МОДЕЛИРОВАНИЕ

УДК 159.93

КАНОНИЧЕСКИЙ АНСАМБЛЬ САМОИЗБЕГАЮЩИХ БЛУЖДАНИЙ

В.И. Алхимов

В работе рассмотрена модель ансамбля частиц, случайно блуждающих без самопересечений в d – мерном евклидовом пространстве $\mathbf{R}^d$. При этом отдельные перемещения каждой частицы подчинены некоторому заданному распределению, а числа отдельных перемещений, составляющие траектории частиц, образуют канонический ансамбль. Полученное распределение расстояний между концами траекторий частиц в таком ансамбле представляет интерес для прикладных задач физики и биологии.

Model of ensemble of particles which are randomly wandering without self-intersections in d-dimensional Euclidean space $\mathbf{R}^d$ is under consideration. The individual displacements of each particle are subjects of given distribution and the number of their individual movements that compose trajectory, form a canonical ensemble. The distances distribution between start and end points of such trajectories could be useful in applied problems of physics and biology.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА
Случайное блуждание без самопересечений, канонический ансамбль, уравнение Дайсона, квантовая теория поля.

1. ВВЕДЕНИЕ

Вначале мы кратко изложим модель самоизбегающего случайного блуждания в d - мерном евклидовом пространстве $\mathbf{R}^d$, состоящего из последовательности N частичных перемещений $\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \ldots, \boldsymbol{r}_N$, каждое из которых имеет одну и ту же плотность распределения вероятностей $\tau(\boldsymbol{r}) = \tau(r)$ со средним квадратичным перемещением $\boldsymbol{E}r^2 = l^2$. При этом точки сочленения перемещений а также начало вектора $\boldsymbol{r}_1$ и конец вектора $\boldsymbol{r}_N$ являются центрами взаимно непроницаемых шаров - "исключённых" объёмов диаметра $r_0 < l$, пронумерованных от 0 до N соответственно. В результате указанного ограничения из множества всех возможных пространственных конфигураций рассматриваемого блуждания исключаются такие траектории, в которых расстояние $r_{ij} = \left|\mathbf{r}_i + \ldots + \mathbf{r}_j\right|$, $1 \le i < j \le N$, между центрами любой пары шаров меньше r_0. Введённый запрет оказывает существенное влияние на функциональную зависимость плотности вероятностей $W_N(\mathbf{R})$ от расстояния $R = r_{1N}$ между концами траектории, состоящей из N частичных перемещений, и поэтому его называют эффектом "исключённого" объёма. Запишем искомую плотность вероятностей $W_N(\mathbf{R})$ в форме интеграла Фурье

$$W_N(\mathbf{R}) = (2\pi)^{-d} \int\limits_{\mathbf{R}^d} e^{-i\,\mathbf{R}\cdot\mathbf{p}}\; \widetilde{W}_N(\mathbf{p})\, d\mathbf{p}\,, \tag{1}$$

где фурье – образ $\widetilde{W}_N(\mathbf{p})$ плотности $W_N(\mathbf{R})$ определяется равенством

$$\widetilde{W}_N(\mathbf{p}) = Q_N^{-1} \int P_{1N} \prod_{k=1}^{N} e^{i\,\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}_k} \tau(\mathbf{r}_k)\, d\mathbf{r}_k\,, \tag{2}$$

в котором

$$Q_N = \int P_{1N} \prod_{k=1}^{N} \tau(\mathbf{r}_k)\, d\mathbf{r}_k \tag{3}$$

обозначает нормировочный множитель,

$$P_{mn} = \prod_{m\,\le\,\mathrm{k}\,<\,\mathrm{l}}\ \prod_{\le\, n} \left(1 - \upsilon_{\mathrm{kl}}\right), \tag{4}$$

где

$$\upsilon_{\mathrm{kl}} \equiv \upsilon(r_{kl}),\ \ \upsilon(r) = \theta(r_0 - r), \tag{5}$$

$$\omega \int\limits_0^{\infty} \tau(r)\, r^{2s+1} dr = 1,\ \ \omega = 2\pi^{s+1}/\Gamma(s+1),\ \ s = (d-2)/2,$$

$\theta(r)$ - функция Хевисайда, $d\mathbf{r} = \omega r^{2s+1}\, dr$ - элемент объёма, а ω - полная поверхность сферы единичного радиуса в $\mathbf{R}^d$, $\Gamma(x)$ - гамма - функция Эйлера. Далее удобно использовать функцию

$$V_N(\mathbf{R}) = Q_N W_N(\mathbf{R}), \tag{6}$$

её фурье - образ

$$\widetilde{V}_N(\mathbf{p}) = Q_N \widetilde{W}_N(\mathbf{p}) \tag{7}$$

и производящую функцию

$$\widetilde{V}(z,\mathbf{p}) = \boxed{?} \sum_{N=0}^{\infty} z^N\, \widetilde{V}_N(\mathbf{p}). \tag{8}$$

2. ОСНОВНОЕ УРАВНЕНИЕ

Теперь определим функцию $f(z,\mathbf{p})$ посредством равенства

$$f(z,\mathbf{p}) = -\frac{1}{(2\pi)^d} \int d\,\mathbf{p}_1\, \widetilde{\upsilon}(\mathbf{p}_1)\, \widetilde{V}(z, \mathbf{p} - \mathbf{p}_1)\, Y(z, \mathbf{p}, \mathbf{p}_1, \mathbf{p} - \mathbf{p}_1), \tag{9}$$

в котором

$$\tilde{\upsilon}(\mathbf{p})= \int_{\mathbf{R}^d} e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}} \ \upsilon(r)\, d\,\mathbf{r} \ = \ \upsilon_0 \ \Lambda_{s+1}(r_0 p), \qquad \upsilon_0 = \pi^{s+1}\, r_0^{\ 2(s+1)} \big/ \Gamma(s+2), \tag{10}$$

$\Lambda_\kappa(x) = \Gamma(\kappa+1)\,(2/x)^\kappa\ J_\kappa(x)$, υ_0 – объём шара диаметра r_0 в $\mathbf{R}^d$, $J_\kappa(x)$– функция Бесселя первого рода, а так называемая “вершинная“ функция $Y(z,\mathbf{p},\mathbf{p}_1,\mathbf{p}-\mathbf{p}_1)$ представляет собой ряд, первые два члена которого можно записать как

$$Y(z,\mathbf{p},\mathbf{p}_1,\mathbf{p}-\mathbf{p}_1) = 1 - \frac{1}{(2\pi)^d} \int d\,\mathbf{p}_2\ \tilde{\upsilon}(\mathbf{p}_2)\ \tilde{V}(z,\mathbf{p}-\mathbf{p}_1-\mathbf{p}_2)\,\tilde{V}(z,\mathbf{p}-\mathbf{p}_2) + \ldots, \tag{11}$$

а в целом его структуру удобно охарактеризовать в символической форме:

$$Y(z,\mathbf{p}) \ = \ \sum_{n\ge 1} N_n \int \left\{\frac{d\,\mathbf{p}'}{(2\pi)^d}\right\}^n \left\{-\tilde{\upsilon}(\mathbf{p}')\right\}^n \left\{\tilde{V}\ (z,\ \mathbf{p}-\mathbf{p}')\right\}^{2n}; \tag{12}$$

здесь N_n обозначает число "неприводимых" членов ряда, содержащих под знаком интеграла функцию $\tilde{\upsilon}$ в n - й степени. Точная формула для величины N_n неизвестна, но для больших значений n имеет место асимптотическая оценка: $N_n = O\ ((2n - 1)!!)$ при $n \to \infty$. Особым свойством этого ряда является тот факт, что при переходе от одних членов ряда к другим появление под знаком интеграла величины $\tilde{\upsilon}$ всегда сопровождается умножением её на произведение двух искомых функций $\tilde{V}$. Определим теперь преобразование Фурье $\tilde{\tau}(p)$ плотности $\tau(r)$:

$$\tilde{\tau}(p) = \int_{\mathbf{R}^d} e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}}\ \tau(r)\, d\,\mathbf{r} \ = \ \omega \int_0^\infty \Lambda_s(pr)\,\tau(r)\ r^{2s+1}\, dr\,, \tag{13}$$

предполагая, что $\tau(r)$ однозначно определяется своими моментами $\mathbf{E}\,r^{2m}$.

