simple Way to Prevent Neural Networks from Overfitting // *Journal of Machine Learning Research*. 2014. Vol. 15, no. 56. P. 1929—1958.
16. Румельхарт, Д., Хинтон, Дж., Уильямс, Р. Обучение представлений методом обратного распространения ошибок // *Nature*. 1986. Т. 323, № 6088. С. 533—536. <https://doi.org/10.1038/323533a0>



- Rumelhart, D., Hinton, G. & Williams, R. Learning representations by back-propagating errors. *Nature* 323, 533—536 (1986). <https://doi.org/10.1038/323533a0>.
17. Каруана, Р. Многозадачное обучение // *Machine Learning*. 1997. Т. 28, № 1. С. 41—75. <https://doi.org/10.1023/A:1007379606734>
Caruana, R. Multitask Learning. *Machine Learning* 28, 41—75 (1997). <https://doi.org/10.1023/A:1007379606734>
18. Крижевски, А., Суцкевер, И., Хинтон, Дж. Э. Классификация ImageNet с помощью глубоких сверточных нейронных сетей // *Communications of the ACM*. 2017. Т. 60, № 6. С. 84—90. <https://doi.org/10.1145/3065386>
Krizhevsky, A., Sutskever, I., Hinton, G.E. ImageNet Classification with Deep Convolutional Neural Networks // *Communications of the ACM*. 2017. Vol. 60, no. 6. P. 84—90.
19. Стивенсон, В.Л. Реабилитация на практике: ведение спастичности // *Clinical Rehabilitation*. 2010. Т. 24, № 4. С. 293—304. <https://doi.org/10.1177/0269215509353254>
Stevenson, V.L. Rehabilitation in Practice: Spasticity Management // *Clinical Rehabilitation*. 2010. Vol. 24, no. 4. P. 293—304.
20. Халлет, М. Транскраниальная магнитная стимуляция и головной мозг человека // *Nature*. 2000. Т. 406, № 6792. С. 147—150. <https://doi.org/10.1038/35018000>
Hallett, M. Transcranial magnetic stimulation and the human brain. *Nature* 406, 147—150 (2000). <https://doi.org/10.1038/35018000>

Информация об авторах

Демига Юсра, аспирант, Национальный исследовательский технологический университет «МИСИС»; магистрант, Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики», Ассистент-исследователь, лаборатории ТМС, Москва, Российская Федерация, ORCID: <https://orcid.org/0009-0008-5563-7849>, e-mail: demigha.yousra@mail.ru

Information about the authors

Demigha Yousra, PhD student, National University of Science and Technology MISIS; master's student, National Research University Higher School of Economics; Research Assistant, TMC Laboratory, Moscow, Russian Federation, ORCID: <https://orcid.org/0009-0008-5563-7849>, e-mail: demigha.yousra@mail.ru

Вклад авторов

Демига Юсра — сбор и анализ различных существующих работ по теме и обсуждение результатов.

Author Contributions

Yousra Demigha — collected and analyzed various existing studies on the topic and discussed the results.

Конфликт интересов

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.



Conflict of interest

The authors declare no conflict of interest.

Поступила в редакцию 26.12.2026

Поступила после рецензирования 15.02.2026

Принята к публикации 19.02.2026

Опубликована 31.03.2026

Received 2026.12.26

Revised 2026.02.15

Accepted 2026.02.19

Published 2026.03.31

МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ | OPTIMIZATION METHOD

Научная статья | Original paper

УДК 519.856

Решение задачи логистики в квантильной постановке с ограничением на время доставки

А.В. Наумов

ФГБОУ ВО «Московский авиационный институт
(национальный исследовательский университет)»
г. Москва, Российская Федерация
✉ naumovav@mail.ru

Резюме

Контекст и актуальность. В статье рассматривается квантильная постановка задачи логистики с ограничением на время выполнения задания. Задачи транспортной логистики давно и хорошо исследованы в детерминированной постановке, однако учет вероятностного ограничения на время доставки груза переводит задачу в класс задач стохастической оптимизации и требует разработки специальных методов решения. **Цель.** Для компании необходимо осуществить транспортировку однотипного груза с нескольких складов до конечных потребителей. Время доставки груза для каждого потребителя ограничено. Требуется минимизировать издержки связанные с доставкой грузов с учетом того, что время в пути от каждого склада до каждого конечного потребителя случайно. За каждым складом закреплено некоторое количество транспортных средств. Все транспортные средства однотипны и в рамках задания осуществляют лишь одну доставку со склада до одного потребителя. **Гипотеза.** Для решения задачи требуется разработка специального алгоритма решения, так как использование алгоритмов решения детерминированных задач оптимизации наталкиваются на трудности связанные большой размерностью эквивалентной детерминированной задачи. **Методы и материалы.** Задача формулируется в терминах стохастического линейного программирования с квантильным критерием и стратегией оптимизации в виде матрицы булевых переменных. Уровень доверительной вероятности отражает вероятность выполнения совместного ограничения на время доставки товара каждому из потребителей. Для решения задачи предлагается эффективный алгоритм решения.



Результаты. Приводятся результаты численного эксперимента, отражающие эффективность алгоритма. **Выводы.** Приведенные результаты показывают эффективность предложенного алгоритма по сравнению со стандартными алгоритмами детерминированной оптимизации, применяемыми для решения приведенной в работе эквивалентной детерминированной задачи.

Ключевые слова: задача логистики, стохастическое линейное программирование, квантильный критерий

Для цитирования: Наумов, А.В. (2026) Решение задачи логистики в квантильной постановке с ограничением на время доставки. *Моделирование и анализ данных*, 16(1), 74–86. <https://doi.org/10.17759/mda.2026160105>

Solving the logistics problem in a quantile formulation with a limitation on the delivery time

A.V. Naumov

Moscow Aviation Institute (State Research University)

Moscow, Russian Federation

✉ naumovav@mail.ru

Abstract

Context and relevance. The article discusses the quantile statement of the logistics problem with a limitation on the task execution time. The problems of transport logistics have long been well studied in deterministic formulation, however, taking into account the probabilistic limitation on the time of delivery of cargo, the problem translates into the class of stochastic optimization problems and requires the development of special solution methods. **Objective.** For the company, it is necessary to transport the same type of cargo from several warehouses to the final consumers. The delivery time for each consumer is limited. It is required to minimize the costs associated with the delivery of goods, taking into account the fact that the travel time from each warehouse to each end consumer is stochastic. A number of vehicles are assigned to each warehouse. All vehicles are of the same type and within the framework of the task they carry out only one delivery from the warehouse to one consumer. **Hypothesis.** To solve the problem, the development of a special solution algorithm is required, since the use of algorithms for solving deterministic optimization problems run into difficulties associated with a large dimension of an equivalent deterministic problem. **Methods and materials.** The problem is formulated in terms of stochastic linear programming with a quantile criterion and an optimization strategy in the form of a matrix of Boolean variables. The confidence level reflects the likelihood of meeting a joint time limit on the delivery of goods to each of the consumers. To solve the problem, an effective solution algorithm is proposed. **Results.** The results of the numerical experiment



are given, reflecting the effectiveness of the algorithm. **Conclusions.** The shown results show the effectiveness of the proposed algorithm in comparison with standard deterministic optimization algorithms used to solve the equivalent deterministic problem given in the work.

Keywords: logistics problem, stochastic linear programming, quantile criterion

For citation: Naumov, A.V. (2026). Solving the logistics problem in a quantile formulation with a limitation on the delivery time. *Modelling and Data Analysis*, 16(1), 74–86. (In Russ.). <https://doi.org/10.17759/mda.2026160105>

Введение

Задачи транспортной логистики давно и хорошо исследованы в детерминированной постановке, в том числе классиками линейного программирования (Ашманов, 2021). Современная классификация подобных задач и методов их решения представлена, например, в (Шестаков, Зуенко, 2022). Традиционные оптимизационные методы решения подобных задач, базирующиеся на теории линейного программирования актуальны и в современных научных исследованиях (Хайрулин, 2014). Другим трендом в практике решения транспортных задач является использование методов теории графов, например, (Агапова, Попова, 2021). Часто ряд параметров в логистических задачах являются неопределенными. Для их моделирования используют, в том числе, случайные величины. Результаты, учитывающие влияние случайных параметров в транспортных задачах логистики, отражены, например, в работах (Наумов, Уланов, 2003, Наумов, Богданов, 2006, Гайнанов, Игнатов, Наумов, Рассказова, 2020). Как правило (Наумов, Уланов, 2003, Наумов, Богданов, 2006), в роли случайных параметров выступает объем доставки товара, определяемый спросом на него. Однако в современных условиях, когда все большую долю рынка завоевывает сетевая торговля, организуемая маркетплейсами, все более важную роль начинают играть сроки доставки товара конечному потребителю. Они определяются рядом параметров: доступностью товаров на складах, оперативностью и организованностью работы складского персонала и службы планирования и на конечном этапе дорожной обстановкой по пути доставки от склада к конечному потребителю. Время выполнения определенного задания учитывается в качестве случайного параметра и в других приложениях теории стохастической оптимизации, например, в теории тестирования (Наумов, Мартюшова, Степанов, 2024, Наумов, Устинов, Степанов, 2024, Наумов, Мхитарян, Черыгова, 2019). В качестве распределения случайного времени выполнения определенного задания рассматриваются как непрерывные распределения, например, логнормальное или гамма-распределение (Van der Linden, Scrams, Schnipke, 1999, Босов и др., 2019), так и дискретные (Наумов, Мартюшова, Степанов, 2024, Наумов, Устинов, Степанов, 2024, Наумов, Мхитарян, Черыгова, 2019). Использование дискретных распределений случайных параметров обосновано с одной стороны возможностью аппроксимации



ими соответствующих непрерывных распределений и возможностью построения этих распределений на основе анализа гистограмм, полученных на базе обработки имеющейся статистической информации о времени выполнения задания. С другой стороны использование дискретных распределений позволяет свести полученные задачи стохастической оптимизации к детерминированным задачам смешанного целочисленного программирования (Кибзун, Наумов, Норкин, 2013).

В данной работе рассматривается задача формирования оптимального плана доставки однотипной продукции компании с имеющихся складов до конечных потребителей, например, точек розничной торговли, или точек выдачи товара. За каждым складом закреплено некоторое количество транспортных средств. Все транспортные средства однотипны и в рамках рассматриваемого горизонта планирования осуществляют лишь одну доставку со склада до одного потребителя. Время доставки товара считается случайной величиной с известным дискретным законом распределения. Задача формулируется в терминах стохастического линейного программирования с квантильным критерием и стратегией оптимизации в виде матрицы булевых переменных.

Материалы и методы

Требуется осуществить доставку товара с L складов производителя однотипной продукции до конечных потребителей или точки выдачи товара в количестве M точек. К моменту формирования задания на доставку на каждом из складов доступно k_l , $l = 1, \dots, L$ однотипных транспортных средств, общее количество которых на всех складах равно $N = \sum_{l=1, \dots, L} k_l$. Каждое из транспортных средств может в рамках задания совершить одну доставку со склада, где оно находится, до любой конечной точки доставки за случайное время T_{ij} , $i = 1, \dots, N$; $j = 1, \dots, M$, которое моделируется дискретной случайной величиной, имеющей известный закон распределения с возможными значениями T_{ij}^v , $v = 1, \dots, V$. Случайная природа времени доставки определяется транспортной обстановкой по пути следования и оперативностью работы (загруженностью) складских служб, осуществляющих подготовку и загрузку транспортного средства, определенного к доставке. Будем считать, что все величины T_{ij} , $i = 1, \dots, N$; $j = 1, \dots, M$ независимы. Тогда общее количество возможных значений T^i случайной матрицы $T = \left\| T_{ij} \right\|$ равно $V^{N \cdot M}$. Стоимость доставки товара i -ым транспортным средством до j -ой точки доставки равна \tilde{p}_{ij} , $i = 1, \dots, N$; $j = 1, \dots, M$. Каждый склад характеризуется детерминированным на момент формирования транспортного задания объемом имеющегося в наличии товара z_l , $l = 1, \dots, L$. Объем товара, необходимый к доставке в каждую точку также известен y_j , $j = 1, \dots, M$. Предполагается, что вместимость любого транспортного средства позволяет его осуществить. Для каждой точки доставки определено время τ_j , $j = 1, \dots, M$, за которое в рамках формируемого задания доставка должна быть осуществлена. Нарушение сроков доставки нежелательно, так как отрицательно влияет на имидж компании и может повлечь потерю части заказов товара. Поэтому, в силу случайной природы времени доставки,



это ограничение требуется к выполнению с заданной вероятностью $\alpha \in (0,1)$ Требуется минимизировать суммарные затраты на доставку товара по точкам с учетом выполнения вероятностного ограничения на соблюдения сроков доставки.

В роли оптимизационной стратегии выступает матрица булевых переменных $U = \|U_{ij}\|$ размерностью $N * M$, где

$$U_{ij} \triangleq \begin{cases} 1, & \text{если } i\text{-е транспортное средство осуществляет доставку в } j\text{-ю точку,} \\ 0, & \text{если не осуществляет.} \end{cases}$$

Таким образом, первые k_1 строк в матрице U соответствуют транспортным средствам находящимся на 1-м складе, и так далее, последние k_L строк соответствуют транспортным средствам находящимся на складе с номером L к моменту формирования задания на доставку. Рассмотрим величину $K_l = \sum_{i=1}^{k_l} k_i$, $l = 1, \dots, L$, пусть $K_0 = 0$.

Задача формулируется в терминах одноэтапной задачи стохастического линейного программирования с квантильным критерием (Наумов, Игнатов, 2022). Рассмотрим функцию квантили:

$$\Phi_\alpha(U) = \min\{\varphi: P\{\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M U_{ij} c_{ij} \leq \varphi; \max_{i=1, \dots, N} T_{ij} U_{ij} \leq \tau_j, j = \overline{1, M}\} \geq \alpha\}. \quad (1)$$

Для поиска оптимальной стратегии доставки необходимо решить следующую оптимизационную задачу:

$$\Phi_\alpha(U) \rightarrow \min_{U \in \{0,1\}^{N \times M}} \quad (2)$$

при ограничениях:

$$\sum_{j=1, M} U_{ij} \leq 1, \quad i = 1, \dots, N, \quad (3)$$

$$\sum_{i=K_{l-1}+1, K_l} \sum_{j=1, M} y_j U_{ij} \leq z_l, \quad l = 1, \dots, L. \quad (4)$$

Согласно доверительному методу [15] и утверждению, доказанному в [13], задача (2)-(3) эквивалентна следующей задаче целочисленного линейного программирования:

$$\sum_{i=1, N} \sum_{j=1, M} U_{ij} c_{ij} \rightarrow \min_{U \in \{0,1\}^{N \times M}, \delta \in \{0,1\}^D} \quad (5)$$

при ограничениях:

$$\sum_{j=1, M} U_{ij} \leq 1, \quad (6)$$

$$\sum_{i=K_{l-1}+1, K_l} \sum_{j=1, M} y_j U_{ij} \leq z_l, \quad l = 1, \dots, L. \quad (7)$$



$$\sum_{i=1, N} U_{ij} T_{ij}^v \leq \delta_v \tau_j + (1 - \delta_v) T^{\text{MAX}}, v = \overline{1, D}, j = 1, \dots, M, \quad (8)$$

$$\sum_{v=1, D} p_v \delta_v \geq \alpha, \quad (9)$$

где $D = V^{N \times M}$, а T^{MAX} -максимальное время, из всех возможных значений случайных величин T_{ij} , $i = 1, \dots, N$; $j = 1, \dots, M$. Вектор $\delta \in \{0, 1\}^D$ определяет вид оптимального доверительного множества в доверительном методе (Кан, Кибзун, 2009) решения задач квантильной оптимизации. Если координата δ_v оптимального значения вектора δ принимает значение единица, то соответствующее v -е возможное значение случайной матрицы $T = \|T_{ij}\|$ принадлежит оптимальному доверительному множеству, и ограничение (8) на время доставки должно быть выполнено. Если же $\delta_v = 0$, то ограничение (8) очевидно становится пассивным из-за выбора величины T^{MAX} .

Несмотря на то, что задача (5)—(7) является детерминированной задачей целочисленного линейного программирования, поиск ее оптимального решения может быть затруднен большой размерностью этой задачи. Поэтому не лишено смысла в предложении специальных алгоритмов решения задачи (2)—(4), использующих ее специфику. Рассмотрим такой алгоритм:

Алгоритм

Шаг 0.

Положим $C^* := +\infty$, а $U^* \in \{0, 1\}^{N \times M}$ — нулевой.

Шаг 1.

Исключим стратегии назначения, которые не удовлетворяют ограничению на время доставки даже в самом оптимистичном сценарии, где каждая доставка осуществляется за минимально возможное время $T_{ij}^{\min} = \min_v T_{ij}^v$.

Из всех допустимых матриц $U \in \{0, 1\}^{N \times M}$, удовлетворяющих условиям (3)—(4), выбираем N стратегий, образующих множество \underline{U} , для элементов которого выполнены условия:

$$\sum_{i=1}^N U_{ij} T_{ij}^{\min} \leq \tau_j, j = 1, \dots, M.$$

Перенумеруем все элементы множества \underline{U} . Таким образом, число от 1 до H однозначно определяет элемент множества. Под U^h будем понимать h -й элемент множества \underline{U} . Положим $h := 1$.

На этом шаге инициируется внешний цикл перебора всех N выбранных стратегий оптимизации.

Шаг 2.

Если $h > H$ то переходим к шагу 7. В противном случае полагаем $P_h := 0$, где P_h — вспомогательный параметр для расчета вероятности выполнения ограничений.



Шаг 3.

Пусть матрица U^h содержит ровно M единиц, расположенных в позициях $(i_1, 1), (i_2, 2), \dots, (i_M, M)$, где i_j — номер машины, назначенной j -му потребителю.

Рассмотрим подвектор $col(T_{i_1}, T_{i_2}, \dots, T_{i_M})$ случайной матрицы $T = T_{ij}$.

Положим $Q := V^M$, а $q := 1$.

На этом шаге инициализируется цикл перебора всех возможных реализаций

$$col(t_{i_1}^q, t_{i_2}^q, \dots, t_{i_M}^q), \quad q = 1, 2, \dots, V^M,$$

где V — число возможных значений каждой случайной величины T_{ij} .

Шаг 4.

Если $q > Q$, то переходим к шагу 6.

В противном случае вычисляем вероятность данной реализации:

$$p^q = \prod_{j=1}^M P(T_{i_j} = t_{i_j}^q),$$

и проверяем выполнение ограничений по времени:

$$t_{i_j}^q \leq \tau_j, \quad j = 1, \dots, M.$$

Если все ограничения выполнены, то полагаем $P_h := P_h + p^q$

Шаг 5.

Полагаем $q := q + 1$, и переходим к началу шага 4.

Шаг 6.

Вычисляем значение критерия для стратегии U^h :

$$C^h := \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M U_{ij}^h c_{ij},$$

Если величина $P_h \geq \alpha$ и $C^h < C^*$, то полагаем $C^* := C^h$, $U^* := U^h$.

Независимо от результата сравнения, полагаем $h := h + 1$ и переходим к шагу 2.

Шаг 7.

Если $C^* = +\infty$, то решение задачи (2)—(4) отсутствует.

В противном случае полагаем оптимальное значение критерия равным C^* , а оптимальную стратегию — равной U^* .

Результаты

Задача, рассмотренная в работе, решалась для следующих исходных данных:

$$L = 3, \quad M = 6, \quad k_1 = 3, \quad k_2 = 2, \quad k_3 = 3, \quad y_1 = 2.5, \quad y_2 = 1.8, \quad y_3 = 2.3, \quad y_4 = 1.2, \quad y_5 = 2.7, \quad y_6 = 1.4, \quad z_1 = 5.7, \quad z_2 = 4.7, \quad z_3 = 3.8, \quad \tau_1 = 4.50, \quad \tau_2 = 4.55, \quad \tau_3 = 4.60, \quad \tau_4 = 4.65, \quad \tau_5 = 4.70, \quad \tau_6 = 4.75.$$



Таблица 1 / Table 1

Стоимость доставки $C = \|c_{ij}\|$
 Delivery cost $C = \|c_{ij}\|$

$i = 1,2,3$	3000	3200	3400	3100	3300	3500
$i = 4,5$	6000	6200	6400	6100	6300	6500
$i = 6,7,8$	4500	4700	4900	4600	4800	5000

Таблица 2 / Table 2

Распределение времени доставки $T = \|T_{ij}\|, j = 1,2,3$
 Distribution of delivery time $T = \|T_{ij}\|, j = 1,2,3$

i	$j=1$				$j=2$				$j=3$			
	$i = 1$	T_{ij}^k	2.0	2.6	4.8	T_{ij}^k	2.1	2.7	4.9	T_{ij}^k	2.2	2.8
	k	0.65	0.25	0.1	k	0.6	0.3	0.1	k	0.55	0.35	0.1
$i = 2$	T_{ij}^k	2.1	2.7	4.7	T_{ij}^k	2.2	2.8	4.8	T_{ij}^k	2.3	2.9	4.9
	k	0.62	0.28	0.10	k	0.58	0.32	0.10	k	0.54	0.36	0.10
$i = 3$	T_{ij}^k	1.9	2.5	4.9	T_{ij}^k	2.0	2.6	5.0	T_{ij}^k	2.1	2.7	5.1
	k	0.68	0.22	0.10	k	0.64	0.26	0.10	k	0.60	0.30	0.10
$i = 4$	T_{ij}^k	3.7	4.0	4.3	T_{ij}^k	3.8	4.1	4.4	T_{ij}^k	3.9	4.2	4.5
	k	0.25	0.50	0.25	k	0.20	0.60	0.20	k	0.15	0.70	0.15
$i = 5$	T_{ij}^k	3.8	4.1	4.4	T_{ij}^k	3.9	4.2	4.5	T_{ij}^k	4.0	4.3	4.6
	k	0.30	0.40	0.30	k	0.25	0.50	0.25	k	0.20	0.60	0.20
$i = 6$	T_{ij}^k	3.2	3.6	4.2	T_{ij}^k	3.3	3.7	4.3	T_{ij}^k	3.4	3.8	4.4
	k	0.45	0.40	0.15	k	0.40	0.45	0.15	k	0.35	0.50	0.15
$i = 7$	T_{ij}^k	3.3	3.7	4.1	T_{ij}^k	3.4	3.8	4.2	T_{ij}^k	3.5	3.9	4.3
	k	0.50	0.35	0.15	k	0.45	0.40	0.15	k	0.40	0.45	0.15
$i = 8$	T_{ij}^k	3.1	3.5	4.3	T_{ij}^k	3.2	3.6	4.4	T_{ij}^k	3.3	3.7	4.5
	k	0.40	0.45	0.15	k	0.35	0.50	0.15	k	0.30	0.55	0.15

Таблица 3 / Table 3

Распределение времени доставки $T = \|T_{ij}\|, j = 4,5,6$
 Distribution of delivery time $T = \|T_{ij}\|, j = 4,5,6$

i	$j=4$				$j=5$				$j=6$			
	$i = 1$	T_{ij}^k	2.0	2.6	4.8	T_{ij}^k	2.1	2.7	4.9	T_{ij}^k	2.2	2.8
	k	0.65	0.25	0.1	k	0.6	0.3	0.1	k	0.55	0.35	0.1
$i = 2$	T_{ij}^k	2.1	2.7	4.7	T_{ij}^k	2.2	2.8	4.8	T_{ij}^k	2.3	2.9	4.9
	k	0.62	0.28	0.10	k	0.58	0.32	0.10	k	0.54	0.36	0.10



$i = 3$	$j=4$			$j=5$			$j=6$					
	T_{ij}^k	1.9	2.5	4.9	T_{ij}^k	2.0	2.6	5.0	T_{ij}^k	2.1	2.7	5.1
	k	0.68	0.22	0.10	k	0.64	0.26	0.10	k	0.60	0.30	0.10
$i = 4$	T_{ij}^k	3.7	4.0	4.3	T_{ij}^k	3.8	4.1	4.4	T_{ij}^k	3.9	4.2	4.5
	k	0.25	0.50	0.25	k	0.20	0.60	0.20	k	0.15	0.70	0.15
$i = 5$	T_{ij}^k	3.8	4.1	4.4	T_{ij}^k	3.9	4.2	4.5	T_{ij}^k	4.0	4.3	4.6
	k	0.30	0.40	0.30	k	0.25	0.50	0.25	k	0.20	0.60	0.20
$i = 6$	T_{ij}^k	3.2	3.6	4.2	T_{ij}^k	3.3	3.7	4.3	T_{ij}^k	3.4	3.8	4.4
	k	0.45	0.40	0.15	k	0.40	0.45	0.15	k	0.35	0.50	0.15
$i = 7$	T_{ij}^k	3.3	3.7	4.1	T_{ij}^k	3.4	3.8	4.2	T_{ij}^k	3.5	3.9	4.3
	k	0.50	0.35	0.15	k	0.45	0.40	0.15	k	0.40	0.45	0.15
$i = 8$	T_{ij}^k	3.1	3.5	4.3	T_{ij}^k	3.2	3.6	4.4	T_{ij}^k	3.3	3.7	4.5
	k	0.40	0.45	0.15	k	0.35	0.50	0.15	k	0.30	0.55	0.15

Отличие в распределении времени доставки от склада до точки доставки объясняется взаимным расположением этих объектов, оперативностью работы складских служб, техническим состоянием автомобиля и квалификацией водителя. В результате решения задачи (5)—(8) были получены следующие результаты.

Таблица 4 / Table 4

Зависимость оптимального решения задачи от параметра α
Dependence of the optimal solution of the problem on the α parameter

α	Равные 1 элементы оптимальной матрицы U^*	Оптимальное значение критерия	Время расчета (сек)
0.6	с_11, с_22, с_33, с_64, с_75, с_86	24000	47.91
0.7	с_11, с_22, с_33, с_64, с_75, с_86	24000	47.40
0.8	с_11, с_22, с_43, с_64, с_75, с_86	27000	47.46
0.9	с_11, с_42, с_53, с_64, с_75, с_86	30000	47.69
0.95	Нет решения	—	47.72

Обсуждение результатов

Полученные результаты работы алгоритма демонстрируют существенную зависимость оптимального решения от выбранного априори уровня доверительной вероятности, делая вероятностное ограничение на время выполнения доставки товара доминирующим при выборе оптимальной стратегии доставки. За счет априорного сокращения множества допустимых стратегий оптимизации время работы предложенного автором алгоритма оказывается приемлемым с точки зрения его использования при планировании доставки товара. Значительный перебор всех возможных значений матрицы булевых переменных U , являющейся решением задачи, может быть существенно сокращен за счет априорного учета детерминированных ограничений



задачи. На этом основана идея предложенного автором алгоритма решения рассматриваемой задачи. Для предложенных выше данных удается сократить перебор возможных стратегий оптимизации с 2^{8^6} до величины меньше либо равной $C_8^6 = 28$.

Заключение

В работе предложена базовая модель оптимального планирования доставки товара со складов предприятия до точек выдачи товара или розничной торговли. Отличительной особенностью данной модели является учет случайного времени доставки в виде вероятностного ограничения, что особенно актуально для работы современных маркетплейсов. Данная модель может быть усложнена возможностью использования, в рамках планируемого задания на доставку, автомобилей различной грузоподъемности, с различной стоимостью доставки и т.д. Полученная задача стохастического линейного программирования допускает сведение к детерминированной задаче линейного программирования с булевыми переменными и большой размерностью. Трудности, вызванные большой размерностью полученной детерминированной задачи делает актуальной разработку специальных подходов к поиску оптимального решения исходной задачи.

Можно отметить, что подобные модели могут быть также использованы в других прикладных областях теории оптимизации, таких как финансовая математика (Игнатов, 2020), оптимизация в мультиагентных системах (Kuravsky, Popkov, 2018), и других областях (Santoso, Ahmed, Goetschalckx, Shapiro, 2005).

Список источников / References

1. Агапова, Е.Г., Попова, Т.М. (2021). Математическая модель задачи логистики с переменным тарифом. *International Journal of Advanced Studies: Transport and Information Technologies*, 11(2), 7—20. (In Russ.). DOI: 10.12731/2227-930X-2021-11-2-7-20
Agarova, E.G., Popova, T.M. (2021). Mathematical model of the problem of logistics with a variable tariff. *International Journal of Advanced Studies: Transport and Information Technologies*, 11(2), 7—20. (In Russ.). <https://doi.org/10.12731/2227-930X-2021-11-2-7-20>
2. Ашманов, С.А. *Линейное программирование*. (2021). URSS. Изд. 2. стереотип.
Ashmanov, S.A. *Linear programming*. (2021). URSS. Publ. 2, Stereotyp. (In Russ.).
3. Босов, А.В., Мхитарян, Г.А., Наумов, А.В., Сапунова, А.П. (2019). Использование гамма-распределения в задаче формирования ограниченного по времени теста. *Информатика и ее применение*, 13(4), 12—18. (In Russ.). <https://doi.org/10.14357/19922264190402>
Bosov, A.V., Naumov, A.V., Mhitarian, G.A., Sapunova A.P. (2019). Using gamma distribution in a time-limited test problem. *Informatics and its application (Russia)*, 13(4), 12—18. (In Russ.). <https://doi.org/10.14357/19922264190402>
4. Гайнанов, Д.Н., Игнатов, А.Н., Наумов, А.В., Рассказова, В.А. (2020). О задаче назначения «технологического окна» на участках железнодорожной сети. *Автоматика и Телемеханика*, 6, 3—16. (In Russ.). <https://doi.org/10.31857/S0005231020060013>



- Gainanov, D.N., Ignatov, A.N., Naumov, A.V., Rasskazova, V.A. (2020). On track procession assignment problem at the railway network sections. *Automation and Remote Control*, 81(6), 967–977. <https://doi.org/10.1134/S0005117920060028>
5. Игнатов, А.Н. (2020). О формировании позиционного управления в многошаговой задаче портфельной оптимизации с вероятностным критерием. *Автоматика и телемеханика*, 12, 50–66. (In Russ.). <https://doi.org/10.31857/S000523102012003X>
Ignatov, A.N. (2020). On the construction of positional control in the multistep portfolio optimization problem with probabilistic criterion. *Automation and Remote Control*, 81(12), 2181–2193.
6. Кан, Ю.С., Кибзун, А.И. (2009). *Задачи стохастического программирования с вероятностными критериями*. М.: Физматлит.
Kan, Yu.S., Kibzun, A.I. (2009). *Stochastic programming problems with probabilistic criteria*. М.: Fizmatlit. (In Russ.).
7. Кибзун, А.И., Наумов, А.В., Норкин, В.И. (2013). О сведении задачи квантильной оптимизации с дискретным распределением к задаче смешанного целочисленного программирования. *Автоматика и Телемеханика*, 6, 66–86. (In Russ.). <https://doi.org/10.1134/S0005117913060064>.
Kibzun, A.I., Naumov, A.V., Norkin, V.I. (2013). On reducing a quantile optimization problem with discrete distribution to a mixed integer programming problem. *Automation and Remote Control*, 74(6), 951–967. <https://doi.org/10.1134/S0005117913060064>.
8. Наумов, А.В., Мартюшова, Я.Г., Степанов, А.Е. (2024). Оптимизация прохождения ограниченного по времени теста по квантильному критерию. *Информатика и её применения*, 18(4), 44–51. (In Russ.). <https://doi.org/10.14357/19922264240406>
Naumov, A.V., Martyushova, Ya.G., Stepanov, A.E. (2024). Optimization of passing a time-limited test according to the quantile criterion. *Informatics and its application (Russia)*, 18(4), 44–51. (In Russ.). <https://doi.org/10.14357/19922264240406>
9. Наумов, А.В., Богданов, А.Б. (2006). Решение двухэтапной задачи логистики в квантильной постановке. *Автоматика и Телемеханика*, 12, 36–42. (In Russ.).
Naumov, A.V., Bogdanov, A.B. (2006). Solution to a two-step logistic problem in a quantile statement. *Automation and Remote Control*, 67(12), 1893–1899. <https://doi.org/10.1134/S0005117906120034>
10. Наумов, А.В., Игнатов, А.Н. (2022). *Решение задач стохастического линейного программирования с квантильным критерием*. М: Доброе слово и Ко.
Naumov, A.V., Ignatov, A.N. (2022). *Solving stochastic linear programming problems with quantile criterion*. М: Kind word and Co. (In Russ.).
11. Наумов, А.В., Мхитарян, Г.А., Черыгова, Е.Е. (2019). Стохастическая постановка задачи формирования теста заданного уровня сложности с минимизацией квантили времени выполнения. *Вестник компьютерных и информационных технологий*, 2, 37–46. DOI: 10.14489/vkit.2019.02.pp.037-046.
Naumov, A.V., Mhitarian, G.A., Cherygova, E.E. (2019). Stochastic formulation of the task of forming a test of a given complexity level with minimization of quantile of execution time. *Bulletin of Computer and Information Technologies (Russia)*, 2. 37–46. (In Russ.). DOI: 10.14489/vkit.2019.02.pp.037-046.



12. Наумов, А.В., Уланов, С.В. (2003). Учет риска в двухэтапных задачах оптимального распределения ресурсов. *Автоматика и Телемеханика*, 7, 109—116. (In Russ.).
Naumov, A.V., Ulanov, S.V. (2003). Risk in two-stage optimal resource allocation. *Automation and Remote Control*, 64(7), 1115—1121. <https://doi.org/10.1023/A:1024786218814>
13. Наумов, А.В., Устинов, А.Э., Степанов, А.Е. (2024). О задаче максимизации вероятности успешного прохождения ограниченного по времени теста. *Автоматика и Телемеханика*, 1, 83—94. (In Russ.).
Naumov, A., Stepanov, A., Ustinov, A. (2024). On the Problem of Maximizing the Probability of Successful Passing of a Time-Limited Test. *Automation and Remote Control*. no. 1, pp. 83—94
DOI: 10.31857/S0005231024010056
14. Хайрулин, Р.З. (2014) Моделирование развоза грузов по разветвленной сети автодорог. *Вестник МГСУ*, 7, 184—191.
Khairulin, R.Z. (2014). Modeling of cargo delivery along an extensive road network. *Bulletin of MGSU (Russia)*, 7, 184—191. (In Russ.).
15. Шестаков, А.В., Зуенко, А.А. (2022). Задачи логистики: классификация и методы решения. *Труды Кольского научного центра РАН, Серия: Технические науки*, 13 (2), 144—150. DOI: 10.37614/2949-1215.2022.13.2.014
Shestakov, A.V., Zuenko, A.A. (2022). Logistics tasks: classification and solution methods. *Proceedings of the Kola Scientific Center of the Russian Academy of Sciences, Series: Technical Sciences*, 13 (2), 144—150. (In Russ.). DOI: 10.37614/2949-1215.2022.13.2.014
16. Kuravsky, L.S., Popkov, S.I. (2018). Forecasting macro parameters representing the behavior of an applied multi-agent system. *International Journal of Modeling, Simulation, and Scientific Computing*, 9(6), Art. 1850052. <https://doi.org/10.1142/S1793962318500526>
17. Naumov, A.V., Ustinov, A.E., Stepanov, A.E. (2024). On the problem of maximizing the probability of successful passing a time-limited test. *Automation and Remote Control*, 85(6), 60—67. <https://doi.org/10.1134/S0005117924010053>
18. Santoso, T., Ahmed, S., Goetschalckx, M., Shapiro, A. (2005). A stochastic programming approach for supply chain network design under uncertainty. *European Journal of Operational Research*, 167(1), 95—115. <https://doi.org/10.18452/8297>
19. Van der Linden, W. J., Scrams, D. J., Schnipke, D. L. (1999). Using Response-Time Constraints to Control for Differential Speededness in Computerized Adaptive Testing. *Applied Psychological Measurement*, 23(3), 195—210. DOI: 10.1177/01466219922031329.

