ТЕОРИЯ УПРАВЛЕНИЯ

УДК 004.942

ЧИСЛЕННЫЙ АЛГОРИТМ ПОИСКА СУБОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ДИСКРЕТНОЙ СТОХАСТИЧЕСКОЙ СИСТЕМОЙ С ВЕРОЯТНОСТНЫМ КРИТЕРИЕМ

А.Н. Тарасов, В.М. Азанов

Рассматривается численный алгоритм для поиска субоптимального управления для систем, заданных разностными уравнениями. С использованием численного метода удается найти изобеллы уровня 1 и 0, нахождение которых позволяет найти субоптимальное управление, не решая систему, в которой присутствует функция Беллмана, вычисление которой затруднительно. С использованием описанной численной процедуры решается пример, полученный результат сравнивается с аналитически найденым оптимальным управлением.

Numerical algorithm for finding a suboptimal control for systems defined by difference equations is being considered. The usage of numerical method makes it possible to find level 1 and 0 isobelles, the finding of which allows to discover a suboptimal control without solving the system where the Bellman function is presented, the calculation of which is complicated. The example is resolved using the described numerical procedure. The result obtained is compared with the analytically found optimal control.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА
Стохастическое оптимальное управление, вероятностный критерий, численные методы, Монте-Карло, дискретные системы, метод динамического программирования.

ДЛЯ ЦИТАТЫ
А.Н. Тарасов, В.М. Азанов. Численный алгоритм поиска субоптимального управления дискретной стохастической системой с вероятностным критерием // Моделирование и анализ данных. 2019. №2. С.73-82.

A.N. Tarasov, V.M. Azanov. Numerical algorithm for finding a suboptimal control of a discrete stochastic system with a probability criterion. Modelirovaniye i analiz dannykh=Modelling and data analysis *(Russia)*. 2019, no.2, pp.73-82.

1. ВВЕДЕНИЕ

Задачи оптимального управления по вероятностным критериям качества составляют предмет изучения специального раздела теории стохастического оптимального управления. Основным алгоритмом решения данного типа задач является метод динамического программирования (МДП). Использование данного метода сопряжено с сложностью получения аналитического решения. Это подтверждается тем, что для достаточно простых систем получаемые решения имеют сложную структуру и их вычисление затруднительно, например, в работах [1, 2].

В данной статье предложен численный алгоритм для поиска субоптимального управления для задач с вероятностным точностным функционалом, который позволяет получать решение без вычисления функции Беллмана.

2. ОБЩАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть динамика объекта управления описывается разностным уравнением

$$x_{k+1} = f_k(x_k, u_k, \xi_k), \quad k = \overline{0,N}, \tag{1}$$

где

- $x_k \in \mathbb{R}^n$ - вектор состояния, $x_0 = X_0$ - начальное состояние предполагается случайным с известным распределением P_{X_0};
- $u_k \in U_k \subset \mathbb{R}^m$ - вектор управления;
- ξ_k - случайный вектор с известным распределением P_k, с носителем распределения $\Xi_k = \{\zeta \in \mathbb{R}^s : b_{k1}^i \le \zeta^{\mathrm{i}} \le \mathrm{b}_{k2}^i,\ \mathrm{i} = \overline{1,s}\}$;
- $f_k: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^s \to \mathbb{R}^n$ - непрерывная для всех $k = \overline{0,N}$ функция;
- $\xi^k = (\xi_0, \ldots, \xi_k)^T$, пусть ξ^N не зависит от X, а ξ_{k+1} не зависит от ξ^k;
- U_k - множество борелевских функций, для которых выполняется $u_k(x_k) \in U_k$;
- N – конечный момент времени, называемый горизонтом управления.

На траекториях системы (1) определим функционал вероятности

$$P_\varphi(u(\cdot)) = \mathrm{P}(\Phi(x_{N+1}(u(\cdot), \zeta)) \le \varphi), \tag{2}$$

где P - вероятностное распределение случайного вектора $\zeta = (X^T, \xi_0{}^T, \ldots, \xi_N{}^T)^T$, $\Phi: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ - ограниченная снизу непрерывная функция, $\varphi \in \mathbb{R}$ - заданное значение.