В этом случае фурье - образ $\tilde{\tau}(p)$ можно представить в виде ряда

$$\tilde{\tau}(p) \ = \ \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\Gamma(1+s)}{m!\ \Gamma(1+s+m)} \left(-\frac{p^2}{4}\right)^m \mathbf{E}r^{2m},$$

абсолютно сходящегося для всех действительных значений p. Тогда при выполнении условия

$$\left|\ z\,\tilde{\tau}(p) + f(z,\mathbf{p})\right| < 1 \tag{14}$$

справедливо уравнение :

$$\tilde{V}^{-1}(z,\mathbf{p}) = \tilde{V}_0^{-1}(z,\mathbf{p}) - f(z,\mathbf{p}), \tag{15}$$

где

$$\tilde{V}_0^{-1}(z,\mathbf{p}) = 1 - z\ \tilde{\tau}(p).$$

Уравнение (15) по своей форме аналогично известному уравнению Дайсона в квантовой теории поля и в рассматриваемой проблеме играет основополагающую роль, в связи с чем мы будем называть его основным уравнением [1], [2]. Отсюда вытекает важное свойство уравнения (15) - инвариантность его относительно мультипликативных преобразований:

$$\tilde{V} \to \tilde{V}' = \alpha \tilde{V}, \qquad \tilde{V}_0 \to \tilde{V}_0' = \alpha \tilde{V}_0, \qquad \tilde{\upsilon} \to \tilde{\upsilon}' = \alpha^{-2} \tilde{\upsilon},$$
$$f \to f' = \alpha^{-1} f, \qquad Y \to Y' = Y, \tag{16}$$

где α - не равный нулю непрерывный параметр. Эти преобразования образуют непрерывную группу, называемую обычно ренормгруппой (РГ), благодаря чему свойство (16) является исходной точкой для применения ренормгруппового метода в исследуемой здесь задаче. Формулы (9)-(11) описывают искомую связь между функциями $f(z,\mathbf{p})$ и $\tilde{V}(z,\mathbf{p})$, составляя вместе с основным уравнением (15) замкнутую систему. Если бы удалось отыскать решение уравнения (15), то с помощью формул обращения

$$W_N(\mathbf{R}) = \left[\oint_\gamma \frac{dz}{z^{N+1}} \tilde{V}(z,0) \right]^{-1} \oint_\gamma \frac{dz}{z^{N+1}} V(z,\mathbf{R}), \tag{17}$$

$$V(z,\mathbf{R}) = (2\pi)^{-d} \int_{\mathbf{R}^d} e^{-i\,\mathbf{R}\cdot\mathbf{p}}\, \tilde{V}(z,\mathbf{p})\, d\mathbf{p}\,, \tag{18}$$

мы пришли бы к искомому результату. Однако проблема решения основного уравнения и последующего определения функции $W_N(\mathbf{R})$ чрезвычайно сложна. Более реальной задачей в этом случае является вычисление асимптотики плотности $W_N(\mathbf{R})$ при больших значениях N и R. Но из формул (17) и (18) следует, что для этого необходимо знать поведение функции $\tilde{V}(z,\mathbf{p})$ при малых значениях $\big|1-|z|\big|$ и p. Если в формуле (8) воспользоваться неравенством $\left|\tilde{V}_N(\mathbf{p})\right| \le 1, \ \forall N \ge 0$, вытекающим из (2) и (7), то получим неравенство $\left|\tilde{V}(z,\mathbf{p})\right| \le \dfrac{1}{1-|z|}, \quad |z| < 1$, использование которого совместно с неравенством (13) в уравнении (15) приводит к условию $1-|z| \le \left|1 - z\,\tilde{\tau}(p) - f(z,\mathbf{p})\right| \le 2$, выражающему ограниченность функции $f(z,\mathbf{p})$ в области $|z|<1$ для всех вещественных значений p. Но тогда фигурирующий в правой части равенства (9) интеграл и его подынтегральные функции при указанных выше условиях также должны быть ограничены, а ряд в (11) в этом случае будет сходящимся. Обратимся к формулам (7) и (8), согласно которым

$$\tilde{V}(z,0) = Q(z) \equiv \sum_{N=0}^{\infty} z^N Q_N. \tag{19}$$

Объединяя последнее равенство с уравнением (15), приходим к соотношению

$$Q^{-1}(z) = 1 - z - f(z,0)\,. \tag{20}$$

Пусть теперь z_0 обозначает ближайшую к началу координат на комплексной плоскости переменной z особую точку функции $Q(z)$, т. е. по определению имеем

$$1 - z_0 - f(z_0, 0) \equiv 0\,. \tag{21}$$

Отсюда нетрудно видеть, что $z_0 = z_0(\upsilon_0)$, причём $z_0(0) = 1$. Таким образом, учёт эффекта "исключённого" объёма приводит к смещению особой точки z_0 из её "невозмущённого" положения $z_0(0)=1$. Далее пусть $p_\pm \equiv \pm i\eta$ – ближайшие к началу p=0 корни уравнения $\tilde{V}^{-1}(z,\mathbf{p})=0$, в котором значения z принадлежат окрестности точки z_0 . Тогда, полагая $p\equiv i\eta$ в (15), получим

$$1-z\,\tilde{\tau}(i\eta)-f(z,\ i\eta)\equiv 0. \tag{22}$$

Учитывая последнее тождество в (15), приходим к уравнению

$$\tilde{V}^{-1}(z,p) = z\left(\tilde{\tau}(i\eta)-\tilde{\tau}(p)\right)+f(z,\ i\eta)-f(z,p). \tag{23}$$

Если теперь обе части равенства (23) умножить на $\zeta = z_0/z$, и ввести обозначения

$$\bar{V}(\zeta,\mathrm{p})=\zeta^{-1}\,\tilde{V}(z,\mathrm{p}),\quad \bar{V}_0^{-1}(\zeta,\mathrm{p})=z_0\left(\tilde{\tau}(i\eta)-\tilde{\tau}(p)\right),$$

$$F(\zeta,p;\bar{\upsilon};\bar{V})=\zeta\ f(z,p),\quad \bar{\upsilon} = \zeta^2\,\tilde{\upsilon}/l^d\,,$$

то приходим к соотношению

$$\bar{V}^{-1}(\zeta,p) = \bar{V}_0^{-1}(\zeta,p)+F\left(\zeta,\ i\eta;\ \bar{\upsilon};\bar{V}\right)-F\left(\zeta,\ p;\bar{\upsilon};\bar{V}\right), \tag{24}$$