Информация об авторах

Андрей Викторович Наумов, доктор физико-математических наук, профессор кафедры «Теория вероятностей и компьютерное моделирование», факультет, Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет) (ФГБОУ ВО), Москва, Российская Федерация, ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-3631-6168>, e-mail: naumovav@mail.ru

Information about the authors

Andrey V. Naumov, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Department of Probability Theory and Computer Modeling, Department of Psychology, Moscow Aviation Institute



(National Research University), Moscow, Russian Federation, ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-3631-6168>, e-mail: naumovav@mail.ru

Конфликт интересов

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Conflict of interest

The authors declare no conflict of interest.

Поступила в редакцию 29.01.2026

Поступила после рецензирования 15.02.2026

Принята к публикации 21.02.2026

Опубликована 31.03.2026

Received 2026.01.29

Revised 2026.02.15

Accepted 2026.02.21

Published 2026.03.31

Научная статья | Original paper

УДК 519.245

Применение метода Монте-Карло в задачах квантильной оптимизации

В.Н. Акмаева

Московский авиационный институт
(национальный исследовательский университет) (МАИ)
Москва, Российская Федерация
✉ akmaevavn@mai.ru

Резюме

Математические модели стохастического программирования используются в широком спектре постановок задач, учитывающих влияние случайных факторов различной природы. Квантильный критерий использует понятие функции квантили — наименьшего значения функции потерь, которое не будет превышено с вероятностью не ниже заданной. Таким образом, надежность ограничивается на допустимом уровне и оптимизируется эффективность от реализации стратегии. Исходную задачу можно свести к минимаксной, где максимум берется по доверительному множеству, которое предлагается оптимизировать. С помощью доверительного метода исходная задача аппроксимируется детерминированной минимаксной задачей, параметризованной радиусом шара, вписанного в доверительное многогранное множество. Алгоритм решения двухэтапной задачи с квантильным критерием и выбором уровня надежности обобщен на случай произвольного унимодального распределения случайных параметров. К особенностям алгоритма относится выбор доверительного множества, ограниченного поверхностью уровня плотности вероятности случайной величины. Для построения такого множества используется метод Монте-Карло для генерации и разметки случайной выборки в сочетании с методом опорных векторов.

Ключевые слова: доверительный метод, квантильный критерий, стохастическое программирование, метод Монте-Карло, метод опорных векторов

Для цитирования: Акмаева, В.Н. (2026) Применение метода Монте-Карло в задачах квантильной оптимизации. *Моделирование и анализ данных*, 16(1), 87–104. <https://doi.org/10.17759/mda.2026160106>



Application of the Monte Carlo method to quantile optimization problems

V.N. Akmaeva

Moscow Aviation Institute (National Research University) (MAI)

Moscow, Russian Federation

✉ akmaevavn@mai.ru

Abstract

Stochastic programming mathematical models are used in a wide range of problem settings that consider the influence of random factors of various natures. If a loss function dependent on strategy and random parameters is used to describe the system's operation, the value of the loss function becomes random. The quantile criterion utilizes the concept of a quantile function — the smallest value of the loss function that will not be exceeded with a probability no lower than a specified value. Thus, reliability is limited to an acceptable level, and the effectiveness of strategy implementation is optimized. The original problem can be reduced to a minimax problem, where the maximum is taken over the confidence set proposed to be optimized (the so-called confidence method). Using the confidence method, the original problem is approximated by a deterministic minimax problem parameterized by the radius of a sphere inscribed in the polyhedral confidence set. The author's previously proposed algorithm for solving a two-stage facility location problem with a quantile criterion and choice of reliability level has been generalized to the case of an arbitrary unimodal distribution of random parameters. The algorithm's features include the selection of a confidence set bounded by the probability density surface of the random variable. To construct this set, the Monte Carlo method is used to generate and label a random sample in combination with a support vector machine (SVM).

Keywords: confidence method, quantile criterion, stochastic programming, Monte Carlo method, support vector machine (SVM)

For citation: Akmaeva, V.N. (2026). Application of the Monte Carlo method to quantile optimization problems. *Modelling and Data Analysis*, 16(1), 87—104. (In Russ.). <https://doi.org/10.17759/mda.2026160106>

Введение

Моделирование разного рода систем закономерным образом поднимает вопрос надежности принимаемых решений. Оптимизационные задачи, в которых осуществляется поиск точки минимума квантили функции потерь, — это задачи стохастического программирования с квантильным критерием, являющиеся частным случаем



задач стохастического программирования с вероятностными ограничениями. Функция квантили описывает уровень потерь, который не может быть превышен с заданной фиксированной (близкой к единице) вероятностью, и зависит от стратегии оптимизации и случайных параметров. В (Kibzun, Kan, 1996; Кибзун, Кан, 2009) приводится доверительный метод, эффективно решающий задачи подобного типа, сводя исходную задачу к минимаксной. Сначала определяется максимум целевой функции на доверительном множестве значений случайных параметров как функция стратегии оптимизации. Затем ищется минимум полученной функции по стратегии оптимизации на доверительном множестве. При этом важную роль играет выбор оптимального доверительного множества. Предложенный в (Кибзун, Лебедев, Малышев, 1984; Кибзун, Малышев, 1984) обобщенный минимаксный подход в (Kan, 2002) сведен к обычной минимаксной задаче для линейной по случайным параметрам функции потерь, где в качестве множества неопределенности выступает α -ядро, которое не является доверительным множеством. При правильно подобранном фиксированном доверительном множестве можно получить достаточно точную верхнюю оценку функции квантили. Для стандартного гауссовского распределения случайных параметров при больших значениях уровня надежности достаточно высокую точность получаемой оценки обеспечивает выбор доверительного множества в форме шара (Кибзун, Кан, 2009). В (Кибзун, Наумов, 1995; Наумов, Иванов, 2011) функция потерь предполагалась линейной по стратегии оптимизации, что приводит нас к задаче с билинейной функцией потерь, поскольку именно такие функции потерь зачастую возникают в прикладных задачах. Для билинейной функции потерь решение задачи квантильной оптимизации сводится к минимизации функции потерь по стратегии оптимизации на α -ядре вероятностной меры. Аналитические и приближенные подходы к построению ядер вероятностной меры для различных законов распределения случайных величин рассмотрены в работах (Васильева, Кан, 2015; Васильева, 2018; Ардабьевский, Гончар, Кан, 2020). В случае более сложной структуры функции потерь ее минимизация на ядре вероятностной меры дает нижнюю оценку. Верхняя оценка может быть получена с помощью оптимизации на доверительном множестве.

В статье (Иванов, Кибзун, Акмаева, 2023) рассмотрена задача квантильной оптимизации с кусочно-линейной по случайным параметрам и выпуклой по стратегии оптимизации функцией потерь. Для этого класса функций потерь оптимальным доверительным множеством является многогранник. Применительно к варианту со стандартным нормальным распределением случайных параметров предложен алгоритм улучшения верхней оценки функции потерь, основанный на параметризации доверительных множеств в форме многогранников радиусом вписанного шара и итерационном улучшении данной аппроксимации.

В настоящей работе предлагается обобщение алгоритма (Иванов, Кибзун, Акмаева, 2023) на случай произвольного распределения случайных факторов. В основу предлагаемых алгоритмов положен метод Монте-Карло для генерации и разметки случайной выборки в сочетании с методом опорных векторов (Cristianini, Shawe-Taylor, 2000; Вьюгин, 2013, Мэрфи, 2022) для построения границ ядра вероятностной меры и доверительного множества.



Постановка задачи квантильной оптимизации

Опишем стандартную постановку задачи стохастического программирования (Иванов, Кибзун, Акмаева, 2023). Пусть X — случайный вектор-столбец с реализациями $x \in \mathbb{R}^m$ на вероятностном пространстве (Ω, F, P) . Предполагается, что распределение X является стандартным нормальным. Будем считать, что функция потерь является кусочно-линейной по случайным параметрам:

$$\Phi(u, x) \triangleq \max_{i=1, \dots, k_1} \{B_{1i}(u)x + b_{1i}(u)\}.$$

Ограничения описываются следующим образом:

$$Q(u, x) \triangleq \max_{i=1, \dots, k_2} \{B_{2j}(u)x + b_{2j}(u)\},$$

где $u \in U \subset \mathbb{R}^n$ — стратегия. $B_{1i}(u), B_{2j}(u)$ — строки матриц $B_1(u)$ и $B_2(u)$ соответственно. $b_{1j}(u), i=1, \dots, k_1, b_{2j}(u), i=1, \dots, k_2$ — элементы векторов-столбцов $b_1(u)$ и $b_2(u)$ соответственно. При этом функции $u \mapsto B_1(u), u \mapsto B_2(u)$ линейные, а функции $u \mapsto b_1(u), u \mapsto b_2(u)$ выпуклые непрерывные на выпуклом замкнутом множестве U .

Определим функцию вероятности

$$P_\varphi(u) \triangleq P\{\Phi(u, X) \leq \varphi, Q(u, X) \leq 0\},$$

где $\varphi \in \mathbb{R}$ — заданное значение функции потерь. Функция квантили

$$\Phi_\alpha(u) \triangleq \min\{\varphi \mid P_\varphi(u) \geq \alpha\}, \alpha \in (0, P^*),$$

где $P^* \triangleq \sup_{u \in U} P\{Q(u, X) \leq 0\}$.

Тогда задача квантильной оптимизации имеет вид

$$U_\alpha \triangleq \mathop{\text{Arg min}}_{u \in U} \Phi_\alpha(u). \quad (1)$$

Определим оптимальное значение критериальной функции

$$\varphi_\alpha \triangleq \Phi_\alpha(u_\alpha), u_\alpha \in U_\alpha.$$

Согласно доверительному методу, задача (1) эквивалентна задаче

$$\varphi_\alpha = \min_{S \in E_\alpha} \left\{ \sup_{x \in S} \Phi(u, x) \mid \sup_{x \in S} Q(u, x) \leq 0 \right\},$$

где E_α — семейство всех доверительных множеств $S \subset \mathbb{R}^m$ уровня α , т.е. $P\{X \in S\} \geq \alpha$.



Построение ядра вероятностной меры

Для поиска оптимального доверительного множества используются различные приемы, упрощающие решение задачи, например, с использованием понятия ядра вероятностной меры. Будучи выпуклым компактным множеством в \mathbb{R}^n , α -ядро вероятностной меры может быть определено как пересечение всех замкнутых α -доверительных подпространств:

$$K_\alpha = \bigcap_{\|\mathbb{c}\|=1} \{x : c^T x \leq b_\alpha(c)\}, b_\alpha(c) = [c^T X]_\alpha.$$

В монографии (Кибузн, Кан, 2009) рассмотрен класс портфельных задач с билинейной функцией потерь. Данная задача сводится к задаче минимизации функции потерь по стратегии управления на ядре вероятностной меры.

При решении минимаксной задачи во внутреннем цикле оптимизационного процесса ищется максимум функции потерь на ядре вероятностной меры при заданной стратегии управления. Во внешнем цикле варьируется стратегия управления с целью поиска минимума функции потерь при заданных ограничениях.

Алгоритм состоит из следующих шагов:

1. Генерация случайной выборки по заданному закону распределения случайных параметров.
2. Разметка случайной выборки.

На этом шаге с помощью сетки из угловых координат на сфере задается набор направлений и определяются точки выборки, проекция которых на данное направление, больше или равна уровню надежности. С этой целью проекции ранжируются, после чего осуществляется разметка. Первоначально все точки помечены меткой 0. В дальнейшем точки, проекция которых выше квантили помечаются меткой 1.

На рис. 1 показана размеченная выборка из двумерного нормального закона распределения. Генерация случайных величин осуществлялась с помощью библиотеки `Pythonscipy.stats`. Заданный уровень квантили — 0.9. Число точек в выборке — 40000. Светлая внутренняя область соответствует точкам, попадающим в ядро вероятностного распределения.

3. По размеченной выборке строится разделяющая поверхность, которая аппроксимирует границу ядра вероятностной меры. С этой целью используется метод SVM (машина опорных векторов (Cristianini, Shawe-Taylor, 2000; Statnikov, Aliferis, Hardin, 2011; Мэрфи, 2022)), хорошо зарекомендовавший себя в задачах распознавания образов. Суть этого метода классификации данных в поиске разделяющей поверхности, разбивающей выборку на классы. Разделяющая поверхность представляется в виде $V(x) = 0$, где $V(x) = \sum_j c_j \exp(-\gamma \|x_j - x\|^2)$, а x_j — опорные векторы, то есть точки, лежащие ближе всего к поверхности разделения.

Метод SVM вычисляет расстояние между опорными векторами и разделяющей поверхностью. Это расстояние называется зазором. Основная цель алгоритма — построить разделяющую поверхность с максимальным зазором.

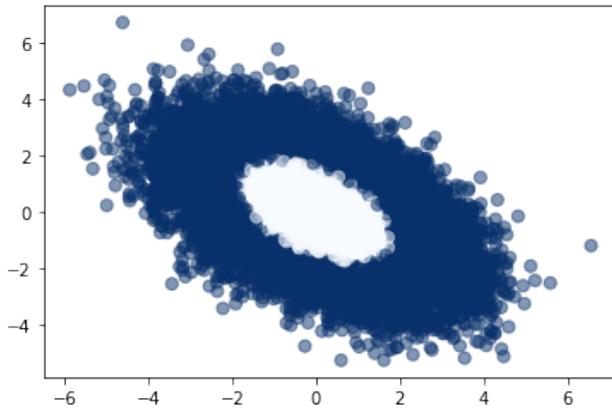


Рис. 1. Размеченная выборка из двумерного нормального распределения

Fig. 1. Labeled sample from a bivariate normal distribution

На рис. 2 показано полученное ядро вероятностного распределения. Для реализации SVM использовалась библиотека `Pythonsklearn.svm`. В качестве ядра задавалась радиально-базисная функция с параметром ширины γ , масштабируемым по дисперсии случайной величины. С целью понижения чувствительности результата к случайной реализации использовалась L2-регуляризация.

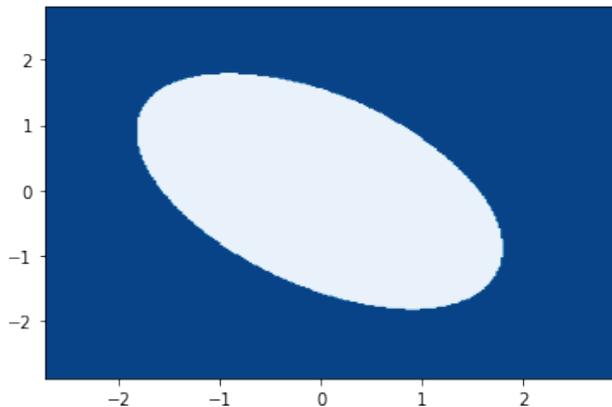


Рис. 2. Ядро вероятностного распределения

Fig. 2. The kernel of the probability distribution

Ключевую роль в предлагаемом алгоритме играют опорные векторы. Они представляют ближайшие к границе ядра точки, и поэтому сами по себе являются хорошей аппроксимацией границы. Это проиллюстрировано на рис. 3, где сплошной



линией показана рассчитанная с помощью SVM граница ядра вероятностного распределения, а маркерами показаны опорные точки (векторы). Для наглядности здесь показан каждый пятый опорный вектор. Общее число опорных векторов в данном расчете около 500, оно зависит от случайной реализации.

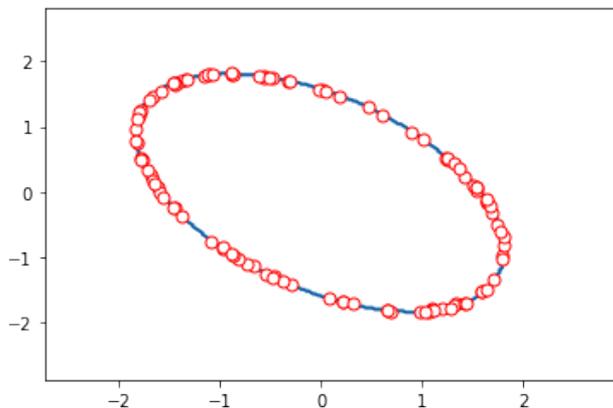


Рис. 3. Граница ядра (сплошная кривая) и опорные векторы (маркеры)

Fig. 3. The kernel boundary (solid curve) and support vectors (markers)

Следующие шаги алгоритма необходимы для построения нижней оценки и выполняются в итерационном цикле, направленном на поиск оптимальной стратегии оптимизации (вектор u). Решается минимаксная задача. В качестве стартового приближения задается начальная стратегия оптимизации. Далее в оптимизационном цикле выполняются следующие операции.

4. Осуществляется поиск максимального значения функции потерь на ядре вероятностной меры при заданной стратегии оптимизации.

На этом этапе можно использовать полученную на предыдущем шаге функциональную зависимость для границы ядра. Однако в случае выпуклого ядра, существенного уменьшения вычислительных затрат удастся получить с использованием опорных векторов.

В наиболее грубом варианте задача может быть сведена к перебору значений функции потерь в опорных точках.

Поскольку опорные точки, будучи близки к границе, строго границе не принадлежат, представляет интерес поиск более точного приближения. С этой целью возможно уточнение позиций точек с использованием разложения функции границы ядра в ряд Тейлора. Такой подход, однако, значительно повышает вычислительные затраты.

Третий подход является своего рода компромиссом с позиций точность вычислений-вычислительная нагрузка. Здесь максимизация функции потерь осуществляется отдельно по опорным точкам разных классов, т.е. по опорным точкам,



лежащим внутри ядра вероятностного распределения и вне его. В качестве итогового принимается среднее значение.

5. Вектор u изменяется в соответствии с выбранным методом оптимизации, после чего осуществляется переход к шагу 4. В дальнейшем, для оптимизации нами использовалась библиотека `Pythonscipy.minimize`, метод `SLSQP` (`SequentialLeastSquaresProgramming`), представляющий собой специальную реализацию квазиньютоновских методов решения задач нелинейного программирования с ограничениями. Шаги 4, 5 повторяются до достижения сходимости.

Пример 1. В качестве примера рассмотрим задачу портфельной оптимизации, приведенную в (Васильева, 2018). Рассмотрим инвестиционный портфель, состоящий из одного безрискового и двух рискованных активов. Доход такого портфеля можно рассчитать по формуле

$$R(X, u) = \beta u_0 + u^T X,$$

где $\beta = const$ — доход безрискового актива, $X = [X_1, X_2]^T$ — доходы рискованных активов, u_0 — доля вложений в безрисковый актив, $u = [u_1, u_2]$ — доли вложений в рискованные активы. Для u выполнено $u_0 + u_1 + u_2 = 1$, поэтому в формуле дохода можно опустить зависимость от u_0 . Необходимо выполнение ограничения $u_i \geq 0, i = 0, 1, 2$, поясняющее запрет на операции *short-sales* (продажа актива на фондовой бирже, не принадлежащего продавцу, а взятого им в кредит у брокерской компании, чтобы в последствии откупить этот актив обратно, заработав на разнице в цене).

Пусть вектор доходностей рискованных финансовых инструментов имеет невырожденное нормальное распределение с вероятностными характеристиками:

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} \sim N \left(\begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{12} & q_{22} \end{pmatrix} \right).$$

Для задачи (2) известно (Васильева, 2018) точное решение при следующих модельных параметрах: $\beta = 0,1$; $m_1 = 0,2$; $m_2 = 0,15$; $q_{11} = 4 \cdot 10^{-3}$; $q_{12} = 5 \cdot 10^{-5}$; $q_{22} = 10^{-4}$.

В Таблице 1 представлены решения для различных значений уровня квантили. Решения получены с помощью двух упомянутых выше методов минимизации целевой функции. В первом методе (M1) осуществляется перебор значений целевой функции по всем опорным точкам, во втором (M2) — максимизация функции потерь осуществляется отдельно по опорным точкам разных классов. В обоих методах размер случайной выборки был равным 40000. Как показали расчеты, такой размер выборки обеспечивает разброс значений целевой функции при различных реализациях, не превышающий 0,002. В Таблице 1 представлены осредненные по реализациям значения функции потерь. Отрицательные значения функции потерь соответствуют доходу инвестиционного портфеля. Видно, что использование разделения классов для опорных точек позволяет повысить точность решения.



Таблица 1 / Table 1

Значения функции потерь (Нормальное распределение)
Loss function values (Normal distribution)

Alpha	M1	M2	Точное решение
0.8	-0.1469	-0.1476	-0.1477
0.9	-0.1397	-0.1403	-0.1406
0.99	-0.1277	-0.1283	-0.1288

Аналогичный вывод можно сделать и из Таблицы 2, где представлены результаты решения задачи с равномерным распределением случайных параметров $X \sim U([0, 18; 0, 22] \times [0, 04; 0, 26])$.

Таблица 2 / Table 2

Значения функции потерь (Унимодальное распределение)
Loss function values (Unimodal distribution)

Alpha	M1	M2	Точное решение
0.8	-0.1878	-0.1880	-0.1895
0.9	-0.1833	-0.1840	-0.1860
0.99	-0.1800	-0.1804	-0.1828

**Решение задачи квантильной оптимизации
с кусочно-линейной по случайным параметрам и выпуклой
по стратегии оптимизации функцией потерь**

Для рассматриваемого в настоящем разделе вида функции потерь ее минимизация на ядре вероятностной меры дает нижнюю оценку квантили. Верхняя оценка может быть получена с помощью оптимизации на доверительном множестве. Как отмечалось выше, для рассматриваемого класса функций потерь оптимальным доверительным множеством является многогранник. Применительно к варианту со стандартным нормальным распределением случайных параметров в (Иванов, Кибзун, Акмаева, 2023) была предложена аппроксимация доверительного множества шаром. Тогда задача (1) сводится к минимаксной задаче вида:

$$\psi(r) \triangleq \min_{u \in U} \left\{ \max_{x \in B_r} \Phi(u, x) \mid \max_{x \in B_r} Q(u, x) \leq 0 \right\}, \quad (2)$$

где B_r — шар радиуса r и

$$B_r \triangleq \{x \in \mathbb{R}^m \mid \|x\| \leq r\},$$



$\|x\| \triangleq \sqrt{x^T x}$ — евклидова норма вектора x .

В настоящей работе предлагается обобщение этого подхода на случай произвольного распределения случайных факторов. В качестве аппроксимирующей границы доверительного множества предлагается использовать поверхность уровня плотности вероятности. Доверительное множество представляется областью, ограниченной данной поверхностью. Определим данное множество как:

$$G_t = \{x : f(x) \geq t\}.$$

Тогда минимаксную задачу можно сформулировать аналогично (2):

$$\psi(t) = \min_{u \in U} \left\{ \max_{x \in G_t} \Phi(u, x) \mid \max_{x \in G_t} Q(u, x) \leq 0 \right\}.$$

В контексте решаемой задачи представляет интерес построение множества G_t^α , имеющего заданную вероятностную меру α , т.е. $P(x \in G_t^\alpha) = \alpha$.

Для этого сначала требуется определить уровень плотности вероятности t , соответствующий заданному уровню вероятности α . Т.е. необходимо решить нелинейное уравнение вида $g(t) = \alpha$, где $g(t) = \iiint_{G_t} f(x) dx$.

В настоящей работе это уравнение решается методом секущих, интегрирование осуществляется методом Монте-Карло с использованием сгенерированной случайной выборки. Далее выполняются следующие шаги:

1. Генерация случайной выборки по заданному закону распределения случайных параметров
2. Разметка случайной выборки.

Разметка осуществляется следующим образом. Первоначально все точки помечены меткой 0. В дальнейшем точки, в которых плотность вероятности не превышает уровень s помечаются меткой 1.

3. По размеченной выборке строится разделяющая поверхность, которая аппроксимирует поверхность уровня плотности вероятности. С этой целью, как и ранее, используется метод SVM. Принципиальным является тот факт, что получаемые опорные векторы хорошо аппроксимируют границу доверительного множества. Это свойство опорных векторов позволяет построить эффективный алгоритм решения минимаксной задачи для оптимизации функции потерь.

Минимаксная задача решается в итерационном цикле, направленном на поиск оптимальной стратегии оптимизации (вектор u).

В качестве стартового приближения задается начальная стратегия оптимизации. Далее в оптимизационном цикле выполняются следующие операции.

4. Осуществляется поиск максимального значения функции потерь на построенном доверительном множестве при заданной стратегии оптимизации.

На этом этапе высокую вычислительную эффективность удается получить с использованием опорных векторов, как это делалось для построения ядра вероятностной меры.



5. Вектор u изменяется в соответствии с выбранным методом оптимизации, после чего осуществляется переход к шагу 4. Как и ранее, для оптимизации нами использовалась библиотека `Pythonscipy.minimize`, метод `SLSQP`.

Шаги 4, 5 повторяются до достижения сходимости.

Таким образом, решив минимаксные задачи для ядра вероятностной меры K_α и множества G_t^α , получаем нижнюю и верхнюю оценки функции потерь:

$$\psi_\alpha \leq \varphi_\alpha \leq \psi(t_\alpha),$$

$$\psi_\alpha = \min_{u \in U} \left\{ \max_{x \in K_\alpha} \Phi(u, x) \mid \max_{x \in K_\alpha} Q(u, x) \leq 0 \right\},$$

$$\psi(t_\alpha) = \min_{u \in U} \left\{ \max_{x \in G_t^\alpha} \Phi(u, x) \mid \max_{x \in G_t^\alpha} Q(u, x) \leq 0 \right\}.$$

Далее применяется алгоритм улучшения верхней оценки [11]. Определим доверительный многогранник:

$$C_t = \{x : \Phi(u(t), x) \leq \psi(t), Q(u(t), x) \leq 0\}$$

и его вероятностную меру

$$h(t) = P(X \in C_t).$$

Для получения оптимальной оценки будем решать нелинейное уравнение

$$h(t) = \alpha + \varepsilon,$$

где ε — малая поправка, обеспечивающая гарантированность оценки. Зная корень данного уравнения t^* , имеем оптимальную верхнюю оценку функции потерь:

$$\psi(t^*) = \min_{u \in U} \left\{ \max_{x \in G_{t^*}} \Phi(u, x) \mid \max_{x \in G_{t^*}} Q(u, x) \leq 0 \right\}.$$

Для решения нелинейного уравнения в настоящей работе используется метод секущих. Вычисление вероятностной меры доверительного многогранника осуществляется методом Монте-Карло с использованием сгенерированной на предыдущих шагах алгоритма выборки.

Пример 2. Проиллюстрируем алгоритм на примере решения следующей задачи. Функция потерь:

$$\Phi(u, x) = \max(2u_1 + u_2 - u_3 + x_1 + x_2 - 0, 5);$$



$$\begin{aligned}u_1 - 2u_2 + 1,5u_3 - x_1 + x_2 + 1; \\ -2u_1 - u_2 + u_3 + 2x_1 - x_2 - 1; \\ -u_1 - u_2 + u_3 - 2x_1 - x_2 - 1; \\ u_1u_2 + u_2u_3 - u_1u_3 + x_1 - x_2 + 1).\end{aligned}$$

Ограничения: $-1 \leq u_1 \leq 1$, $-1 \leq u_2 \leq 1$, $-2 \leq u_3 \leq 2$, $-2 \leq u_1 + u_2 + u_3 \leq 2$

Распределение случайных факторов принято нормальным с теми же параметрами, что и в разделе 2.

Алгоритм вычисления ядра вероятностной меры для данного распределения проиллюстрирован на рис. 1—3.

На рис. 4 показана размеченная выборка из данного распределения и доверительное множество, ограниченное линией уровня плотности вероятности. Как и ранее, генерация случайных величин осуществлялась с помощью библиотеки `Pythonscipy.stats`. Заданный уровень квантили — 0,9. Число точек в выборке — 40000. Светлая внутренняя область на рис. 4 соответствует точкам, попадающим в доверительное множество. Для определения границы доверительного множества использовался метод SVM, библиотека `Pythonsklearn.svm`. Параметры метода аналогичны используемым ранее для построения ядра вероятностной меры: использовался базис из радиальных функций с параметром ширины, масштабируемым по дисперсии случайной величины, для улучшения обусловленности применялась L2-регуляризация.

На рис. 5 показаны опорные векторы (представлен каждый пятый вектор), полученные при нахождении границы ядра вероятностного распределения (красные маркеры) и границы доверительного множества (зеленые маркеры). Виден зазор между границами множеств, который минимизируется в итерационном алгоритме улучшения верхней оценки функции потерь. Начальный диапазон неопределенности функции потерь $\psi_\alpha \leq \varphi_\alpha \leq \psi(t_\alpha)$ составляет $3,152 \leq \varphi_\alpha \leq 5,179$. Результат работы итерационного алгоритма представлен на рис. 6. Граница доверительного множества стала заметно ближе к границе ядра. В результате диапазон неопределенности функции потерь сузился до $3,152 \leq \varphi_\alpha \leq 4,048$, т.е. длина интервала неопределенности сократилась более чем вдвое (на 55,8 %), что свидетельствует об эффективности применяемого подхода.

Далее рассмотрим применение алгоритма к варианту логнормального распределения случайных факторов. Для иллюстративности примем, что компоненты случайного вектора не коррелированы и распределены одинаково $X \sim \text{LogN}(0; 0,2)$. На рис. 7, 8 показаны размеченные выборки из данного распределения, а также ядро вероятностного распределения (рис. 7) и доверительное множество, ограниченное линией уровня плотности вероятности (рис. 8). Заданный уровень квантили — 0,9. На рис. 9 представлены опорные векторы (каждый пятый вектор), полученные при нахождении границы ядра (красные маркеры) и границы доверительного множества (зеленые маркеры). Начальный диапазон неопределенности функции потерь составляет $1,348 \leq \varphi_\alpha \leq 1,624$.

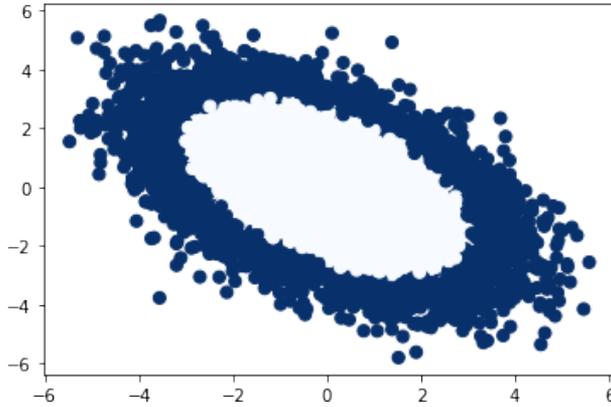


Рис. 4. Размеченная выборка из нормального распределения.
Светлая внутренняя область соответствует точкам,
попадающим в доверительное множество

Fig. 4. A labeled sample from a normal distribution.
The light inner region corresponds to points falling within the confidence set

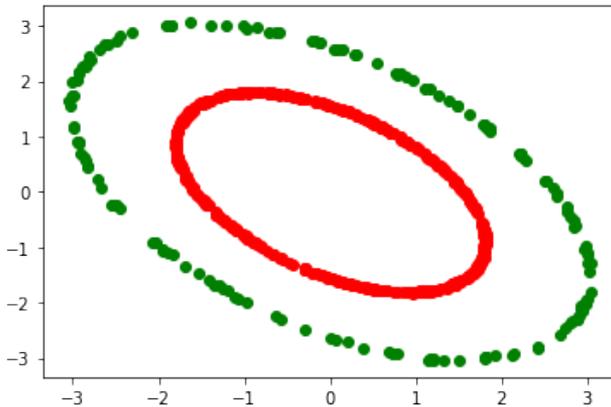


Рис. 5. Опорные векторы, полученные при нахождении
границы ядра вероятностного распределения (красные маркеры)
и границы доверительного множества (зеленые маркеры)

Fig. 5. Support vectors obtained by finding the boundary
of the kernel of the probability distribution (red markers)
and the boundary of the confidence set (green markers)

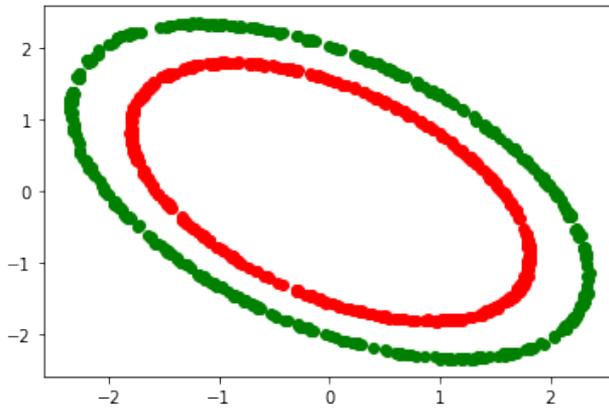


Рис. 6. Опорные векторы, полученные в ходе итерационного алгоритма.
Обозначения аналогичны рис. 5

Fig. 6. Support vectors obtained during the iterative algorithm.
The notations are similar to Fig. 5

В результате работы итерационного алгоритма граница доверительного множества приблизилась к границе ядра. Диапазон неопределенности функции потерь сузился на 40 % ($1,348 \leq \varphi_\alpha \leq 1,513$), что подтверждает эффективность алгоритма.

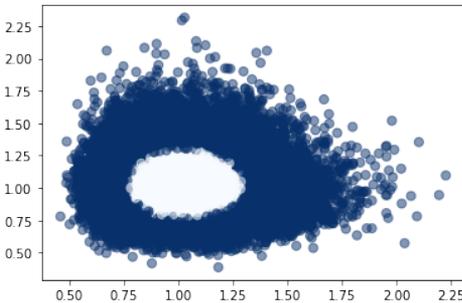


Рис. 7. Размеченная выборка из логнормального распределения. Светлая внутренняя область соответствует точкам, попадающим в ядро вероятностной меры

Fig. 7. A labeled sample from a lognormal distribution. The light inner region corresponds to points falling within the kernel of the probability measure

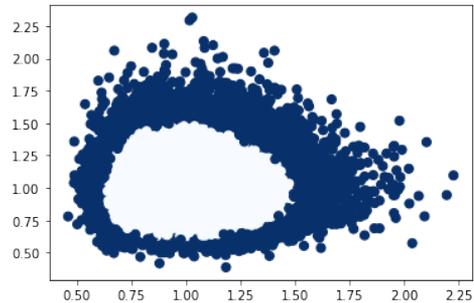


Рис. 8. Размеченная выборка из логнормального распределения. Светлая внутренняя область соответствует точкам, попадающим в доверительное множество

Fig. 8. A labeled sample from a lognormal distribution. The light inner region corresponds to points falling within the confidence set

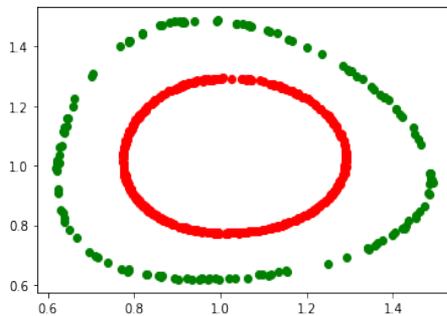


Рис. 9. Опорные векторы, полученные при нахождении границы ядра вероятностного распределения (красные маркеры) и границы доверительного множества (зеленые маркеры). Вариант логнормального распределения случайных факторов

Fig. 9. Support vectors obtained by finding the kernel boundary of the probability distribution (red markers) and the confidence set boundary (green markers). A variant of the lognormal distribution of random factors

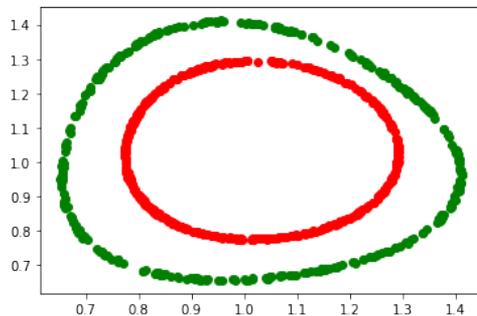


Рис. 10. Опорные векторы, полученные в ходе итерационного алгоритма. Вариант логнормального распределения случайных факторов. Обозначения аналогичны рис. 9

Fig. 10. Support vectors obtained during the iterative algorithm. A variant of the lognormal distribution of random factors. The notations are similar to Fig. 9

Заклучение

В статье предлагается алгоритм решения задачи стохастического программирования с квантильным критерием в случае кусочно-линейной по случайным параметрам и выпуклой по стратегии функции потерь. Алгоритм является обобщением на случай произвольного унимодального распределения случайных параметров предложенного ранее алгоритма поиска оптимального доверительного множества. К особенностям алгоритма относится выбор доверительного множества, ограниченного поверхностью уровня плотности вероятности случайной величины. Для построения такого множества используется метод Монте-Карло для генерации и разметки случайной выборки в сочетании с методом опорных векторов. Применение опорных векторов позволяет эффективно решать характерные для квантильной оптимизации минимаксные задачи.