Хотелось бы обратить внимание на то, что в аэрокосмической практике одним из важнейших требований, предъявляемых к проектируемой системе управления, оказывается неравенство

$$P_\varphi(u(\cdot)) \ge \alpha,$$

где $\alpha \in [0,1]$ - минимально допустимая вероятность выполнения цели управления. Физически α характеризует надежность модели, а это неравенство трактуется следующим образом: заданная точность φ системы управления гарантирована с вероятностью α. Это послужило мотивацией для исследования задачи

$$P_\varphi(u(\cdot)) \to \max_{u(\cdot) \in U}, \tag{3}$$

где $U = U_0 \times \ldots \times U_N$, алгоритму решения которой посвящена данная статья.

Достаточно продолжительное временя было известно небольшое количество качественных результатов, касающихся задачи (3). Численный метод, предлагаемый в [9,10], ограничивает общность классов систем управления, случайных возмущений, управляющих функций и точностных функционалов.

В работе [8] было установлено, что если существует стратегия $u^\varphi(\cdot) \in U$, удовлетворяющая следующим рекуррентным соотношением динамического программирования, то она оптимальна в задаче (3)

$$u_k^{\varphi}(x_k) = \arg\max_{u_k \in U_k} \mathrm{M}_k[\mathrm{B}_{k+1}^{\varphi}(f_k(x_k, u_k, \xi_k)) \mid x_k],$$
$$\mathrm{B}_k^{\varphi}(x) = \max_{u \in U_k} \mathrm{M}_k[\mathrm{B}_{k+1}^{\varphi}(f_k(x_k, u_k, \xi_k)) \mid x_k = x], \quad k = \overline{0, N} \tag{4}$$
$$\mathrm{B}_{N+1}^{\varphi}(x) = \mathrm{I}_{(-\infty, \varphi]}(\Phi(x)),$$

где M_k - оператор математического ожидания по распределению P_k, $\mathrm{I}_A(x)$ - индикаторная функция множества A, $\mathrm{B}_k^{\varphi}(x)$ - функция Беллмана

$$\mathrm{B}_k^{\varphi}(x) = \sup_{u_k(\cdot) \in \tilde{U}_k, \ldots, u_N(\cdot) \in \tilde{U}_N} \mathrm{P}(\Phi(x_{N+1}(x_k, u_k(\cdot), \ldots u_N(\cdot), \xi_k, \ldots \xi_N)) \mid x_k = x).$$

Важным для дальнейшего является свойство ограниченности функции Беллмана $\mathrm{B}_{\mathrm{k}}^{\varphi}(x) \in [0,1], \forall x \in \mathbb{R}^n, k = \overline{0, N}$, вытекающие из определения вероятности. Для более компактной записи вместо $\mathrm{M}_k[\mathrm{B}_{k+1}^{\varphi}(f_k(x_k, u_k, \xi_k)) \mid x_k = x]$ будем использовать $\mathrm{M}_k[\mathrm{B}_{k+1}^{\varphi}(f_k(x, u_k, \xi_k))]$.

В работе [7] сформулированы достаточные условия существования решения в задаче (3). В публикациях [4,5] с использованием поверхностей 1 и 0 уровней Беллмана и модифицированными выражениями для МДП удалось найти аналитические решения для некоторого набора аэрокосмических задач. Также удалось доказать теорему, которая позволяет найти субоптимальное управление без необходимости разрешения системы, содержащей функцию Беллмана.

Задача нахождения оптимальной марковской стратегии в стратегии в соответствии с предложенными выше условиями [8] сопряжена с трудностями вычисления функции Беллмана на каждом шаге МДП. Указанная проблема в первую очередь порождена необходимостью вычисления кратных интегралов в пространстве размерностей n и s.

3. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ИЗОБЕЛЛ И ТЕОРЕМА О ДВУХСТОРОННЕЙ ОЦЕНКЕ ФУНКЦИИ БЕЛЛМАНА

Главной идеей, предложенной в [4], является анализ уравнения Беллмана в различных областях пространства состояний, а именно в таких, в которых функция Беллмана равна единице, нулю и, соответственно, не равна единицы, ни нулю. Первые две области, а точнее множества, названы в [4] изобеллами уровня 1 и 0. Они определяются следующими соотношениями:

$$\mathrm{I}_{\kappa}^{\varphi} = \{x \in \mathbb{R}^n \colon \mathrm{B}_{\kappa}^{\varphi}(x) = 1\}, \quad \mathrm{O}_{\kappa}^{\varphi} = \{x \times \mathbb{R}^n \colon \mathrm{B}_{\kappa}^{\varphi}(x) = 0\}, \quad k = \overline{0, N}.$$

Рассмотрим также множество, где функции Беллмана не равна ни 1, ни 0:

$$\mathrm{B}_{\kappa}^{\varphi} = \mathbb{R}^n\{\mathrm{I}_{\kappa}^{\varphi} \cup \mathrm{O}_{\kappa}^{\varphi}\}.$$

Отметим, что из определения множеств следует, что $\mathrm{B}_{\kappa}^{\varphi} \cup \mathrm{I}_{\kappa}^{\varphi} \cup \mathrm{O}_{\kappa}^{\varphi} = \mathbb{R}^n$ и

$$\begin{cases} \mathrm{B}_k^{\varphi}(x) = 1, & x \in \mathrm{I}_k^{\varphi}, \\ \mathrm{B}_k^{\varphi}(x) \in (0,1), & x \in \mathrm{B}_k^{\varphi}, \\ \mathrm{B}_k^{\varphi}(x) = 0, & x \in \mathrm{O}_k^{\varphi}. \end{cases}$$

В [4,5] доказаны основные утверждения о том, как могут быть записаны изобеллы уровня 1 и 0, а также нижняя и верхняя оценка значения функции Беллмана для $x \in \mathrm{B}_k^{\varphi}, k = \overline{0, N}$.

Лемма 1. Справедливы следующие утверждения:

1. Множество I_k^{φ} удовлетворяет рекуррентным соотношениям в обратном времени $k = \overline{0, N}$:

$$\mathrm{I}_{k}^{\varphi} = \{x \in \mathbb{R}^n : \exists u_k \in U_k : \mathrm{P}(f_k(x,u_k,\xi_k) \in \mathrm{I}_{k+1}^{\varphi}) = 1\}, \quad k = \overline{0,N}$$
$$\mathrm{I}_{N+1}^{\varphi} = \{x \in \mathbb{R}^n : \Phi(x) \le \varphi\}.$$