кроме того, из тождеств (21) и (22) следует формула

$$\zeta-1-\bar{V}_0^{-1}(\zeta,0)+F\left(\zeta,\ 0\ ;\ \bar{\upsilon};\bar{V}\right)-F\left(\zeta,\ i\eta\ ;\ \bar{\upsilon};\bar{V}\right) = 0, \tag{25}$$

которая определяет функциональную зависимость $\eta=\eta(\zeta)$, благодаря чему $\eta(1) = 0$. Уравнение (24) совместно с равенством (25) составляют основу излагаемого здесь метода исследования данной проблемы. При этом формулы (17) и (18) в новых переменных имеют следующий вид

$$W_N(R)=\left[\oint_{\bar{\gamma}} d\zeta\,\zeta^N\ \bar{V}(\zeta,0)\right]^{-1}\oint_{\bar{\gamma}} d\zeta\ \zeta^N\,\hat{V}(\zeta,R), \tag{26}$$

где

$$\hat{V}(\zeta,R)=(2\pi)^{-d}\int_{\mathbf{R}^d} e^{-i\,\mathbf{R}\cdot\mathbf{p}}\ \bar{V}(\zeta,p)\,d\mathbf{p}\,, \tag{27}$$

а контур интегрирования $\bar{\gamma}$ в (26) расположен в комплексной плоскости переменной ζ справа от единичного круга, на границе которого в точке ζ =1 и внутри него расположены все особые точки подынтегральной функции. Функцию $\bar{V}_0^{-1}(\zeta,p)$ в (24) запишем с помощью формулы (13) в виде

$$\bar{V}_0^{-1}(\zeta,p) = z_0\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\Gamma(1+s)}{4^m\ m!\,\Gamma(1+s+m)}\left[\eta^{2m}+(-1)^{m+1}p^{2m}\right]\mathbf{E}\,r^{2m}\,, \tag{28}$$

откуда для малых значений $|\,\zeta-1\,|$ (или, что то же, для малых значений η^2) и p^2 следует

$$\bar{V}_0^{-1}(\zeta,p)\cong\frac{z_0\,l^2}{2\,d}\left(\eta^2+p^2\right),$$

а связь между переменными ζ и η согласно (25) принимает вид

$$\zeta - 1 \cong \frac{z_0\, l^2}{2\,d}\eta^2 \;+\; F\big(\,\zeta,\, i\eta\,;\,\bar{\upsilon};\,\bar{V}\,\big) - F\big(\,\zeta,\, 0\,;\,\bar{\upsilon}\,;\,\bar{V}\,\big)\;. \tag{29}$$

3. УРАВНЕНИЕ РЕНОРМГРУППЫ (РГ)

Далее с целью использования метода ренормгруппы запишем искомую функцию $\bar{V}(\zeta, p)$ в виде

$$\bar{V}(\zeta, p) = \bar{V}_0(\zeta, p)\, G\,, \tag{30}$$

где величина G удовлетворяет согласно (24) уравнению

$$G^{-1} = 1 + \Phi\big(\eta^2, \rho^{2;}; \bar{\upsilon}; G\,\big)\,, \tag{31}$$

в котором введены новая переменная $\rho^2 \equiv \eta^2 + p^2$ и новая функция

$$\Phi\big(\eta^2, \rho^{2;}; \bar{\upsilon}; G\,\big) = \bar{V}_0(\zeta, p)\;\big[\,F\big(\,\zeta,\, i\eta;\, \bar{\upsilon};\, \bar{V}_0\, G\big) - F\big(\,\zeta,\, p; \bar{\upsilon};\, \bar{V}_0\, G\big)\big]\,. \tag{32}$$

Предположим теперь, что $\Phi\big(\eta^2,\, \lambda\,; \bar{\upsilon}; G\,\big) = 0$, т. е. в точке $\rho^2 = \lambda$ выполняется равенство $G\,\big|_{\rho^2=\lambda} = 1$. Тогда, если выполнить преобразование $G' = \alpha G,\;\; \bar{\upsilon}' = \alpha^{-2}\,\bar{\upsilon}$ и выбрать значение $\rho^2 = \lambda'$ так, чтобы $\Phi\big(\eta^2,\, \lambda'; \bar{\upsilon}'; G'\,\big) = 1 - \alpha^{-1}$, т. е. имело место равенство $G'\,\big|_{\rho^2=\lambda'} = 1$, то уравнение для *G* принимает инвариантную форму

$$G'^{-1} = 1 + \Phi\big(\eta^2,\, \rho^{2;}; \bar{\upsilon}'; G'\,\big) - \Phi\big(\eta^2,\, \lambda'; \bar{\upsilon}'; G'\,\big)$$

относительно преобразования: $G \to G',\;\; \bar{\upsilon} \to \bar{\upsilon}',\;\; \lambda \to \lambda'.$ Отсюда следует, что безразмерную величину G можно рассматривать как функцию безразмерных переменных $G = G\big(\eta^2/\lambda,\; \rho^2/\lambda\;;\; \bar{\upsilon}\,\big)$, для которой равенство $G\,\big|_{\rho^2=\lambda} = 1$, записанное в виде $G = G\big(\eta^2/\lambda, 1\,; \bar{\upsilon}\big) = 1$, называется условием нормировки. Ренормгрупповое свойство уравнения (31) теперь можно выразить равенством

$$\alpha\, G\big(\eta^2/\lambda,\; \rho^2/\lambda\,;\; \bar{\upsilon}\big) = G\big(\eta^2/\lambda',\; \rho^2/\lambda'\,;\; \bar{\upsilon}'\,\big),$$

означающим, что умножение функции *G* на отличное от нуля число α эквивалентно изменению точки нормировки λ и перенормировке "исключённого" объёма $\bar{\upsilon}$. Если ввести обозначения $x = \eta^2/\lambda,\quad y = \rho^2/\lambda,\quad t = \lambda'/\lambda$, то для инвариантной относительно РГ - преобразований величины $B(x, y; \bar{\upsilon}) = \bar{\upsilon}\, G^2(x, y; \bar{\upsilon})$ мы получим отсюда функциональное уравнение

$$B(x, y; \bar{\upsilon}) = B\big(x/t, y/t; B(x, t; \bar{\upsilon})\big) \tag{33}$$

со следующим условием нормировки $B(x, 1;\, \bar{\upsilon}) = \bar{\upsilon}$. Уравнение (33) является замкнутым и может быть решено в общем виде [3]. Однако для практических целей более удобно иметь дело с дифференциальными уравнениями Ли в силу непрерывности ренормгруппы. Для того чтобы получить уравнение Ли, например для $B(x, y; \bar{\upsilon})$, продифференцируем обе части равенства (33) по *y* и затем положим *t*=*y*. В результате имеем

$$y\,\frac{\partial\, B(x,y;\overline{\upsilon})}{\partial\, y} \;=\; \beta\!\left(\frac{x}{y};\, B(x,y;\overline{\upsilon})\right), \tag{34}$$

где

$$\beta(x;\overline{\upsilon}) = \left[\,\partial B(x,y;\overline{\upsilon})/\partial y\,\right]_{y=1}, \tag{35}$$