Список источников / References

1. Ардабьевский, П.А., Гончар, Д.А., Кан, Ю.С. (2020) Статистическое моделирование ядра вероятностного распределения и его применение к решению задачи квантильной оптимизации с билинейной функцией потерь. *Моделирование и анализ данных*. (с. 69—84). Том 10. № 3. DOI: <https://doi.org/10.17759/mda.2020100306>.
Ardabevsky, P.A., Gonchar, D.A., Kan, Yu.S. (2020) Statistical modeling of the probability distribution kernel and its application to solving the quantile optimization problem with a bilinear loss function. *Modeling and Data Analysis*. (pp. 69—84). Vol. 10. No. 3. DOI: <https://doi.org/10.17759/mda.2020100306>. (In Russ.)
2. Васильева, С.Н. (2018) Алгоритмы анализа и оптимизации квантильного критерия в задачах стохастического программирования с билинейными и квазилинейными функциями потерь. *Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук*. Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)».
Vasilyeva, S.N. (2018) Algorithms for Analysis and Optimization of the Quantile Criterion in Stochastic Programming Problems with Bilinear and Quasilinear Loss Functions. *Dissertation for the degree of Candidate of Physical and Mathematical Sciences*. Moscow Aviation Institute (National Research University). (In Russ.)
3. Васильева, С.Н., Кан, Ю.С. (2015) Метод решения задачи квантильной оптимизации с билинейной функцией потерь. *Автоматика и Телемеханика*. (с. 83—101). № 9.
Vasilyeva, S.N., Kan, Yu.S. (2015) Method for solving the quantile optimization problem with a bilinear loss function. *Automation and Remote Control*. (pp. 83—101). No. 9. (In Russ.)
4. Вьюгин, В. (2013) *Математические основы теории машинного обучения и прогнозирования*. МЦМНО, 2013. 390 с. ISBN 978-5-4439-0111-4.
Vyugin, V. (2013) *Mathematical foundations of the theory of machine learning and forecasting*. MCMS, 2013. 390 p. ISBN 978-5-4439-0111-4. (In Russ.)
5. Иванов, С.В., Кибзун, А.И., Акмаева, В.Н. (2023) Параметрический алгоритм поиска гарантирующего решения задачи квантильной оптимизации. *Автоматика и телемеханика*. (с. 73—8). № 8.
Ivanov, S.V., Kibzun, A.I., Akmaeva, V.N. (2023) Parametric algorithm for searching for a guaranteed solution to a quantile optimization problem. *Automation and Remote Control*. (pp. 73—8). No. 8. (In Russ.)
6. Кибзун, А.И., Кан, Ю.С. (2009) *Задачи стохастического программирования с вероятностными критериями*. М.: Физматлит.
Kibzun, A.I., Kan, Yu.S. (2009) *Stochastic programming problems with probabilistic criteria*. Moscow: Fizmatlit. (In Russ.)
7. Кибзун, А.И., Лебедев, А.А., Малышев, В.В. (1984) О сведении задачи с вероятностными ограничениями к эквивалентной минимаксной. *Изв. АН СССР, Техническая кибернетика*, (с. 73—80). № 4.
Kibzun, A.I., Lebedev, A.A., Malyshev, V.V. (1984) On the reduction of a problem with probabilistic constraints to an equivalent minimax problem. *Izvestiya AN SSSR, Technical Cybernetics*. (pp. 73—80). No. 4. (In Russ.)
8. Кибзун, А.И., Малышев, В.В. (1984) Обобщенный минимаксный подход к решению задач с вероятностными ограничениями. *Изв. АН СССР, Техническая кибернетика*, (с. 20—29). № 1.



- Kibzun, A.I., Malyshev, V.V. (1984) Generalized minimax approach to solving problems with probabilistic constraints. *Izvestiya AN SSSR, Technical Cybernetics*. (pp. 20—29). No. 1. (In Russ.)
9. Кибзун, А.И., Наумов, А.В. (1995) Гарантирующий алгоритм решения задачи квантильной оптимизации. *Космические исследования*. (с. 160—165) Т. 33. № 2.
Kibzun, A.I., Naumov, A.V. (1995) A Guaranteeing Algorithm for Solving a Quantile Optimization Problem. *Space Research*. (pp. 160—165) Vol. 33. No. 2. (In Russ.)
10. Мэрфи, К.П. (2022) *Вероятностное машинное обучение: введение*. М.: ДМК Пресс.
Murphy, K.P. (2022) *Probabilistic Machine Learning: An Introduction*. Moscow: DMK Press Publ.
11. Наумов, А.В., Иванов С.В. (2011) Исследование задачи стохастического линейного программирования с квантильным критерием. *Автоматика и Телемеханика*. (с. 142—158) № 2.
Naumov, A.V., Ivanov, S.V. (2011) On stochastic linear programming problems with the quantile criterion. *Autom. Remote Control*. (pp. 353—369). V. 72. No. 2. (In Russ.)
12. Кристианини, Н., Шауи-Тейлор Дж. (2000) *Введение в машины опорных векторов и другие методы обучения на основе ядра*. Издательство Кембриджского университета. ISBN 978-1-139-64363-4.
Cristianini, N., Shawe-Taylor, J. (2000) *An Introduction to Support Vector Machines and Other Kernel-based Learning Methods*. Cambridge University Press. ISBN 978-1-139-64363-4.
13. Kan, Yu.S (2002) Application of the Quantile Optimization to Bond Portfolio Selection. Stochastic Optimization Techniques. Numerical Methods and Technical Applications. *Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems*. (pp. 285—308) Vol. 513. K.Marti ed. Berlin: Springer.
Кан, Ю.С. (2002) Применение квантильной оптимизации к выбору портфеля облигаций. *Методы стохастической оптимизации. Численные методы и технические приложения. Лекционные заметки по экономике и математическим системам*. (с. 285—308) Том 513. Под ред. К. Марти. Берлин: Springer.
14. Kibzun, A.I., Kan, Y.S. (1996) *Stochastic Programming Problems with Probability and Quantile Functions*. Chichester, New York, Brisbane, Toronto, Singapore: John Wiley & Sons.
Кибзун, А.И., Кан, Ю.С. (1996) *Задачи стохастического программирования с вероятностными и квантильными функциями*. Чичестер, Нью-Йорк, Брисбен, Торонто, Сингапур: Изд. John Wiley & Sons.
15. Statnikov, A., Aliferis, C.F., Hardin D.P. A (2011) *Gentle Introduction to Support Vector Machines in Biomedicine: Theory and methods*. World Scientific. ISBN 978-981-4324-38-0.
Статников, А., Алиферис, К.Ф., Хардин Д.П. А. (2011) *Мягкое введение в машины опорных векторов в биомедицине: теория и методы*. World Scientific. ISBN 978-981-4324-38-0.

Информация об авторах

Акмаева Валентина Николаевна, старший преподаватель, кафедра 804 «Теория вероятностей и компьютерное моделирование» Института № 8, Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет) (МАИ), Москва, Российская Федерация, ORCID <https://orcid.org/0009-0007-6215-2295>, e-mail: akmaevavn@mai.ru

Information about the authors

Akmaeva Valentina Nikolaevna, Senior Lecturer, Department 804 “Probability Theory and Computer Modeling”, Institute No. 8, Moscow Aviation Institute (National Research



University) (MAI), Moscow, Russian Federation, ORCID: <https://orcid.org/0009-0007-6215-2295>, e-mail: akmaevavn@mai.ru

Конфликт интересов

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Conflict of interest

The authors declare no conflict of interest.

Поступила в редакцию 16.02.2026

Поступила после рецензирования 20.02.2026

Принята к публикации 21.02.2026

Опубликована 31.03.2026

Received 2026.02.16

Revised 2026.02.20

Accepted 2026.02.21

Published 2026.03.31

Научная статья | Original paper

УДК 519.816

Оценка эффективности декомпозиции задачи нахождения линейной медианы Кемени на основе анализа мажоритарного графа

В.Н. Нефедов ✉, В.С. Силаева

Московский авиационный институт
(национальный исследовательский университет) (МАИ)
Москва, Российская Федерация
✉ nefedovvn54@yandex.ru

Резюме

Контекст и актуальность. Задача агрегирования индивидуальных предпочтений в групповое ранжирование является фундаментальной в теории принятия решений. Медиана Кемени — один из наиболее аксиоматически обоснованных критериев консенсуса, однако ее нахождение относится к классу NP-трудных задач и требует перебора $n!$ вариантов. Метод декомпозиции на основе мажоритарного графа позволяет разбить исходную задачу на независимые подзадачи внутри компонент сильной связности (КСС), что теоретически снижает сложность до $O(n_{max}^!)$, где n_{max} — размер максимальной КСС. Практическая эффективность данного подхода остается недостаточно изученной. **Цель.** Оценить вероятность и глубину декомпозиции мажоритарного графа в зависимости от степени согласованности экспертных мнений. **Гипотеза.** Эффективность декомпозиции (размер максимальной КСС) напрямую связана с уровнем внутренней когерентности группы: метод должен быть наиболее эффективен при минимальных внутренних противоречиях. **Методы и материалы.** Проведено статистическое моделирование на трех последовательно усложняющихся моделях данных: (M1) независимые случайные линейные порядки; (M2) линейные порядки с перестановкой p пар от эталонного порядка; (M3) турниры с контролируемым отклонением (r — степень отклонения индивидуальных мнений от эталонного турнира). Для каждого набора параметров $n = 35$, $m = \{5,6,7,9\}$, $N = 100\ 000$ для M1 и M2, $n = 35$, $m = \{5,6,7,8\}$, $N = 100\ 000$ для (M3) строился мажоритарный граф, выделялись КСС и фиксировался размер максимальной компоненты n_{max} . **Результаты.** В модели M1 декомпозиция статистически незначима ($M[n_{max}] = \tilde{n} \approx n-1$). В модели M2 эффективность метода резко возрастает с уменьшением



p (для $m = 9$ при $p = 10 : \tilde{n} = 25,580$ а при $p = 5 : \tilde{n} = 10,285$). В модели МЗ обнаружена устойчивая U-образная зависимость \tilde{n} от степени отклонения r : минимальные значения (высокая эффективность) достигаются при $r \rightarrow 0$ (консенсус) и $r \rightarrow 1$ (поляризация), максимальные (низкая эффективность) — в области $r \approx 0,5$ (минимальная когерентность). **Выводы.** Показано, что метод декомпозиции наиболее полезен для сильно согласованных (как при консенсусе с эталоном, так и при поляризации от эталона) и малоэффективен для групп с максимально разнородными мнениями. Быстрый анализ КСС мажоритарного графа служит диагностическим инструментом для априорной оценки сложности задачи: значение n_{max} позволяет обоснованно выбрать между точными алгоритмами (при малых n_{max}) и эвристическими (при больших n_{max}).

Ключевые слова: линейная медиана Кемени, мажоритарный граф, декомпозиция задачи, компоненты сильной связности, групповой выбор, согласованность экспертов, вычислительная сложность

Для цитирования: Нефедов, В.Н., Силаева, В.С. (2026). Оценка эффективности декомпозиции задачи нахождения медианы Кемени на основе анализа мажоритарного графа. *Моделирование и анализ данных*, 16(1), 105—124. <https://doi.org/10.17759/mda.2026160107>

Evaluation of the efficiency of decomposition of the linear Kemeny median problem based on majority graph analysis

V.N. Nefedov ✉, V.S. Silaeva

Moscow Aviation Institute (National Research University) (MAI)
Moscow, Russian Federation

✉ nefedovvn54@yandex.ru

Abstract

Context and relevance. The problem of aggregating individual preferences into a group ranking is fundamental to decision theory. The Kemeny median is one of the most axiomatically valid criteria for consensus, but its calculation belongs to the class of NP-hard problems and requires searching through $n!$ possible options. The decomposition method based on a majority graph allows the original problem to be broken down into independent subtasks within strongly connected components (SCCs), which theoretically reduces the complexity to $O(n_{max}!)$, where n_{max} is the size of the maximum SCC. The practical effectiveness of this approach remains insufficiently studied. **Objective.** To estimate the probability and depth of majority graph decomposition depending on the extent of agreement of expert opinions. **Hypothesis.** The efficiency of decomposition (the size of the maximum SCC)



is directly related to the group's internal coherence: the method should be most effective when internal contradictions are minimal. **Methods and materials.** Statistical modelling was performed on three increasingly complex data models: (M1) independent random linear orders; (M2) linear orders with p pairs permuted from the reference order; (M3) tournaments with controlled deviation (r — extent of deviation of individual opinions from the reference tournament). For each set of parameters $n = 35$, $m = \{5, 6, 7, 9, \}$, $N = 100\,000$ for M1 и M2, $n = 35$, $m = \{5, 6, 7, 8, \}$, $N = 100\,000$ for M3), a majority graph was constructed, SCCs were identified, and the size of the maximum component n_{max} was recorded. **Results.** In model M1, the decomposition is statistically insignificant ($M[n_{max}] = \tilde{n} \approx n-1$). In model M2, the effectiveness of the method increases sharply with decreasing p (for $m = 9$ at $p = 10$: $\tilde{n} = 25,580$, and at $p = 5$: $\tilde{n} = 10,285$). In model M3, a stable inverted U-shaped dependence of \tilde{n} on the degree of deviation r is found: minimum values (high efficiency) are achieved at $r \rightarrow 0$ (consensus) and $r \rightarrow 1$ (polarization), maximum values (low efficiency) — in the region $r \approx 0,5$ (minimum coherence). **Conclusions.** The decomposition method has been proven to be most useful for highly consistent groups (both in terms of consensus with the reference and polarization from the reference) and ineffective for groups with highly diverse opinions. A quick analysis of the SCC of the majority graph can be used as a diagnostic tool for a pre-assessment of the complexity of the task: the value of n_{max} allows for a reasonable choice between exact algorithms (for small n_{max}) and heuristic ones (for large n_{max}).

Keywords: Kemeny median, majority graph, problem decomposition, strongly connected components, social choice, expert consistency, computational complexity

For citation: Nefedov, V.N., Silaeva, V.S. (2026). Evaluation of the efficiency of decomposition of the linear Kemeny median problem based on majority graph analysis. *Modelling and Data Analysis*, 16(1), 105—124. (In Russ.). <https://doi.org/10.17759/mda.2026160107>

Введение

Рассматривается задача группового выбора, состоящая в нахождении результирующей ранжировки, в наибольшей степени учитывающей индивидуальные предпочтения членов группы.

Существуют различные подходы к решению данной задачи: включая классические теории Ш. Борда и Н. Кондорсе (Миркин, 1974), концепция рационального выбора группы К. Эрроу (Мулен, 1991), а также методы, базирующиеся на анализе близости бинарных отношений (Young, 1988; Петровский, 2009, Нефедов и др., 2018). В данной работе в качестве оптимального агрегированного ранжирования рассматривается линейная медиана Кемени — линейный порядок, минимизирующий сумму расстояний Хемминга до индивидуальных предпочтений. Данный критерий обладает рядом аксиоматических преимуществ и интерпретируется как отражение максимального консенсуса внутри группы (Kemeny, 1959).

Однако нахождение медианы Кемени представляет собой NP-трудную вычислительную задачу (Bartholdi, Tovey, Trick, 1989; Hudry, 2012). Существующие



алгоритмы решения данной задачи можно разделить на эвристические, не гарантирующие оптимальности (Петровский, 2009; Литвак, 1982; Корнеев, 2018; Cook, 2006), и точные, основанные на методах дискретной оптимизации (например, целочисленное программирование, метод ветвей и границ (Нефедов, Осипова, 2022; Azzini, Munda, 2020)). Точные методы в худшем случае требуют перебора $n!$ перестановок (где n — число альтернатив), что ограничивает их применимость на практике даже для умеренных n . Это обуславливает необходимость разработки методов ускорения, использующих специфическую структуру задачи.

Одним из таких перспективных подходов является декомпозиция на основе мажоритарного графа. Мажоритарный граф отражает попарные отношения большинства между альтернативами. Известно, что задача поиска медианы Кемени может быть сведена к задаче устранения контуров в этом графе (Нефедов и др., 2018). Ключевая идея ускорения заключается в том, что, если мажоритарный граф не является сильно связным, его можно разложить на компоненты сильной связности (КСС). Задача поиска глобальной медианы при этом распадается на независимые подзадачи внутри каждой КСС, а их результаты объединяются в соответствии с ациклическим графом конденсации. Теоретически это позволяет снизить вычислительную сложность с $O(n!)$ до $O(n_1! + \dots + n_k!)$, где n_i — размеры КСС, что эквивалентно $O(n_{max}!)$, где $n_{max} = \max n_i$.

Несмотря на очевидный теоретический потенциал, практическая эффективность данного подхода остается недостаточно изученной. Отсутствуют количественные оценки того, насколько часто и при каких условиях мажоритарный граф допускает нетривиальную декомпозицию, и как эффективность этой декомпозиции (размер максимальной КСС) зависит от степени согласованности экспертов.

Целью данного исследования является оценка эффективности метода декомпозиции мажоритарного графа для ускорения нахождения медианы Кемени на основе статистического анализа.

Для этого мы исследуем три последовательно усложняющиеся модели генерации профилей предпочтений: от независимых случайных порядков (M1), затем модель с умеренной согласованностью (M2) до модели с контролируемым уровнем согласованности (M3). Полученные количественные зависимости позволяют априорно оценить ожидаемую сложность задачи и определить условия, при которых декомпозиция дает максимальный вычислительный выигрыш.

Материалы и методы

Постановка задачи нахождения линейной медианы Кемени

Группа из m лиц рассматривает несколько возможных вариантов (альтернатив) $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ решения некоторой проблемы. Индивидуальные предпочтения членов группы в общем случае выражаются бинарными отношениями, и задают профиль $\langle \rho_1, \dots, \rho_m \rangle$ бинарных отношений на A .

Обозначим через $LO[n]$ совокупность всех линейных порядков на A , т. е. бинарных отношений на A , являющихся одновременно рефлексивными,



антисимметричными, транзитивными и линейными. Под строгим ранжированием понимается любое отношение из $LO[n]$, для нестрогого ранжирования необязательно условие антисимметричности. Расстояние между бинарными отношениями $\rho, \rho' \subseteq A \times A$ с матрицами $R(\rho) = r_{ij \times n}$, $R(\rho') = r'_{ij \times n}$, где $r_{ij}, r'_{ij} \in \{0, 1\}$, будем задавать метрикой Хемминга:

$$d(\rho, \rho') = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |r_{ij} - r'_{ij}|.$$

В качестве реляционного правила агрегирования предлагается выбрать линейную медиану Кемени, т. е. результирующую строгую ранжировку, наиболее близкую в смысле метрики Хемминга к мнениям экспертов. Таким образом, рассматриваемая задача сводится к нахождению линейной ранжировки (в общем случае множества ранжировок), минимизирующей функцию

$$D(\rho) = \sum_{t=1}^m d(\rho, \rho_t),$$

т. е.

$$\hat{\rho} \in \text{Arg min}_{\rho \in LO[n]} D(\rho).$$

В общем случае такая ранжировка может оказаться неединственной и потребуются нахождение всего множества

$$\text{Arg min}_{\rho \in LO[n]} D(\rho).$$

Построение мажоритарного графа

Процедура построения мажоритарного графа предлагается еще в работе (Миркин, 1974). Пусть имеется набор бинарных отношений $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_m$ с матрицами смежности $R^{(1)}, R^{(2)}, \dots, R^{(m)}$, где $R^{(t)} = R(\rho_t) = r_{ij}^{(t)}$, $t = 1, 2, \dots, m$. Поставим ему в соответствие матрицы $P = \sum_{t=1}^m R^{(t)} = p_{ij}$, $L = P - P^T = l_{ij}$.

Тогда для данного набора бинарных отношений $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_m$ рассмотрим мажоритарное отношение $\tilde{\rho}$. Оно однозначно определяется по «правилу большинства» $\tilde{r}_{ij} = 1 \Leftrightarrow l_{ij} \geq 0$, где $R(\tilde{\rho}) = \tilde{r}_{ij \times n}$. Будем, кроме того, использовать нестрогий мажоритарный граф $\tilde{G} = (A, \tilde{\rho})$ с множеством вершин A и множеством дуг $\tilde{\rho}$. Мажоритарный граф \tilde{G} можно считать нагруженным, если поставить в соответствие каждой дуге $(a_i, a_j) \in \tilde{\rho}$ вес l_{ij} . Определим матрицу весов $C = c_{ij \times n}$ этого графа:

$$c_{ij} = \begin{cases} l_{ij}, & \text{если } (a_i, a_j) \in \tilde{\rho}, \\ \infty, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$



Мажоритарный граф наиболее полно учитывает мнения группы экспертов, при этом удовлетворяет требованиям к групповым решениям: сохранение отношения Парето, монотонность, независимость. Однако основным недостатком является то, что мажоритарный граф с большой вероятностью не транзитивен и может содержать контуры.

Задача нахождения линейной медианы Кемени тождественна задаче разрушения контуров в мажоритарном графе (с минимизацией суммарного веса удаляемых дуг) и последующему расширению полученного ациклического графа (или множества графов) до всех возможных линейных порядков.

Принцип декомпозиции задачи

Компонента сильной связности (КСС) — это максимальное по включению множество вершин, в котором для любой пары вершин $\langle u, v \rangle$ существует ориентированный путь как из u в v , так и из v в u . Все ориентированные циклы (контуры) содержатся целиком внутри КСС. Для выделения КСС могут использоваться алгоритмы Косарайю или Тарьяна (Sharir, 1981; Tarjan, 1972), имеющие линейную сложность $O(n + |\tilde{\rho}|)$ относительно числа вершин n и дуг $|\tilde{\rho}|$. Число дуг в графе не превосходит $2n^2$, поэтому трудоемкость поиска КСС $O(n^2)$.

После нахождения КСС мажоритарного графа \tilde{G} строится *граф конденсации* \tilde{G}_C . Вершинами этого графа являются найденные КСС (обозначим их C_1, C_2, \dots, C_k), а дуга от компоненты C_s к компоненте C_t проводится, если в исходном графе \tilde{G} существует хотя бы одна дуга из некоторой вершины графа C_s в некоторую вершину графа C_t .

Граф конденсации всегда является ациклическим: так как наличие цикла между компонентами означало бы, что их вершины принадлежат одной КСС. Таким образом граф \tilde{G}_C (точнее, его транзитивное замыкание) задает частичный порядок на множестве компонент.

Для каждой КСС C_i независимо от других найдем «локальную» линейную медиану Кемени (или множество локальных линейных медиан) на множестве вершин графа C_i . Затем рассмотрим прямое произведение всех возможных локальных медиан по всем КСС. Для каждого из случаев рассмотрим граф, полученный из мажоритарного графа заменой каждой из КСС на граф из найденного для этой КСС множества локальных медиан. Полученный в результате такой замены граф не содержит контуров, и его транзитивное замыкание является частичным порядком на всем множестве A . Для получения совокупности всех линейных медиан Кемени необходимо всеми возможными способами расширить этот частичный порядок до линейного, к примеру алгоритмом Варола-Ротема (Varol, Rotem, 1981). Нетрудно показать, что любой полученный таким образом линейный порядок $\hat{\rho}$ имеет одинаковое значение

$$D(\hat{\rho}) = \min_{\rho \in LO[n]} D(\rho).$$

Приведем также обоснование в обратную сторону. Если имеется некоторое общее решение $\hat{\rho}$ (т.е. $\hat{\rho}$ — оптимальный линейный порядок для общей задачи), то он порождает соответствующие «локальные» оптимальные линейные порядки на каждой из КСС, которые войдут в общий перебор для каждой из этих подзадач, а тем самым



и в их набор, т.е. линейный порядок $\hat{\rho}$ войдет в прямое произведение всех локальных медиан по всем КСС и будет учтен в общем решении задачи.

Описанный подход позволяет, например, применять описанный в (Нефедов, Осипова 2022) метод ветвей и границ решения общей задачи, использующий матрицу $P = \sum_{i=1}^m R^{(i)}$ (будем его называть «матричным методом») не ко всей задаче, а к частным задачам, соответствующим КСС, т.е. осуществлять декомпозицию общей задачи на частные. Но, если применение этого метода ко всей задаче имеет естественные ограничения (не более 26—30 альтернатив), то это ограничение теперь будет относиться к частным задачам, что позволяет решать некоторые задачи указанным матричным методом при весьма большом числе альтернатив.

Рассмотрим следующий частный случай, когда мажоритарный граф обладает следующими свойствами: 1) \tilde{G}_C является линейным порядком; 2) если $C_s, C_t \in \tilde{G}_C$, то для всех $a_{s_i} \in C_s, a_{t_i} \in C_t$ верно $a_{s_i}, a_{t_i} \in \tilde{G}$. Такой случай, например, возникает, если бинарные отношения $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_m$ являются линейными и асимметричными (турнирами) и m — нечетно (Нефедов, 2022). В этом случае решение исходной задачи также основывается на ее декомпозиции на множество частных и сводится к следующим двум этапам:

Для каждой КСС C_i найти все возможные локальные медианы (линейные порядки на множестве C_i).

Объединить полученные ранжировки в глобальную линейную ранжировку на всем множестве A в соответствии с линейным порядком, задаваемым графом конденсации (конкатенация линейных порядков).

Если для решения задачи необходимо найти не все множество медиан, а только одну из возможных, то можно свести задачу к частному случаю расширив \tilde{G}_C каким-то одним способом до линейного и добавив дуги, чтобы для любых $C_s, C_t \in \tilde{G}_C$ выполнялось: $a_{s_i}, a_{t_i} \in \tilde{G}$ для всех $a_{s_i} \in C_s, a_{t_i} \in C_t$. Расширение частичного порядка до одного из возможных линейных порядков, может быть найдено топологической сортировкой (упорядочивание n вершин ориентированного ациклического графа по n уровням таким образом, чтобы все дуги были направлены от вершин с меньшим уровнем к вершинам с большим) и может быть выполнено всего за $O(n)$, к примеру алгоритмом Кана или алгоритмом Демукрона (Кормен и др., 2005).

Сложность решения исходной задачи в частном случае после декомпозиции определяется размером наибольшей из КСС ($n_{max} = \max(|C_1|, \dots, |C_k|) = \max(n_1, \dots, n_k)$). Даже если внутри каждой компоненты применяется полный перебор, сложность составит порядка $O(n_{max}!)$ (с точностью до полиномиальных множителей). В лучшем случае мажоритарный граф ациклический, все $|C_i|=1$, и задача решается за полиномиальное время. В худшем случае граф сильно связан ($k=1, n_{max} = n$), и декомпозиция не дает выигрыша.

Модели генерации данных

Экспериментальное исследование было построено как последовательность трех моделей, каждая из которых устраняет ограничения или отвечает на вопросы,



возникшие при анализе предыдущей. Все модели были реализованы для фиксированного числа альтернатив $n=35$. Для каждого набора параметров проводилось $N=100000$ (для M1, M2) или $N=10000$ (для M3) независимых испытаний. В каждом испытании генерировался профиль предпочтений, строился мажоритарный граф, находились его КСС и определялся размер максимальной компоненты n_{max} .

Модель M1: Базовый случай (нулевая априорная согласованность).

Цель модели — определение базового уровня эффективности декомпозиции в условиях максимальной неопределенности, когда мнения экспертов абсолютно независимы и случайны.

Профиль состоит из m независимых случайных линейных порядков на множестве A . Все $m!$ возможных комбинаций равновероятны. Параметры модели: $m \in \{3, 5, 7, 9\}$ (нечетные).

Мы ожидали, что при полной случайности мажоритарный граф будет близок к случайному турниру, где вероятность существования большого контура высока, а значит, декомпозиция будет слабой. Результаты M1 подтвердили это: среднеожидаемый размер максимальной компоненты $\tilde{n} = M[n_{max}]$ был близок к количеству альтернатив n . Это показало, что в условиях полного хаоса метод декомпозиции не дает значимого выигрыша. Однако такая модель плохо отражает реальные ситуации, где мнения экспертов обычно в той или иной степени согласованы.

Модель M2: Управляемая согласованность на линейных порядках.

Цель модели M2: исследовать, как введение согласованности в предпочтения экспертов влияет на эффективность декомпозиции.

Профиль отношений генерируется следующим образом. Задается эталонный линейный порядок ρ_0 (мнение гипотетического идеального эксперта). Мнение каждого из m экспертов (включая первого) получается из ρ_0 путем применения фиксированного числа p случайных перестановок пар альтернатив. Параметры: $m \in \{3, 5, 7, 9\}$ (нечетные), $p \in \{1, 2, \dots, 35\}$.

В отличие от M1, здесь эксперты не независимы — их мнения отталкиваются от эталонного. Мы исследовали, как мера согласованности, контролируемая параметром p , влияет на n_{max} . Результаты M2 показали существенный рост эффективности декомпозиции с уменьшением p . Однако модель M2 имела методологическое ограничение: параметр p — косвенная и нелинейная мера согласованности для всего профиля. Возникла потребность в модели с прямым и четким контролем над степенью согласованности.

Модель M3: Контролируемая согласованность на турнирах (обобщенный случай).

Цели модели M3: ввести прямую количественную меру согласованности профиля; обобщить исследование на более широкий класс предпочтений (турниры, не обязательно транзитивные).

Профиль отношений генерируется следующим образом. Задается эталонный турнир ρ_1 (в нашем случае соответствующий линейному порядку). Для каждого из остальных $m-1$ экспертов генерируется турнир ρ_i , находящийся на заданном



расстоянии Хемминга от ρ_1 . А именно: в матрице смежности ρ_1 инвертируется ровно k случайных элементов вне диагонали. Это гарантирует, что $d(\rho_i, \rho_1) = 2k$ при $t = 2, m$.

Параметр k (смещение относительно эталона) может принимать значения от 0 до $\frac{n(n-1)}{2}$. Поэтому введем нормированный параметр — степень отклонения индивидуальных мнений от единого эталона $r = \frac{2k}{n(n-1)}$. При $r = 0$ все эксперты идентичны ρ_1 , при $r = 1$ мнения диаметрально противоположны эталону (полная поляризация).

Параметры: $m \in \{5, 6, 7, 8\}$, $k \in \{10, 20, 30, \dots, 580, 590\}$ (т.к. k при данном n может принимать значения от 0 до $35 \cdot 34 / 2 = 595$). Т.к. k принимает целых 59 значений, то было решено уменьшить количество тестов N с 100000 до 10000.

Модель М3 решает ключевые проблемы М2. Данная модель генерации позволяет получать профили с разным уровнем внутренней согласованности (когерентности) группы, которую мы измеряем как величину обратную среднему попарному расстоянию Хемминга между мнениями экспертов. При $r \rightarrow 0$ и $r \rightarrow 1$ внутренняя ожидаемая согласованность высока (консенсус и поляризация соответственно), а при $r \approx 0,5$ — минимальна (максимальные разногласия). Это позволяет исследовать, как когерентность группы, а не просто случайность, влияет на структуру мажоритарного графа. Переход от линейных порядков к турнирам делает модель более общей. Также М3 позволяет изучать влияние четности числа экспертов m .

Эта модель позволила выявить обратную U-образную зависимость среднеожидаемого размера максимальной КСС \tilde{n} от степени отклонения индивидуальных мнений от единого эталона r (\tilde{n} сначала увеличивается с увеличением r , достигает максимума $\tilde{n} = n$, затем уменьшается), что является основным результатом данной работы.

Метрика исследования

Основная метрика: n_{max} — размер максимальной КСС мажоритарного графа для данного тестового профиля. Для анализа используются: распределение n_{max} по тестам и среднеожидаемый размер максимальной компоненты $\tilde{n} = M[n_{max}]$ для фиксированных m .

Результаты

В данном разделе представлены статистические результаты вычислительных экспериментов для трех моделей генерации данных. Основной измеряемой величиной является размер максимальной компоненты сильной связности (n_{max}) мажоритарного графа.

Для каждой серии экспериментов приводятся: распределение частоты встречаемости различных значений n_{max} и среднеожидаемый размер максимальной компоненты \tilde{n} при фиксированном m .

Результаты модели М1

Было проведено по $N=100000$ испытаний для каждого нечетного числа экспертов $m \in \{3, 5, 7, 9\}$ при фиксированном числе альтернатив $n=35$. Гистограммы распределений n_{max} для фиксированных m изображены на рис. 1.

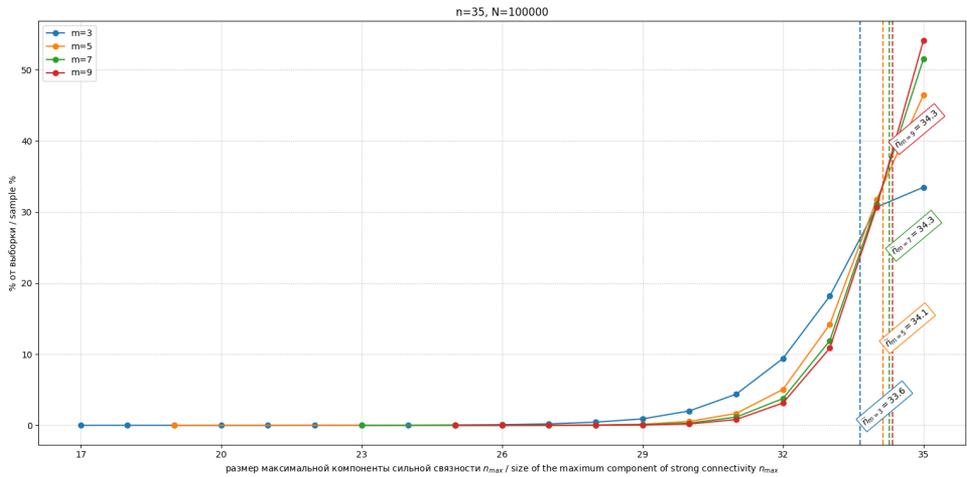


Рис. 1. Гистограммы распределений n_{\max} M1
Fig. 1. Histograms of n_{\max} distributions of the M1

Среднеожидаемые размеры максимальной компоненты для фиксированного m представлены в табл. 1.