2. Множество O_k^{φ} удовлетворяет рекуррентным соотношениям в обратном времени $k=\overline{0,N}$:
$$\mathrm{O}_{k}^{\varphi} = \{x \in \mathbb{R}^n : \forall u_k \in U_k : \mathrm{P}(f_k(x,u_k,\xi_k) \in \mathrm{O}_{k}^{\varphi}) = 1\}, \; k = \overline{0,N}$$
$$\mathrm{O}_{N+1}^{\varphi} = \{ x \in \mathbb{R}^n : \Phi(x) > \varphi\};$$
3. Для $x_k \in \mathrm{I}_k^{\varphi}$ оптимальным управлением на шаге k является любой элемент из множества $U_k^{\mathrm{I}}(x_k)$:
$$U_k^{\mathrm{I}}(x_k) = \{u \in U_k : \mathrm{P}(f_k(x_k,u,\xi_k) \in \mathrm{I}_{k+1}^{\varphi}) = 1\}, \quad k=\overline{0,N};$$
4. Для $x_k \in \mathrm{O}_k^{\varphi}$ оптимальным управлением на шаге k является любой элемент из множества U_k ;
5. Уравнение Беллмана в области $x \in \mathrm{B}_k^{\varphi}$ допускает представление
$$\mathrm{B}_k^{\varphi}(x) = \max_{u_k \in U_k}\{\mathrm{P}(f_k(x,u_k,\xi_k) \in \mathrm{I}_{k+1}^{\varphi}) + \mathrm{P}(f_k(x,u_k,\xi_k) \in \mathrm{B}_{k+1}^{\varphi}) \times \times \mathrm{M}[\mathrm{B}_{k+1}^{\varphi}(f_k(x,u_k,\xi_k)) \mid f_k(x,u_k,\xi_k) \in \mathrm{B}_{k+1}^{\varphi}]\}; \quad (5)$$
6. Для всех $x \in \mathrm{B}_k^{\varphi}, u_k(x) \in U_k$ справедлива система неравенств
$$\begin{cases} \mathrm{M}[\mathrm{B}_{k+1}^{\varphi}(f_k(x\;,u_k,\xi_k))] \ge \mathrm{P}(f_k(x,u_k,\xi_k) \in \mathrm{I}_{k+1}^{\varphi}), \\ \mathrm{M}[\mathrm{B}_{k+1}^{\varphi}(f_k(x\;,u_k,\xi_k))] \le 1 - \mathrm{P}(f_k(x,u_k,\xi_k) \in \mathrm{O}_{k+1}^{\varphi}) \end{cases}$$
7. Для $x \in \mathrm{B}_k^{\varphi}$ функция Беллмана удовлетворяет двухстороннему неравенству:
$$\underline{\mathrm{B}}_k^{\varphi}(x) \le \mathrm{B}_k^{\varphi}(x) \le \overline{\mathrm{B}}_k^{\varphi}(x), \quad (6)$$
где $\underline{\mathrm{B}}_k^{\varphi}(x)$ - нижняя, $\overline{\mathrm{B}}_k(x)$ - верхняя оценки функции Беллмана
$$\underline{\mathrm{B}}_k^{\varphi}(x) = \sup_{u_k \in U_k} \mathrm{P}(f_k(x,u_k,\xi_k) \in \mathrm{I}_{k+1}^{\varphi}),$$
$$\overline{\mathrm{B}}_k^{\varphi}(x) = \sup_{u_k \in U_k} \{1 - \mathrm{P}(f_k(x,u_k,\xi_k) \in \mathrm{O}_{k+1}^{\varphi})\},$$
причем $\underline{\mathrm{B}}_N^{\varphi}(x) = \mathrm{B}_N^{\varphi}(x) = \overline{\mathrm{B}}_N^{\varphi}(x)$.
8. Субоптимальное управление
$$\underline{u}_k = \arg\max_{u_k \in U_k} \mathrm{P}(f_k(x,u_k,\xi_k) \in \mathrm{I}_{k+1}^{\varphi}),$$
   - оптимальное при $x \in \mathrm{I}_k^{\varphi} \cup \mathrm{O}_k^{\varphi}$;
   - оптимальное при $k = N$;
   - максимизирует нижнюю границу $\mathrm{M}[\mathrm{B}_{k+1}^{\varphi}(f_k(x\;,u_k,\xi_k))], \forall x \in \mathrm{B}_k^{\varphi}$.

Благодаря утверждениям из леммы 1, во-первых, удается определить рекуррентную запись изобелл, которая не зависит от функции Беллмана, во-вторых, найти оптимальное управление для $x \in \mathrm{I}_k^{\varphi}$, не затрагивая при этом уравнение Беллмана и связанные с ними задачи стохастического программирования сложной структуры. При этом из п. 4 заключаем, что определение изобеллы уровня 0 автоматически закрывает вопрос об оптимальном управление $x \in \mathrm{O}_k^{\varphi}$.

Таким образом, актуальным вопросом остается определение оптимального управления для $x \in \mathrm{B}_k^{\varphi}$. Но используя двухстороннюю оценку из п. 7 удается найти субоптимальное управление при максимизации левой границы.

4. ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ СТОХАСТИЧЕСКОГО ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ДИСКРЕТНЫМИ СИСТЕМАМИ ПО ВЕРОЯТНОСТНОМУ КРИТЕРИЮ

Для решения задачи (3) были сформулированы утверждения, согласно которым

1. для нахождения I_k^{φ} и O_k^{φ} выписаны выражения независящее от функции Беллмана и для $x_k \in \mathrm{I}_k^{\varphi}$ и $x_k \in \mathrm{O}_k^{\varphi}$ определили оптимальное управление;
2. для $x_k \in \mathrm{B}_k^{\varphi}$ определили верхнюю и нижнюю границу функции Беллмана, что позволяет найти субоптимальное решение.