а граничным условием для уравнения (34) служит условие нормировки $B(x,1;\,\overline{\upsilon}) = \overline{\upsilon}$. Приведенные выше РГ - уравнения оказываются особенно полезными при исследовании асимптотических свойств функции $G(x,y;\overline{\upsilon})$. Например, чтобы определить поведение функции $G(x,y;\overline{\upsilon})$, когда $x << y$ и $y \to 0$, выберем точку нормировки λ, удовлетворяющую неравенству $\eta^2 << \rho^2 < \lambda$ и в уравнении (34) перейдём к пределу, устремляя η^2 к нулю. Тогда, обозначая

$$B(y;\overline{\upsilon}) = \lim_{x\to 0} B(x,y;\overline{\upsilon})\;, \quad \beta(\overline{\upsilon}) = \left[\,\partial B(y;\overline{\upsilon})/\partial y\,\right]_{y=1}, \tag{36}$$

мы придём к следующему уравнению

$$y\,\frac{\partial B(y;\overline{\upsilon})}{\partial y} \;=\; \beta(B(y;\overline{\upsilon})) \tag{37}$$

с граничным условием $B(1;\overline{\upsilon}) = \overline{\upsilon}$. Уравнение (37) совместно с последним равенством можно записать в форме уравнения Гелл-Манна - Лоу:

$$\int_{\overline{\upsilon}}^{B(y,\overline{\upsilon})} \frac{d\,t}{\beta\,(t)} \;=\; \ln\, y, \tag{38}$$

очень удобной для анализа поведения инвариантного "исключённого" объёма $B(y;\overline{\upsilon})$ в области малых значений y или $\rho^2 << \lambda$ [2]. Таким образом, согласно РГ - уравнениям, эффективным параметром, характеризующим интенсивность объёмного взаимодействия в малой окрестности точек $\eta = 0$ и $\rho = 0$ является инвариантный "исключённый" объём. Поэтому, чтобы определить асимптотику, например функции $G(y;\overline{\upsilon})$, когда $y \to 0$, необходимо знать в этом случае поведение величины $B(y;\overline{\upsilon})$, которое в свою очередь определяется свойствами функции $\beta(B)$ в соответствии с уравнением (35). В самом деле, когда величина $\beta(B)$ положительна, то в случае $y \to 0$ инвариантный "исключённый" объём $B(y;\overline{\upsilon})$ будет убывать. Если при некотором значении $B = \overline{\upsilon}_* < \overline{\upsilon}$ функция $\beta(B)$ обращается в нуль и интеграл в левой части уравнения (38) расходится, то, стало быть, и правая часть этого уравнения должна обращаться в бесконечность. Иными словами, при $y \to 0$ имеем $B(y;\overline{\upsilon}) \to \overline{\upsilon}_*$, где $\beta(\overline{\upsilon}_*) = 0$. Необходимо отметить, что среди нулей функции $\beta(B)$ обязательно имеется $B = 0$. Если же величина $\beta(B)$ отрицательна, то в этом случае ситуация обратная. Отсюда следует, что нули функции $\beta(B)$ могут быть стабильными и нестабильными. Когда величина B лежит в окрестности стабильного нуля $\overline{\upsilon}_*$, то инвариантный "исключённый" объём $B(y;\overline{\upsilon})$ стремится к $\overline{\upsilon}_*$ при $y \to 0$. В том случае, когда нуль $\overline{\upsilon}_*$ нестабилен, величина $B(y;\overline{\upsilon})$ при $y \to 0$ удаляется от $\overline{\upsilon}_*$, стремясь к следующему нулю либо к бесконечности. Поскольку для вычисления функции $\beta(B)$ обычно используется теория возмущений, то реально можно судить о её поведении лишь в малой окрестности точки $B = 0$, в которой $\beta(0) = 0$. Действительно, если в этой окрестности величина $\beta(B)$ положительна, то инвариантный "исключённый" объём $B(y\,;\bar{\upsilon})$ стремится к нулю, когда $y \to 0$. Если же функция $\beta(B)$ отрицательна вблизи нуля, то при $y \to 0$ величина $B(y\,;\bar{\upsilon})$ возрастает, в результате чего мы выходим за рамки применимости теории возмущений. Обратимся теперь к уравнению (24) и рассмотрим его правую часть

$$F(\zeta,\ p\,;\bar{\upsilon};\bar{V}) = -\,(l/2\pi)^d \int d\,\mathbf{p}_1\,\bar{\upsilon}(\mathbf{p}_1)\,\bar{V}(\zeta,\mathbf{p}-\mathbf{p}_1)\ +$$

$$+\ (l/2\pi)^{2d}\int d\,\mathbf{p}_1\,d\mathbf{p}_2\,\bar{\upsilon}(\mathbf{p}_1)\,\bar{\upsilon}(\mathbf{p}_2)\,\bar{V}(\zeta,\mathbf{p}-\mathbf{p}_1)\,\bar{V}(\zeta,\mathbf{p}-\mathbf{p}_1-\mathbf{p}_2)\,\bar{V}(\zeta,\mathbf{p}-\mathbf{p}_2) - \ldots, \qquad (39)$$

в которой согласно методу теории возмущений вместо искомой функции $\bar{V}(\zeta, p)$ используется функция $\bar{V}_0(\zeta, p)$ в качестве "нулевого " приближения.

4. АСИМПТОТИКА РАСПРЕДЕЛЕНИЯ РАССТОЯНИЙ МЕЖДУ КОНЦАМИ САМОИЗБЕГАЮЩЕЙ ТРАЕКТОРИИ БЛУЖДАЮЩЕЙ ЧАСТИЦЫ

В соответствии с замечанием, сделанным выше относительно структуры ряда в (11), переход от первого слагаемого в правой части равенства (39) к его второму слагаемому сопровождается появлением дополнительного интеграла

$$I(\mathbf{p},\mathbf{p}_1) = -\,(l/2\pi)^d \int d\,\mathbf{p}_2\,\bar{\upsilon}(\mathbf{p}_2)\,\bar{V}(\zeta,\mathbf{p}-\mathbf{p}_1-\mathbf{p}_2)\,\bar{V}(\zeta,\mathbf{p}-\mathbf{p}_2),$$

что свидетельствует о РГ - инвариантности основного уравнения. Если теперь в выражении

$$I_0(\mathbf{p},\mathbf{p}_1) = -\,(l/2\pi)^d \int d\,\mathbf{p}_2\,\bar{\upsilon}(\mathbf{p}_2)\,\bar{V}_0(\zeta,\mathbf{p}-\mathbf{p}_1-\mathbf{p}_2)\,\bar{V}_0(\zeta,\mathbf{p}-\mathbf{p}_2)$$