Таблица 1 / Table 1

Среднеожидаемый размер максимальной компоненты для M1 для разных m
The expected average size of the maximum component for M1 for different m

m	3	5	7	9
\tilde{n}_m	33,6	34,1	34,3	34,3

Результаты модели M2

Исследовалось влияние параметра согласованности p (число переставленных пар). Для $m \in \{3, 5, 7, 9\}$ и $p \in \{1, 2, \dots, 35\}$ проведено по $N=100000$ испытаний. Гистограммы распределений n_{\max} для фиксированных m при $p=5$ изображены на рис. 2, при $p=10$ на рис. 3 и при $p=30$ на рис. 4.

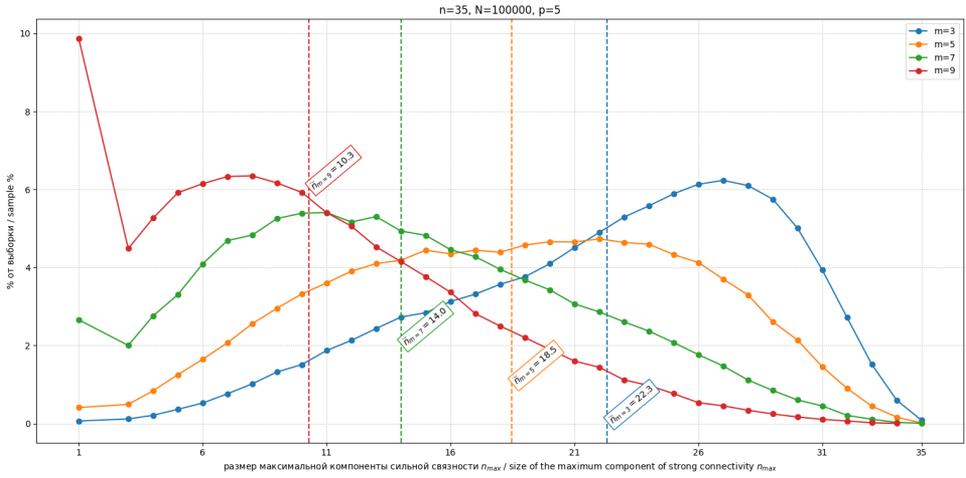


Рис. 2. Гистограммы распределений n_{max} M2 при $p = 5$
Fig. 2. Histograms of n_{max} distributions of the M2 at $p = 5$

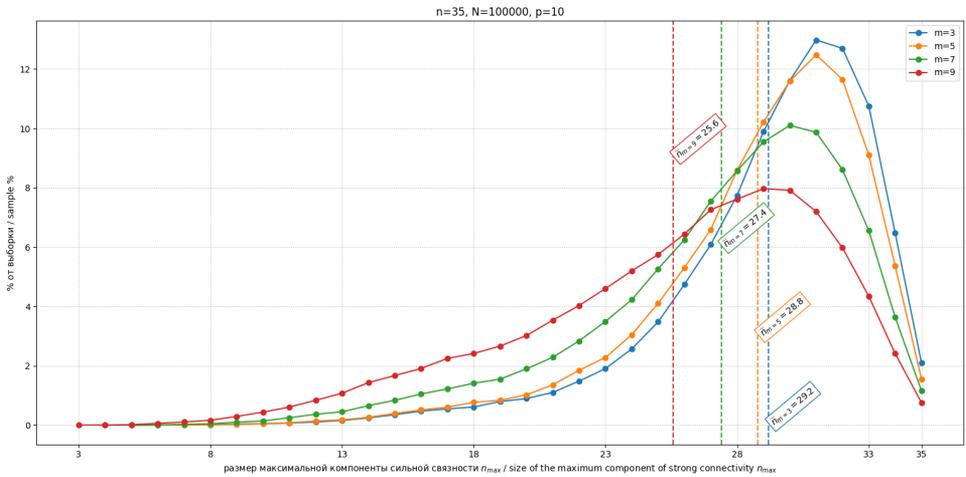


Рис. 3. Гистограммы распределений n_{max} M2 при $p = 10$
Fig. 3. Histograms of n_{max} distributions of the M2 at $p = 10$

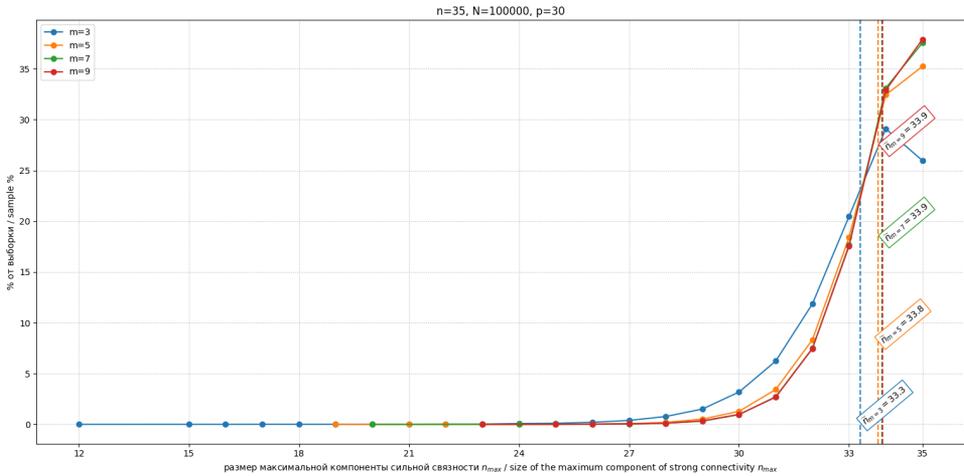


Рис. 4. Гистограммы распределений n_{max} M2 при $p = 30$

Fig. 4. Histograms of n_{max} distributions of the M2 at $p = 30$

Были посчитаны среднеождаемые размеры максимальных компонент по p для разных фиксированных m . К примеру, в табл. 2 представлены среднеождаемые размеры максимальных КСС при $m = 5$.

Таблица 2 / Table 2

**Среднеождаемый размер максимальной
 компоненты для M2 по P при $m = 5$**

**The expected average size of the maximum
 component for M2 depending on P at $m = 5$**

p	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\tilde{n}_{m=5}(p)$	1,92	5,64	10,35	14,74	18,47	21,62	24,12	26,16	27,60	28,79	29,72	30,39

Результаты модели M3

Исследовалась зависимость от смещения относительно эталона k (и соответственной от степени отклонения индивидуальных мнений от единого эталона r). Для $n = 35$, $m \in \{5, 6, 7, 8\}$ и различных k проведено по $N = 10000$ испытаний. Гистограммы распределений при $k = 60$, $k = 200$ и $k = 580$ представлены на рис. 5, 6 и 7 соответственно.

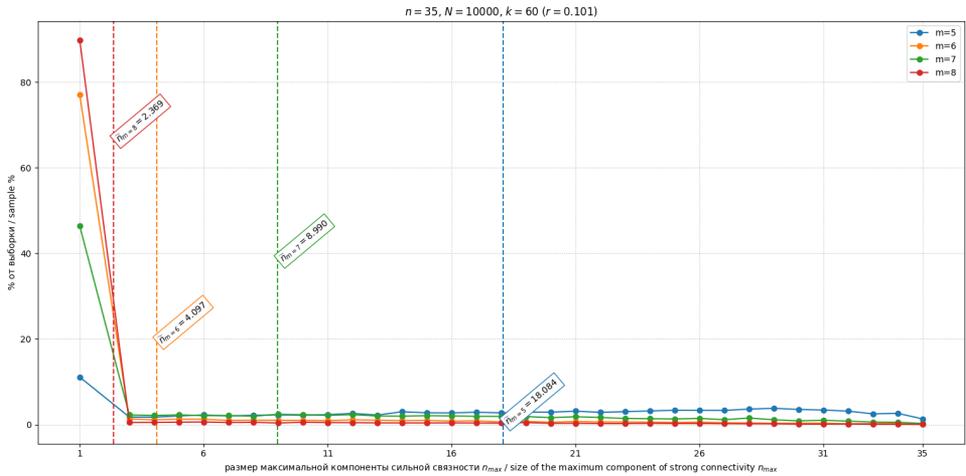


Рис. 5. Гистограммы распределений n_{max} M3 при $k = 60 (r = 0,101)$
Fig. 5. Histograms of n_{max} distributions of the M3 at $k = 60 (r = 0,101)$

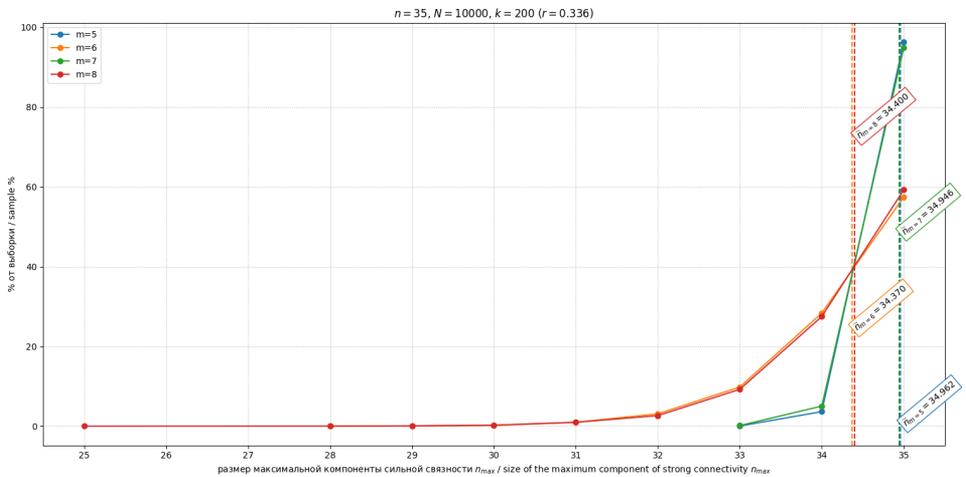


Рис. 6. Гистограммы распределений n_{max} M3 при $k = 200 (r = 0,336)$
Fig. 6. Histograms of n_{max} distributions of the M3 at $k = 200 (r = 0,336)$

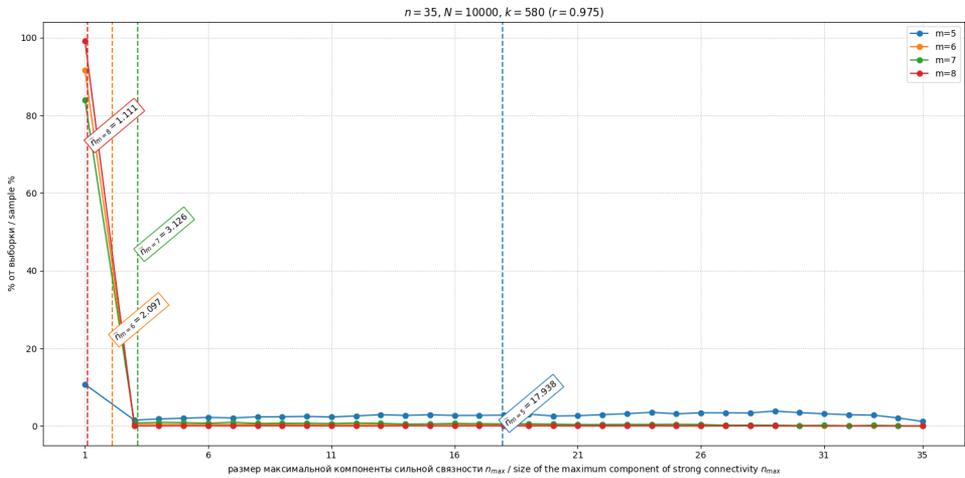


Рис. 7. Гистограммы распределений n_{max} МЗ при $k = 580 (r = 0,975)$

Fig. 7. Histograms of n_{max} distributions of the M3 at $k = 580 (r = 0,975)$

Зависимость среднеожидаемого размера максимальной компоненты \tilde{n} от параметра r для разных m изображена на рис. 8. График демонстрирует немонотонную обратную U-образную зависимость: максимальные значения \tilde{n} (минимальная эффективность декомпозиции) наблюдается в области $r \approx 0,4-0,7$, тогда как при $r \rightarrow 0$ (консенсус) и $r \rightarrow 1$ (поляризация) значение \tilde{n} существенно снижается.

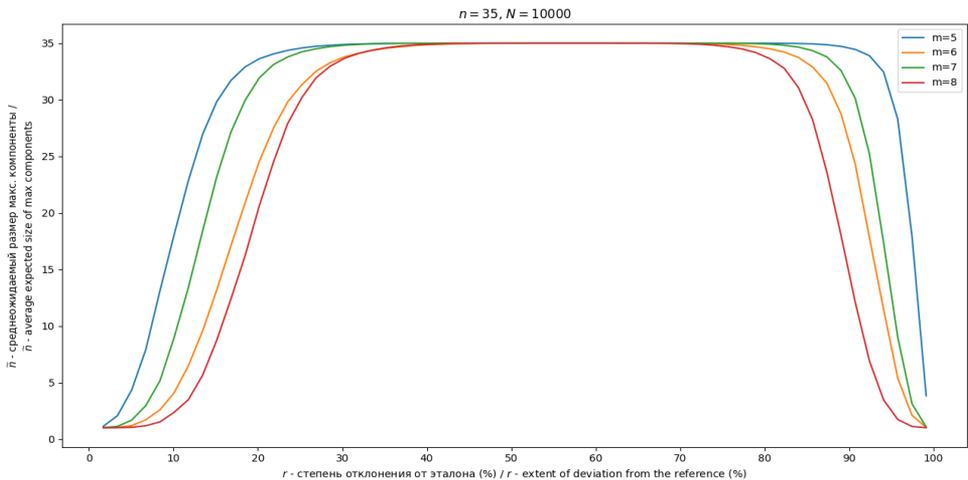


Рис. 8. График зависимости \tilde{n} от степени отклонения r

Fig. 8. Graph of the dependence of \tilde{n} on the extent of deviation r



Обсуждение результатов

Эксперименты показали, что эффективность декомпозиции (значение n_{max}) задачи поиска медианы Кемени слабо зависит от количества экспертов (m), но критически обусловлена структурой мажоритарного графа, которая, в свою очередь, определяется характером профиля предпочтений. Наблюдаемая зависимость перекликается с результатами параметризованного анализа задачи (De et al., 2024), где разброс мнений рассматривается как один из ключевых параметров, определяющих вычислительную сложность.

Интерпретация результатов по моделям

Высокие значения \tilde{n} (близкие к $n = 35$) на модели M1 (независимые случайные порядки) подтверждают, что: при отсутствии какой-либо согласованности мажоритарный граф с высокой вероятностью является почти сильно связным. Небольшое уменьшение \tilde{n} относительно n объясняется вероятностным возникновением малых изолированных контуров. Практический вывод: для профилей, подобных случайным, метод декомпозиции не дает значимого снижения вычислительной сложности.

Модель M2 продемонстрировала, что введение структурной схожести мнений (через перестановку p пар в едином эталоне) значительно увеличивает эффективность метода. Чем выше эта схожесть (меньше p), тем меньше размер максимальной компоненты. Увеличение p ведет к приближению профиля к случайному (M1). Важно, что даже при умеренных p (например, $p = 10$) средний размер максимальной компоненты ($\sim 29,7$) существенно меньше n , что указывает на значительный потенциал метода для реальных задач, где мнения экспертов обычно не являются совершенно независимыми, а группируются вокруг некоторых общих тенденций. При увеличении p модель ведет себя похоже на M1 (полностью случайные перестановки), что видно при сравнении рис. 1 (M1) с рис. 4 (M2 при $p = 30$). Однако разброс среднего попарного расстояния (величины обратной согласованности группы) в такой модели велика, поэтому была смоделирована модель M3.

Ключевой результат получен на модели M3. Наблюдаемая обратная U-образная зависимость \tilde{n} от степени отклонения от эталона r (\tilde{n} сначала увеличивается с увеличением r , достигает максимума $\tilde{n} = n$, затем уменьшается) находит объяснение при анализе внутренней когерентности группы. Параметр r служит удобным инструментом для генерации профилей с разным уровнем ожидаемой когерентности, измеряемой как величина обратная среднему попарному расстоянию Хемминга между экспертами:

При $r \rightarrow 0$ (консенсус) и $r \rightarrow 1$ (поляризация) ожидаемая когерентность группы высока, что приводит к ациклической или хорошо структурированной форме мажоритарного графа и, как следствие, к его эффективной декомпозиции.

В зоне $r \approx 0,5$ внутренние разногласия в группе максимальны (ожидаемая когерентность минимальна), мажоритарный граф близок к случайному турниру, что делает декомпозицию практически невозможной.

Таким образом, метод декомпозиции наиболее эффективен не просто при малом отклонении от гипотетического центра, а именно в условиях высокой внутренней согласованности группы, будь то консенсус или поляризация.



Практическая значимость и рекомендации

Практическая ценность метода заключается в том, что быстрый анализ КСС мажоритарного графа ($O(n^2)$) позволяет априорно оценить сложность исходной NP-трудной задачи по значению n_{max} и принять обоснованное решение о выборе алгоритма (точный или эвристический).

Полученные результаты трансформируют метод декомпозиции из теоретического приема в ценный диагностический инструмент. Процедура построения КСС мажоритарного графа имеет сложность $O(n^2)$ и может выполняться до запуска ресурсоемкого алгоритма поиска медианы Кемени.

Малое n_{max} (< 15) сигнализирует о высокой когерентности группы. Рекомендуется применение точного алгоритма к независимым компонентам, что гарантирует нахождение оптимального решения.

Большое n_{max} (близкое к n) указывает на состояние низкую согласованность группы. Это служит основанием для отказа от точных методов в пользу эвристических алгоритмов, либо для пересмотра самого состава группы или процедуры сбора мнений.

Заключение

Экспериментально подтверждено, что метод декомпозиции задачи нахождения медианы Кемени на основе анализа мажоритарного графа обладает значительным потенциалом для значительного снижения вычислительной сложности.

Установлено, что эффективность декомпозиции напрямую коррелирует с уровнем внутренней согласованности (когерентности) группы экспертов, измеряемой через среднее попарное расстояние. Метод наиболее полезен для сильно согласованных (как при консенсусе с эталоном, так и при поляризации от эталона) и малоэффективен для групп с максимально разнородными мнениями, что объясняет наблюдаемую U-образную зависимость от степени отклонения относительно эталона r .

Быстрый анализ компонент сильной связности мажоритарного графа служит не только методом ускорения вычислений, но и ценным диагностическим инструментом. Он позволяет априорно оценить ожидаемую сложность NP-трудной задачи по размеру максимальной компоненты n_{max} и проанализировать структуру разногласий в группе для обоснованного выбора алгоритма решения (точного или эвристического).

Ограничения. Следует отметить ограничения проведенного исследования. Во-первых, анализ проводился на синтетических данных, сгенерированных в рамках трех параметрических моделей, которые могут упрощать структуру реальных экспертных оценок. Во-вторых, все эксперименты выполнены для фиксированного числа альтернатив ($n = 35$); поведение системы при других n требует отдельного изучения. В-третьих, использованная метрика Хемминга (расстояние Кемени) является не единственно возможной, и влияние выбора иной метрики на структуру мажоритарного графа остается открытым вопросом

Важным методологическим ограничением является рассмотрение моделей M1 и M2 только для нечетного числа экспертов m . Это было сделано для исключения



ситуаций равенства голосов и гарантии, что граф конденсации мажоритарного графа является линейным порядком. Однако на практике число участников может быть четным, что приведет к появлению несравнимых пар (при равенстве голосов) и может повлиять на структуру графа конденсаций (Dougherty, Heckelman, 2023). Модель М3 частично снимает это ограничение, рассматривая как четные, так и нечетные m , однако ее результаты для четного случая требуют отдельного углубленного анализа, т.к. помимо нахождения медиан для каждой КСС, в случае четного количества экспертов необходимо достраивать граф конденсаций до линейного порядка, что является трудоемкой задачей.

Limitations. There are some limitations that should be noted about this study. The first one is that the analysis was done on synthesized data generated using three parametric models, which might simplify the structure of real expert assessments. The second one is that all the experiments were done for a fixed number of alternatives ($n = 35$); the behaviour of the system for other n values need to be studied separately. Third, the Hamming metric (Kemeny distance) used is not the only possible one, and the effect of choosing a different metric on the structure of the majority graph remains an open question.

An important methodological limitation is that models M1 and M2 are considered only for an odd number of experts m . This was done to exclude situations of tie votes and to guarantee that the condensation graph of the majority graph is a linear order. However, in practice, the number of participating experts may be even, which will lead to the appearance of incomparable pairs (in the event of a tie) and may affect the structure of the condensation graph (Dougherty, Heckelman, 2023). Model M3 partially removes this restriction by considering both even and odd m , but its results for the even case requires a separate in-depth analysis, since in addition to finding medians for each SCC, in the case of an even number of experts, it is necessary to complete the condensation graph to linear order, which is a time-consuming task.

Список источников / References

1. Кормен, Т., Лейзерсон, Ч., Ривест, Р., Штайн, К. (2005). Глава 22.4. Топологическая сортировка. В: И.В. Красикова (ред.). *Алгоритмы: построение и анализ* (с. 632—635). М.: Вильямс. URL: <https://elibrary.ru/item.asp?id=19445496> (дата обращения: 13.02.2026)
Cormen, T., Leiserson, C., Rivest, R., Stein, C. (2005). Chapter 22.4. Topological sorting. In: I.V. Krasikova (Ed.). *Introduction to algorithms* (pp. 632—635). Moscow: Williams. (In Russ). URL: <https://elibrary.ru/item.asp?id=19445496> (viewed: 13.02.2026)
2. Корнеев, В.П. (2018). *Методы многокритериального оценивания объектов с многоуровневой структурой показателей эффективности*. М.: МАКС Пресс. URL: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=35669019> (дата обращения: 13.02.2026)
Korneev, V.P. (2018). *Methods of multi-criteria evaluation of objects with a multilevel structure of performance indicators*. Moscow: MAKS Press. (In Russ.). URL: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=35669019> (viewed: 13.02.2026)



3. Литвак, Б.Г. (1982). *Экспертная информация: методы получения и анализа*. М.: Радио и связь. URL: <https://www.elibrary.ru/item.asp?edn=qtwiuj> (дата обращения: 13.02.2026)
Litvak, B.G. (1982). *Expert information: methods of obtaining and analyzing*. Moscow: Radio i svyaz'. (In Russ.). URL: <https://www.elibrary.ru/item.asp?edn=qtwiuj> (viewed: 13.02.2026)
4. Миркин, Б.Г. (1974). *Проблемы группового выбора*. М.: Наука. <https://doi.org/10.1007/BF02294167>
Mirkin, B.G. (1974). *Problems of group choice*. Moscow: Nauka. (In Russ.). <https://doi.org/10.1007/BF02294167>
5. Мулен, Э. (1991). *Кооперативное принятие решений: Аксиомы и модели*. М.: Мир. <https://doi.org/10.1017/ccol0521360552>
Moulin, E. (1991). *Cooperative decision-making: Axioms and models*. Moscow: Mir. (In Russ.). <https://doi.org/10.1017/ccol0521360552>
6. Нефедов, В.Н. (2022). Медиана для нечетного числа отношений линейного порядка и ее использование в задачах группового выбора. ПДМ, 57, 98—127. <https://doi.org/10.17223/20710410/57/7>
Nefedov, V.N. (2022). *Median for an odd number of linear order relations and its use in group choice problems*. Prikladnaya Diskretnaya Matematika, 57, 98—127. (In Russ.). <https://doi.org/10.17223/20710410/57/7>
7. Нефедов, В.Н., Осипова, В.А. (2022). Согласование индивидуальных ранжировок методом ветвей и границ. Известия РАН. Теория и системы управления, 6, 123—132. <https://doi.org/10.31857/s0002338822060142>
Nefedov, V.N., Osipova, V.A. (2022). *Coordination of individual rankings by the method of branches and boundaries*. Journal of Computer and Systems Sciences International, 6, 123—132. (In Russ.). <https://doi.org/10.31857/s0002338822060142>
8. Нефедов, В.Н., Осипова, В.А., Смерчинская, С.О., Яшина, Н.П. (2018). Непротиворечивое агрегирование отношений строгого порядка. Изв. вузов. Математика, 5, 71—85. <https://doi.org/10.17223/20710410/45/13>
Nefedov, V.N., Osipova, V.A., Smerchinskaya, S.O., Yashina, N.P. (2018). *Consistent aggregation of strict order relations*. Russian Mathematics (Iz. VUZ), 5, 71—85. (In Russ.). <https://doi.org/10.17223/20710410/45/13>
9. Петровский, А.Б. (2009). *Теория принятия решений*. М. ИЦ Академия. URL: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=19459362> (дата обращения: 13.02.2026)
Petrovsky, A.B. (2009). *The theory of decision-making*. M. IC Academy (In Russ.). URL: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=19459362> (viewed: 13.02.2026)
10. Azzini, I., Munda, G. (2020). *A new approach for identifying the Kemeny median ranking*. European Journal of Operational Research, 2, 388—401, <https://doi.org/10.1016/j.ejor.2019.08.033>
11. Bartholdi, J., Tovey, C.A., Trick M.A. (1989). *Voting schemes for which it can be difficult to tell who won the election*. Social Choice and Welfare, 6(2), 157—165. <https://doi.org/10.1007/bf00303169>
12. Cook, W.D. (2006). *Distance-based and Adhoc Consensus Models in Ordinal Preference Ranking*. Europ. J. of Operational Research, 172, 369—385. <https://doi.org/10.1016/j.ejor.2005.03.048>



13. De, K., Mittal, H., Dey, P., Misra, N. (2024). *Parameterized aspects of distinct Kemeny rank aggregation*. *Acta Informatica*, 61, 401–414. <https://doi.org/10.1007/s00236-024-00463-x>
14. Dougherty, K., Heckelman, J.C. (2023). *When ties are possible: Weak Condorcet winners and Arrovian rationality*. *Mathematical Social Sciences*, 123, 45–58. <https://doi.org/10.48550/arXiv.1704.06304>
15. Hudry, O. (2012). *On the computation of median linear orders, of median complete preorders and of median weak orders*, *Mathematical Social Sciences*, 1, 2–10. <https://doi.org/10.1016/j.mathsocsci.2011.06.004>
16. Kemeny, J. (1959). *Mathematics without numbers*. *Daedalus*, 88, 577–591. URL: <https://www.jstor.org/stable/20026529> (viewed: 18.02.2026)
17. Sharir, M. (1981). *A Strong-Connectivity Algorithm and Its Applications in Data Flow Analysis*. *Computers & Mathematics with Applications*, 7, 67–72. [https://doi.org/10.1016/0898-1221\(81\)90008-0](https://doi.org/10.1016/0898-1221(81)90008-0)
18. Tarjan, R.E. (1972). *Depth-first search and linear graph algorithms*. *SIAM Journal on Computing*, 1(2), 146–160. <http://dx.doi.org/10.1137/0201010>
19. Varol, Y.L., Rotem, D. (1981). *An algorithm to generate all topological sorting arrangements*. *The Computer Journal*, 24(1), 83–84. <https://doi.org/10.1093/comjnl/24.1.83>
20. Young, H.P. (1988). *Condorcet's Theory of Voting*. *American Political Science Review*, 82, 1231–1244. <https://doi.org/10.2307/1961757>

Информация об авторах

Виктор Николаевич Нефедов, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математической кибернетики, Московский авиационный институт (Национальный исследовательский университет) (МАИ), Москва, Российская Федерация, ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-6053-2066>, e-mail: nefedovvn54@yandex.ru

Владислава Сергеевна Силаева, студент, институт «Компьютерные науки и прикладная математика», Московский авиационный институт (Национальный исследовательский университет) (МАИ), Москва, Российская Федерация, ORCID: <https://orcid.org/0009-0007-3206-0234>, e-mail: VladaSilaeva@yandex.ru

Information about the authors

Viktor N. Nefedov, Candidate of Physico-Mathematical Sciences, Associate Professor of the Department of Mathematical Cybernetics, Moscow Aviation Institute (National Research University) (MAI), Moscow, Russian Federation, ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-6053-2066>, e-mail: nefedovvn54@yandex.ru

Vladislava S. Silaeva, Student, Institute of Computer Science and Applied Mathematics, Moscow Aviation Institute (National Research University) (MAI), Moscow, Russian Federation, ORCID: <https://orcid.org/0009-0007-3206-0234>, e-mail: VladaSilaeva@yandex.ru

Вклад авторов

Все авторы приняли участие в обсуждении результатов и согласовали окончательный текст рукописи.



Contribution of the authors

All authors participated in the discussion of the results and approved the final text of the manuscript.

Конфликт интересов

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Conflict of interest

The authors declare no conflict of interest.

Поступила в редакцию 15.02.2026

Поступила после рецензирования 20.02.2026

Принята к публикации 21.02.2026

Опубликована 31.03.2026

Received 2026.02.15

Revised 2026.02.20

Accepted 2026.02.21

Published 2026.03.31

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ | NUMERICAL METHODS

Научная статья | Original paper

УДК 519.6:004.8

Обзор современных методов обучения с подкреплением для решения задач оптимального управления динамическими системами

В.Н. Пановский

ФГБОУ ВО «Московский авиационный институт
(национальный исследовательский университет)»
Москва, Российская Федерация
✉ panovskiy.v@yandex.ru

Резюме

Контекст и актуальность. Задачи синтеза оптимального управления для нелинейных динамических систем с ограничениями и неопределённостями остаются вычислительно сложными, особенно в аэрокосмических приложениях. Обучение с подкреплением рассматривается как практический инструмент построения обратной связи и/или ускорения планирования, когда применение классических методов затруднено. **Цель.** Систематизировать классы алгоритмов для задач оптимального управления и выделить критерии выбора подхода под конкретную постановку. **Гипотеза.** Практическая применимость обеспечивается корректной постановкой и учётом требований к непрерывности управления, данным, безопасности и робастности; наиболее эффективны комбинированные решения. **Методы и материалы.** Выполнен обзор и сравнительный анализ семейств разных алгоритмов обучения с подкреплением. **Результаты.** Для непрерывного управления базовыми остаются actor–critic, а альтернативы повышают выборочную эффективность, но чувствительны к ошибкам модели и покрытия данных. **Выводы.** Наиболее перспективны гибридные архитектуры, сочетающие обучение с подкреплением с базовыми регуляторами и обеспечивающие контролируемое соблюдение ограничений. Выбор метода должен определяться не только качеством, но и безопасностью, робастностью и стоимостью вычислений.

Ключевые слова: обучение с подкреплением, теория управления, динамические системы, кибернетика



Для цитирования: Пановский, В.Н. (2026). Обзор современных методов обучения с подкреплением для решения задач оптимального управления динамическими системами. *Моделирование и анализ данных*, 16(1), 125—140. <https://doi.org/10.17759/mda.2026160108>

Overview of modern reinforcement learning methods for solving problems of optimal control of dynamical systems

V.N. Panovskiy

Moscow Aviation Institute, Moscow, Russian Federation

✉ panovskiy.v@yandex.ru

Abstract

Context and relevance. The tasks of synthesizing optimal control for nonlinear dynamic systems with constraints and uncertainties remain computationally challenging, especially in aerospace applications. Reinforcement learning is considered a practical tool for building feedback and/or accelerating planning when classical methods are difficult to apply. **Objective.** To systematize classes of algorithms for optimal control tasks and identify criteria for selecting an approach for a specific problem. **Hypothesis.** Practical applicability is ensured by correct formulation and consideration of requirements for control continuity, data, safety, and robustness; combined solutions are most effective. **Methods and materials.** A review and comparative analysis of families of different reinforcement learning algorithms was performed. **Results.** Actor-critic remains the basis for continuous control, while alternatives increase selective efficiency but are sensitive to model and data coverage errors. **Conclusions.** The most promising are hybrid architectures that combine reinforcement learning with basic controllers and ensure controlled compliance with constraints. The choice of method should be determined not only by quality, but also by safety, robustness, and computational cost.

Keywords: reinforcement learning, control theory, dynamical systems, cybernetics

For citation: Panovskiy, V.N. (2026). Overview of modern reinforcement learning methods for solving problems of optimal control of dynamical systems. *Modelling and Data Analysis*, 16(1), 125—140. (In Russ.). <https://doi.org/10.17759/mda.2026160108>

Введение

В современной теории управления и вычислительной математике достаточно большое внимание уделяется задаче синтеза (и численного построения) оптимального



управления динамическими системами, функционирующими при наличии неопределённостей и неполноты информации. Прикладная значимость подобных постановок особенно высока в задачах авиационной и ракетно-космической техники, где требуется строить управления, обеспечивающие стабилизацию, наведение, минимизацию времени/расхода ресурса и выполнение терминальных ограничений при сложной динамике и жёстких ограничениях на исполнительные органы. На этом фоне заметный интерес в последние годы вызывает применение методов обучения с подкреплением (reinforcement learning, RL) как альтернативы (или дополнения) к классическим подходам оптимального управления, прежде всего в ситуациях, когда математическая модель известна неполно, либо вычислительная стоимость решения слишком высока.

Обучение с подкреплением представляет собой класс методов машинного обучения, в которых агент, взаимодействуя со средой, последовательно выбирает действия и по наблюдаемым состояниям и скалярному сигналу вознаграждения обучается стратегии (политике) поведения, максимизирующей математическое ожидание накопленного (дисконтированного либо конечно горизонтного) выигрыша. Каноническая формализация опирается на марковский процесс принятия решений и тесно связана с идеями динамического программирования Беллмана, где оптимальная политика выражается через оптимальную функцию ценности (Bellman, 1957). Исторически становление RL как самостоятельного направления связывают с работами 1980-х годов по обучающемуся управлению и адаптивным элементам (Barto–Sutton–Anderson), далее — с развитием методов обучения по значениям (в частности, Q-learning) и градиентных методов поиска политики (семейство REINFORCE) (Barto, Sutton, Anderson, 1983). Новый этап начался с «глубокого» обучения с подкреплением, когда аппроксимация функций ценности/политики нейросетями позволила перейти к высокоразмерным наблюдениям и сложным нелинейным объектам; характерным ориентиром здесь стала работа по DQN, показавшая возможность обучения управлению непосредственно по сенсорным данным (Mnih et al., 2015).

Для задач непрерывного управления (типичных для динамических систем) в качестве де-факто стандартов вычислительного эксперимента и практической настройки часто рассматриваются методы семейства actor–critic: TRPO (Trust Region Policy Optimization) и PPO (Proximal Policy Optimization) как устойчивые on-policy схемы оптимизации политики и SAC (Soft Actor Critic) / TD3 (Twin Delayed DDPG) / DDPG (Deep Deterministic Policy Gradients) как off-policy методы, обеспечивающие более высокую выборочную эффективность на непрерывных действиях (Schulman et al., 2015). При этом значительная часть прикладных постановок задач оптимального управления естественным образом является ограниченной (по состояниям, управлениям, ресурсам, безопасным областям), что стимулировало развитие constrained RL (например, подход CPO (Constrained Policy Optimization) и дальнейшие вариации), ориентированных на явное соблюдение ограничений в процессе обучения и применения политики (Achiam et al., 2017). Важно подчеркнуть, что термин «State of the Art» в RL носит прикладной характер: в зависимости от класса задач (on-policy/off-policy, дискретные/непрерывные действия, наличие модели, требования к робастности



и безопасности) «лучшие» методы различаются, однако перечисленные семейства составляют основу современных прикладных решений и служат базой для многочисленных модификаций.