Стоит сказать, что нетрудно построить случаи, когда изобелла уровня 1 пустая, невыпуклая и имеет достаточно сложную структуру, к которой данный алгоритм неприменим, но удается выделить класс задач, где алгоритмом возможно воспользоваться, например, задача импульсной коррекции в работе [3], в которой доказано существование решения и определены изобеллы в явном виде.

Важно отметить, что для вычисления I_k^{φ} и O_k^{φ} необходимо на каждом шаге сводить вероятностные ограничения накладываемые на систему, что не всегда удается сделать в силу сложности системы. Это затрудняют возможность нахождения оптимального управления в общем случае для каждого множества B_k^{φ}, I_k^{φ} и O_k^{φ}.

По этой причине хотелось бы иметь возможность в случае систем разной сложности численно получать выражения для B_k^{φ}, I_k^{φ} и O_k^{φ}, что позволит согласно полученным утверждениям выше находить численно субоптимальное управление.

Для решения поставленной задачи необходимо описать численную процедуру, которая будет состоять из 3-х основных частей:

1. Генерация точек для допустимого управления на каждом шаге, возможных состояний системы и вектора случайных возмущений.
2. Вычисление B_k^{φ}, I_k^{φ} и O_k^{φ} для каждого шага.
3. Нахождения субоптимального управления для B_k^{φ}, I_k^{φ} и O_k^{φ} более подробно остановимся на каждом из шагов численной процедуры.

Шаг 1. Генерирование точек

Необходимо получить следующие наборы точек:

- Пусть $U_k \to \hat{U}_k = \bigcup_{i=1}^{d_k^u} \{u_k^i\}, \quad u_k^i \in U_k, k = \overline{0, N}$, где $\hat{U}_k$ - набор управлений, d_k^u - количество точек;
- Пусть $X = \{x \in \mathbb{R}^n : a_1 \le x_i \le a_2,\ i = \overline{1, n}\}$ - ограничения на возможные состояние, тогда $X \to \hat{X} = \bigcup_{i=1}^{d^x} \{x^i\}, x^i \in X$, где $\hat{X}$ - набор состояний, d^x - количество точек;

- Пусть ξ_k и Ξ_k - носитель ξ_k, тогда $\Xi_k \to \hat{\Xi}_k = \bigcup_{i=1}^{d_k^{\xi}} \{\zeta_k^i\}, \zeta_k^i \in \Xi_k, k = \overline{0,N}$

  где $\hat{\Xi}_k$ - набор возмущений, d_k^{ξ} - количество точек.

Для того чтобы сгенерировать набор точек в многомерном пространстве, которой будет распределен равномерно, воспользуемся методом Hit-and-Run [11]. Данный метод позволяет генерировать точки в случае многомерных невыпуклых, несвязных множеств. Следует отметить, что для рассматриваемого алгоритма в статье [11] было доказано, что распределение набрасываемых точек асимптотически равномерно.

Алгоритм (Hit-and-Run):

Пусть $\mathrm{Y} \subset \mathbb{R}^q$. Задача получить $\hat{Y} = \bigcup_{i=1}^{d^y} \{y^i\}, y^i \in Y, d^y$ - количество точек

1. Пусть $\hat{Y} = \{y_1\}, y_1 \in Y, d = 1$
2. Пусть $S = \{x \in \mathbb{R}^q : \|x\| \leq 1\}$ - единичная сфера, $V \sim \mathrm{N}\,(S), v$ - реализация V
3. Сгенерировать $v_d, r = v_d / \|v_d\|,\quad L = \{t \in \mathbb{R}^n : y_d + t \cdot r \in Y\}$
4. Сгенерировать $t_d \sim R(L),\quad y_{d+1} = y_d + t_d \cdot r$
5. $\hat{Y} := \hat{Y} \cup \{y_{d+1}\},\quad d := d + 1$
6. Если $d < d^y$, перейти к п. 2, иначе завершить

Для реализации первого шага необходимо запустить данный алгоритм для $U_k, X, \Xi_k, k = \overline{0,N}$ и на выходе получить $\hat{U}_k, \hat{X}, \hat{\Xi}_k, k = \overline{0,N}$.