выполнить замену $p = \eta\, p'$, $p_1 = \eta\, p_1'$, $p_2 = \eta\, p_2'$ и принять во внимание формулы (10) и (28), то получим, что $I_0(\mathbf{p},\mathbf{p}_1) = O\left(\eta^{2(s-1)}\right)$, когда $\eta \to 0$. Отсюда следует, что роль эффекта "исключённого" объёма наиболее существенна при $s \le 1$ $(d \le 4)$, вследствие чего его влияние на искомый вид асимптотики плотности $W_N(R)$ будет определяющим. В этом случае величина $\Phi(\eta^2, \rho^{2;}; \bar{\upsilon}; G)$ в (32) становится неограниченной, а точки $p_{\pm} \equiv \pm\, i\eta$ не являются простыми нулями разности $F(\zeta,\ i\eta;\ \bar{\upsilon};\ \bar{V}_0\,G)\ -\ F(\zeta,\ p;\bar{\upsilon};\ \bar{V}_0 G)$. Поскольку в окрестностях точек $\eta = 0$ и $p = 0$ переменные η и p присутствуют явно в (24) лишь в виде комбинации $\eta^2 + p^2 \equiv \rho^2$, то естественно допустить, что функция $\Phi(\eta^2, \rho^{2;}; \bar{\upsilon}; G)$ ведёт себя в окрестности точек $p_{\pm} \equiv \pm\, i\eta$ $(\rho = 0)$ как $O\left(\rho^{-2\mu}\right)$, где $0 < \mu < 1$, и неограниченно возрастает, когда $\rho \to \infty$. Подобное поведение функции $\Phi(\eta^2, \rho^{2;}; \bar{\upsilon}; G)$ удобно описать с помощью функции Макдональда $K_\kappa(\rho)$:

$$\Phi(\eta^2, \rho^{2;}; \bar{\upsilon}; G) = a\,\rho^{-(1+\mu)}\,K^{-1}_{1-\mu}(b\,\rho),$$

где $a > 0$ и $b > 0$ суть некоторые параметры, зависящие от η, υ_0/l^d и d. Это предположение указывает на отличие поведения искомой асимптотики плотности вероятности от нормального закона вследствие запрета на самопересечения. Из приведенных выше обсуждений предполагаемого поведения функции $\Phi(\eta^2, \rho^{2;}; \bar{\upsilon}; G)$ а также из уравнений (30), (31) следует, что в качестве исходного приближения для искомой функции $\overline{V}(\zeta, p)$ можно принять функцию

$$\varphi(\eta, p) = A\,\rho^{2(\mu-1)}\,\overline{K}_{1-\mu}(l\,\rho), \tag{40}$$

где $\overline{K}_k(z) = z^k K_k(z)$, а значения параметров A и $\mu = \mu(d)$ при выполнении условий: $0 < \mu < 1,\ 2 \le d < 4\ \ (0 \le s < 1)$ должны быть ещё найдены. Тогда, согласно формулам (27) и (40), соответствующее приближение для функции $\hat{V}(\eta, R)$ есть

$$\psi(\eta,\ R) = (2\pi)^{-d/2}\,A L^{-2\nu}\,\overline{K}_\nu(\eta L), \tag{41}$$

Где $L^2 = R^2 + l^2,\quad \nu \equiv \mu + s,\quad s < \nu < 1$.

В дальнейшем мы воспользуемся асимптотическим поведением функции $K_k(z)$ при малых и больших значениях аргумента z:

$$\frac{2^{1-\kappa}}{\Gamma(\kappa)}\,\overline{K}_\kappa(z) = 1 - \frac{\Gamma(1-\kappa)}{\Gamma(1+\kappa)}\left(\frac{z}{2}\right)^{2\kappa} + \frac{1}{(1-\kappa)}\left(\frac{z}{2}\right)^2 + O\!\left(z^{2(1+\kappa)}\right), \qquad z \to 0, \tag{42}$$

$$K_\kappa(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}}\;e^{-z}\left[1 + O\left(z^{-1}\right)\right], \qquad |z| \to \infty. \tag{43}$$

Кроме того, функция $K_k(z)$ при каждом фиксированном значении $z \ne 0$ является целой функцией от индекса κ, который функционально связан с размерностью d пространства $\mathbf{R}^d$. Для того чтобы найти значение параметра μ воспользуемся следующим способом. В соответствии с формулой (26) и принятым приближением (40) и, как следствие, (41) составим для плотности вероятности $W_N(R)$ следующее приближение

$$w_N(R) = \left[\oint_{\bar{\gamma}} d\zeta\,\zeta^N\ \varphi(\eta, 0)\right]^{-1} \oint_{\bar{\gamma}} d\zeta\ \zeta^N\,\psi(\eta, R), \tag{44}$$

для которого получим асимптотическую оценку, когда $N \to \infty$, но значение R при этом остаётся фиксированным. Поскольку плотность $w_N(\mathbf{R})$ является положительной величиной и, следовательно,

$$\operatorname{Im}\ w_N(\mathbf{R}) = 0, \tag{45}$$

то выполнение этого условия потребуем и для её асимптотики. Далее в выражении (44) перейдём от переменной ζ к переменной η с помощью формул (25) и (39), имеющих теперь вид

$$\zeta - 1 - z_0\,(\tilde{\tau}(i\eta) - 1) + F(\zeta,\ 0\ ;\ \upsilon\ ;\varphi) - F(\zeta,\ i\eta\ ;\ \upsilon\ ;\varphi) = 0, \tag{46}$$

$$F(\zeta,\ p\,;\upsilon;\varphi) = -\,(l/2\pi)^d \int d\,\mathbf{p}_1\,\upsilon(\mathbf{p}_1)\ \varphi(\zeta, \mathbf{p} - \mathbf{p}_1) \ + \tag{47}$$

$$+\quad (l/2\pi)^{2d} \int d\,\mathbf{p}_1\ d\mathbf{p}_2\ \upsilon(\mathbf{p}_1)\ \upsilon(\mathbf{p}_2)\ \varphi(\zeta, \mathbf{p} - \mathbf{p}_1)\,\varphi(\zeta, \mathbf{p} - \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2)\,\varphi(\zeta, \mathbf{p} - \mathbf{p}_2) - \ldots.$$

Оценка членов ряда в правой части последнего равенства показывает, что Сходимость интегралов в (47) обеспечивается при выполнении одного из эквивалентных условий: $\mu > \dfrac{1-s}{2}, \qquad \nu > \dfrac{1+s}{2}$ в силу соотношения $\nu = \mu + s$. В итоге выражение (47) в окрестностях точек $p = 0$ и $\eta = 0$ принимает вид

$$F(\zeta, p; \bar{\upsilon}; \varphi) = \alpha(p) + k(p)\,\eta^{2\nu} + O\left(l^2\eta^2\right), \tag{48}$$

где

$$\alpha(p) = -A_0\, l^{-2\nu}\, \bar{\upsilon}(p) + A_1\, l^{2(1+s-3\nu)}\, \bar{\upsilon}^2(p)\, \bar{K}_{3\nu-s-1}(lp),$$
$$k(p) = \frac{A_0\,\Gamma(1-\nu)}{4^\nu\,\Gamma(1+\nu)}\, \bar{\upsilon}(p) - A_2\, l^{2(1+s-2\nu)}\, \bar{\upsilon}^2(p)\, \bar{K}_{2\nu-s-1}(lp),$$
$$A_0 = C_0 A, \qquad A_1 = C_1 A^3, \qquad A_2 = C_2 A^3,$$

а C_0, C_1, C_2 – вполне определённые положительные постоянные. Подставляя выражение (48) в равенство (46), мы приходим к искомой связи между ζ и η:

$$\zeta - 1 = k_0 \eta^{2\nu} + O\left((l\eta)^{2(3\nu-s-1)}\right), \qquad \eta \to 0, \tag{49}$$

где $k_0 \equiv k(0) > 0$. Обратимся теперь к формуле (44) и выполним асимптотическую оценку плотности $w_N(R)$, когда $N \to \infty$, но значение R при этом остаётся фиксированным. С этой целью в интегралах формулы (44) удобно ввести новую переменную интегрировании ξ посредством равенства $\zeta - 1 = k_0\, l^{-2\nu}\, \xi$, вследствие которого из (49) следует

$$\xi = (l\eta)^{2\eta} + O\left((l\eta)^{2(3\nu-s-1)}\right), \quad \eta \to 0, \tag{50}$$