Перенос методов RL на задачи оптимального управления обычно выполняется через следующую концептуальную схему: динамическая система рассматривается как среда, вектор состояния (или наблюдения) формирует вход агента, управление интерпретируется как действие, а функционал качества — как суммарное вознаграждение. Таким образом, задача минимизации функционала оптимального управления приводится к задаче максимизации ожидаемой суммарной награды. При наличии точной модели и возможности генерировать траектории ключевым становится вопрос выбора:

- модель-свободное обучение (политика/ценность напрямую по данным),
- модель-ориентированные методы (обучение/уточнение модели и планирование по ней),
- гибридные схемы, где RL используется для адаптации параметров/стоимостей/приближений в связке с MPC (Model predictive control).

В частности, современная линия работ рассматривает RL как часть общего аппарата приближённого динамического программирования и связывает его с методами MPC и итеративной оптимизации в единой концептуальной рамке (Bertsekas, 2024). Отдельное направление составляют подходы, «встраивающие» физические априорные знания и ограничения (модели, инварианты, законы сохранения) в процесс обучения — как способ повысить выборочную эффективность и переносимость решений на реальный объект.

Практическая привлекательность RL для задач поиска оптимального управления особенно заметна на примерах сложных аэрокосмических постановок, где требуется строить управление в условиях неопределённостей и ограничений. Так, для задач стабилизации спутника и интеллектуального управления системой ориентации предложены различные варианты глубокого RL, демонстрирующие возможность формирования стабилизирующих стратегий при внешних возмущениях и неполной параметрической информации (Ma et al., 2018). Для задач оптимального по времени управления солнечным парусом (включая робастные постановки с неопределённостями оптических параметров и возмущениями) показано применение PPO-подобных алгоритмов для синтеза политики, сопоставляющей оптимальную ориентацию паруса текущему динамическому состоянию (Пантелеев, Пановский, 2016; Bianchi et al., 2025). Подобные результаты иллюстрируют общий тренд: RL используется либо как прямой генератор управления (политика как регулятор), либо как механизм ускорения/аппроксимации решения вложенной задачи оптимизации, возникающей в классических схемах планирования и управления (Bertsekas, 2024).

Одновременно с этим необходимо отметить ряд принципиальных вызовов, которые в значительной степени определяют текущую повестку исследований и практики применения RL к оптимальному управлению:

- для реальных динамических объектов сбор траекторий дорог и ограничен требованиями безопасности; следовательно, «чисто» модель-свободные методы



нередко оказываются неприемлемыми без симуляции, переноса обучения и/или использования модели (Naaraja et al., 2018),

- в классическом управлении устойчивость и ограничения задаются явно; в RL эти свойства не «появляются автоматически» и требуют специальных постановок (constrained RL, safe exploration, барьерные/штрафные функции, shield-подходы, комбинирование с MPC) (Achiam et al., 2017),
- политика, обученная в модели, может деградировать при несовпадении динамики, шумов и ограничений; практические решения используют доменную рандомизацию, робастные критерии, адаптацию и физически информированные ограничения
- для задач оптимального управления (особенно задач быстрогодействия с терминальными множествами) некорректная форма награды приводит к «нецелевому» поведению и трудной настройке; это одна из основных прикладных проблем при переходе от функционала к reward-сигналу,
- глубокие RL-алгоритмы чувствительны к гиперпараметрам, распределениям начальных условий и случайности; устойчивые схемы (PPO/SAC и др.) нивелируют эту зависимость, но не устраняют её полностью (Schulman et al., 2017).

Несмотря на описанные сложности, направление RL всё прочнее входит кибернетику и показывает отличные результаты, что делает это направление крайне перспективным для дальнейшего изучения. Далее в статье будут рассмотрены основные классы алгоритмов на базе обучения с подкреплением.

Модель-свободные методы по функциям ценности

Модель-свободные методы (где процесс обучения ведётся методом проб и ошибок без явного построения модели динамики) по функциям ценности (value-based) подходы опираются на принцип оптимальности и уравнение Беллмана (Bellman, 1957) и реализуют приближённое динамическое программирование: вместо явного решения уравнения Беллмана строится аппроксимация функции ценности $V(x)$ или функции действия-ценности $Q(x, u)$ после чего управление выбирается по правилу максимума/минимума. В задачах оптимального управления это означает, что при дискретизации времени и (часто) при дискретизации множества управлений U минимизация функционала приводится к вычислению функции ценности («cost-to-go» function) и выбору действия, оптимального в смысле ожидаемого будущего выигрыша (или стоимости).

Классический алгоритм Q-learning уточняет оценку Q по выборкам переходов (x, u, r, x') и в табличной постановке имеет строгие результаты сходимости. Для реальных динамических систем табличная схема быстро становится неприемлемой из-за роста размерности пространства состояний и требований к сетке. Поэтому используются аппроксимации (линейные и нелинейные), а также fitted-схемы, где аппроксиматор Q_θ подгоняется по «целевым» значениям функции Беллмана на батчах (пучках) траекторий (Sutton, Barto, 2018). Существенный практический прогресс связан с глубокими аппроксиматорами и инженерными приёмами стабилизации обучения.



Для прикладного управления показательная линия DQN (Deep Q Network): введение буфера воспроизведения и целевой сети позволяет частично снять неустойчивость, возникающую при сочетании аппроксимации и бутстрэпинга (Mnih et al., 2015). Далее появлялись модификации, повышающие качество и стабильность: Double DQN снижает переоценку действий, а распределительные варианты (distributional RL) моделируют не только математическое ожидание, но и распределение возврата. Однако даже при таких улучшениях ключевым ограничением остаётся необходимость работы с дискретным множеством действий: при переходе к непрерывному управлению требуется либо квантизация U , либо иной класс алгоритмов.

Достоинства:

- off-policy обучение позволяет многократно переиспользовать накопленные данные, что критично при дорогой симуляции,
- решение формируется через Q -функцию, что удобно при наличии дискретных режимов и переключений (гибридные системы),
- при умеренной квантизации управления метод даёт прямой механизм получения регулятора.

Недостатки:

- квантизация управления быстро становится вычислительно неприемлемой и ухудшает точность,
- устойчивость обучения чувствительна к масштабу вознаграждений и распределению стартовых состояний,
- ограничительные условия (на состояние и управление) не соблюдаются автоматически и требуют дополнительных средств контроля.

С практической точки зрения value-based методы целесообразно рассматривать прежде всего в задачах, где действие естественно дискретно (выбор режима, конфигурации, последовательности операций), либо когда допускается ограниченная квантизация управляющего воздействия. В непрерывных задачах оптимального управления они чаще выступают как компонент комбинированных схем, дополняющих непрерывный регулятор дискретным модулем принятия решений.

Градиентные методы оптимизации политики

В отличие от value-based подходов, методы оптимизации политики (policy gradient, on-policy) параметризуют управление непосредственно как $u = \pi_\theta(x)$ (или стохастически $u \sim \pi_\theta(\cdot|x)$) и оптимизируют параметры θ по градиенту ожидаемого суммарного вознаграждения. Отправной точкой служит алгоритм REINFORCE, где градиент цели выражается через логарифмическую производную вероятности действий (Williams, 1992). Для задач оптимального управления эта постановка удобна тем, что работа ведётся сразу с непрерывными управляющими воздействиями (через непрерывные распределения или параметризацию детерминированного регулятора), а ограничения на управление могут быть учтены на уровне параметризации (насыщение, проекция, ограничение дисперсии и т.п.).



Ключевой практической проблемой policy gradient является большая дисперсия оценок градиента и, как следствие, неустойчивость обучения. Типичный выход — использование базисной функции (baseline) и построение оценки преимущества $A^\pi(x, u)$, что приводит к семейству actor–critic (Sutton, Barto, 2018). Для снижения дисперсии дополнительно применяют методы многошаговой оценки и сглаживания, например, GAE (Generalized Advantage Estimation), позволяющий управлять компромиссом «смещение–дисперсия» в оценке преимущества. В контексте оптимального управления это особенно важно при длинных горизонтах и при разреженных наградах (терминальные требования), когда «сырая» оценка градиента быстро деградирует.

Среди современных on-policy методов наиболее распространены TRPO и PPO. TRPO определяет шаг обновления как задачу максимизации суррогатной цели при ограничении на KL-расхождение (дивергенция Кульбака–Лейблера) между новой и старой политикой, тем самым контролируя «размер» обновления и снижая риск деградации. PPO заменяет жёсткое ограничение на более простую клиппированную суррогатную функцию, что делает алгоритм существенно проще в реализации и, как правило, достаточно устойчивым на широком классе задач непрерывного управления (Schulman et al., 2017). Для инженерных постановок это означает наличие относительно «надёжной» базовой процедуры, которую можно использовать как для обучения регулятора с нуля, так и для доводки политики, полученной иным способом.

Достоинства:

- естественная работа с непрерывными управлениями и параметрическими ограничениями на u ,
- относительно высокая устойчивость современных on-policy схем (особенно PPO) при корректной нормировке сигналов,
- возможность прямого обучения «регулятора» без явного решения уравнений, следующих из условий оптимальности.

Недостатки:

- низкая выборочная эффективность: данные, полученные старой политикой, ограничено пригодны для обучения новой,
- чувствительность к форме вознаграждения и к распределению стартовых состояний,
- отсутствие встроенных гарантий соблюдения ограничений и устойчивости без специальных модификаций.

В результате on-policy policy gradient методы целесообразно использовать либо при наличии быстрого и достоверного симулятора, либо как этап «дошлифовки» политики, предварительно полученной иным способом (модель-ориентированным планированием или имитационным обучением) (Sutton, Barto, 2018).

Actor–Critic для непрерывного управления

Для большинства задач оптимального управления динамическими системами характерны кусочно-непрерывные управляющие воздействия. Поэтому значительная



часть прикладных исследований опирается на actor–critic методы, где «актор» задаёт политику $u = \pi_\theta(x)$, а «критик» аппроксимирует $Q_\phi(x, u)$ или $V_\phi(x)$ и используется для построения направления улучшения политики (Sutton, Barto, 2018). С помощью θ и ϕ задаются параметры актора и критика соответственно. В off-policy варианте траектории могут собираться не текущей политикой, а некоторым поведением (behavior policy); переходы (x, u, r, x') сохраняются в replay-буфере и многократно переиспользуются при обучении, что повышает выборочную эффективность.

Наиболее известной линией является детерминированный градиент политики: DPG и его глубокая реализация DDPG (Deep Deterministic Policy Gradients), где политика детерминирована, а градиент вычисляется через критик (Lillicrap et al., 2016). Детерминированная политика удобна в непрерывном управлении, однако практическая реализация чувствительна к ошибкам аппроксимации критика и к корреляции данных. TD3 (Twin Delayed DDPG) вводит два критика, задержку обновления актора и сглаживание целевого действия, что снижает переоценку Q -функции и повышает устойчивость. Альтернативой является стохастический подход, где оптимизируется не только ожидаемая награда, но и энтропия политики; наиболее распространённый представитель — SAC (Haarnoja et al., 2018).

Достоинства:

- высокая выборочная эффективность за счёт off-policy данных и replay-буфера,
- естественная работа с непрерывным управлением без дискретизации U ,
- возможность обучения на смешанных наборах траекторий, полученных при разных возмущениях и начальных условиях, что полезно при построении робастных стратегий.

Недостатки:

- качество политики тесно связано с качеством критика; при ошибках аппроксимации возможны переоценка Q и деградация обучения,
- чувствительность к нормировкам, масштабу вознаграждений, параметрам исследовательского шума и распределению стартовых состояний,
- ограничения на состояние/управление не обеспечиваются автоматически и требуют специальных средств (проекции, барьерные конструкции, constrained RL).

С практической точки зрения полезно различать детерминированные и стохастические политики. Детерминированные методы (DDPG/TD3) нередко дают высокое качество при тонкой настройке, но могут быть менее робастны к смене условий из-за «жёсткости» отображения $x \rightarrow u$.

Стохастические методы (SAC) обычно демонстрируют более корректное исследование и большую устойчивость к разреженным наградам (терминальные условия, минимальное время), поскольку энтропийная регуляризация препятствует преждевременному «схлопыванию» политики в узкую область управлений.

В результате off-policy actor–critic методы представляют собой один из наиболее практичных инструментов синтеза управления в высокоразмерных системах при наличии симулятора и возможности накопления данных.



Модель-ориентированное обучение с подкреплением

Модель-ориентированные методы исходят из идеи: если удаётся построить (или уточнить) модель динамики \hat{f} и, при необходимости, модель вознаграждения \hat{r} , то синтез управления можно выполнять как задачу планирования по модели. Для оптимального управления это естественно, поскольку классические методы (динамическое программирование, MPC) опираются на модель. Отличие model-based RL состоит в том, что модель может быть неизвестна полностью, и тогда она восстанавливается и уточняется по данным взаимодействия агента со средой (или с имитационной моделью).

Ранним примером data-efficient model-based поиска политики служит подход PILCO, использующий вероятностную модель динамики и оптимизацию политики по ожидаемой стоимости (Sutton, Barto, 2018).

На практике распространены два типовых сценария:

- **Обучение модели + MPC/планирование.** Сначала по данным строится прогнозная модель переходов (часто нейросетевая или ансамблевая), затем на каждом шаге решается короткогоризонтная задача оптимизации (shooting, CEM (Cross-Entropy Method), iLQR (iterative Linear Quadratic Regulator) и др.), а в контуре управления используется «уходящий горизонт» (receding horizon). Характерные представители этой линии — PETS (Probabilistic Ensembles with Trajectory Sampling) и родственные ансамблевые схемы, где неопределённость модели учитывается при планировании (Chua et al., 2018)
- **Обучение политики по синтетическим траекториям.** Модель используется для генерации «мнимых» переходов (Дупа-подобная идея), после чего политика обучается как в model-free RL, но на расширенном датасете. Важный практический момент — ограничение длины синтетических роллаутов (симуляций), чтобы не накапливать ошибку модели.

Классический риск model-based RL — смещение из-за ошибки модели (model bias): даже малая систематическая ошибка в \hat{f} может приводить к накоплению ошибки на горизонте и, как следствие, к неверному выбору управления. В инженерных задачах это проявляется особенно резко при сильной нелинейности и при наличии «опасных» областей фазового пространства. Типичный ответ — ансамбли моделей и явный учёт неопределённости, а также ограничение горизонта синтетического моделирования. В MBPO (Model-Based Policy Optimization) эта идея реализована как генерация коротких роллаутов модели с последующим off-policy обучением, что обеспечивает хороший компромисс между выборочной эффективностью и смещением.

Достоинства:

- высокая выборочная эффективность и возможность обучения при малом числе реальных траекторий,
- более прямое включение ограничений и терминальных условий через планировщик/MPC,
- естественная возможность использовать структурные знания о физике (параметрические модели + обучаемые поправки).



Недостатки:

- риск смещения из-за ошибки модели и деградации при переносе,
- необходимость решать вложенную задачу оптимизации в реальном времени, что повышает вычислительную сложность,
- чувствительность к параметризации модели и к качеству датасета.

В задачах поиска оптимального управления динамическими системами model-based RL часто выступает как компромисс между «чистым» RL и классическим MPC: RL обеспечивает адаптацию модели/стоимости по данным, а MPC даёт контролируемое поведение и удобный механизм учёта ограничений. При наличии грубой физической модели эффективны гибриды вида $\dot{x} = f(x, u, p) + \Delta_\theta(x, u)$, где Δ_θ обучается по данным и компенсирует немоделируемые эффекты (Sutton, Barto, 2018).

Обучение по фиксированному датасету

В ряде инженерных приложений (и особенно в аэрокосмических задачах) онлайн-эксплорация недопустима: ошибки управления могут приводить к выходу из допустимой области, повреждению аппарата или срыву миссии. В таких условиях естественным становится offline (batch) RL, где обучение выполняется по фиксированному набору траекторий, а взаимодействие со средой в процессе обучения отсутствует. Датасет может быть получен либо по результатам эксплуатации, либо в симуляции, либо с помощью классических методов оптимального управления (например, методами прямой дискретизации, принципом максимума, MPC), что позволяет получить богатый набор квазиоптимальных траекторий.

Ключевая трудность offline RL — распределительный сдвиг: обучаемая политика может предлагать действия, которые в датасете практически не встречались, и тогда оценка Q становится недостоверной (ошибка экстраполяции). В динамических системах это приводит к особенно опасным эффектам: небольшая ошибка оценки на одном шаге может «увести» систему в область, где данные отсутствуют, после чего качество управления резко деградирует. Поэтому большинство успешных offline-алгоритмов вводит явные ограничения на область действий, в которой допускается улучшение политики, либо делает оценку Q консервативной по отношению к действиям вне поддержки данных.

Типичные представители: BCQ (Batch-Constrained Deep Q-Learning) ограничивает действия вблизи поведения, представленного в датасете (через генеративную модель действий) (Fujimoto, Meger, Precup, 2019); BEAR (Bootstrapping Error Accumulation Reduction) и родственные методы используют регуляризацию по расхождению между обучаемой и поведенческой политикой (Kumar et al., 2019); CQL (Conservative Q-Learning) добавляет консервативный член, занижающий оценки Q для действий вне поддержки данных, тем самым снижая риск переоценки (Kumar et al., 2020). Более поздние методы (например, IQL) строят обновления, устойчивые к неточностям оценки поведения, что упрощает применение в задачах непрерывного управления (Kostrikov, Nair, Levine, 2022).



Отдельного упоминания требует проблема оценки качества политики без запуска в реальной среде (off-policy evaluation). Классические оценки на основе важностного взвешивания теоретически корректны, но на длинных горизонтах обладают большой дисперсией; на практике применяются смешанные (doubly-robust) оценки и модельные аппроксимации. Для задач оптимального управления это означает необходимость иметь отдельный стенд валидации (симулятор/цифровой двойник) и контролировать «область применимости» обучаемой политики

Достоинства:

- отсутствие необходимости опасной онлайн-эксплорации,
- возможность использовать «наследованные» данные: траектории, полученные классическими оптимальными регуляторами, демонстрации экспертов, результаты численного решения задач оптимального управления,
- удобная интеграция с инженерным жизненным циклом: обучение → верификация на тестовых сценариях → внедрение.

Недостатки:

- высокая зависимость результата от полноты и качества датасета,
- сложность корректной оценки качества без дополнительных предположений,
- риск деградации при выходе за область, покрытую данными, особенно при сильных нелинейностях и разреженных терминальных наградах.

В задачах поиска оптимального управления offline RL часто выступает как «мост» между классическими методами и глубоким RL: сначала формируется датасет траекторий (например, методами оптимального управления или MPC), затем обучается политика обратной связи, обеспечивающая быстрый онлайн-расчёт управления и допускающая формальную верификацию на ансамбле тестовых сценариев.

Робастное RL и работа с неопределённостями

Даже при корректном алгоритме обучения возникает типичная инженерная проблема: политика, обученная в одном наборе условий, деградирует при изменении параметров объекта, возмущений и шумов измерений. Для задач оптимального управления это критично, поскольку реальная динамика почти всегда отличается от расчётной. Робастное RL рассматривает различные модели неопределённости и стремится синтезировать политику, устойчивую к вариациям среды.

С теоретической точки зрения естественной рамкой является robust MDP (Markov Decision Process), где переходы принадлежат неопределённому множеству, а оптимизация проводится по «наихудшему случаю» или по заданному распределению неопределённостей. Для непрерывных динамических систем аналогичная идея реализуется через случайные параметры модели (масса, моменты инерции, коэффициенты сопротивления и т.п.) и внешние возмущения. На практике наиболее распространена domain randomization: в процессе обучения параметры среды рандомизируются в заданном диапазоне, а политика оптимизируется по среднему качеству, что повышает переносимость на реальные условия (Tobin et al., 2017).



Более «жесткие» варианты робастификации используют $\min\max$ -постановки и адверсариальные (намеренные) возмущения. В EPOpt обучение проводится на подмножестве наиболее «тяжелых» сценариев (нижний квантиль по награде), что приближает критерий плохого случая и повышает надёжность. В адверсариальном RL вводится внешний агент-возмущатель, ухудшающий динамику, а обучаемая политика должна компенсировать худшие воздействия (Pinto et al., 2017). Отдельный класс составляют риск-чувствительные критерии, позволяющие управлять «хвостами» распределения качества, что важно для миссий с высокой ценой редких отказов.

С инженерной точки зрения полезны и более прикладные приёмы:

- обучение ансамбля политик и выбор управления по принципу «согласия» (или с учётом дисперсии),
- совмещение робастного обучения с идентификацией параметров «в контуре» и адаптацией,
- введение в наблюдения явных оценок параметров (масса, момент инерции) или скрытых переменных, что переводит часть неопределённости в задачу оценивания состояния.

Эти приёмы не дают строгих гарантий, но часто существенно уменьшают деградацию качества.

Достоинства:

- повышение переносимости и устойчивости к дрейфам параметров,
- возможность учёта неопределённостей без явного вывода робастных условий устойчивости,
- совместимость с базовыми RL-алгоритмами (PPO/SAC/TD3) как «надстройка».

Недостатки:

- рост вычислительных затрат: для покрытия диапазона параметров требуется существенно больше траекторий,
- риск излишней консервативности, когда политика теряет качество на номинальной модели,
- отсутствие гарантий, если реальные неопределённости выходят за обучающий диапазон.

В целом, робастные надстройки следует рассматривать как обязательный элемент практического применения RL в управлении сложными объектами, где модель неизбежно является приближённой.

Гибридные схемы RL

Практика применения RL к задачам оптимального управления показывает, что «чистые» схемы обучения редко используются в изоляции. Гораздо чаще эффективными оказываются гибридные подходы, в которых RL-модуль встраивается в классическую архитектуру управления и решает одну из вспомогательных задач: уточнение модели, настройка критерия, формирование опорного управления,



компенсация немоделируемых эффектов. Такая гибридизация снижает риски обучения и упрощает верификацию.

Один из наиболее распространённых вариантов — связка RL и MPC. Здесь MPC обеспечивает явный учёт ограничений и предсказуемое поведение, а RL используется для:

- обучения модели динамики,
- приближённого вычисления стоимости-к-идти/терминального функционала,
- настройки весов в критерии,
- ускорения решения вложенной оптимизационной задачи (например, через тёплый старт или параметризацию управляющего профиля) (Maune, 2014).

В прикладном смысле MPC выступает «страховкой», ограничивающей действия обучаемого модуля внутри допустимой области по состояниям и управлениям.

Второй характерный класс — residual RL, когда к базовому (часто линейному или MPC) регулятору добавляется обучаемая поправка: $u = u_{base}(x) + \Delta u_{\theta}(x)$. Это позволяет использовать известные свойства базового регулятора (устойчивость в окрестности, ограниченность управления), а RL-модуль компенсирует немоделируемые нелинейности и возмущения. Аналогично, RL может применяться для адаптивной коррекции параметров регулятора или фильтра состояния, не заменяя всю систему управления.

Третья важная линия — связка имитационного обучения и RL. При наличии траекторий оптимального управления (полученных численным решением или экспертом) можно обучить политику методом поведенческого клонирования, а затем улучшить её RL-алгоритмом. Для снижения накопления ошибок используется DAgger-подобная схема агрегирования данных (Ross, Gordon, Bagnell, 2011), а для обучения по демонстрациям без явной модели поведения — методы типа GAIL (Generative Adversarial Imitation Learning) (Ho, Ermon, 2016). Для задач оптимального управления это особенно удобно: демонстрации позволяют быстро «подвести» политику к области приемлемого поведения, после чего RL уже оптимизирует тонкие характеристики (минимизация времени, расхода ресурса и т.п.).

Достоинства:

- повышение надёжности и предсказуемости за счёт базового регулятора/MPC,
- снижение требований к данным и ускорение обучения,
- более простая инженерная валидация (можно тестировать RL-модуль как надстройку).

Недостатки:

- необходимость аккуратного согласования уровней (чтобы RL-поправка не разрушала свойства базовой системы),
- рост сложности программной реализации,
- риск «замыкания» на узкой области, заданной базовым регулятором, если требуется принципиально иное поведение.

В результате гибридные схемы представляются наиболее перспективными для реальных задач оптимального управления, поскольку позволяют сочетать вычислительную гибкость RL с формальными и проверяемыми элементами классической теории управления.



Заключение

Рассмотренные классы методов обучения с подкреплением формируют достаточно целостный инструментарий для решения прикладных задач поиска оптимального управления динамическими системами — от синтеза регуляторов с обратной связью до построения стратегий планирования при сложных терминальных условиях и жёстких ограничениях. Модель-свободные подходы (value-based, on-policy и off-policy actor-critic) позволяют получать управляющие политики без явного решения уравнений, следующих из условий оптимальности и потому особенно привлекательны при труднодоступных градиентах и сложной нелинейной динамике. Вместе с тем практика показывает, что ключевые инженерные ограничения — безопасность, робастность и переносимость — требуют специальных надстроек (constrained/safe RL, робастное обучение, offline-схемы) и тщательной верификации на ансамбле сценариев. Наиболее перспективным направлением для реальных систем управления представляются гибридные архитектуры, сочетающие RL с MPC и классическими регуляторами и подходами (Пантелеев, Бортакровский, 2016): они позволяют сохранить проверяемые элементы теории управления и одновременно использовать преимущества обучения по данным при наличии неопределённостей и немоделируемых эффектов.

Список источников / References

1. Пантелеев, А.В., Пановский, В.Н. (2016). Прикладное применение интервального метода взрывов для поиска оптимального программного управления солнечным парусом. *Вестник НПО им. С.А. Лавочкина*, 4, 110—117.
Panteleev, A.V., Panovskiy, V.N. (2016). Application of interval explosion method for generation of optimal program control of solar sail. *S.A. Lavochkin NGO Bulletin*, 4, 110—117 (In Russ).
2. Пантелеев, А.В., Бортакровский, А.С. (2016) Теория управления в примерах и задачах. *ИИ-ФРА-М, Москва*.
3. Panteleev, A.V., Bortakovskiy, A.S. (2016) Control Theory in Examples and Problems. *INFRA-M, Moscow*. (In Russ).
4. Achiam J. et al. (2017). Constrained Policy Optimization. <https://doi.org/10.48550/arXiv.1705.10528>
5. Barto, A.G., Sutton, R.S., Anderson, C.W. (1983). Neuronlike adaptive elements that can solve difficult learning control problems. *IEEE Trans. SMC*. <https://doi.org/10.1109/TSMC.1983.6313077>
6. Bellman, R. (1957). *Dynamic Programming*. Princeton University Press.
7. Bertsekas, D.P. (2024). *Model Predictive Control and Reinforcement Learning*. <https://doi.org/10.48550/arXiv.2406.00592>
8. Bianchi, C. et al. (2025) Robust solar sail trajectories using proximal policy optimization. <https://doi.org/10.1016/j.actaastro.2024.10.065>
9. Chua, K. et al. (2018) Deep Reinforcement Learning in a Handful of Trials using Probabilistic Dynamics Models. *NeurIPS*. <https://doi.org/10.48550/arXiv.1805.12114>



10. Fujimoto, S., Meger, D., Precup, D. (2019). Off-Policy Deep Reinforcement Learning without Exploration. *ICML*. <https://doi.org/10.48550/arXiv.1812.02900>
11. Haarnoja, T. et al. (2018) Soft Actor-Critic: Off-Policy Maximum Entropy Deep Reinforcement Learning with a Stochastic Actor. <https://doi.org/10.48550/arXiv.1801.01290>
12. Ho, J., Ermon, S. (2016). Generative Adversarial Imitation Learning. *NeurIPS*. <https://doi.org/10.48550/arXiv.1606.03476>
13. Kostrikov, I., Nair, A., Levine, S. (2022). Offline Reinforcement Learning with Implicit Q-Learning. *ICLR*. <https://doi.org/10.48550/arXiv.2110.06169>
14. Kumar, A. et al. (2019). Stabilizing Off-Policy Q-Learning via Bootstrapping Error Reduction. *NeurIPS*. <https://doi.org/10.48550/arXiv.1906.00949>
15. Kumar, A. et al. (2020). Conservative Q-Learning for Offline Reinforcement Learning. *NeurIPS*. <https://doi.org/10.48550/arXiv.2006.04779>
16. Lillicrap, T.P. et al. (2016). Continuous control with deep reinforcement learning. *ICLR*. <https://doi.org/10.48550/arXiv.1509.02971>
17. Ma, Z. et al. (2018). Reinforcement Learning-Based Satellite Attitude Stabilization. <https://doi.org/10.3390/s18124331>
18. Mayne, D.Q. (2014) Model Predictive Control: Recent Developments and Future Promise. *Automatica*. <https://doi.org/10.1016/j.automatica.2014.10.128>
19. Mnih, V. et al. (2015). Human-level control through deep reinforcement learning. *Nature*. <https://doi.org/10.1038/nature14236>
20. Pinto, L. et al. (2017). Robust Adversarial Reinforcement Learning. *ICML*. <https://doi.org/10.48550/arXiv.1703.02702>
21. Ross, S., Gordon, G., Bagnell, D. (2011) A Reduction of Imitation Learning and Structured Prediction to No-Regret Online Learning. *AISTATS*. <https://doi.org/10.48550/arXiv.1011.0686>
22. Schulman, J. et al. (2015) Trust Region Policy Optimization. <https://doi.org/10.48550/arXiv.1502.05477>
23. Schulman, J. et al. (2017). Proximal Policy Optimization Algorithms. <https://doi.org/10.48550/arXiv.1707.06347>
24. Sutton, R.S., Barto A.G. (2018). Reinforcement Learning: An Introduction (2nd ed.). *MIT Press*
25. Tobin, J. et al. (2017). Domain Randomization for Transferring Deep Neural Networks from Simulation to the Real World. *IROS*. <https://doi.org/10.48550/arXiv.1703.06907>
26. Williams, R.J. (1992). Simple statistical gradient-following algorithms for connectionist reinforcement learning.

Информация об авторах

Валентин Николаевич Пановский, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры № 805 «Математическая кибернетика», институт № 8 «Компьютерные науки и прикладная математика», ФГБОУ ВО «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)», Москва, Российская Федерация, ORCID: <https://orcid.org/0009-0007-1708-8984>, e-mail: panovskiy.v@yandex.ru



Information about the authors

Valentin N. Panovskiy, Candidate of Sciences (Physics & Math), assistant professor of department № 805, «Mathematical Cybernetics», Institute № 8 «Computer Science and Applied Mathematics», Moscow Aviation Institute (National Research University), Moscow, Russia, ORCID: <https://orcid.org/0009-0007-1708-8984>, e-mail: panovskiy.v@yandex.ru

Вклад авторов

Пановский В.Н. — идеи исследования; детализация и структурирование обзора, написание и оформление рукописи.

Contribution of the authors

Valentin N. Panovskiy — research ideas; detailing and structuring the review, writing and formatting the manuscript.

Конфликт интересов

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Conflict of interest

The authors declare no conflict of interest.

Поступила в редакцию 15.02.2026

Поступила после рецензирования 20.02.2026

Принята к публикации 21.02.2026

Опубликована 31.03.2026

Received 2026.02.15

Revised 2026.02.20

Accepted 2026.02.21

Published 2026.03.31

Научная статья | Original paper

УДК 656.7.08:004.942

Современные подходы к моделированию деятельности пилотов гражданского воздушного судна

И.А. Махортов

Московский государственный психолого-педагогический университет
г. Москва, Российская Федерация
Государственный научно-исследовательский институт авиационных систем
г. Москва, Российская Федерация
✉ inok546@yandex.ru

Резюме

Статья посвящена обзору современных математических подходов к моделированию деятельности пилота гражданского воздушного судна, направленных на повышение безопасности полётов, эффективности подготовки экипажей и обоснование проектных решений в области человеко-машинного интерфейса кабины. Рассматриваются три взаимодополняющие модели: модель целевой деятельности, описывающая непрерывные управляющие воздействия пилота; модель сопутствующей деятельности, представляющая структуру действий в виде марковских процессов с применением квантового спектрального анализа; а также модель деятельности пилота согласно предписаниям Руководства по лётной эксплуатации, ориентированная на процедурные сценарии и анализ ошибок. Показано, что совместное использование данных моделей позволяет формализовать действия пилота на различных этапах полёта, диагностировать уровень подготовки и психофизиологическое состояние, а также создавать виртуальных пилотов и интеллектуальные системы поддержки экипажа.

Ключевые слова: человеческий фактор, виртуальный пилот, синтез управления, моделирование деятельности пилота, безопасность полётов, человеко-машинный интерфейс, марковские модели

Для цитирования: Махортов, И.А. (2026). Современные подходы к моделированию деятельности пилотов гражданского воздушного судна. *Моделирование и анализ данных*, 16(1), 141—156. <https://doi.org/10.17759/mda.2026160109>



Modern approaches to modeling the activities of civil aircraft pilots

I.A. Makhortov

Moscow State University of Psychology and Education, Moscow, Russian Federation
State Research Institute of Aviation Systems, Moscow, Russian Federation

✉ inok546@yandex.ru

Abstract

The paper presents an overview of modern mathematical approaches to modeling pilot activity in civil aircraft, aimed at improving flight safety, crew training efficiency, and the design of cockpit human–machine interfaces. Three complementary models are considered: a goal-oriented activity model describing continuous control inputs of the pilot; a supporting activity model representing the structure of actions as Markov processes with the use of quantum spectral analysis; and a pilot activity model based on Flight Manual procedures, focused on procedural scenarios and error analysis. It is shown that the combined use of these models enables formalization of pilot behavior at different flight phases, diagnosis of training level and psychophysiological state, and the development of virtual pilots and intelligent crew-support systems.

Keywords: human factors, virtual pilot, control synthesis, pilot activity modeling, flight safety, human-machine interface, Markov models

For citation: Makhortov, I.A., (2026). Modern approaches to modeling the activities of civil aircraft pilots. *Modelling and Data Analysis*, 16(1), 141—156. (In Russ.). <https://doi.org/10.17759/mda.2026160109>

Введение

Исследования в области моделирования деятельности пилота гражданского самолета играют ключевую роль в повышении безопасности и эффективности управления воздушными судами. Современные технологии требуют точных моделей, которые отражают деятельность пилота в различных условиях полета.

Основные методы моделирования деятельности оператора в отечественной авиационной школе включают в себя:

1. аналитические методы, такие как алгоритмический и структурный анализ деятельности (Зинченко, Мунипов, 1979), направленные на построение формализованных моделей-нормативов;
2. обобщенный структурный метод Губинского, представляющий деятельность в виде универсальных функционально-логических схем взаимодействия оператора с информационной моделью и органами управления (Ломов, 1966);



3. экспериментальные методы на тренажерах и летающих лабораториях для изучения навыков и функциональных состояний в условиях, близких к реальным (Медведев, 1982).

Представленные качественные и структурные методы, включая мощный аппарат схем Губинского, закладывают необходимую теоретическую и методологическую основу. Однако для получения количественных прогнозов, оценки точных временных и вероятностных характеристик надежности системы, а также для анализа динамики сложных, нелинейных процессов в деятельности экипажа требуется переход на более высокий уровень формализации. Для достижения более точного и верифицируемого результата необходимо применение математического имитационного моделирования, позволяющего интегрировать эргономические и психофизиологические знания, в том числе представленные в структурных схемах, в динамические компьютерные модели. Принципам, подходам и конкретным примерам построения таких имитационных моделей будет посвящена следующая статья.

Современные технологии требуют точных моделей, которые отражают деятельность пилота в различных условиях полета.