Шаг 2. Нахождение изобелл

На прошлом шаге алгоритма был осуществлён переход от исходных возможных управлений, состояний и возмущений к некоторому фиксированному набору точек. Это позволяет переписать I_k^{φ} и O_k^{φ} в следующем виде.

Лемма 2.

Введем обозначения для изобелл и их дополнения после выполненного 1 шага B_k^{φ}, I_k^{φ} и O_k^{φ}

1. $$\mathrm{I}_k^{\varphi} = Conv(\{x \in \hat{X} : \exists u_k \in \hat{U}_k, \forall \xi \in \hat{\Xi}_k, f_k(x, u_k, \xi_k) \in \mathrm{I}_{k+1}^{\varphi}\}),\quad k = \overline{0,N}$$
   $$\mathrm{I}_{N+1}^{\varphi} = Conv(\{x \in \hat{X} : \Phi(x) \leq \varphi\}).$$
2. $$\mathrm{O}_k^{\varphi} = Conv(\{x \in \hat{X} : \forall u_k \in \hat{U}_k, \forall \xi \in \hat{\Xi}_k, f_k(x, u_k, \xi_k) \in \mathrm{O}_{k+1}^{\varphi}\}),\quad k = \overline{0,N}$$
   $$\mathrm{O}_{N+1}^{\varphi} = Conv(\{x \in \hat{X} : \Phi(x) > \varphi\}).$$
3. $\mathrm{B}_k^{\varphi} = Conv(\hat{X} \setminus \{\mathrm{I}_k^{\varphi} \cup \mathrm{O}_k^{\varphi}\}),\quad k = \overline{0,N},$

где $Conv(Y) = \bigcup_{y_1,\ldots,y_N \in Y} \bigcup_{\lambda_1 + \cdots + \lambda_N = 1, \lambda_i \geq 0} \lambda^T y$ - выпуклая оболочка Y.

Стоит отметить, что так как пространство возможных состояний неограниченно в общем случае, то для того чтобы сгенерировать точки необходимо вместо $\mathbb{R}^n$ перейти, к некоторому многомерному кубику и в случае, если $dist(\bigcup_k \mathrm{I}_k^{\varphi}, \partial\hat{X}) < \gamma,$, где

$dist(A,B) = \min\limits_{a\in A, b\in B}(a,b)$, γ - некоторая константа, то необходимо перейти к шагу 1 и предварительно увеличить радиус куба $\hat{X}$.

Шаг 3. Вычисление субоптимального управления

В отдельности рассмотрим поставленную задачу для каждого типа состояний

$$\mathrm{B}_k^{\varphi},\ \mathrm{I}_k^{\varphi} \text{ и } \mathrm{O}_k^{\varphi}.$$

1. Для $x \in \mathrm{O}_k^{\varphi}$ субоптимальным управлением на шаге k является любой элемент их множества $\hat{U}_k$;

2. Для $x \in \mathrm{I}_k^{\varphi}$ субоптимальным управлением на шаге k является любой элемент их множества $\hat{U}_k^{\mathrm{I}}(x_k)$:

$$\hat{U}_k^{\mathrm{I}}(x_k) = \{u \in \hat{U}_k : \forall \xi \in \hat{\Xi}_k, f_k(x_k, u, \xi_k) \in \mathrm{I}_{k+1}^{\varphi}\}.$$

3. Для $x \in \mathrm{B}_k^{\varphi}$ субоптимальное управление на шаге k находится с использованием стохастического квазиградиента [6] для решения задачи $P_{\varphi}(u(\cdot)) \to \max\limits_{u(\cdot)\in U}$