а контур интегрирования $\bar{\gamma}$ в (44) по этой переменной тогда будет расположен в её правой полуплоскости. Теперь проведём разрез в комплексной плоскости переменной ξ вдоль её отрицательной вещественной оси и в обоих интегралах формулы (44) сдвинем контур интегрирования $\bar{\gamma}$ бесконечно далеко в левую полуплоскость, обходя особые точки подынтегральных функций, среди которых точка $\xi = 0$ имеет наибольшую вещественную часть. Поэтому наибольший вклад в величину $w_N(R)$ при $N \to \infty$ вносит результат интегрирования в (44) по той части контура $\bar{\gamma}$, которая охватывает указанный разрез $(-\infty, 0\,]$. Далее, если обозначить через $\xi_- = \xi \exp(-i\pi)$ и $\xi_+ = \xi \exp(i\pi)$, где $\xi > 0$, значения переменной ξ соответственно на нижнем и на верхнем берегах разреза $(-\infty, 0]$, и в формуле (44) учесть интегрирование лишь по контуру, охватывающему этот разрез, то получим

$$w_N(R) \sim \left[\int\limits_0^\infty \exp\left(-N\, k_0\, l^{-2\nu}\xi\right)\, \Delta\varphi(\eta) d\xi\right]^{-1} \times \int\limits_0^\infty \exp\left(-N\, k_0\, l^{-2\nu}\xi\right)\, \Delta\psi(\eta, R) d\xi\,, \tag{51}$$
$$N \to \infty,$$

где

$$\Delta\varphi(\eta) \equiv \varphi(\eta_+, 0) - \varphi(\eta_-, 0) =$$

$$= A\Gamma(1-\mu)\, 2^{-\mu} \left[\eta_{+}^{2(\mu-1)} - \eta_{-}^{2(\mu-1)} + \frac{l^2}{4\mu}\left(\eta_{+}^{2\mu} - \eta_{-}^{2\mu}\right) + O\!\left(\eta^2 l^{2(2-\mu)}\right)\right],$$

$$\Delta\psi(\eta,R) \equiv \psi(\eta_{+}, R) - \psi(\eta_{-}, R) =$$

$$= \frac{A\Gamma(\nu)}{(2\pi)^{d/2}\, 2^{1-\nu}}\left[\frac{\Gamma(1-\nu)}{2^{2\nu}\,\Gamma(1+\nu)}\left(\eta_{-}^{\;2\nu} - \eta_{+}^{\;2\nu}\right) + \frac{L^{2(1-\nu)}}{4(1-\nu)}\left(\eta_{+}^{\;2} - \eta_{-}^{\;2}\right) + O\!\left(L^2\eta^{2(1+\nu)}\right)\right], \ .$$

а переменные $\eta_{-} = \eta_{-}(\xi)$ и $\eta_{+} = \eta_{+}(\xi)$ согласно (50), связаны с ξ вблизи точки $\xi = 0$ на нижнем и верхнем берегах разреза $(-\infty, 0\,]$ как

$$\xi\, e^{\pm i\pi} = (l\,\eta_{\pm})^{2\nu} + O\!\left((l\,\eta_{\pm})^{2(3\nu-s-1)}\right), \qquad \eta_{\pm} \to 0.$$

Асимптотическая оценка интегралов в (51) при $N \to \infty$ даёт

$$w_N(R) \sim \frac{C\, L^{2(1-\nu)}}{(k_0\, N)^{(2-\mu)/\nu}}\left[\frac{\exp(i\pi/\nu) - \exp(-i\pi/\nu)}{\exp[i\pi(\mu-1)/\nu] - \exp[-i\pi(\mu-1)/\nu]}\right], \qquad N \to \infty, \tag{52}$$

где C обозначает вполне определённую положительную константу. Согласно условию (45) величина в квадратных скобках асимптотического выражения (52) должна быть положительной. Последнее требование соблюдается при выполнении равенства

$$\frac{\pi}{\nu} + \frac{\pi}{\nu}(1-\mu) = 2\pi n, \qquad n = 1, 2, \ldots,$$

которое совместно с условием $\nu = \mu + s$ лишь для $n = 1$. Отсюда находим

$$\mu = \frac{2}{3}(1-s) = \frac{4-d}{3}, \qquad \nu = \frac{s+2}{3} = \frac{d+2}{6}. \tag{53}$$

Таким образом, искомая асимптотика плотности $w_N(R)$ при $N \to \infty$ имеет следующий вид

$$w_N(R) \sim C\, L^{2(1-s)/3}\, (k_0 N)^{-2}. \tag{54}$$

Здесь следует отметить, что отличие поведения последнего выражения от нормального распределения при $N \to \infty$ уменьшается, когда размерность d увеличивается, приближаясь к d=4. Этот вывод можно объяснить убыванием эффекта, обусловленного существованием "исключённого" объёма, с ростом пространственной размерности.

Далее соответственно приближению (40) для функции $\overline{V}(\zeta, p)$ и равенству (30) определим приближение $\overline{G}$ для G посредством выражений

$$\varphi(\eta, p) = \varphi_0(\eta, p)\,\overline{G}, \quad \varphi_0^{-1}(\eta, p) = z_0\left(\tilde{\tau}(i\eta) - \tilde{\tau}(p)\right) \tag{55}$$

и проверим будет ли функция $\overline{G}$ удовлетворять в определённом смысле уравнению, аналогичному (31). Эту проверку удобно провести при $\eta = 0$ и в окрестности точки $p = 0$, где по предположению находится точка нормировки $p^2 = \lambda$. С этой целью обратимся к формулам (32) и (47) и вычислим асимптотику функции

$$\Phi\left(0, p^{2;}; \upsilon; \overline{G}\right) = \varphi_0(0, p)\left[F(1, 0; \upsilon; \varphi) - F(1, p; \upsilon; \varphi)\right] \tag{56}$$

при $p^2 \to 0$. Подставляя в правую часть равенства (56) выражение для $F(\zeta,\ p;\overline{\upsilon};\ \varphi)$ из (48), приходим к равенству

$$\Phi\left(0, p^{2;}; \overline{\upsilon}; \overline{G}\ \right) = \varphi_0(0, p)\ \left[\alpha(0) - \alpha(p)\right], \tag{57}$$

в котором

$$\alpha(0)-\alpha(p) = A_0 l^{-2\nu} \upsilon_0 \left[\Lambda_{s+1}(r_0 p) - 1\right] + A_1 l^{-2} \upsilon_0^2 \left[\overline{K}_1(0) - \Lambda^2_{s+1}(r_0 p)\,\overline{K}_1(lp)\right],$$

$$\Lambda_{s+1}(z) = 1 - \frac{z^2}{4(s+2)} + O(z^4), \qquad z \to 0,$$

$$\overline{K}_1(z) = 1 + \frac{z^2}{2} \ln\frac{z}{2} + (2\gamma - 1)\left(\frac{z}{2}\right)^2 + O(z^4 \ln z), \qquad z \to 0,$$

где $\gamma = 0{,}577215\ldots$ – постоянная Эйлера–Маскерони. Отсюда мы приходим к следующему выражению

$$\Phi\left(0, p^{2;}; \overline{\upsilon}; \overline{G}\ \right) = -C_d\, A^3\, z_0^{-1}\, l^{-2}\, \upsilon_0^2 \ln\left(l^2 p^2\right) + \Omega\left(A, l, r_0\right) + O\left(r_0^2 p^2 \ln\left(l^2 p^2\right)\right), \tag{58}$$

когда $p^2 \to 0$, при этом независящая от p^2 величина $\Omega\left(A, l, r_0\right)$ связывает указанные параметры задачи, а $C_d = d\,\Gamma^3(\nu) / 8(2\pi)^d\ \Gamma(3\nu)$.