Несмотря на автоматизацию, значительная часть авиационных происшествий происходит при ручном управлении самолетом. Исследования показывают, что на каждый час полета приходится всего пять минут ручного пилотирования, во время которых происходит 67% аварий и инцидентов (Механтьева, Масальтин, Лизнев, 2017). Это подчеркивает необходимость моделей, способных предсказать и предотвратить ошибки пилотов в критических ситуациях.

Современные симуляторы и тренажеры, основанные на математических моделях, эффективно обучают пилотов, имитируя различные сценарии полетов. Такие тренировки улучшают навыки принятия решений в стрессовых и нестандартных ситуациях, что повышает общий уровень безопасности и профессиональной подготовки.

Анализ взаимодействия пилотов с бортовыми системами позволяет выявить наиболее эффективные конфигурации человеко-машинного интерфейса (ЧМИ) (Грешников и др., 2024; Куравский и др., 2025). Это способствует улучшению эргономики кабины, снижению нагрузки на пилотов и повышению эффективности их работы.

Математические модели деятельности пилота служат основой для создания «виртуальных пилотов» и интеллектуальных помощников, которые выполняют задачи пилотирования в автоматическом режиме или помогают пилоту в управлении самолетом (Грешников и др., 2024; Куравский и др., 2024)

Постоянное усложнение воздушных судов и появление новых типов авиационных миссий требуют гибких и адаптивных моделей, способных учитывать изменения в эксплуатации и интеграцию новых технологий.

Исследования в области моделирования действий пилота направлены на снижение рисков, повышение безопасности и эффективности полетов, а также на улучшение подготовки и работы пилотов. Внедрение таких моделей в авиационную практику способствует созданию более надежной и безопасной авиационной индустрии.



Цель данной статьи заключается в предоставлении обзора трех основных подходов к математическому моделированию действий пилота гражданского самолета. Рассматриваются следующие модели:

- **Математическая модель целевой деятельности пилота:** Эта модель учитывает конкретное содержание непрерывных воздействий пилотов на органы управления, обеспечивая воздействие на управляющие поверхности и двигатель.
- **Математическая модель сопутствующей деятельности:** Модель представляет деятельность пилота через матрицы вероятностей переходов между элементарными операциями, включая использование квантовых представлений для анализа и диагностики.
- **Математическая модель деятельности пилота согласно предписаниям Руководства по лётной эксплуатации (РЛЭ):** Эта модель учитывает дискретные управляющие воздействия на бортовые системы и индикацию, моделируя поведение пилота в соответствии с инструкциями РЛЭ.
Основными задачами статьи являются:
- **Описание основных характеристик каждой модели:** Рассмотрение ключевых особенностей моделей, их структурных компонентов и применяемых математических методов.
- **Анализ применения моделей в практике:** Примеры использования каждой модели для решения конкретных задач, таких как исследование особенностей пилотирования, профессиональная подготовка экипажа, оценка взаимодействия с бортовыми системами и диагностика психофизиологических состояний.
- **Сравнительный анализ моделей:** Оценка преимуществ и недостатков каждой модели по критериям точности, адаптивности, вычислительной сложности и применимости в реальных условиях эксплуатации.
- **Рекомендации по выбору модели:** Предоставление рекомендаций по выбору наиболее подходящей модели в зависимости от специфики решаемой задачи, таких как обучение пилотов, разработка ЧМИ, обеспечение безопасности полетов и создание автоматизированных систем управления.

Математическая модель целевой деятельности пилота

Назначение и общая идея модели

Математическая модель целевой деятельности пилота предназначена для анализа и исследования действий, непосредственно связанных с управлением воздушным судном (ВС) (Kuravsky et al., 2023), то есть непрерывных управляющих воздействий на органы управления, приводящих к изменению состояния ВС. В отличие от моделей, описывающих сопутствующую или процедурную деятельность, здесь в центре внимания находятся именно динамика «состояние–управление» и то, как пилот формирует управляющие воздействия для достижения заданной цели полёта или выполнения конкретного манёвра.



Модель представляет собой многомерную нестационарную матричную модель движения и управления с дискретным временем, построенную по данным, собранным в реальных условиях полёта и/или на тренажёрах (Kuravsky et al., 2023). Нестационарность позволяет учитывать изменение динамических свойств системы и стратегий управления во времени, а многомерность — работать с расширенными векторами состояния и управления, включающими как кинематические и динамические параметры, так и положения органов управления.

Основное назначение модели:

- формализовать целевую деятельность пилота при выполнении манёвров (в том числе в сложных и нештатных режимах);
- обеспечить основу для идентификации паттернов управления (траекторий «состояние–управление») пилотов различной квалификации;
- служить ядром для задач синтеза управления по эталонным паттернам, включая построение виртуального пилота и элементов автоматизации.

Идентификация параметров модели

Идентификация параметров модели осуществляется на основе массивов эмпирических данных, полученных при выполнении типовых и специальных манёвров опытными пилотами на стендах и тренажёрах. Для каждого типа манёвра формируются выборки фрагментов полёта, включающие как участки с практически свободным движением при малых или известных управляющих воздействиях, так и участки активного пилотирования. На участках с минимальным управлением восстанавливаются матричные операторы, описывающие собственную динамику воздушного судна, тогда как на участках активного управления уточняются операторы, отвечающие за влияние управляющих воздействий пилота. Переопределённость задач идентификации, когда число наблюдений существенно превосходит число оцениваемых параметров, используется для повышения устойчивости и надёжности получаемых оценок. Особое внимание уделяется детальному представлению непрерывных воздействий пилота: регистрация отклонений рулей высоты, направления, элеронов и других управляющих поверхностей, а также изменения режимов работы двигателя позволяет явно учитывать реальное содержание действий экипажа и связывать их с наблюдаемой динамикой состояния воздушного судна.

Синтез управления по образцу

На базе идентифицированной модели реализуется механизм синтеза управления по образцу (по паттерну), в рамках которого эталонные траектории движения и соответствующие им управляющие воздействия, полученные от опытных экипажей, используются как целевые образцы поведения. Для каждого рассматриваемого манёвра формируется библиотека эталонных паттернов, представляющих корректное выполнение задания в различных условиях. Инструментальные средства анализа типа ISFA обеспечивают распознавание текущего манёвра по параметрам полёта и выбор одного или нескольких релевантных паттернов из специализированной базы данных. Далее программное средство синтеза, например ISFS, опираясь



на идентифицированную модель динамики и выбранный паттерн, вычисляет последовательность корректирующих управляющих воздействий, переводящих реальное состояние воздушного судна в окрестность эталонной траектории и обеспечивающих последующее следование ей. В постановку синтеза включаются технические ограничения на диапазоны и скорости изменения отклонений органов управления, режимы работы двигателей и допустимые области изменения параметров полёта, таких как перегрузки, углы атаки, скорости и высоты. В результате модель целевой деятельности может рассматриваться как математическое ядро для построения автопилотов нового поколения и систем интеллектуальной поддержки пилота, реализующих управление по образцу квалифицированного экипажа.

Примеры практического применения

Практические области применения модели целевой деятельности охватывают несколько взаимосвязанных классов задач. В задачах вывода воздушного судна из сложных пространственных положений модель используется как ядро виртуального пилота: на основе эталонных паттернов вывода из СПП и текущего измеренного состояния формируются управляющие команды, возвращающие воздушное судно в безопасную область параметров полёта при соблюдении эксплуатационных ограничений. Это позволяет отрабатывать и количественно оценивать алгоритмы поддержки пилота в критических режимах, в том числе в составе комплексных демонстраторов технологий «виртуального второго пилота», ориентированных на автоматизированное или полуавтоматизированное выполнение манёвров вывода (Куравский и др., 2024).

На базе модели целевой деятельности строятся виртуальные пилоты и программные прототипы, имитирующие действия человека по управлению воздушным судном в различных условиях и сценариях. Такие виртуальные пилоты используются при разработке и тестировании программно-технических средств, систем автоматизации полёта и интеллектуальных помощников экипажа, позволяя проводить воспроизводимые эксперименты с заданными уровнями квалификации и стратегиями пилотирования. Модель также применяется при анализе аварий и инцидентов: по зарегистрированным данным о траектории полёта и управляющих воздействиях выполняется реконструкция действий пилота в предаварийной и аварийной фазах, сопоставление этих действий с эталонными паттернами и выявление ключевых отклонений, способствовавших развитию события. На основе таких реконструкций формируются обоснованные рекомендации по корректировке процедур, совершенствованию подготовки экипажей и развитию алгоритмов автоматизации.

Ещё одним направлением применения модели является оптимизация человеко-машинного интерфейса и информационно-управляющего поля кабины. Сопоставляя паттерны управления и динамику полёта при различных вариантах индикации и размещения органов управления, можно количественно оценивать влияние конфигурации ИУП на характер управляющих воздействий, нагрузку на пилота и устойчивость к ошибкам. Это создаёт формализованную основу для принятия решений



по эргономике и функциональной структуре кабины. В совокупности модель целевой деятельности выступает связующим звеном между реальной динамикой управления, эталонным поведением опытных пилотов и алгоритмами автоматизированного и адаптивного управления, что делает её ключевым элементом при построении виртуальных пилотов и систем интеллектуальной поддержки экипажа.

Математическая модель сопутствующей деятельности

Протоколы, дескрипторы и марковская модель

Математическая модель сопутствующей деятельности пилота представляет деятельность как марковский процесс с дискретным временем, заданный матрицей вероятностей переходов между элементарными операциями. Модель ориентирована на анализ ситуаций, где конкретные значения управляющих воздействий не критичны, а важны общий контекст и последовательность действий во времени. (Куравский, Козырев, Грешников, 2024; Орищенко, Грешников, 2024).

Работа пилота описывается через дескрипторы элементарных операций, выделяемые по данным бортовых и внешних средств регистрации: видеоокулография (попадания взгляда в зоны интереса на приборной доске), аудиозаписи (голосовые команды), регистрация воздействий на органы управления (РУС, РУД, педали) и др. Каждое действие декомпозируется на последовательность таких операций, которые далее кодируются как конечное множество состояний марковской цепи.

На основе наблюдаемых последовательностей формируется матрица вероятностей переходов между типами элементарных операций, а также оценивается стационарное распределение. Это позволяет формально анализировать деятельность пилота как марковский процесс: изучать частоты посещения отдельных состояний и их комбинаций, выявлять устойчивые шаблоны поведения и потенциально опасные траектории в пространстве состояний. Получающиеся матрицы служат основой для дальнейшей квантовой обработки и диагностики. (Куравский, Козырев, Грешников, 2024; Куравский, Баранов, Юрьев, 2010).

Квантовые представления, спектральная метрика и квантовая фильтрация

Для повышения информативности анализа матрица переходов и производные от неё характеристики отображаются в квантовые представления. На первом шаге состояния марковской цепи группируются в кластеры (по содержанию или по статистическим признакам), а полученные кластеры интерпретируются как «кубиты» с биполярными измерениями. Эволюция системы задаётся оператором, описывающим переходы между кластерами; тем самым формируется квантовая модель, допускающая применение квантового спектрального анализа.

Квантовый спектральный анализ позволяет проводить количественное сопоставление периодичности и интенсивности выполнения типовых элементарных операций, выявлять скрытые периодичности обхода кластеров и специфические паттерны



последовательностей действий. Это даёт более подробное и содержательное представление о структуре деятельности по сравнению с прямым анализом матриц переходов. На спектре строится спектральная метрика, по которой сравниваются траектории различных пилотов и различные варианты информационно-управляющего поля кабины.

Введена процедура квантовой фильтрации, уменьшающая влияние шума и малых объёмов данных: вместо отдельных реализаций, рассматриваются согласованные траектории в пространстве квантовых представлений, что повышает устойчивость последующей классификации и разделения групп.

Диагностика, оценка ИУП и области применения

Статистические испытания показали, что квантовые представления и спектральная метрика обеспечивают надёжное разделение групп пилотов по характеристикам сопутствующей деятельности. На данных упражнений с 11 курсантами (включая операции по взгляду и манипуляциям органами управления) после квантовой фильтрации получены значимые F-статистики, тогда как альтернативный подход на основе взаимных правдоподобий не обеспечил сопоставимой отделимости групп. Это подтверждает диагностическую ценность предлагаемого аппарата при ограниченных объёмах протоколов.

Модель сопутствующей деятельности имеет несколько ключевых направлений применения:

- Сравнительная оценка ИУП кабины и бортовых систем. По матрицам переходов и спектральным характеристикам оценивается, насколько разные компоновки и логика индикации/управления влияют на структуру деятельности пилота, позволяют ли они уменьшить количество лишних операций и потенциально опасных паттернов. (Грешников и др., 2024, Куравский и др., 2025; Куравский, Козырев, Грешников, 2024).
- Оценка профессиональной подготовки и склонности к ошибкам. Анализ вероятностей переходов и посещаемости кластеров позволяет выявлять стратегии действий, связанные с повышенным риском ошибок или нештатных действий, и использовать эти выводы в учебном процессе и сертификации. (Куравский, Козырев, Грешников, 2024; Орищенко, Грешников, 2024).
- Поддержка адаптивных систем управления. На основе наблюдаемых паттернов сопутствующей деятельности возможна настройка адаптивных алгоритмов, которые учитывают текущие особенности поведения пилота (перегруженность, неуверенность, тенденцию к ошибочным циклам действий) при выборе подсказок или уровней автоматизации. (Куравский и др., 2024).
- Анализ аварий и инцидентов. Модель применяется для реконструкции последовательности действий пилота перед событием, выявления критических участков протокола и формулирования рекомендаций по изменению ИУП или процедур. (Куравский, Козырев, Грешников, 2024; Механтьева, Масальтин, Лизнев, 2017; Натальин, 2009).
- Создание виртуальных пилотов и тренажёрных сценариев. Статистически типичные паттерны сопутствующей деятельности используются для построения



моделей «виртуального пилота» и генерации реалистичных сценариев взаимодействия с ИУП в тренажёрах, что повышает реалистичность подготовки.

Математическая модель деятельности пилота согласно предписаниям Руководства по лётной эксплуатации (РЛЭ)

Марковская модель процедур по РЛЭ

Математическая модель деятельности пилота согласно предписаниям Руководства по лётной эксплуатации (РЛЭ) описывает выполнение процедур как марковский процесс с дискретными состояниями и дискретным временем. В качестве состояний рассматриваются шаги инструкций РЛЭ и связанные с ними возможные варианты развития событий, а дискретная временная шкала отражает высокий темп появления событий в кабине и необходимость оперативной реакции на них в режиме реального времени. (Орищенко, Грешников, 2024).

Полёт воздушного судна делится на этапы, для каждого из которых в РЛЭ задаются сценарии выполнения (штатные и внештатные). Для каждого такого сценария заранее формируется абстрактная марковская цепь, структура которой строго подстраивается под конкретную процедуру из РЛЭ: отдельным состояниям соответствуют шаги инструкции («установить режим двигателя», «проверить индикацию», «выполнить переключение» и т. п.). Благодаря этому, модель не воспроизводит непрерывную динамику полёта, а фокусируется на последовательности регламентированных действий.

Структура состояний: нормальные шаги, ошибки и конечные исходы

Каждое состояние марковского процесса, связанное с «нормальной» траекторией, соответствует корректному выполнению конкретного шага РЛЭ. Состояния включают как непосредственные действия пилота (настройка параметров полёта, управление бортовыми системами), так и контрольные операции (проверка индикации, подтверждение условий, взаимодействие с наземными службами).

Параллельно с этим в модель вводятся состояния ошибок, отражающие ситуации, когда соответствующий шаг инструкции не выполнен или выполнен неверно. Предполагается, что ошибка может возникнуть на любом шаге процедуры; это реализуется тем, что для каждого шага предусмотрены переходы как в состояние корректного выполнения, так и в состояние ошибки, с вероятностями, зависящими от параметров пилота и сценария. Поскольку многие ошибки могут быть обнаружены и исправлены самим пилотом, между ошибочными состояниями и «правильной» веткой выполнения предусмотрены переходы, моделирующие возврат к корректной процедуре.

Отдельно выделяются конечные положительные и отрицательные состояния. Положительные терминальные состояния соответствуют успешному завершению сценария в соответствии с РЛЭ, отрицательные — ситуациям, когда из-за накопления или характера ошибок сценарий не может быть завершён благополучно в рамках данного набора действий (например, пропущены критические шаги, нарушены условия безопасности).



Виртуальные пилоты, «коэффициент опытности» и области применения

На основе марковской модели по РЛЭ строятся «виртуальные пилоты», воспроизводящие предписанные процедуры в виде последовательностей состояний (Орищенко, Грешников, 2024), (Грешников и др., 2024). Эти виртуальные пилоты используются для:

- Имитации действий реальных пилотов в различных штатных и внештатных сценариях, что позволяет проверять и отрабатывать процедуры управления ВС;
- Обучения и тренажёрной подготовки, где виртуальный пилот задаёт эталонную траекторию выполнения процедуры, а действия обучаемого сравниваются с ней по последовательности состояний и ошибкам. (Куравский, Козырев, Грешников, 2024; Орищенко, Грешников, 2024).

Для учёта индивидуальных различий в подготовке вводится дополнительный параметр — «коэффициент опытности». Этот коэффициент вычисляется как функция от характеристик пилота; в текущей реализации в качестве входных данных используются возраст и суммарный налёт. Полученное значение коэффициента влияет на элементы матрицы переходов: при более высоком уровне опытности снижается вероятность переходов в ошибочные состояния и/или увеличивается вероятность успешного возвращения с траектории ошибок на корректную процедуру.

Модель по РЛЭ применяется также для оценки эффективности взаимодействия пилота с различными вариантами информационно-управляющего поля (ИУП). Изменяя конфигурацию индикации и органов управления и наблюдая, как меняются вероятности ошибок на отдельных шагах и вероятности достижения терминальных состояний, можно сравнивать альтернативные проектные решения и выбирать конфигурации, более устойчивые к человеческим ошибкам.

Ещё одно направление применения — анализ деятельности пилотов и экипажей с различными уровнями подготовки и психофизиологическими состояниями. Параметризуя матрицу переходов по коэффициенту опытности и другим факторам, можно исследовать, как меняется распределение ошибок по шагам процедуры, какие части РЛЭ наиболее уязвимы к снижению внимания или перегрузке, и какие изменения в обучении или интерфейсе способны уменьшить риск.

В практических задачах модель по РЛЭ используется и как основа для алгоритмов автоматизированного управления, интегрируемых в системы автоматизации и автопилоты. В этом случае марковская модель задаёт целевую последовательность действий, а автоматизация частично или полностью берёт на себя выполнение шагов, требующих высокой точности и повторяемости. Кроме того, модель применяется при анализе аварий и инцидентов: реконструкция цепочки состояний по РЛЭ на основе данных бортовых регистраторов позволяет восстановить, какие шаги были пропущены или выполнены с ошибками, и сформировать рекомендации по корректировке процедур и улучшению ИУП для повышения безопасности. (Механтьева, Масальгин, Лизнев, 2017; Натальин, 2009).

Практические выводы для применения моделей на разных этапах полёта

Совместное использование трёх математических моделей деятельности пилота позволяет связать динамическое управление, процедурные действия и поведение



пилота с этапами всего цикла полёта — от предполётной подготовки до завершения посадки и разрешения нештатных ситуаций. Модель целевой деятельности описывает непрерывные управляющие воздействия на органы управления ВС, модель сопутствующей деятельности — структуру действий и распределение внимания по элементарным операциям, а модель деятельности по РЛЭ — выполнение регламентированных процедур в форме марковских сценариев полёта.

В контексте предполётной подготовки модель по РЛЭ даёт возможность имитационно отрабатывать сценарии штатных и аварийных процедур до выхода на реальный полёт. Представление предписаний РЛЭ в виде марковской цепи со штатными, ошибочными и конечными состояниями позволяет количественно оценивать вероятность корректного завершения сценариев для пилотов с различным уровнем подготовки и психофизиологическим состоянием, а также калибровать тренировочные программы и допуск к полётам, включая моделирование типовых сценариев отказов и решений экипажа.

На этапах взлёта, активного набора высоты, захода на посадку и посадки доминирует модель целевой деятельности, так как именно в эти периоды основную роль играет непрерывное управление динамикой ВС. Каноническая многомерная нестационарная матричная модель движения и управления с дискретным временем, идентифицируемая по данным опытных экипажей, позволяет формировать эталонные паттерны выполнения манёвров и сравнивать с ними траектории управления пилотов иной квалификации. На основе этих паттернов реализуется адаптивный синтез управления по образцу, показавший в экспериментах по выводу из сложного пространственного положения приемлемое согласование синтезированных и наблюдаемых траекторий, что служит основой для функций «виртуального второго пилота» и коррекции действий пилота средней квалификации в критических режимах.

На участках полёта, где преобладают задачи мониторинга и переработки информации — в устойчивом наборе, крейсере и значительной части снижения, а также при анализе эффективности кабины экипажа — ключевую роль играет модель сопутствующей деятельности. Представляя деятельность пилота в виде матрицы вероятностей переходов между элементарными операциями (переводы взгляда между зонами интереса, обращения к органам управления, голосовые команды) и используя квантовый спектральный анализ этих матриц, модель обеспечивает количественную оценку структуры внимания, когнитивной нагрузки и эффективности различных вариантов информационно-управляющего поля кабины. На эмпирических данных продемонстрирована возможность устойчиво различать группы пилотов по уровню подготовленности и стрессу, а также выбирать компоновки ИУП, обеспечивающие более согласованный баланс внимания в соответствии с требованиями конкретных манёвров.

В результате модель по РЛЭ охватывает процедурное измерение деятельности пилота во всём цикле — от предполётной подготовки до выполнения аварийных и штатных чек-листов; модель целевой деятельности обеспечивает анализ и синтез непрерывного управления в динамически сложных и критических режимах; модель сопутствующей деятельности описывает поведение и взаимодействие пилота с ИУП с точки зрения вероятностной структуры элементарных операций и связанных с ней



состояний. Их согласованное применение даёт целостный инструмент для проектирования кабины, разработки тренажёров и построения интеллектуальных систем поддержки экипажа, адаптированных к специфике разных этапов полёта.

Заключение

Представлен систематический обзор и сопоставление подходов к моделированию деятельности пилота гражданского воздушного судна с позиции их дальнейшего использования в системах интеллектуальной поддержки, включая концепцию «виртуального второго пилота». При этом были решены несколько конкретных задач:

- выделены и формализованы три ключевые линии моделирования — модель целевой деятельности, модель сопутствующей деятельности и модель по РЛЭ;
- для каждой линии указаны исходные предпосылки, математический аппарат и требования к данным;
- показаны типовые области применения (синтез управления, диагностика, обучение, анализ ошибок);
- проведён сравнительный анализ сильных и слабых сторон подходов;
- очерчено место этих моделей в общей архитектуре интеллектуальной поддержки экипажа и виртуального второго пилота.

Совместное применение трёх моделей в единой методологической рамке обеспечивает охват ключевых аспектов деятельности пилота: непрерывного управления, сопутствующих действий и процедурной составляющей. Это, с одной стороны, позволяет выстраивать сквозные сценарии анализа и поддержки — от диагностики текущей деятельности до синтеза управляющих воздействий на сложных режимах, — а с другой стороны, даёт количественный аппарат для решения практических задач: разработки и тестирования алгоритмов виртуального второго пилота, совершенствования тренажёрных программ и объективной оценки подготовки лётного состава, реконструкции аварий и инцидентов, оптимизации компоновки и функциональности информационно-управляющего поля кабины.

Принципиально важно, что данные модели не являются универсальными в смысле одной «общей» модели на все случаи, а должны детерминироваться по назначению и этапу полёта. Разнотипность решаемых задач — от вывода из СПП и предупреждения аномального пилотирования до оценки взаимодействия с ИУП и имитации процедур по РЛЭ — приводит к различным требованиям к временным масштабам, составу переменных, детализации управляющих воздействий и допустимой аппроксимации динамики. Взлёт и посадка характеризуются высокой насыщенностью непрерывных управляющих действий и жёсткими временными ограничениями; для этих этапов наиболее информативна модель целевой деятельности. В крейсерском полёте и при решении задач оценки стратегии взаимодействия с кабиной доминируют сопутствующие операции и распределение внимания, что делает более адекватной модель сопутствующей деятельности. Процедурные сценарии отказов



и нестандартных ситуаций естественным образом описываются моделью по РЛЭ. Следовательно, для повышения точности, интерпретируемости и практической ценности выводов необходимо строить и применять специализированные модели, жёстко привязанные к своим предметным областям и этапам полёта, а не пытаться описать все аспекты деятельности пилота в рамках одной укрупнённой схемы. Такой подход соответствует исходной постановке, ориентированной на создание комплекса специализированных моделей для разных приложений и уровней подготовки экипажа.

Показано, что использование специализированных моделей деятельности пилота, опирающихся на эмпирические данные и современные методы анализа (включая квантовые представления марковских процессов), позволяет существенно повысить информативность и точность выводов по сравнению с традиционными подходами. Перспективными направлениями дальнейших исследований являются интеграция описанных моделей в бортовые и стендовые комплексы нового поколения, расширение библиотек эталонных паттернов за счёт данных реальной эксплуатации, а также создание адаптивных систем интеллектуальной поддержки, способных в реальном времени выбирать и комбинировать модели в зависимости от этапа полёта, сценария, технического состояния воздушного судна и состояния экипажа.

Список источников / References

1. Адаменко, А.Н., Ашеров, А.Т., Бердников, И.Л., и др.; Губинский, А.И., Евграфов, В.Г. (общ. ред.). (1993). Информационно-управляющие человеко-машинные системы: Исследование, проектирование, испытания: справочник. Москва: Машиностроение. (527 с.). ISBN 5-217-02011-3.
Adamenko, A.N., Asherov, A.T., Berdnikov, I.L., et al. (1993). Information-controlling human-machine systems: research, design, testing (handbook). Moscow: Mashinostroenie. (In Russian).
2. Грешников, И.И., Куравский, Л.С., Логачев, С.Д., Махортов, И.А. (2024). Модель пилота как средство валидации перспективной кабины и бортового оборудования воздушного судна. *International Journal of Open Information Technologies*, 12(4), 100—107.
Greshnikov, I.I., Kuravsky, L. S., Logachev, S.D., & Makhortov, I.A. (2024). Pilot model as a means of validation of advanced crew cockpit and on-board equipment set. *International Journal of Open Information Technologies*, 12(4), 100—107.
3. Зараковский, Г.М. (1966). Психофизиологический анализ трудовой деятельности. Москва: Наука. (114 с.).
Zarakovsky, G.M. (1966). Psychophysiological analysis of work activity. Moscow: Nauka. (In Russian).
4. Зинченко, В.П., Мунипов, В.М. (1979). Основы эргономики. Москва: Изд-во МГУ. (344 с.).
Zinchenko, V.P., & Munipov, V.M. (1979). Fundamentals of ergonomics. Moscow: Moscow State University Press. (In Russian).
5. Козырев, А.Д., Грешников, И.И. (2024). Концепция удалённого пилота в контексте обеспечения посадки пассажирского самолёта. В: XIV Всероссийское совещание по проблемам



- управления (Москва, 17—20 июня 2024 г.): сборник научных трудов (с. 1273—1277). Москва: Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН.
- Kozyrev, A.D., & Greshnikov, I.I. (2024). The concept of a remote pilot in the context of ensuring the landing of a passenger aircraft. In *Proceedings of the 14th All-Russian Meeting on Control Problems (Moscow, Russia, June 17—20, 2024)* (pp. 1273—1277). Moscow: V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences, Russian Academy of Sciences.
6. Куравский, Л.С. Квантовые представления и их применение в диагностике. — М.: Де Либри, 2024. — 128 с.
Kuravsky, L.S. *Quantum Representations and Their Applications in Diagnostics*. — М.: De Libri, 2024. — 128 p.
 7. Куравский, Л.С., Баранов, С.Н., Юрьев, Г.А. (2010). Синтез и идентификация скрытых марковских моделей для диагностики усталостного разрушения. *Нейрокомпьютеры: разработка, применение*, (12), 20—36.
Kuravsky, L.S., Baranov, S.N., & Yuryev, G.A. (2010). Synthesis and identification of hidden Markov models for fatigue damage diagnosis. *Neurocomputers: Design and Applications*, (12), 20—36. (In Russian).
 8. Куравский, Л.С., Грешников, И.И., Глухова, Э.Д., Юрьев, Г.А., Юрьева, Н.Е., Поляков, Б.Ю., Соколов, А.В., Махортов, И.А., Кислицын, Е.Д. (2025). Комплексная оценка информационно-управляющего поля кабины экипажа гражданского воздушного судна: исследуемые показатели и методы их анализа. *Экспериментальная психология*, 18(2), 236—260. (<https://doi.org/10.17759/exppsy.2025180214>).
Kuravsky, L.S., Greshnikov, I.I., Glukhova, E.D., et al. (2025). Comprehensive assessment of the information and control field of the cockpit of a civil aircraft: indicators and methods of their analysis. *Experimental Psychology*, 18(2), 236—260. (<https://doi.org/10.17759/exppsy.2025180214>).
 9. Куравский, Л.С., Грешников, И.И., Махортов, И.А., Бондаренко, Н.В. (2024). Интеллектуальная поддержка экипажа при выводе гражданского воздушного судна из сложного пространственного положения. *Моделирование и анализ данных*, 14(2), 124—139. (<https://doi.org/10.17759/mda.2024140208>).
Kuravsky, L.S., Greshnikov, I.I., Makhortov, I.A., & Bondarenko, N.V. (2024). Intelligent Crew Support when Recovering a Civil Aircraft from a Difficult Spatial Position. *Modelling and Data Analysis*, 14(2), 124—139. (<https://doi.org/10.17759/mda.2024140208>).
 10. Куравский, Л.С., Козырев, А.Д., Грешников, И.И. (2024). Математическая модель сопутствующей деятельности пилота и ее применение для объективной оценки его состояния и профессиональной подготовки. *Экспериментальная психология*, 17(1), 161—180. (<https://doi.org/10.17759/exppsy.2024170111>).
Kuravsky, L.S., Kozyrev, A.D., & Greshnikov, I.I. (2024). Mathematical Model of the Pilot Associated Activities and Its Application for Objective Professional Training and Condition Assessment. *Experimental Psychology*, 17(1), 161—180. (<https://doi.org/10.17759/exppsy.2024170111>).
 11. Ломов, Б.Ф. (1966). *Человек и техника: Очерки инженерной психологии*. Москва: Советское радио. (464 с.).



- Lomov, B.F. (1966). *Man and Technology: Essays in Engineering Psychology*. Moscow: Sovetskoye Radio. (In Russian). (https://books.google.com/books/about/Man_and_Technology.html?id=QtoEYVAX6FoC).
12. Медведев, В.И. (1982). Устойчивость физиологических и психологических функций человека при действии экстремальных факторов. Ленинград: Наука. (104 с.).
Medvedev, V.I. (1982). Stability of physiological and psychological functions under the influence of extreme factors. Leningrad: Nauka. (In Russian).
13. Механтьева, Л.Е., Масалытин, А.В., Лизнев, А.Н. (2017). Анализ крупнейших авиакатастроф пассажирских самолётов начала XXI века. Прикладные информационные аспекты медицины, 20(3), 183—186.
Mekhantyeva, L.E., Masalytin, A.V., & Liznev, A.N. (2017). Analysis of the largest passenger aircraft accidents of the early 21st century. *Applied Information Aspects of Medicine*, 20(3), 183—186. (In Russian).
14. Натальин, В.М. (2009). Моделирование управляющих действий пилота в условиях особых ситуаций. Научный вестник Московского государственного технического университета гражданской авиации, (138), 205—209.
Natalyin, V.M. (2009). Modeling of pilot control actions in abnormal situations. *Scientific Bulletin of the Moscow State Technical University of Civil Aviation*, (138), 205—209. (In Russian).
15. Орищенко, В.А., Грешников, И.И. (2024). Моделирование деятельности экипажей при пилотировании воздушных судов. Моделирование и анализ данных, 14(1), 89—102. (<https://doi.org/10.17759/mda.2024140106>).
Orishchenko, V.A., & Greshnikov, I. I. (2024). Modelling of Pilot Activities when Piloting Aircraft. *Modelling and Data Analysis*, 14(1), 89—102. (<https://doi.org/10.17759/mda.2024140106>).
16. Kuravsky, L.S., Greshnikov, I.I., Yuryev, G.A., Zlatozrezhev, V.I. (2023). Synthesis of Civil Aircraft Control Using Empirical Data and Quantum Filtering. *Lobachevskii Journal of Mathematics*, 44(6), 2079—2100. (<https://doi.org/10.1134/S1995080223060276>).

Информация об авторах

Махортов Иннокентий Александрович, аспирант, Московский государственный психолого-педагогический университет (ФГБОУ ВО МГППУ), г. Москва, Российская Федерация; Инженер 2-й категории, Государственный научно-исследовательский институт авиационных систем (ФАУ ГосНИИАС), г. Москва, Российская Федерация; ORCID: <https://orcid.org/0009-0006-6919-9419>, e-mail: inok546@yandex.ru

Information about the authors

Innokenty A. Makhortov, Graduate Student, Moscow State University of Psychology and Education (MSUPE), Moscow, Russia; Engineer, Category II, State Research Institute of Aviation Systems (GosNIAS), Moscow, Russia; ORCID: <https://orcid.org/0009-0006-6919-9419>, e-mail: inok546@yandex.ru



Конфликт интересов

Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Conflict of interest

The authors declare no conflict of interest.

Поступила в редакцию 15.01.2026

Поступила после рецензирования 23.01.2026

Принята к публикации 27.01.2026

Опубликована 31.03.2026

Received 2026.01.15

Revised 2026.01.23

Accepted 2026.01.27

Published 2026.03.31

МЕТОДИКА ПРЕПОДАВАНИЯ | TEACHING METHODS

Научная статья | Original paper

УДК: 378:517.97:303.7

Моделирование развития компетентности магистрантов на основе вариационного принципа

Н.И. Колачев^{1,2} ✉, А.И. Адамский², Д.С. Дроздов¹,
А.А. Заславский², М.И. Подболотова², О.Б. Устюгова²

¹ Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»
г. Москва, Российская Федерация

² Московский городской педагогический университет
г. Москва, Российская Федерация

✉ nkolachev@hse.ru

Резюме

Контекст и актуальность. Несмотря на широкое распространение компетентностного подхода в высшем образовании, сохраняется разрыв между пониманием компетентности как динамического процесса и инструментами её проектирования и управления. Доминирующие практики фиксации результатов обучения ориентированы на статические «срезы», что ограничивает возможности прогнозирования и целенаправленного развития компетентности. В этой связи актуализируется необходимость формального моделирования траекторий развития компетентности на основе принципов оптимальности, заимствованных из математических теорий вариационного исчисления и оптимального управления. **Цель.** Разработать и эмпирически проверить модель развития компетентности магистрантов, основанную на вариационном принципе, позволяющую рассматривать образовательный процесс как задачу оптимального управления траекторией формирования ключевых компетенций. **Методы и материалы.** В исследовании приняли участие 24 студента первого курса магистерской программы «Управление школой и образовательная политика» (83% женщин). Компетентность оценивалась по семи показателям, отражающим способность устанавливать причинно-следственные связи между нормой и деятельностью (шкала 0—3, суммарный балл 0—21). Данные собирались в трёх замерах в процессе решения учебной аналитической задачи. Теоретическая модель строилась на основе вариационного



исчисления (уравнения Эйлера–Лагранжа, условия трансверсальности), эмпирическая проверка осуществлялась с применением многоуровневого регрессионного анализа (модели со случайными коэффициентами). **Результаты.** Аналитическое решение экстремальной задачи показало, что оптимальная траектория развития компетентности имеет линейный характер и соответствует принципу минимизации «длины» образовательного пути, интерпретируемому как минимизация когнитивных и мотивационных перегрузок. Эмпирические данные подтвердили преимущественно линейную динамику роста компетентности у большинства студентов. Многоуровневая регрессионная модель выявила статистически значимый прирост результатов от замера к замеру и отрицательную связь между исходным уровнем и темпом роста, что указывает на компенсаторный характер развития. Высокое значение условного коэффициента детерминации свидетельствует о ключевой роли индивидуальных траекторий в формировании компетентности. **Выводы.** Показано, что развитие компетентности целесообразно рассматривать как неэргодический процесс, требующий перехода от анализа межличностных различий к моделированию внутриличностной динамики. Вариационный подход создаёт основу для нормативного проектирования образовательных траекторий и позволяет интегрировать математические модели оптимальности в образовательную аналитику и системы сопровождения обучения. Рекомендуется использовать предложенную модель как инструмент прогнозирования и планирования педагогических интервенций, направленных на поддержание устойчивого и ресурсосберегающего развития ключевых компетентностей обучающихся.