<u>Алгоритм</u>

1. Вычисляем статистическую оценку градиента функции вероятности

$$\xi_l = \frac{1}{2\delta_l}\sum_{j=1}^{n}[P_l^*(\tilde{u}_{l1},\ldots,u_{lj}+\delta_l,\ldots,\tilde{u}_{\ln}) - P_l^*(\tilde{u}_{l1},\ldots,u_{lj}-\delta_l,\ldots,\tilde{u}_{\ln})]e_j,$$

$$P_k^*(u) = \frac{1}{t_l}\sum_{i=1}^{t_l} I(-\Phi(x_N(u_l,\zeta_l^i) \le \varphi)),$$

где $P_k^*(u)$ - выборочная оценка функции вероятности, $I(\mathrm{A})$ – индикаторная функция, $\tilde{u}_{lj}, j = \overline{1,n}$ - независимые случайные величины, равномерно распределенные на $[u_{lj} - \delta_l, u_{lj} + \delta_l]$, $\{\zeta_l^i\}_{i=1}^{t_l}$ - выборка соответствующая распределению ζ.

2. Итерационная процедура:

$$u_{l+1} = \begin{cases} \Pi_U[u_l + \rho_l\xi_l], & \|\xi_l\| \le L \\ u_1, & \textit{иначе}, \end{cases}$$

где l - номер итерации, ρ_l-длина рабочего шага, а константа L достаточно велика.

Общий алгоритм численного решения:

1. *Алгоритм Hit-and-Run* согласно шагу 1 для $U_k, X, \Xi_k, k = \overline{0,N}$ получаем $\hat{U}_k, \hat{X}, \hat{\Xi}_k, k = \overline{0,N}$
2. Для $\hat{U}_k, \hat{X}, \hat{\Xi}_k, k = \overline{0,N}$ находим вид B_k^{φ}, I_k^{φ} и O_k^{φ} согласно шагу 2.
3. Для каждого B_k^{φ}, I_k^{φ} и O_k^{φ} находим субоптимальное управление согласно шагу 3.

5. ПРИМЕР

Теория синтеза оптимального управления используется для решения задач из аэрокосмической отрасли, например, задача импульсной коррекции траектории космического аппарата (КА) на геостационарной орбите с помощью корректирующей установки малой тяги. Отклонение КА возникает из-за внешних возмущений и неопределенных факторов, возникающих из-за погрешности и ошибок в вычисление координат и различных параметров системы.

Проверим сформулированный алгоритм на подобной упрощенной модели и сравним с известным оптимальным управлением.

Система управления

$$\begin{cases} x_{k+1} = x_k + u_k(1+\xi_k), \\ x_0 = X_0, \quad k = \overline{0,N} \end{cases}$$

и задача оптимального управления

$$P_\varphi(u(\cdot)) = \mathrm{P}(|x_{N+1}| \le \varphi) \to \max_{u(\cdot)\in\tilde{U}}$$

где $x_k \in \mathbb{R}, \mathrm{u}_k \in \mathbb{R}, \xi_k \sim R[-e, e], e \in (0,1)$.

В работе [3] было приведено аналитическое решение для более общей задачи и, в частности, для сформулированной выше системы управления. Следует отметить, что в работе [3] было найдено оптимальное управление.

Сравним значения аналитического решения с полученным численным результатами с заданными параметрами и объемами дискретизации:

- $e = 0.5, \varphi = 10, N = 1;$
- $d^x = d^u = d^\xi = 10000$

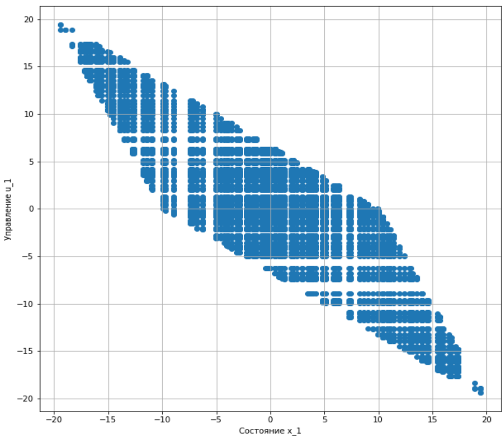

Рис 1. Множество $U_1^{\mathrm{I}}(x_1)$

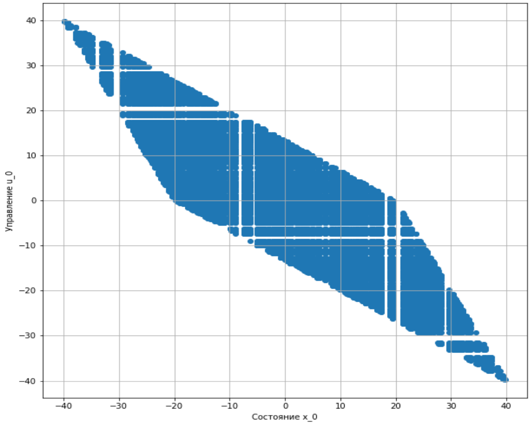

Рис 2. Множество $U_0^{\mathrm{I}}(x_0)$

Приведем сравнения значения управления аналитического и численного значения при k=1 и количество итераций 10000:

Таблица 1. Сравнение аналитического и численного значения управления при *k*=1

x	Аналитическое	Численное	Погрешность
25	-23,333333	-23,310258	0,023075
30	-26,666667	-26,665936	0,000731
35	-30,000000	-30,015987	0,015987
40	-33,333333	-33,372321	0,038987
45	-36,666667	-36,645617	0,021050
50	-40,000000	-39,934600	0,065400
55	-43,333333	-43,312343	0,020990
60	-46,666666	-46,656306	0,010360
65	-50,000000	-49,945092	0,054908
70	-53,333333	-53,330231	0,003102
75	-56,666666	-56,663306	0,003360
80	-60,000000	-59,999230	0,000770
85	-63,333333	-63,333223	0,000110
90	-66,666666	-66,621266	0,045400
95	-70,000000	-69,932910	0,067090
100	-73,333333	-73,290328	0,043005

Следует отметить, что численные результаты достаточно близки к аналитическим значениям.

ЛИТЕРАТУРА

1. Азанов В.М. Оптимальное управление линейной дискретной системой по критерию вероятности // Автоматика и Телемеханика. 2014. №10. С. 39–51.
2. Азанов В.М., Кан Ю.С. Однопараметрическая задача оптимальной коррекции траектории летательного аппарата по критерию вероятности // Изв. РАН Теория и Системы Управления. 2016. №2. С. 115-128.
3. Азанов В.М. Алгоритмы динамического программирования решения задач оптимального управления дискретной стохастической системой с терминальным вероятностным критерием // Диссертация на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук. 2018.
4. Азанов В.М., Кан Ю.С. Синтез оптимальных стратегий в задачах управления дискретными системами по вероятностному критерию // Автоматика и Телемеханика, 2017, № 6, 57–83.
5. Азанов В.М., Кан Ю.С. Двухсторонняя оценка функции Беллмана в задачах стохастического оптимального управления дискретными системами по вероятностному критерию качества // Автоматика и Телемеханика, 2018, № 2, С. 3–18.
5. Кан Ю.С., Кибзун А.И. Задачи стохастического программирования с вероятностными критериями, Физматлит, М., 2009.
6. Кибзун А.И., Игнатов А.Н. Сведение двухшаговой задачи стохастического оптимального управления с билинейной моделью к задаче смешанного целочисленного линейного программирования. // АиТ. 2016. № 12. С. 89–111.
7. Малышев В.В., Кибзун А.И. Анализ и синтез высокоточного управления летательными аппаратами. М.:Машиностроение, 1987.
8. Jasour A.M., Aybat N.S., Lagoa C.M. Semidefinite Programming For Chance Constrained Optimization Over Semialgebraic Sets // SIAM Journal on Optimization 25 (3), 1411–1440, 2015.
9. Jasour A.M., Lagoa C.M. Convex Chance Constrained Model Predictive Control //arXiv preprint arXiv:1603.07413, 2016.
10. Smith R.L., “Efficient Monte Carlo procedures for generating points uniformly distributed over bounded regions”, Oper. Res., 32:6 (1984), 1296-130

Работа поступила 20.02.2019г.