Таким образом, с одной стороны, согласно определениям в (40) и (55), в малой окрестности точки $p = 0$ имеем

$$\left.\frac{\partial \overline{G}(0, p)}{\partial \ln p^2}\right|_{p^2=\lambda} = \mu \qquad 59)$$

а с другой стороны - функция $\overline{G}\,(0, p)$ должна удовлетворять уравнению

$$\overline{G}^{-1}(0, p) = 1 + \Phi\left(0, p^2; \overline{\upsilon}; \overline{G}\right)$$

в его дифференциальной форме

$$\left.\frac{\partial \overline{G}(0, p)}{\partial \ln p^2}\right|_{p^2=\lambda} = -\left.\frac{\partial \Phi\left(0, p^2; \overline{\upsilon}\overline{G}^{\,2}; \overline{G}\right)}{\partial \ln p^2}\right|_{p^2=\lambda} \tag{60}$$

согласно РГ-уравнению в (37). Следовательно, правые части уравнений (59) и (60) должны совпадать, чтобы выражение (40) с найденными значениями можно было рассматривать в качестве исходного приближения при решении основного уравнения. Отсюда находим

$$A = \left[(4 - d)\ z_0\, l^2 / 6\, C_d\, \upsilon_0\right]^{1/3}\ .$$

Тем самым, значения всех параметров определены и мы можем теперь установить явный вид функций $\varphi(\eta, 0)$ и $\psi(\eta, R)$ и, следовательно, найти с помощью равенства (44) искомую асимптотику плотности вероятности. Последнюю мы найдём с помощью метода перевала [4] при условии $(R/l) \to \infty$ и $N \to \infty$, но их отношение (R/Nl) фиксировано и мало. В итоге главный член асимптотического разложения функции $w_N\ (R)$ имеет следующий вид

$$w_N\left(R\right) \sim A_d\ \overline{L}^{-d}\ Z^{(4-d)D/6}\ \exp\left(-a_d Z^D\right)\left[1 + O\left(Z^{-D}\right)\right], \tag{61}$$

где

$$\overline{L} = \left(k_0 N\right)^{3/(d+2)}, \quad Z = \sqrt{R^2 + l^2} \bigg/ \overline{L}, \quad D = (d+2)/(d-1),$$

а A_d и a_d - вполне определённые положительные постоянные.

Случай $d = 4$ является особым и его следует рассматривать отдельно. Тем не менее, полученный результат позволяет предположить, что в случае $d > 4$ асимптотика плотности $w_N\left(R\right)$ при указанных выше условиях будет иметь вид нормального распределения. Это означает, что в этом случае эффект “исключённого“ объёма оказывает несущественное влияния на распределение расстояния между концами траектории блуждающей частицы.

5. КАНОНИЧЕСКИЙ АНСАМБЛЬ САМОИЗБЕГАЮЩИХ БЛУЖДАНИЙ

Рассмотренная выше модель самоизбегающего блуждания представляет собой определённый случайный процесс в $\mathbf{R}^d$, для которого отдельные перемещения, составляющие в целом траекторию частицы, подчинены одному и тому же распределению. Но число отдельных перемещений, образующих траекторию, называемое здесь модулем, тоже можно считать случайной величиной, что обуславливает необходимость в определении для неё некоторого распределения. С этой целью рассмотрим модель ансамбля частиц, блуждающих без самопересечений в $\mathbf{R}^d$, и построим распределение по модулям их траекторий следующим образом. Предположим, что из начала координат в случайные моменты времени стартуют частицы, число M которых по истечении некоторого промежутка времени равно сумме по всем натуральным n от числа m_n траекторий с модулем, равным n. Кроме того, в пределе при $M \to \infty$ задаётся среднее число $\overline{N}$ отдельных перемещений (среднее значение модуля), т.е.

$$\sum_{n=1}^{\infty} m_n \equiv \Xi = M, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} n\, m_n \equiv \overline{\Xi} = M\, \overline{N}. \tag{62}$$

Для указанных в (62) условий найдём наиболее вероятное распределение траекторий по их модулям в предельно случае $M \to \infty$. При этом предполагается, что модули могут принимать любое из значений $n \in Z_+$. Если в указанном ансамбле траектории m_n частиц имеют модуль, равный n, то набор целых чисел $\left\{m_n\right\}$ описывает любое распределение частиц по модулям их траекторий. Обозначим через $W\left\{m_n\right\}$ число различных способов распределения траекторий по их модулям при соблюдении условий в (62). Очевидно, что для $W\left\{m_n\right\}$ имеет место равенство

$$W\left\{m_n\right\} = \frac{M!}{m_0!\, m_1!\, m_2! \ldots}, \tag{63}$$

Согласно аксиоме равных априорных вероятностей в этом случае Можно утверждать, что все распределения величины $\overline{\Xi}$ между траекториями ансамбля имеют одинаковую вероятность, если соблюдены условия в (62). Однако задача состоит в отыскании наиболее вероятного набор $\left\{\overline{m}_n\right\}$, соответствующего максимальному значению величины $W\left\{m_n\right\}$, определяемой формулой (63). Если эта задача решена, то нетрудно показать, что в пределе при

$M \to \infty$ почти все возможные наборы $\{m_n\}$ совпадают с $\{\overline{m}_n\}$ и тогда набор $\{\overline{m}_n\}$ можно найти, вычисляя среднее значение m_n по всем возможным распределениям

$$\langle m_n \rangle \equiv \left[\sum_{\{m_k \geq 0\}} \delta_{\Xi,M}\ \delta_{\overline{\Xi},M\overline{N}}\ W\{m_k\} \right]^{-1} \sum_{\{m_k \geq 0\}} \delta_{\Xi,M}\ \delta_{\overline{\Xi},M\overline{N}}\ m_n W\{m_k\}, \tag{63}$$

где $\delta_{\Xi,M}$ и $\delta_{\overline{\Xi},M\overline{N}}$ суть символы Кронекера, а суммирование выполняется по всем наборам $m_k \in Z_+$, $k \in Z_+$, удовлетворяющим условиям (62). Тогда, следуя стандартному выводу канонического распределения [5] мы получим

$$\lim_{M \to \infty} \frac{\langle m_n \rangle}{M} \equiv P(n) = \left[\sum_{k=0}^{\infty} e^{-qk} \right]^{-1} e^{-qn} \ , \tag{64}$$

где положительный параметр q определяется равенством $\overline{N} = \mathbf{E}n \equiv \sum_{n=0}^{\infty} n\ P(n)$, из которого находим $q = \ln\left(1 + 1/\overline{N}\ \right)$. Отсюда следует, что дисперсия $\mathbf{D}m_n = \langle m_n^2 \rangle - \langle m_n \rangle^2$ в пределе при $M \to \infty$ обращается в нуль и, следовательно, в этом пределе $\{m_n\} \to \{\overline{m}_n\}$. Теперь усредним плотность вероятности $W_n(R)$с помощью распределения (64). Для этого обратимся к формуле (26) и перепишем её в виде

$$W_n(R) = \overline{Q}_n^{-1} \oint_{\bar{\gamma}} d\zeta\ \zeta^n\ \hat{V}(\zeta, R),$$