Ключевые слова: компетентность, магистрант, вариационный принцип, функционал, экстремаль

Для цитирования: Колачев, Н.И., Адамский, А.И., Дроздов, Д.С., Заславский, А.А., Подболотова, М.И., Устюгова, О.Б. (2026). Моделирование развития компетентности магистрантов на основе вариационного принципа. *Моделирование и анализ данных*, 16(1), 157–176. <https://doi.org/10.17759/mda.2026160110>

Modeling master's students' competence development based on the variational principle

N.I. Kolachev^{1,2} ✉, A.I. Adamsky², D.S. Drozdov¹,
A.A. Zaslavsky², M.I. Podbolotova², O.B. Ustyugova²

¹ HSE University, Moscow, Russian Federation

² Moscow City University, Moscow, Russian Federation

✉ nkolachev@hse.ru



Abstract

Context and relevance. Despite the widespread adoption of the competency-based approach in higher education, a gap remains between the understanding of competence as a dynamic process and the tools available for its design and management. Dominant practices of learning outcomes assessment rely on static “snapshots,” which limits the possibilities for forecasting and purposeful development of competence. In this context, there is a growing need for formal modeling of competence development trajectories based on principles of optimality derived from the mathematical theories of the calculus of variations and optimal control. **Objective.** To develop and empirically test a model of master’s students’ competence development based on the variational principle, which conceptualizes the educational process as a problem of optimal control over the trajectory of key competence formation. **Methods and materials.** The study involved 24 first-year master’s students enrolled in the program School Leadership and Educational Policy (83% women). Competence was assessed using seven indicators reflecting the ability to establish causal relationships between norms and practices (scale 0–3; total score range 0–21). Data were collected across three measurement points during the completion of an analytical learning task. The theoretical model was constructed using tools of the calculus of variations (Euler–Lagrange equations, transversality conditions), and the empirical validation was conducted through multilevel regression analysis with random effects models. **Results.** The analytical solution of the extremal problem demonstrated that the optimal trajectory of competence development is linear in nature and corresponds to the principle of minimizing the “length” of the educational path, interpreted as the minimization of cognitive and motivational overload. Empirical data confirmed a predominantly linear pattern of competence growth for most students. The multilevel regression model revealed a statistically significant increase in performance across measurement points, as well as a negative association between initial competence level and growth rate, indicating a compensatory pattern of development. The high value of the conditional coefficient of determination highlights the crucial role of individual trajectories in competence formation. **Conclusions.** The findings suggest that competence development should be conceptualized as a non-ergodic process, which requires a shift from the analysis of interindividual differences to the modeling of intraindividual dynamics. The variational approach provides a foundation for the normative design of educational trajectories and enables the integration of mathematical models of optimality into educational analytics and learning support systems. The proposed model is recommended as a tool for forecasting and planning pedagogical interventions aimed at fostering sustainable and resource-efficient development of students’ key competencies.

Keywords: competence, master’s student, variational principle, functional, extremal trajectory

For citation: Kolachev, N.I., Adamsky, A.I., Drozdov, D.S., Zaslavsky, A.A., Podbolotova, M.I., Ustyugova, O.B. (2026). Modeling master’s students’ competence development based on the variational principle. *Modelling and Data Analysis*, 16(1), 157–176. (In Russ.). <https://doi.org/10.17759/mda.2026160110>



Введение

Несмотря на всеобщее признание компетентностного подхода в высшем образовании, сохраняется фундаментальный разрыв между декларируемой природой компетентности и инструментами для работы с ней. Если компетентность понимать как способность действовать в сложных или новых контекстах (Фрумин и др., 2018), то есть как динамическую переменную, то ключевым для образовательной политики становится вопрос об оптимальных траекториях и условиях ее развития. Однако действующая система нормирования и проектирования образовательного процесса, сосредоточенная на фиксации статических «срезов» результата (в виде списков компетенций), оказывается слепая к этой динамике. В результате, налицо кризис управляемости: мы декларируем сложный, стохастический результат, но не оперируем языком и моделями для проектирования процессов его достижения. Большинство исследований либо редуцируют компетентность до статической латентной переменной, поддающейся измерению, либо ограничиваются описательной аппроксимацией траекторий, не задавая явных принципов оптимальности образовательного движения. Этот разрыв между психометрией «срезов» и нормативным моделированием «пути» делает невозможным ответ на ключевой для практики вопрос: как, в условиях жестких ресурсных и временных ограничений, спроектировать образовательную среду, гарантирующую нахождение и прохождение каждым студентом своей оптимальной траектории развития?

Для преодоления этого разрыва необходим переход от качественных описаний к формальному моделированию. В данной работе мы обосновываем, что развитие компетентности может и должно рассматриваться как задача оптимального управления. В такой постановке образовательные воздействия (со стороны среды, педагога, цифровых систем) и собственные выборы учащегося могут выступать управлениями, а результирующая траектория развития — решением, минимизирующим (или максимизирующим) некоторый функционал качества (например, время достижения целевого уровня компетентности при заданных когнитивных затратах). Классические основы такого взгляда заложены в вариационном исчислении (принцип наименьшего действия, уравнения Эйлера — Лагранжа), теории оптимального управления (принцип максимума Понтрягина) и динамическом программировании (уравнение Беллмана). Эти разделы математики предоставляют мощный аналитический аппарат и общий язык для строгой формулировки функционалов цели, ресурсных ограничений и выведения необходимых условий оптимальности траекторий. Новизна нашего подхода заключается не в применении самого этого аппарата, а в его адаптации для решения нормативно-управленческой задачи образовательной политики: создания принципиально новой рамки для проектирования образовательных программ, индивидуальных траекторий и систем педагогической поддержки, основанной на идее поиска экстремали в пространстве образовательных возможностей.

Таким образом, проблема данной работы формулируется не как чисто математическая, а как проектно-политическая: в условиях ограниченного времени и иных



ресурсов необходимо определить принципы (условия оптимальности) и построить модель, позволяющую конструировать образовательные среды, в которых наиболее вероятным и эффективным сценарием становится нахождение и реализация студентом оптимальной траектории развития ключевых компетентностей.

Постановка задачи на языке математики

Согласно выработанным подходам (Алексеев и др., 1979), точно поставленная экстремальная задача включает в себя два элемента: функционал и ограничения. Под функционалом понимают правило или закон, по которому функции, определенной на множестве ограничений, ставится в соответствие действительное число ($J: X \rightarrow \bar{R}$), где \bar{R} — это расширенная вещественная прямая, включающая $-\infty$ и $+\infty$. При этом под ограничением понимается некоторое подмножество $C \subseteq X$, а точки $x \in C$ являются допустимыми по ограничению. При этом сама задача формулируется следующим образом: найти экстремум (нижнюю или верхнюю грань) функционала J при условии, что $x \in C$. Таким образом, для точной постановки задачи необходимо описать X , J и C .

Пусть $K' = \frac{dK}{dt}$ — скорость формирования компетентности, а K — текущий уровень сформированности компетентности. Тогда интегральная, т. е. в течение всего обучения, скорость выражается через функционал, который необходимо устремить к экстремуму:

$$J = \int_0^{46} K' dt \rightarrow \text{extr}$$

Однако в таком виде функционал не имеет вариационного решения, т. к. зависит только от граничных условий. Кажется разумным задать функционал следующего вида, который имеет хорошо изученные свойства:

$$J = \int_0^{46} \sqrt{1 + K'^2} dt \rightarrow \text{extr}$$

Функционал теперь зависит не только от краевых условий, но и от самого процесса развития компетентности. Это функционал длины кривой, и экстремаль — это кривая, соединяющая две точки и имеющая минимальную длину. То есть имеет смысл устремлять к минимуму заданный функционал. Таким образом, мы определили два элемента для решения экстремальной задачи — определили вид X и J .

Теперь необходимо определить C , то есть граничные условия. В нашем случае временной интервал обучения составляет от 0 до 46 недель. Количество учебных недель определено учебным планом.



Начальное условие, то есть $K(0)$, возможно определить на основе имеющихся эмпирических данных. Например, в качестве $K(0)$ можно использовать средний результат оценки компетентности на старте обучения. В общем виде предположим, что $K(0) = a$. При этом конечное состояние неизвестно; $K(46) = b$. Таким образом, перед нами встает экстремальная задача со свободным правым концом.

Итоговый вид экстремальной задачи таков:

$$J = \int_0^{46} \sqrt{1 + K'^2} dt \rightarrow \min, K(0) = a, K(46) = b$$

Таким образом, мы свели задачу к хорошо известной — о поиске кратчайшего пути.

Решение задачи

Первым шагом в решении экстремальной задачи является удовлетворение необходимого условия экстремума, а именно: решение уравнения Эйлера-Лагранжа. Формально в нашем случае оно выглядит следующим образом:

$$\frac{\partial F}{\partial K} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial F}{\partial K'} \right) = 0,$$

где F — подынтегральная функция, $\frac{\partial F}{\partial K}$ — частная производная по переменной K , $\frac{\partial F}{\partial K'}$ — частная производная по переменной K' , $\frac{d}{dt}$ — производная по переменной t .

В нашем случае $\frac{\partial F}{\partial K} = 0$, так как функционал явно не зависит от K . При этом

$$\frac{\partial F}{\partial K'} = \frac{2K'}{2\sqrt{1 + K'^2}} = \frac{K'}{\sqrt{1 + K'^2}}, \text{ а если } \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial F}{\partial K'} \right) = 0, \text{ то это значит, что } \frac{K'}{\sqrt{1 + K'^2}} = \text{const.}$$

Таким образом, мы получили уравнение, которое решается прямым интегрированием. Решая дифференциальное уравнение, получаем следующее:

$$\frac{K'}{\sqrt{1 + K'^2}} = C$$

$$\frac{K'^2}{1 + K'^2} = C_1$$

$$K'^2 = \frac{C_1}{1 - C_1}$$

$$K' = \sqrt{\frac{C_1}{1 - C_1}} = C_2$$

$$K = C_2 t + C_3$$



Далее необходимо найти константы C_2 и C_3 . Находим константу C_3 :

$$K(0): C_2 \cdot 0 + C_3 = a \Rightarrow C_3 = a$$

Так как у нас не задано значение K в конечной точке, необходимо воспользоваться условием трансверсальности (условием оптимального значения в конце). Оно формулирует дополнительные граничные условия для оптимального решения в тех случаях, когда один или оба конца траектории не фиксированы. Условие трансверсальности можно интерпретировать как требование, чтобы направление оптимальной траектории в конце интервала интегрирования было ортогонально границе области допустимых состояний.

В нашем случае конечная точка фиксирована, а значение нет, поэтому условие трансверсальности выглядит следующим образом:

$$\left[\frac{\partial F}{\partial K'} \right]_{t=46} \cdot \Delta K_{t=46} = 0$$

Откуда

$$\frac{K'}{\sqrt{1 + K'^2}} = 0$$

$$K' = 0 \quad K = C$$

Подставляем полученное значение в $K = C_2 t + a$, получаем $C_2 = C_2 t + a$, откуда $-45C_2 = a$, а $C_2 = \frac{a}{-45} = b$. Таким образом, подозрительная на экстремаль функция такова:

$$K = bt + a$$

Дальнейшее решение задачи связано с изучением выполнения достаточных условий экстремума. К достаточным условиям относятся следующие:

Семейство кривых подозрительных на экстремаль образуют поле.

Семейство кривых подозрительных на экстремаль удовлетворяют условию Лежандра.

Причем условия Лежандра могут быть двух видов — слабое и сильное. Слабое условие выглядит следующим образом (для максимума):

$$F_{K'K'} < 0 \text{ на кривой } y(t)$$

Сильное условие Лежандра (для максимума) таково:

$$F_{K'K'} \leq 0 \text{ для } \forall \text{ и в некоторой окрестности } (t, K) \text{ рассматриваемой кривой}$$



Рассмотрим, образуют ли семейства кривых, подозрительных на экстремаль, поле. Для этого необходимо в функции $K = bt + a$ зафиксировать одну из констант. Логично будет зафиксировать константу при переменной t , а свободный член варьировать. Тогда необходимо проанализировать семейство кривых вида $K = bt + \tilde{N}$ при $t \in [0; 46]$. Воспользуемся наглядной демонстрацией. На рисунке 1 для примера представлены отдельные кривые семейства кривых $K = 0.02t + \tilde{N}$. Можно заметить, что в таком случае кривые не будут пересекаться и пройдут через каждую точку на области определения. Отсюда следует, что семейство кривых образует собственное поле.

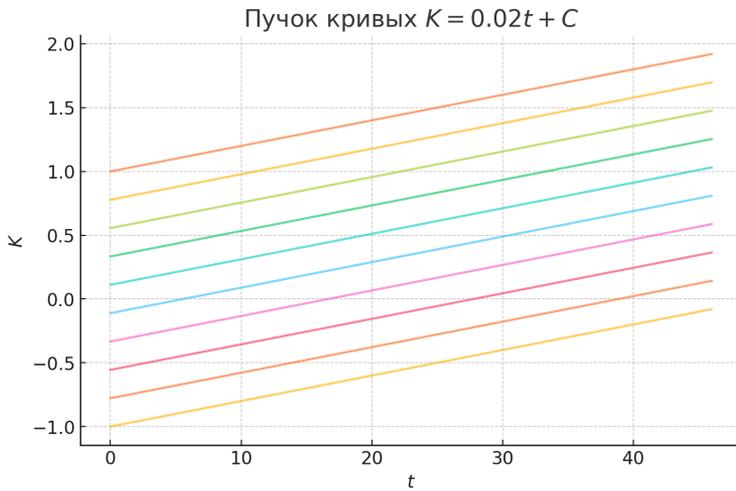


Рис. 1. Графическая репрезентация собственного поля семейства кривых (создано с помощью ChatGPT4o)

Fig. 1. Graphical representation of the proper field of a family of curves (created using ChatGPT-4o)

В другом случае — если мы зафиксируем свободный член, а коэффициент при переменной t будем варьировать — получится центральное поле. Графическая репрезентация центрального поля представлена на рисунке 2. При образовании центрального поля кривые пересекаются в одной точке; допустим, в точке с координатами $(0; 5)$.

Таким образом, найденная кривая $K = a + bt$ включается в поле экстремалей. Теперь проверим сильное условие Лежандра:

$$F_{K'K'} = 2 > 0$$

Вторая производная по K' не зависит от K , то есть постоянна и больше 0 для $\forall K$. Но поскольку вторая производная положительна, то у заданного нами функционала имеется сильный минимум. Минимизация этого функционала может означать



плавное, стабильное развитие компетентности (без резких скачков и перегрузок). Таким образом, оптимальной траекторией развития компетентности является линейная.

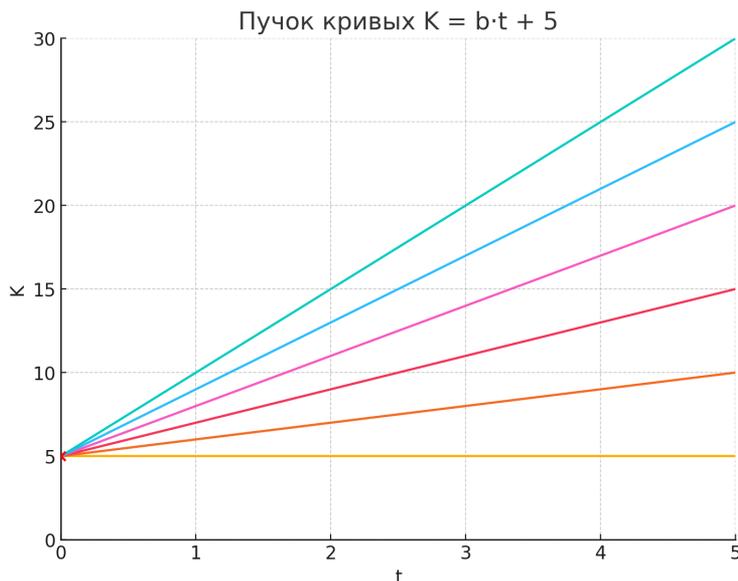


Рис. 2. Графическая репрезентация центрального поля семейства кривых (создано с помощью ChatGPT4o)

Fig. 2. Graphical representation of the central field of a family of curves (created using ChatGPT-4o)

От полученного детерминистического решения можно перейти к более соответствующей реальности форме — стохастической. Тогда оно будет выглядеть так:

$$K = a + bt + \varepsilon,$$

где ε — возмущение (остаток). Стохастическая форма на более знакомом языке представляет собой уравнение линейной регрессии.

Эмпирическая проверка решения

Выборка

В эмпирической части исследования приняли участие 24 студента первого курса магистерской программы «Управление школой и образовательная политика» Московского городского педагогического университета (МГПУ), год набора — 2024. Среди них 20 женщин (83%).



Процедура

В ходе обучения студенты решали задачу по курсу «Институциональная образовательная политика». Задача звучит так: «Составьте институциональный анализ реформы образования 1984 г.». Студенты имели возможность сделать три пробы решения задачи. Объём решения задачи не должен был превышать 5000 знаков с пробелами.

Инструмент

Ключевой компетентностью указанной магистерской программы является компетентность установления причинно-следственных отношений между нормой и деятельностью. Оценка этой компетентности проводится на основе 7 специально разработанных показателей: культурно-исторический анализ, анализ текущей образовательной ситуации, выявление противоречий, формулирование проблематики, постановка задачи, предложение способов решения задачи и оценка эффективности предлагаемых решений. Каждый показатель включает 4 балльную шкалу оценки: где 0 — показатель полностью не проявлен, 3 — показатель полностью проявлен. Минимальный балл — 0, максимальный — 21. Инструмент прошёл всю необходимую психометрическую проверку.

Статистический анализ

В качестве основного метода анализа была использована многоуровневая регрессия. Выбор многоуровневой регрессии в противовес классической обоснован несколькими обстоятельствами.

1. Многоуровневая регрессия учитывает корреляцию между измерениями, позволяя более точно оценивать параметры модели. В нашем случае производились замеры по одним и тем же людям, что делает наблюдения в базе данных зависимыми.
2. Многоуровневая регрессия позволяет моделировать результаты даже в условиях пропущенных значений. В нашем случае пропуски обусловлены тем, что студенты могли сами решать, какую пробу им отправлять на проверку.

Существует два класса многоуровневых моделей — с фиксированными коэффициентами регрессии (random intercept, fixed slope model) и с изменяющимися коэффициентами регрессии (random intercept, random slope model). Первый класс моделей подразумевает, что между индивидами изменяется только среднее значение, при этом коэффициенты регрессии одинаковы для всех. Второй класс предполагает, что разными являются как интериндивидуальные средние зависимой переменной, так и коэффициенты регрессии (связи) независимых переменных и зависимой (интраиндивидуальная изменчивость).

Математически первый класс моделей формулируется следующим образом:

$$\begin{cases} y_{ij} = \beta_{0j} + \beta_{1j}x_{1j} + \beta_{2j}x_{2j} + \dots + \beta_{nj}x_{nj} + \varepsilon_{ij} \\ \beta_{0j} = \gamma_{00} + \gamma_{01}x_{i1} + \gamma_{02}x_{i2} \dots + \gamma_{0k}x_{ik} + u_{0j} \\ \beta_{nj} = \gamma_{n0} \end{cases}$$

где y_{ij} — целевая зависимая переменная, $x_{1j}, x_{2j}, \dots, x_{nj}$ — предикторы первого уровня, $x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{ik}$ — предикторы второго уровня, β_{0j} — отклонение от общего



выборочного среднего, γ_{00} — общее выборочное среднее, ε_{ij} — остатки первого уровня, u_{0j} — остатки второго уровня; $\varepsilon_{ij} \sim N(0, \sigma_\varepsilon^2)$, $u_{0j} \sim N(0, \sigma_u^2)$.

Математически второй класс моделей выражается следующим образом:

$$\begin{cases} y_{ij} = \beta_{0j} + \beta_{1j}x_{1j} + \beta_{2j}x_{2j} + \dots + \beta_{nj}x_{nj} + \varepsilon_{ij} \\ \beta_{0j} = \gamma_{00} + \gamma_{01}x_{i1} + \gamma_{02}x_{i2} \dots + \gamma_{0k}x_{ik} + u_{0j} \\ \beta_{1j} = \gamma_{10} + \gamma_{11}x_{i1} + \gamma_{12}x_{i2} \dots + \gamma_{1k}x_{ik} + u_{1j}, \\ \dots \\ \beta_{nj} = \gamma_{n0} + \gamma_{n1}x_{i1} + \gamma_{n2}x_{i2} \dots + \gamma_{nk}x_{ik} + u_{nj} \end{cases}$$

где y_{ij} — целевая зависимая переменная, $x_{1j}, x_{2j}, \dots, x_{nj}$ — предикторы первого уровня, $x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{ik}$ — предикторы второго уровня, β_{0j} — отклонение от общего выборочного среднего, γ_{00} — общее выборочное среднее, β_{ij} — коэффициент регрессии первого уровня, γ_{nk} — коэффициент регрессии второго уровня, ε_{ij} — остатки индивидуального уровня, u_{ij} — остатки группового уровня, $\varepsilon_{ij} \sim N(0, \sigma_\varepsilon^2)$, $u_{ij} \sim N(0, \sigma_u^2)$.

Для оценки параметров моделей, описанных выше, обычно используется метод максимального правдоподобия (Maximum Likelihood Estimation, MLE). Это обстоятельство позволяет использовать информационные критерии для сравнения двух классов моделей. Для того чтобы сравнить, какой класс моделей подходит данным лучше, обычно используют тест отношения правдоподобия (Likelihood Ratio Test, LRT), а также информационные критерии — информационный критерий Акаике (Akaike Information Criterion) или информационный критерий Байеса (Bayesian Information Criterion). Тест отношения правдоподобия основан на разнице удвоенных логарифмов функции правдоподобия ($-2LL$) двух моделей. Разница следует распределению хи-квадрат с количеством степеней свободы, равным разности количества параметров в двух сравниваемых моделях (Нох et al., 2017). Затем получившаяся разность сравнивается с критическим значением из распределения хи-квадрат для заданного уровня значимости (обычно 0,05). Если разность превышает критическое значение, то отвергается нулевая гипотеза о том, что более простая модель объясняет данные так же хорошо, как и более сложная. Это означает, что добавление дополнительных уровней или случайных эффектов в модель является статистически значимым.

Если модель с изменяющимися коэффициентами регрессии имеет более низкие значения AIC и BIC, а также статистически значимое улучшение правдоподобия по сравнению с моделью с фиксированными коэффициентами, то можно сделать вывод, что добавление в модель изменения коэффициентов оправдано. Если улучшение незначительно, может быть предпочтительно использовать более простую модель (с фиксированными коэффициентами).

Результаты эмпирического исследования

На рисунке 3 представлены коробчатые диаграммы результатов решения учебной задачи в трёх пробах (замерах). Можно видеть, что медианное значение результата решения задачи меньше в начальной пробе (замер 0) и с каждой пробой возрастает. При этом в замере 1 наблюдается наибольшая гомогенность результатов, поскольку



длина ящика здесь наименьшая. Но наблюдается несколько нетипичных значений (обозначены выколотыми точками).

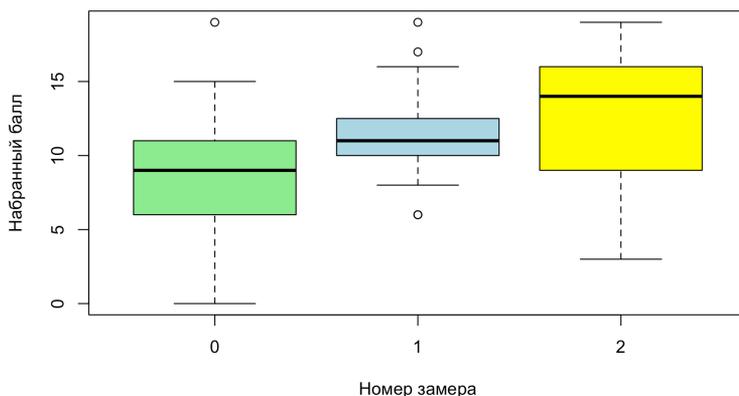


Рис. 3. Коробчатые диаграммы результатов решения учебной задачи в трёх замерах

Fig. 3. Boxplot of the results of task-solving across three measurements

На рисунке 4 представлены траектории результативности решения учебной задачи каждого студента. Можно заметить, что достаточно редко встречается нелинейный паттерн, у большинства заметна линейная динамика (как положительная, так и отрицательная).

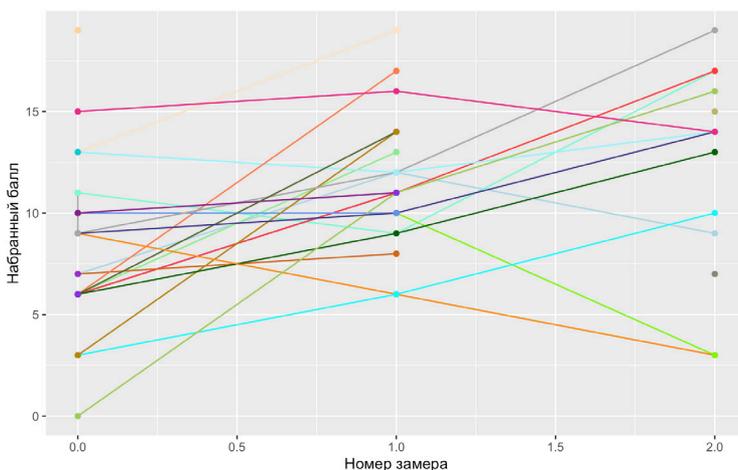


Рис. 4. Индивидуальные траектории результатов решения учебной задачи

Fig. 4. Individual trajectories of the results of task-solving



В таблице 1 представлены индексы согласия моделей с данными. Мы видим, что по индексу Акаике (AIC) модель с изменяющимися коэффициентами регрессии подходит данным несколько лучше, по индексу Байеса — наоборот. При этом тест отношения правдоподобий оказывается значимым, следовательно, можно принять, что модель с изменяющимися коэффициентами регрессии более предпочтительна.

Таблица 1 / Table 1

Индексы согласия моделей с данными
Goodness-of-fit statistics

Модель	AIC	BIC	LR test
С фиксированными коэффициентами	372,84	381,54	
С изменяющимися коэффициентами	370,21	383,25	6,63*

Примечание: «*» — корреляция значима на уровне 0,05 (двусторонняя); *Note:* «*» — correlation is significant at the 0,05 level (two-sided).

В таблице 2 представлены результаты многоуровневого регрессионного моделирования на основе модели с изменяющимися коэффициентами. Мы видим, что все переменные модели значимы. Интерцепт значимо отличается от 0 и составляет 8,75. То есть средний балл группы в первом замере составляет 8,75. Коэффициент при переменной номера замера так же значимо отличен от 0 и составляет 2,29. То есть с каждой пробой результат студентов увеличивался в среднем на 2,29 балла. При этом корреляция фиксированных эффектов достаточно велика и отрицательна (–0,67). Это говорит о том, что чем ниже был стартовый результат студента, тем сильнее наблюдается прирост результата от пробы к пробе. По итогам моделирования с помощью многоуровневой регрессии получилось следующее уравнение: Набранный бал = $8,75 + 2,29 \times \text{Номер замера} + \varepsilon$.

Таблица 2 / Table 2

Результаты многоуровневого регрессионного моделирования
Results of the multilevel regression

Предиктор	b (SE)
<i>Фиксированные эффекты</i>	
Интерцепт	8,75*** (0,80)
Номер замера	2,29** (0,76)
<i>Случайные эффекты</i>	
Дисперсия интерцепта	10,92
Дисперсия коэффициента регрессии при переменной «Номер замера»	9,52



<i>Случайные эффекты</i>	
Дисперсия остатков	5,86
Корреляция случайных эффектов интерцепта и переменной «Номер замера»	-0,67***
Marginal R ² / Conditional R ²	0,17 / 0,82

Примечание: «**» — корреляция значима на уровне 0,01 (двусторонняя); «***» — корреляция значима на уровне 0,001 (двусторонняя); *Note:* «**» — correlation is significant at the 0,01 level (two-sided); «***» — correlation is significant at the 0,001 level (two-sided).

Обсуждение результатов

Представленная работа продемонстрировала возможность формализованного описания процесса развития профессиональной компетентности в терминах вариационного исчисления. Предложенная модель, минимизирующая функционал длины траектории $J = \int_0^{46} \sqrt{1 + K^2} dt$, задаёт принцип наименьшего действия в обучении — оптимальная траектория характеризуется плавностью и стабильностью изменения компетентности без избыточных колебаний или перегрузок. С позиций культурно-исторической теории (Выготский, 2005) развитие компетентности не является внутренне детерминированным процессом усвоения знаний, а представляет собой социально опосредованную трансформацию деятельности субъекта в культурно заданной ситуации. В этом контексте математическая модель вариационного типа, описывающая плавное, линейное нарастание уровня компетентности, отражает процесс внутреннего присвоения культурных средств деятельности, происходящий в устойчивой социальной среде обучения.

Полученное аналитическое решение $K = a + bt$ описывает линейную зависимость уровня компетентности от времени, что соответствует гипотезе о равномерном наращивании компетентности при устойчивой образовательной среде. Сильное условие Лежандра, выполняющееся для данного функционала ($F_{K,K} > 0$), указывает на наличие строгого минимума, что в психолого-педагогическом контексте может быть интерпретировано как состояние оптимальной учебной нагрузки, минимизирующей когнитивные и мотивационные потери (Sweller et al., 2019).

Эмпирически наблюдаемый рост результатов по трём пробам решения задачи — при сохранении отрицательной корреляции между исходным уровнем и приростом — соотносится с концепцией зоны ближайшего развития (ЗБР). Участники, начавшие с более низкого уровня компетентности, продемонстрировали больший темп прироста, что отражает действие механизма опосредованного усвоения: при наличии педагогической поддержки и культурных образцов деятельности, обучающийся способен выполнять действия, которые ранее находились за пределами его актуального уровня (Выготский, 2005). Вариационно-оптимизационный принцип в этом контексте выражает стремление системы обучения свести усилия к минимуму, направив деятельность в зону, где затраты когнитивных и мотивационных ресурсов минимальны при максимальном приросте культурных форм действия.



С позиций современной интерпретации КИТ (Engeström, 2001; Rogoff, 2003) выявленная динамика компетентности иллюстрирует ко-эволюцию индивидуальных и коллективных траекторий. Магистерская программа выступает как культурно-организованная система деятельности, а процесс решения учебных задач — как совместное конструирование смыслов внутри этой системы. Линейность роста в такой ситуации указывает на стабильность системы взаимодействий, где инструменты, нормы и роли уже установлены, а участники действуют в общей логике. Случайные эффекты, выявленные многоуровневой моделью, можно трактовать как индивидуальные вариации интериоризации — различия в том, как быстро и полно каждый студент присваивает общие культурные средства анализа (в данном случае — способности установления причинно-следственных связей между нормой и деятельностью).

Переход от детерминистического решения к стохастическому виду $K = a + bt + \varepsilon$ обеспечивает связь с эмпирическими моделями роста компетентности. С этой точки зрения многоуровневая регрессионная модель, примененная к данным магистрантов, является стохастическим аналогом вариационного решения, где случайная компонента ε отражает индивидуальные различия и ситуативные флуктуации в ходе обучения (Raudenbush & Bryk, 2002).

Высокие значения условного коэффициента детерминации ($R^2_{\text{conditional}} = 0,82$) указывают, что большая часть дисперсии компетентности объясняется различиями между участниками и их индивидуальными траекториями. Это согласуется с принципом индивидуализации обучения, где интраиндивидуальные различия играют ключевую роль в темпе и форме развития (Rogoff, 2003).

Также представляется важным рассмотреть полученные результаты через призму принципа эргодичности. Построенная вариационно-аналитическая модель развития компетентности допускает двойное толкование — как индивидуальной траектории и как усреднённого состояния системы (по множеству обучающихся). Этот переход от микродинамики к макродинамике требует рассмотрения эргодичности системы, то есть возможности приравнять среднее по времени и среднее по совокупности (Molenaar, 2008; Hamaker, 2012). В эргодической системе предполагается, что процесс, протекающий во времени у одного индивида, тождественен распределению состояний в популяции. Однако в психологии и образовании это условие почти никогда не выполняется (Fisher et al., 2018). Развитие компетентности характеризуется индивидуально-специфическими зависимостями, контекстными колебаниями и нелинейными обратными связями, что делает его неэргодическим процессом: усреднённая динамика не описывает динамику отдельного обучающегося. Хотя по форме для большинства студентов была характерна линейная положительная динамика результата (см. рисунок 4).

Неэргодичность в нашем случае выражает принцип индивидуальной оптимальности развития. В обучении нельзя ожидать, что все участники будут двигаться одинаково, даже если внешние условия (программа, задачи, длительность) идентичны. Каждый субъект находит свой «минимальный путь» в пространстве культурных и когнитивных состояний. Отрицательная корреляция между исходным уровнем



и скоростью роста означает, что система демонстрирует свойство гомеостатической компенсации: чем ниже начальное состояние, тем сильнее потенциал роста — то есть динамика стабилизирует распределение, приближая систему к квазистационарному состоянию без выравнивания структурно-функциональных особенностей. Это подтверждает неэргодический характер процесса: равновесие достигается не через одинаковое поведение, а через разное направление индивидуальных изменений (Fisher, 2015; Ram & Gerstorff, 2009). Понимание развития компетентности как неэргодического процесса требует перехода от анализа межиндивидуальных различий к анализу внутрииндивидуальной динамики (within-person modeling). Многоуровневая регрессия, использованная в работе, уже частично решает эту задачу, позволяя одновременно оценивать групповые и индивидуальные параметры.

Практическая значимость полученного результата состоит в возможности предсказательного моделирования хода обучения. Использование стохастических вариантов вариационных уравнений позволяет не только прогнозировать уровень компетентности на любом этапе программы, но и определять оптимальные точки интервенций (например, момент необходимости усложнения задач или внедрения поддержки учебной деятельности). Хотя это требует более длительных наблюдений за развитием компетентности студентов. Также предложенный подход может быть интегрирован в интеллектуальные системы сопровождения обучения и образовательную аналитику (de Baker & Inventado, 2014). В перспективе модель может быть обобщена на нелинейные формы (например, логистическую или экспоненциальную), которые более адекватно описывают развитие компетентности при сложных образовательных траекториях, а также на стохастические дифференциальные уравнения, учитывающие шумовую компоненту образовательной среды (Øksendal, 2003; van der Maas et al., 2017).