где

$$\overline{Q}_n \equiv \oint_{\bar{\gamma}} d\zeta\ \zeta^n\ \overline{V}(\zeta, 0).$$

Тогда усреднение плотности $W_n(R)$ по распределению (64) приводит к формуле $\mathbf{E}W_n(R) = \dfrac{1}{\overline{N}} \oint_{\bar{\gamma}} d\zeta\ \hat{Q}(\zeta)\ \hat{V}\left(\left(1 + \overline{N}^{-1}\right)\zeta,\ R\ \right)$,в которой было использовано равенство

$$\mathbf{E}\overline{Q}_n^{-1}\ \zeta^n \ \equiv\ \sum_{n=0}^{\infty} \overline{Q}_n^{-1}\ \zeta^n\ P(n)\ =\ \frac{1}{\overline{N}+1}\ \hat{Q}\left(\frac{\overline{N}}{\overline{N}+1}\ \zeta\right),$$

при этом усреднение плотности по указанному выше распределению не нарушает условие нормировки результата. Аналогично изложенному выше подходу запишем исходное приближение в (44) посредство равенства

$$w_N(R)\ =\ \overline{C}_n^{-1} \oint_{\bar{\gamma}} d\zeta\ \zeta^N\ \psi(\eta, R),$$

где связь между переменными ζ и η определена в (49), и усредним его по распределению (64):

$$\mathbf{E}w_N(R)\ =\ \frac{1}{\overline{N}+1} \oint_{\bar{\gamma}} d\zeta\ \hat{C}\left(\frac{\overline{N}}{\overline{N}+1}\ \zeta\right) \psi(\eta, R), \tag{65}$$

где

$$\hat{C}(\zeta)\ = \sum_{n=0}^{\infty} \overline{C}_n^{-1}\ \zeta^n\ . \qquad \overline{C}_n\ \equiv\ \oint_{\bar{\gamma}} d\zeta\ \zeta^n\ \varphi(\eta, 0).$$

Из последнего равенства с помощью формулы обращения [6] имеем

$$\sum_{n=0}^{\infty} \overline{C}_n z^n = \frac{2\pi}{i z} \varphi\left(\left(\frac{1-z}{k_0 z}\right)^{\frac{1}{2\nu}}, 0\right),$$

откуда согласно выражению (40) асимптотическое поведение суммы в последнем равенстве описывается следующим образом

$$\sum_{n=0}^{\infty} \overline{C}_n z^n \sim \frac{2\pi}{i z} A \overline{K}_{1-\mu}(0) \left(\frac{1-z}{k_0 z}\right)^{-\frac{1+2s}{2+s}}, \qquad z \to 1-.$$

Тогда, согласно теореме Таубера [7], имеем

$$\overline{C}_n \sim \frac{2\pi}{i z} A \overline{K}_{1-\mu}(0) \Gamma^{-1}\left(\frac{1+2s}{2+s}\right) k_0^{\frac{1+2s}{2+s}} n^{-\frac{1-s}{2+s}}, \qquad n \to \infty,$$

и поэтому ряд, представляющий функцию $\hat{C}\left(\frac{\overline{N}}{\overline{N}+1}\zeta\right)$ под знаком интеграла в (65) сходится при условии $0 \le |\zeta| < 1 + \overline{N}^{-1}$ или, что равносильно, $0 \le |\eta| < \left(k_0 \overline{N}\right)^{-\frac{1}{2\nu}}$. Далее, поскольку $\left\{\overline{C}_n^{-1}\right\}$ являются коэффициентами ряда, представляющего функцию $\hat{C}(\zeta)$, то, используя теорему Таубера, но теперь обратном порядке, находим, что

$$\hat{C}\left(\frac{\overline{N}}{\overline{N}+1}\zeta\right) \sim i \zeta_0^{\frac{1}{\nu}} A^{-1} k_0^{-\frac{1+2s}{2+s}} \left(\zeta_0 - \zeta\right)^{-\frac{1}{\nu}}, \qquad \zeta \to \zeta_0 \equiv 1 + \frac{1}{\overline{N}}.$$

Отсюда следует, что в точке $\zeta = \zeta_0$ подынтегральная функция в (65) имеет неинтегрируемую особенность. Поэтому в комплексной плоскости переменной ζ проведём разрез по лучу $[\zeta_0, \infty)$ и сдвинем контур интегрирования $\bar{\gamma}$ бесконечно далеко в правую полуплоскость. Тогда путь интегрирования пройдёт по нижнему берегу разреза из $+\infty$ к точке ζ_0, обойдёт её слева по окружности бесконечно малого радиуса и затем пойдёт в $+\infty$ по верхнему берегу разреза. Учитывая экспоненциальный характер стремления к нулю подынтегральной функции при $\zeta \to +\infty$, мы получим после интегрирования по частям следующее равенство

$$\int_{\bar{\gamma}} d\zeta \left(\zeta_0 - \zeta\right)^{-\frac{1}{\nu}} \psi(\eta, R) = -\left(\frac{2+\mathrm{s}}{1-\mathrm{s}}\right) \int_{\bar{\gamma}} d\zeta \left(\zeta_0 - \zeta\right)^{-\frac{1-\mathrm{s}}{2+\mathrm{s}}} \psi'_{\zeta}(\eta, R),$$

в правой части которого

$$\psi'_{\zeta}(\eta, R) = -\frac{A}{2\nu(2\pi)^{1+s} k_0} \overline{K}_{1-\nu}(\eta L), \qquad L = \sqrt{l^2 + R^2},$$

а особенность в точке ζ_0 теперь интегрируема. Таким образом, выражение (65) принимает вид

$$\mathbf{E} w_N(R) = \frac{C_d}{1-s} \sin\left(\frac{1-s}{2+s}\pi\right) \left(k_0 \overline{N}\right)^{-\frac{d}{2\nu}} \mathrm{X}\left(L \left(k_0 \overline{N}\right)^{-\frac{1}{2\nu}}\right), \tag{66}$$

где C_d – некоторая положительная постоянная, а функция

$$\mathrm{X}(x) = \int_0^\infty dy\ y^{-\frac{1-s}{2+s}}\ \overline{K}_{1-\nu}\left(x\ (1+y)^{\frac{1}{2\nu}} \right), \qquad x > 0,$$

убывает с ростом переменной x в области $(0, \infty)$ сначала медленно, а затем (для $x >$ O (1)) – экспоненциально быстро. Формула (66) описывает искомое распределение канонического ансамбля.

ЛИТЕРАТУРА

1. В.И. Алхимов. Случайные блуждания без самопересечений. М.: МГОБУ ВПО МГППУ, 2015 – 121 с.
2. Н.Н. Боголюбов и Д.В. Ширков. Введение в теорию квантованных полей. М.: Наука, 1976.
3. Л.В. Овсянников. Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978.
4. М.В. Федорюк. Метод перевала. М.: Наука, 1977.
5. Керзон Хуанг. Статистическая механика. М.: Мир, 1966.
6. Э. Титчмарш. Теория функций. М.: Наука, 1980.
7. В. Феллер. Введение в теорию вероятностей и её приложения, т. 2. М.: Мир, 1967.

Работа поступила 10.11.2015