Заключение

В настоящем исследовании была решена поставленная цель — разработана и апробирована модель развития компетентности студентов, основанная на вариационном принципе и трактующая образовательный процесс как задачу оптимального управления траекторией формирования компетентности. Полученные результаты имеют значимость для теории образования и психологии развития, поскольку предлагают новую рамку осмысления компетентности не как статического результата, а как динамического, управляемого процесса. Впервые показано, что аппарат вариационного исчисления может быть продуктивно адаптирован для нормативного моделирования образовательных процессов и проектирования условий, способствующих устойчивому развитию ключевых компетенций. Тем самым исследование вносит вклад в преодоление разрыва между психометрическим анализом «срезов» и управленческим моделированием «траекторий». Практическая значимость работы выходит за рамки узкопрофессиональной педагогической проблематики. Предложенный подход может быть использован при проектировании



образовательных программ, разработке систем академического сопровождения и в образовательной аналитике, включая интеллектуальные системы поддержки обучения. В более широком междисциплинарном контексте результаты исследования открывают возможности для применения вариационно-оптимизационных моделей в областях управления человеческим капиталом, организационного развития и цифровых систем поддержки принятия решений, где также требуется учитывать индивидуальные траектории роста и ресурсные ограничения. Вместе с тем полученные выводы задают и направления дальнейших исследований. Перспективными являются проекты, направленные на расширение эмпирической базы за счёт более репрезентативных выборок и длительных лонгитюдных дизайнов, а также на разработку нелинейных и стохастических версий модели, более адекватных реальным образовательным процессам. Особый интерес представляет интеграция вариационного подхода с современными методами образовательной аналитики и машинного обучения, что позволит перейти от описания оптимальных траекторий к их автоматизированному прогнозированию и поддержке в реальном времени.

Ограничения. Выборка исследования была небольшой (24 участника) и гомогенной по ряду признаков: все студенты обучались в одной магистерской программе, в одном вузе и в одинаковом образовательном контексте. Это ограничивает внешнюю валидность результатов и не позволяет обобщать найденные закономерности на другие профессиональные группы или образовательные программы. Вторым ограничением выступает ограниченный временной диапазон измерений. Они были проведены в течение первого семестра первого года обучения, что может снижать достоверность вывода в части переноса на динамику в течение всех двух лет обучения.

Limitations. The study sample was small (24 participants) and homogeneous in several respects: all students were enrolled in the same master's program, at the same university, and within the same educational context. This limits the external validity of the findings and prevents the generalization of the observed patterns to other professional groups or educational programs. A second limitation concerns the restricted time frame of the measurements. Data were collected during the first semester of the first year of study only, which may reduce the robustness of conclusions regarding the applicability of the results to competence development dynamics over the entire two-year program.

Список источников / References

1. Выготский, Л.С. (2005). *Психология развития человека*. М.: Смысл; Эксмо. 1136 с.
Vygotsky, L.S. (2005). *Psychology of human development*. Moscow: Smysl Publ.; Eksmo. (In Russ.).
2. Фрумин, И.Д., Добрякова, М.С., Баранников, К.А., Реморенко, И.М. (2018). *Универсальные компетентности и новая грамотность: чему учить сегодня для успеха завтра. Предварительные выводы международного доклада о тенденциях трансформации школьного образования*. Москва: НИУ ВШЭ.



- Frumin, I.D., Dobryakova, M.S., Barannikov, K.A., Remorenko, I.M. (2018). *Universal competencies and new literacy: What to teach today for success tomorrow. Preliminary findings of an international report on trends in school education transformation*. Moscow: HSE University. (In Russ.).
3. De Baker, R.S.J., & Inventado, P.S. (2014). Chapter X: Educational data mining and learning analytics. *Comput. Sci*, 7, 1—16.
 4. Engeström, Y. (2001). Expansive learning at work: Toward an activity theoretical reconceptualization. *Journal of Education and Work*, 14(1), 133—156.
 5. Fisher, A.J. (2015). Toward a dynamic model of psychological assessment: Implications for personalized intervention. *Journal of Personality Assessment*, 97(4), 362—373.
 6. Fisher, A.J., Medaglia, J.D., & Jeronimus, B.F. (2018). Lack of group-to-individual generalizability is a threat to human subjects research. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 115(27), E6106–E6115.
 7. Hamaker, E.L. (2012). Why researchers should think “within-person”: A paradigmatic rationale. In: M.R. Mehl & T.S. Conner (Eds.), *Handbook of research methods for studying daily life* (pp. 43—61). New York: The Guilford Press.
 8. Hox, J., Moerbeek, M., & Van de Schoot, R. (2017). *Multilevel analysis: Techniques and applications*. New York: Routledge. <https://doi.org/10.4324/9781315650982>
 9. Molenaar, P.C. (2008). On the implications of the classical ergodic theorems: Analysis of developmental processes has to focus on intra-individual variation. *Developmental Psychobiology*, 50(1), 60—69.
 10. Øksendal, B. (2003). Stochastic differential equations. In: *Stochastic differential equations: An introduction with applications* (pp. 38—50). Berlin, Heidelberg: Springer.
 11. Ram, N., & Gerstorff, D. (2009). Time-structured and net intraindividual variability: Tools for examining the development of dynamic characteristics and processes. *Psychology and Aging*, 24(4), 778.
 12. Raudenbush, S.W., & Bryk, A.S. (2002). *Hierarchical linear models: Applications and data analysis methods (Vol. 1)*. Thousand Oaks, CA: Sage.
 13. Rogoff, B. (2003). *The cultural nature of human development*. Oxford: Oxford University Press.
 14. Sweller, J., Van Merriënboer, J.J., & Paas, F. (2019). Cognitive architecture and instructional design: 20 years later. *Educational Psychology Review*, 31(2), 261—292.
 15. Van Der Maas, H.L., Kan, K.J., Marsman, M., & Stevenson, C.E. (2017). Network models for cognitive development and intelligence. *Journal of Intelligence*, 5(2), 16.

Информация об авторах

Колачев Никита Игоревич, кандидат психологических наук, доцент департамента психологии, Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики» (ФГАОУ ВПО НИУ ВШЭ); доцент дирекции образовательных программ, Московский городской педагогический университет (ГАОУ ВО МГПУ), Москва, Российская Федерация, ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-3214-6675>, e-mail: nkolachev@hse.ru

Адамский Александр Изотович, кандидат педагогических наук, доцент дирекции образовательных программ, Московский городской педагогический университет



(ГАОУ ВО МГПУ), Москва, Российская Федерация; научный руководитель, Институт проблем образовательной политики «Эврика», Москва, Российская Федерация, ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-5395-9464>, e-mail: aadam93@gmail.com

Дроздов Данила Сергеевич, аспирант, стажёр-исследователь департамента психологии, Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики» (ФГАОУ ВПО НИУ ВШЭ), Москва, Российская Федерация, ORCID: <https://orcid.org/0009-0007-2940-813X>, e-mail: Drozdov.D.S@hse.ru

Заславский Алексей Андреевич, кандидат педагогических наук, доцент дирекции образовательных программ, Московский городской педагогический университет (ГАОУ ВО МГПУ), Москва, Российская Федерация, ORCID: <https://orcid.org/0009-0009-4994-8971>, e-mail: zaslavskijjaa@mgpu.ru

Подболотова Марина Ивановна, кандидат педагогических наук, доцент дирекции образовательных программ, Московский городской педагогический университет (ГАОУ ВО МГПУ), Москва, Российская Федерация, ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-4208-1385>, e-mail: podbolotovami@mgpu.ru

Устюгова Ольга Борисовна, старший преподаватель дирекции образовательных программ, Московский городской педагогический университет (ГАОУ ВО МГПУ), Москва, Российская Федерация, ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-0886-2185>, e-mail: ustyugovaob@mgpu.ru

Information about the authors

Nikita I. Kolachev, PhD in Psychology, Associate Professor, Department of Psychology, HSE University, Moscow, Russian Federation; Associate Professor, Directorate of Educational Programmes, Moscow City University, Moscow, Russian Federation, ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-3214-6675>, e-mail: nkolachev@hse.ru

Alexander I. Adamsky, PhD in Pedagogy, Associate Professor, Directorate of Educational Programmes, Moscow City University, Moscow, Scientific Director, Institute for Problems of Educational Policy “Evrika”, Moscow, Russia, ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-5395-9464>, e-mail: aadam93@gmail.com

Danila S. Drozdov, PhD Student, Research Assistant, Department of Psychology, HSE University, Moscow, Russian Federation, ORCID: <https://orcid.org/0009-0007-2940-813X>, e-mail: Drozdov.D.S@hse.ru

Aleksey A. Zaslavskiy, PhD in Pedagogy, Associate Professor, Directorate of Educational Programmes, Moscow City University, Moscow, Russian Federation, ORCID: <https://orcid.org/0009-0009-4994-8971>, e-mail: zaslavskijjaa@mgpu.ru

Marina I. Podbolotova, PhD in Pedagogy, Associate Professor, Directorate of Educational Programmes, Moscow City University, Moscow, Russian Federation, ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-4208-1385>, e-mail: podbolotovami@mgpu.ru

Olga B. Ustyugova, Senior Lecturer, Directorate of Educational Programmes, Moscow City University, Moscow, Russian Federation, ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-0886-2185>, e-mail: ustyugovaob@mgpu.ru



Вклад авторов

Колачев Н.И. — применение математических и статистических методов для анализа данных; проведение исследования; сбор и анализ данных; визуализация результатов исследования; аннотирование, написание и оформление рукописи.

Адамский А.И. — планирование исследования; контроль за проведением исследования.

Дроздов Д.С. — планирование исследования; сбор данных; контроль за проведением исследования.

Заславский А.А. — планирование исследования; сбор данных; контроль за проведением исследования.

Подболотова М.И. — планирование исследования; сбор данных; контроль за проведением исследования.

Устюгова О.Б. — планирование исследования; сбор данных; контроль за проведением исследования.

Все авторы приняли участие в обсуждении результатов и согласовали окончательный текст рукописи.

Contribution of the authors

Nikita I. Kolachev — application of mathematical and statistical methods for data analysis; conduct of the study; data collection and analysis; visualization of the research results; manuscript annotation, writing, and preparation.

Alexander I. Adamsky — study design; supervision of the research process.

Danila S. Drozdov — study design; data collection; supervision of the research process.

Alexey A. Zaslavskiy — study design; data collection; supervision of the research process.

Marina I. Podbolotova — study design; data collection; supervision of the research process.

Olga B. Ustyugova — study design; data collection; supervision of the research process.

All authors participated in the discussion of the results and approved the final text of the manuscript.

Конфликт интересов

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Conflict of interest

The authors declare no conflict of interest.

Поступила в редакцию 15.01.2026

Поступила после рецензирования 23.01.2026

Принята к публикации 27.01.2026

Опубликована 31.03.2026

Received 2026.01.15

Revised 2026.01.23

Accepted 2026.01.27

Published 2026.03.31

Научная статья | Original paper

УДК 37:1

Неопределенность, как важная составляющая содержания современного высшего образования

М.В. Воронов

Московский государственный психолого-педагогический университет
(ФГБОУ ВО МГППУ), г. Москва, Российская Федерация

✉ mivoronov@yandex.ru

Резюме

В статье рассматривается ряд проблем, связанных с понятием «неопределенность». Отмечается многоаспектность этого феномена нашего мира. Высказываются предложения о более глубоком его изучении и привитии умений использовать получаемые при этом знания в последующей профессиональной деятельности выпускников вузов.

Ключевые слова: системность, неопределенность, относительность конкретного, подготовка специалистов

Для цитирования: Воронов, М.В. (2026). Неопределенность, как важная составляющая содержания современного высшего образования. *Моделирование и анализ данных*, 16(1), 177—185. <https://doi.org/10.17759/mda.2026160111>

Uncertainty as an important component of the content of modern higher education

M.V. Voronov

Moscow State University of Psychology and Education (MSUPE)
Moscow, Russian Federation

✉ mivoronov@yandex.ru

Abstract

The article discusses a number of problems related to the concept of “uncertainty.” The multifaceted nature of this phenomenon in our world is noted. Proposals are



made for a more in-depth study of this phenomenon and the development of skills to use the knowledge gained in the subsequent professional activities of university graduates.

Keywords: system, uncertainty, relativity of the concrete, training of specialists

For citation: Voronov, M.V. (2026). Uncertainty as an important component of the content of modern higher education. *Modelling and Data Analysis*, 16(1), 177–185. (In Russ.). <https://doi.org/10.17759/mda.2026160111>

Введение

Современный выпускник вуза с необходимостью должен иметь системное естественно-научное мировоззрение, мыслить и оперировать результатами современной науки и быть способным практически действовать на основе полученных фундаментальных знаний. Неотъемлемым признаком системности фундаментальной подготовки является понимание целостности мира, проявляющейся не только во взаимосвязанности и взаимодействии его составляющих, но и наличии у него ряда «системообразующих стержней» (Гриншкун, Левченко, 2011). Одним из таких стержней, по нашему мнению, является и заслуживает все большего внимания такой феномен как неопределенность и относительность конкретного, являющиеся неотъемлемыми компонентами, окружающей нас действительности.

Учет этого обстоятельства особенно актуален при подготовке специалистов — разработчиков новых программных продуктов, технологий и конструкций (инженеров, технологов, конструкторов, менеджеров и др.), которые в своей будущей деятельности должны всесторонне и адекватно реагировать на возможные последствия принимаемых ими решений, успех реализации которых по мере развития науки и техники во все больше мере зависит от грамотного учета факторов неопределенности.

Обсуждение темы

Мир, в котором мы живем, при несомненном наличии вполне детерминированных природой и социумом законов, часто проявляет себя неустойчивостью происходящих процессов и неоднозначной их зависимостью от предыдущих состояний и изменений условий их реализации. Как следствие, каждый специалист повсеместно сталкивается с незнанием всего того, что может повлиять на будущие изменения в рассматриваемых объектах или процессах. В этом случае говорят, что в будущем специалист будет находиться в условиях неопределенности и изменчивости, сложившихся на сегодня представлений и технических возможностей. То есть, он находится в рамках, обусловленных известным философским принципом относительности конкретного, непосредственно связанным с познанием неопределенности будущего развития природы и общества, техники и технологий.



На сегодня нет четкого определения понятия «неопределенность». По этому поводу уместно процитировать такое утверждение: «Будет глубочайшим заблуждением выдвигать универсальное определение для такой научной категории как неопределенность; рано или поздно найдутся моменты, которые не удалось или невозможно включить в ранее обобщенное, а оттого и содержание понятия «неопределенность» многогранно и во многом неповторимо» (Кузьмин, 2014, с. 101). Более того, полного определения категории неопределенности в принципе не может быть (По-видимому, этот факт есть следствие принципа относительности конкретного, который можно представить известным выражением: «полное знание об объекте невозможно».

Термин «неопределенность», несмотря на его частое употребление, связан с крайне сложной сущностью, которую этим термином обозначают (Дорожкин, Пакина, 2011, Талев, 2024). Вместе с тем, проявление этой сущности становится все более значимым фактором нашей действительности, следовательно, ее изучение и использование в учебном процессе вузов является актуальной задачей сегодняшнего дня.

Чтобы выявить и фиксировать различные степени или уровни знания об этом предмете рассмотрения, были введены понятия «определенный» и «неопределенный». Термин определенность связывают с такими понятиями как ясность, конкретность, точность, четкость, детерминированность явления или объекта. Состояние объекта называют определенным, если имеющиеся о данном объекте сведения вполне достаточны для гарантированного предсказания его состояния в будущем. В ином случае состояние рассматриваемого объекта называют неопределенным (Уляшева, 2006).

В различных ситуациях неопределенность, имея различные механизмы формирования, проявляется по-разному и, как следствие, несет неоднозначную смысловую нагрузку. В обыденном понимании неопределенность обычно связывается с такими факторами, как непредсказуемость, случайность, неоднозначность, неясность, нечеткость и др. (Шмырина, 2011). Специалисты же, например, конструкторы, как разработчики чего-то нового, постоянно сталкиваются с необходимостью разрешать проблемы, обусловленные (в том числе) неизвестными и неочевидными, но существующими множественными связями между явлениями и объектами, а также с неполнотой и неточностями имеющихся сведений о них. Именно поэтому говорят, что они работают в условиях неопределенности.

В связи с этим целесообразно рассмотреть некоторые основные аспекты результатов исследования понятия неопределенности. Практика показывает существование различных типов неопределенности, причем от типа неопределенности в существенной мере зависит способ и метод ее учета в деятельности разработчиков программ, инженеров, конструкторов и других специалистов.

Обычно различают следующие основные типы неопределенности:

- объективную неопределенность (или «неопределенность природы»);
- неопределенность, вызванную отсутствием достаточной релевантной информации (гносеологическая неопределенность);
- стратегическую неопределенность, вызванную зависимостью итоговой разработки от действий других лиц (партнеров, проектировщиков, финансистов, инвесторов, организаций и др.);



- неопределенность, порожденную слабоструктурированными проблемами (риски, возможные недостатки в планировании и реализации срока выполнения заказа и др.);
- неопределенность, вызванную нечеткостью (расплывчатостью) информации, описывающей рассматриваемые объекты и явления, например, лингвистическая неопределенность, связанная с неточностями восприятия естественного языка (Вертешев и др., 2019).

Каждый из перечисленных выше типов неопределенности имеет свои особенности и, следовательно, должен учитываться по-разному.

Несомненно, что первоисточником неопределенности является сам мир, в котором мы живем. Особенно ярко неопределенность проявляется при рассмотрении микромира. Так, широко известен принцип неопределенности В. Гейзенберга: любая физическая система не может находиться в состояниях, в которых координаты ее центра инерции и импульс принимают вполне определенные значения. В формальной записи этот принцип для микромира может быть представлен следующим образом:

$$\Delta x \cdot \Delta p_x > h/2\pi,$$

где Δx — неопределенность или погрешность измерения пространственной координаты микрочастицы, Δp_x — неопределенность импульса этой частицы, h — постоянная Планка, равная $6.626 \cdot 10^{-34}$ Дж·с. Таким образом, принцип неопределенности, представляющий одну из фундаментальных основ микромира, устанавливает предел возможной точности одновременного измерения координаты и импульса объекта.

Как видно, величина h чрезвычайно мала, поэтому в повседневной жизни и для макрообъектов эта неопределенность практически не существенна. Вместе с тем, используемые в повседневной практике современные технологии всё чаще базируются на законах микромира (достаточно упомянуть создание вычислительной техники, роботов, наноматериалов, солнечных фотопреобразователей и т.п.).

В этой связи при изучении в вузах дисциплин математики, физики, механики, материаловедения и ряда других необходимо акцентировать внимание студентов на источниках возникновения так называемой абсолютно объективной неопределенности.

В век повсеместной цифровизации нельзя не принимать во внимание также неопределенность, возникающую в процессе математических преобразований различных величин. Она имеет место, например, в процедурах округления числовых величин, а также при построении формальных представлений исследуемых объектов: при создании их математических моделей, линеаризации сложных зависимостей, при использовании разложения функции в ряд, замены функций их аппроксимациями, использовании статистически необработанных результатов измерений и др. (Афанасьева, 2007). Во многих вузовских программах изучается дисциплина «Приближенные вычисления». К сожалению, даже при корректном и достаточно полном изложении содержания этой дисциплины, редко уделяется необходимое внимание вопросам неопределенности, как таковым. Заметим, источником неопределенности в данном случае являются действия людей, осуществляемые при использовании



численных методов вычислений, что, порою, становится критически важным при компьютерном моделировании.

На практике очень часто встречаются ситуации, когда исследуемое явление в одних случаях происходит, а в других — нет. В этих случаях говорят, что имеет место случайность. Когда мы имеем дело со случайностью, то также оказываемся в условиях неопределенности. Наиболее яркий пример абсолютной случайности — радиоактивный распад вещества: во-первых, данная радиоактивная частица может распасться в любой момент времени, и во-вторых, заранее предсказать, когда это произойдет невозможно и повлиять на этот процесс мы также не можем.

Расчетной числовой характеристикой уровня случайности является вероятность, которая выступает предметом изучения соответствующей математической науки — теории вероятностей. Здесь необходимо отметить, что методы теории вероятностей по своей сути применимы только для исследования массовых случайных явлений, происходящих в одинаковых условиях. Однако, на практике эти условия далеко не всегда выполняются, и тогда использование результатов расчётов, полученных методами теории вероятностей, может приводить к ошибочным выводам.

В настоящее время в большинстве образовательных программ введены учебные дисциплины, в которых в той или иной мере изучается теория вероятностей. В ряде случаев рассматриваются вопросы решения задач с использованием знаний и методов этой теории, однако при этом редко заостряется вопрос о корректности этого пути. Способность обосновывать степень обоснованности применения теории вероятности — важная составляющая современного высшего образования.

Следует отметить такой важный факт: «физическая вероятность события может зависеть только от условий, влияющих на его появление, но не от уровня нашего сегодняшнего знания» (Смолуховский, 1927, с. 332), то есть это происходит в соответствии с принципом относительности конкретного, что еще раз подчеркивает объективность наличия по крайней мере физической случайности. Теория вероятностей и математическая статистика разрабатывают и используют инструменты для определения вероятности наступления случайного события, однако механизмы его наступления далеко не всегда известны или недостаточно тщательно изучены. Более того, основные эволюционные явления не описываются теорией вероятностей и требуют иных методов, а это приводит, подчас, к новому при выработке и понимании новых механизмов эволюции (Никитин, 2016).

В практической деятельности многих должностных лиц, программистов, инженеров и конструкторов важное место механизмы принятия решения. По существу, каждому действию разумного человека предшествуют мыслительные процессы, связанные с осуществлением последующих действий на основе принятого им решения. Если принимающий решение субъект имеет возможность оценить вероятности наступления возможных последствий принятого решения и связанные с ними потери или другого негативного последствия, то говорят о ситуации риска. Это понятие часто применяют в тех случаях, когда нужно отразить меру возможного нежелательно-го развития ситуации в результате принятого (или не принятого вовремя) решения



(Качалов, 2002). Несмотря на то, что риск относится к очень часто употребляемым терминам, его успешное определение и грамотное применение весьма проблематично. Это связано с несколькими причинами. Во-первых, как правило, при этом идет речь о принятии решения субъектом, который преследует достижения определенной цели. Следовательно, в основе риска лежит субъективный аспект (рискует принимающее решение конкретное лицо!). Во-вторых, в результате принятого варианта решения достижение этой цели носит, как правило, вероятностный характер. Это обстоятельство свидетельствует о том, что субъект принимает решение в различных условиях случайности. В-третьих, субъект вынужден принимать решение в условиях многокритериальности, когда у него имеется, как минимум, два обычно противоречащих друг другу варианта (часто предпочтительные варианты решения обычно связаны с ожиданием более значительных потерь).

Если решение вынужденно принимается при отсутствии возможности иметь оценку вероятности наступления возможных последствий, то говорят о принятии решения в условиях концептуальной неопределенности, например, в условиях неизвестного целенаправленного противодействия конкурента или так называемого «воздействия природы». В такой весьма сложной ситуации обоснованный вариант решения может быть принят только при условии получения лицом, принимающим решение, дополнительной информации (Воронов, 2024).

В том случае, когда информация представлена в вербальной (словесной) форме, имеет место так называемая лингвистическая неопределенность. Дело в том, что тексту, написанному на любом естественном языке, свойственна неоднозначность его интерпретации конкретным лицом. Во-первых, текст написан другим человеком, во-вторых, сообщение по мере прохождения каналов связи может искажаться, в-третьих, каждый человек, обладая своей индивидуальной моделью мира, по-своему воспринимает содержание каждого полученного текстового сообщения. В этой связи лингвистическую неопределенность часто называют «субъективной». Как же люди при общении, как правило, в достаточной мере адекватно понимают друг друга. Дало в том, что при так называемом «живом общении», например, преподавателя со студентами лингвистическую неопределенность замечают редко, поскольку она в значительной мере нивелируется пониманием контекста содержания обсуждаемого вопроса. Однако, при формулировании заданий на проектирование или, например, в программных продуктах, возникающая из словесных выражений неоднозначность является крайне нежелательной. Для снижения уровня такого рода неопределенности разрабатывается много различных методов. В настоящее время для студенческой аудитории большинства направлений подготовки весьма полезной является знакомство с основами нечеткой математики, где вводятся в рассмотрение так называемые нечеткие и лингвистические переменные, для оперирования которыми разработан специальный математический аппарат (Назаров, Конышева, 2023, Лисицына, 2020).

В процессах управления лицо принимающее решение часто находится в условиях различного уровня неопределенности, обусловленной, как правило, недостатком информации, необходимой для выработки обоснованного решения.



Ситуация неопределенности может возникать и при избыточности имеющейся информации. Важно подчеркнуть, независимо от того, принята во внимание неопределенность или нет, она не перестанет существовать, как объективная сущность нашего бытия (Давыденко, 2024).

Уровень неопределенности, в которой часто оказывается, например, лицо принимающее решение, можно интерпретировать как значение некой меры информированности субъекта. Следовательно, целесообразно ставить вопрос об измерении уровня неопределенности. В настоящее время в качестве меры неопределенности часто применяют понятие «энтропия». В различных предметных областях используются свои подходы к разрешению вопросов оценки уровня неопределенности (Хамханова, Грешилов, Хадыков, 2022, Шарапова, 2025). Так, например, в информатике значение энтропии используется, как мера неопределенности опыта, который может закончиться по-разному с различной вероятностью (Марченко, 2021).

Соответствующий раздел целесообразно ввести в ряд программ многих направлений подготовки.

Заключение

Таким образом, в силу объективности причин, связанных, в конечном счете, с развитием цивилизации, возрастает необходимость более серьезного отношения к проблематике неопределенности в целом и в ходе организации и осуществления учебного процесса, в частности. При этом сложность и многоаспектность неопределенности обуславливает серьезные трудности как при собственно изучении этой сущности, так и при учете ее свойств в будущей практической деятельности выпускников современной высшей школы.

Список источников / References

1. Афанасьева, В.В. (2007). *Онтология научной неопределенности*. — Саратов: Научная книга. — 110 с.
Afanas`eva, V.V. (2007). *Ontologiya nauchnoj neopredelennosti*. — Saratov: Nauchnaya kniga. — 110 p.
2. Вертешев, С.М., Воронов, М.В., Герасименко, П.В., Кремков М.В. (2019). *Принятие решений при управлении организационными системами*: Монография. — Псков: Псковский государственный университет. — 218 с.
Verteshev, S.M., Voronov, M.V., Gerasimenko, P.V., Kremkov, M.V.(2019). *Prinyatie reshenij pri upravlenii organizacionny`mi sistemami*: Monografiya. — Pskov: Pskovskij gosudarstvenny`j universitet. — 218 p.
3. Воронов, М.В., Пименов, В.И., Небаев, И.А. (2024). *Автоматическое управление. Управление организационными системами. Цифровые платформы. // Учебник для вузов*. — М.: Издательство Юрайт. — 475 с.
Voronov, M.V, Pimenov, V.I., Nebaev, I.A. (2024). *Avtomaticheskoe upravlenie. Upravlenie organizacionny`mi sistemami. Cifrovye platformy`*. // Uchebnik dlya vuzov. — M.: Izdatel`stvo Yurajt. — 475 p.



4. Гриншкун, В.В., Левченко, И.В. (2011). *Особенности фундаментализации образования на современном этапе его развития*. // Вестник Российского университета дружбы народов. Серия: Информатизация образования». № 1. С. 5—11.
Grinshkun, V.V., Levchenko, I.V. (2011). *Osobennosti fundamentalizacii obrazovaniya na sovremennom e`tape ego razvitiya*. // Vestnik Rossijskogo universiteta druzhby` narodov. Seriya: Informatizaciya obrazovaniya». № 1. p. 5—11.
5. Давыденко, Э.Н. (2024). *Неопределенность как экзистенциал человеческого бытия: философско-антропологический аспект проблемы*. // Контекст и рефлексия: философия о мире и человеке. Том 13, № 6А. С. 81—97.
Davy`denko, E`N. (2024). *Neopredelennost` kak e`kzistencial chelovecheskogo by`tiya: filosofsko-antropologicheskij aspekt problemy`*. // Kontekst i refleksiya: filosofiya o mire i cheloveke. Tom 13, № 6A. p.81—97.
6. Дорожкин, А.М., Пакина, Т.А. (2011). *Феномен научной неопределенности: анализ проблемы*. // Вестник Нижегородского университета. Серия социальные науки. № 4 (24). С. 102—108.
Dorozhkin, A.M., Pakina, T.A. (2011). *Fenomen nauchnoj neopredelennosti: analiz problemy`*. // Vestnik Nizhegorodskogo universiteta. Seriya social`ny`e nauki. № 4 (24). p. 102—108.
7. Качалов, Р.М. (2002). *Управление хозяйственным риском: монография* — М.: Наука. — 192 с.
Kachalov, R.M. (2002). *Upravlenie hozyajstvenny`m riskom*. — M.: Nauka. — 192 p.
8. Кузьмин, Е.А. (2014). *Проблема неопределенности как научной категории*. // Эффективное антикризисное управление. № 3 (84). С. 90—100.
Kuz`min, E.A. (2014). *Problema neopredelennosti kak nauchnoj kategorii*. //E`ffektivnoe antikrizisnoe upravlenie. № 3 (84). p. 90—100.
9. Лисицына, Л.С. (2020). *Основы теории нечетких множеств* — СПб: Университет ИТМО. — 74 с.
Lisicyna, L.S. (2020). *Osnovy` teorii nechetkix mnozhestv* — SPb: Universitet ITMO. — 74 p.
10. Марченко, А.Д., Тырсин, А.Н. (2021). *Использование энтропии взаимосвязи в анализе текстов на естественном языке //Современные наукоемкие технологии*. № 6 (часть 1) С. 67—73.
Marchenko, A.D., Ty`rsin, A.N. (2021). *Ispolzovanie entropii vzaimosvjazi v analize tekstov na estestvennom jazyke //Sovremenny`e naukoemkie texnologii*. № 6 (chast` 1) p. 67—73
11. Назаров, Д.М., Конышева Л.К. (2023). *Интеллектуальные системы: Основы теории нечетких множеств*. Учебное пособие для академического бакалавриата. — Москва: Издательство Юрайт. — 207 с.
Nazarov, D.M., Kony`sheva, L.K. (2023). *Iintellektual`ny`e sistemy`*: *Osnovy` teorii nechetkix mnozhestv*. Uchebnoe posobie dlya akademicheskogo bakalavriata. — Moskva: Izdatel`stvo Yurajt. — 207 p.
12. Никитин, А.В. (2016). *Общая логика. Этапы развития жизни на Земле. Часть 3 // «Академия. Тринитаризма», М., Эл № 77—6567, публ.22396, 08.08.2016. (дата обращения: 18.01.2026).*
Nikitin, A.V. (2016). *Obshhaya logika. E`tapy` razvitiya zhizni na Zemle. Chast` 3 // «Akademiya. Trinitarizma», М., E`l № 77—6567, publ.22396, 08.08.2016. (data obrashheniya: 18.01.2026).*
13. Смолуховский, М. (1927). *О понятии случайности и о происхождении законов вероятностей в физике*. // Успехи физических наук. № 7(5). С. 329—349.



- Smoluxovskij M. (1927). O ponyatii sluchajnosti i o proisxozhdenii zakonov veroyatnostej v fizike. // *Uspexi fizicheskix nauk*. № 7(5). p. 329—349.
14. Талеб, Н.Н. (2024). *Черный лебедь. Под знаком непредсказуемости*. М.: КоЛибри. — 736 с.
Taleb, N.N. Cherny`j lebed. (2024). *Pod znakom nepredskazuemosti*. М.: КоЛибри. — 736 p.
15. Уляшева, Я.О. (2006). *Логико-философский анализ понятийной категории определенности — неопределенности*. // *Известия ТРТУ*. № 2 (57). С. 59—66.
Ulyasheva, Ya.O. (2006). *Logiko-filosofskij analiz ponyatijnoj kategorii opredelennosti — neopredelennosti*. // *Izvestiya Yuzhnogo federal`nogo universiteta. Texnicheskie nauki*. № 2 (57). p. 59—66.
16. Хамханова, Д.Н., Грешилов, А.Д., Хадыков, М.Т. (2022). *Проблемы внедрения концепции неопределенности измерения в методы контроля в машиностроении* // *Известия ТулГУ. Технические науки*. Вып. 5. С. 48—53.
Khamkhanova, D.N., Greshilov, A.D., Khadykov, M.T. (2022). *Problems of Implementing the Concept of Measurement Uncertainty in Control Methods in Mechanical Engineering* // *Izvestiya TulGU. Technical Sciences*. Vol. 5. p. 48—53.
17. Шарапова, А.Г. (2025). *Неопределенность результатов испытаний: способы расчета и роль в системе управления качеством* // *Контроль качества продукции*. № 7. С. 18—25.
Sharapova, T.G. (2025). *Neopredelennost rezultatov ispitani: sposobi pascheta i rol v sisteme upravlenia achestvom* // *Kontrol kachestva produkcii*. № 7. p. 18—25.
18. Шмырина, Т.А. (2011). *Философские категории определенности и неопределенности и их влияние на социальное прогнозирование*. // *Вестник Тамбовского государственного университета*. № 2 (94). С. 271—274.
Shmy`rina, T.A. (2011). *Filosofskie kategorii opredelennosti i neopredelennosti i ix vliyanie na social`noe prognozirovanie*. // *Vestnik Tambovskogo gosuniversiteta*. № 2 (94). p. 271—274.

Информация об авторе

Михаил Владимирович Воронов, доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой прикладной математики факультета информационных технологий, ФГБОУ ВО «Московский государственный психолого-педагогический университет» (ФГБОУ ВО МГППУ), Москва, Российская Федерация, ORCID: orcid.org/0000-0001-7839-6250, e-mail: mivoronov@yandex.ru

Information about the author

Mikhail V. Voronov, Doctor of Technical Sciences, Professor, Head of the Department of Applied Mathematics at the Faculty of Information Technologies, Moscow State University of Psychology and Education (MSUPE), Moscow, Russian Federation, ORCID: orcid.org/0000-0001-7839-6250, e-mail: mivoronov@yandex.ru

Конфликт интересов

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Conflict of interest

The authors declare no conflict of interest.

Поступила в редакцию 09.02.2026

Поступила после рецензирования 20.02.2026

Принята к публикации 21.02.2026

Опубликована 31.03.2026

Received 2026.02.09

Revised 2026.02.20

Accepted 2026.02.21

Published 2026.03.31

Моделирование и анализ данных 2026. Том 16. № 1.

Научный журнал

Издаётся с 2011 года

Учредитель

Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Московский государственный психолого-педагогический университет»

Адрес редколлегии:

г. Москва, ул. Сретенка, 29, факультет информационных технологий

Тел.: +7 (499) 167-66-74

E-mail: mad.mgppu@gmail.com

Журнал зарегистрирован в Государственном комитете РФ по печати.

Свидетельство о регистрации средств массовой информации

ПИ № ФС77-66444 от 14 июля 2016 года

ISSN: 2219-3758

ISSN: 2311-9454 (online)

Подписано в печать: 17.03.2026.

Формат: 70x100¹/₁₆. Гарнитура Times.

Усл. печ. л. 11,5. Усл.-изд. л. 9,3.

Тираж 100 экз.