АНАЛИЗ ДАННЫХ

УДК 519.17

ПРИМЕНЕНИЕ АЛГОРИТМОВ ТЕОРИИ ГРАФОВ К УПРОЩЕННОМУ МЕТОДУ АНАЛИЗА ИЕРАРХИЙ

В.А. Осипова, К.С. Дубинина

В статье рассматривается упрощенный метод анализа иерархий. Для формирования матрицы парных сравнений используются алгоритмы теории графов. В качестве модельного примера приводится метод оценки стоимости летательного аппарата при различных формах лизинга.

The article discusses the modification of the hierarchy analysis method. To form a matrix of pairwise comparisons, graph theory algorithms are used. As a model example, a method is given for estimating the cost of an aircraft for various forms of leasing..

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА
Метод анализа иерархий, критерии, альтернативы, алгоритм Уоршелла, базисный набор элементов, авиационный лизинг.

ДЛЯ ЦИТАТЫ
В.А. Осипова, К.С. Дубинина. Применение алгоритмов теории графов к упрощенному методу анализа иерархий // Моделирование и анализ данных. 2019. №3. С. 24-31.
V.A. Osipova, K.S. Dubinina. Application of graph theory algorithms to a simplified analytic hierarchy process. Modelirovaniye i analiz dannykh=Modelling and data analysis *(Russia).* 2019, no.3, pp. 24-31.

ВВЕДЕНИЕ

Одним из распространенных методов исследования проблем принятия решения для разнообразного круга задач является метод анализа иерархий (МАИ), предложенный Т. Саати [4]. МАИ позволяет понятным и рациональным образом структурировать сложную проблему принятия решений в виде иерархии, сравнить и выполнить количественную оценку альтернативных вариантов решения. МАИ основан на подходе к назначению «весов» конечному набору n сравниваемых объектов на основе матрицы парных сравнений. Данная матрица A формируется экспертами, а искомый весовой вектор $\omega = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n)^T$ вычисляется как собственный вектор этой матрицы, отвечающий максимальному собственному значению.

Формирование матрицы парных сравнений в МАИ требует трудоемкой работы с экспертами и не гарантирует необходимого свойства её совместности в частности из-за избыточности и недостоверности информации о сравнениях. Вариант МАИ, предложенный В.

Д. Ногиным [2], оказывается существенно проще классического подхода к МАИ как на стадии формирования матрицы парных сравнений, так и в ходе вычисления весового вектора, позволяя получить схожие результаты.

В данной работе рассматривается подход, связанный с выбором однозначно определяющих матрицу парных сравнений элементов и требующий значительно меньшего числа экспертных оценок, чем в классическом подходе к МАИ. Предлагается его реализация, основанная на использовании алгоритмов теории графов. Рассматривается модельный пример, связанный с авиационным лизингом.

1. УПРОЩЕННЫЙ ВАРИАНТ МЕТОДА АНАЛИЗА ИЕРАРХИЙ

Применение МАИ предполагает, что в результате экспертного оценивания формируется матрица парных сравнений альтернатив $A_1 \ldots A_n$. Эксперту последовательно предъявляются пары альтернатив (A_i, A_j) и предлагается определить степень a_{ij} преимущества альтернативы A_i над альтернативой A_j относительно некоторого качественного критерия K.

Матрица парных сравнений A в идеале должна удовлетворять следующим свойствам:

1) все элементы матрицы A положительны: $a_{ij} > 0;\ \forall i, j = \overline{1,n};$
2) матрица A обратно симметрична: $a_{ij} = \frac{1}{a_{ji}};$
3) матрица A обладает свойством совместности: $a_{ik} * a_{kj} = a_{ij};\ \forall k = \overline{1,n}.$

В этом случае число n является наибольшим собственным числом матрицы A, а вектор $\omega = (\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n)^T$ – вектором, удовлетворяющим $A\omega = n\omega$, т.е. собственным вектором, соответствующему собственному значению n.

Пусть в результате экспертного оценивания мы получили элементы первой строки матрицы A. При условии выполнения свойств 1) – 3), имеют место следующие соотношения:

$$a_{ij} = a_{i1} * a_{1j} = \frac{a_{1j}}{a_{1i}}, \qquad i = \overline{2,n};\ j = \overline{1,n}.$$

Следовательно, используя элементы первой строки, мы можем построить всю матрицу парных сравнений, которая будет обладать свойством совместности.

В качестве элементов, однозначно определяющих матрицу парных сравнений не обязательно брать только элементы первой строки и можно перечислить все такие наборы элементов, которые однозначно определяют матрицу парных сравнений. В [2] предложены следующие определения.

Определение 1. Набор некоторых элементов матрицы $A = (a_{ij})_{nxn}$ выше главной диагонали называется определяющим, если на его основе и с использованием свойств 2) – 3) можно однозначно определить все элементы матрицы A.

Определение 2. Пусть имеется некоторый набор элементов $a_{i_p j_p}$ матрицы A, расположенных выше главной диагонали. Если существует среди этого наборы такая тройка элементов $a_{i_a j_a}, b_{i_b j_b}, c_{i_c j_c}$, что $i_a = i_b, j_a = j_c, j_b = i_c$, то такой набор будем называть зависимым. В противном случае – независимым.

Определение 3. Минимальный по числу элементов независимый набор матрицы A будем называть базисным.

Определение 4. Пусть V какой-либо набор элементов $a_{i_p j_p}$ матрицы A. Графом, порожденным набором V, называется неориентированный граф $G = < V, Q >$ с множеством вершин V и множеством ребер Q, состоящим из элементов $< a_{i_p}, a_{j_p} >$.

Теорема. [2]. Для любого набора элементов $a_{i_p j_p}$, $p = \overline{1,n}$, матрицы $A = (a_{ij})_{nxn}$ расположенных выше главной диагонали, следующие высказывания эквивалентны:

1) набор элементов $a_{i_p j_p}$ является базисным,
2) набор $a_{i_p j_p}$ состоит из $n-1$ элемента и порожденный им граф является связным,
3) набор $a_{i_p j_p}$ состоит из $n-1$ элемента и является независимым.

Данная теорема определяет правило выбора определяющего базисного набора, для построения которого нам потребуется всего $n-1$ оценка эксперта. Это значительно меньше, чем в классическом МАИ, в котором требуется $\frac{n(n-1)}{2}$ оценок, и в то же время, позволяет нам построить матрицу парных сравнений, не лишенную свойства согласованности.

Чтобы определить является ли набор базисным, воспользуемся известным алгоритмом Уоршелла проверки связности (см., например, [1; 3]) для порожденного графа.

Для неориентированного графа $G =< V, Q >$ с множеством вершин V и матрицей смежности D через $S^{(0)}, S^{(1)}, \dots, S^{(n)}$ обозначается последовательность матриц порядка n, элементы которых вычисляются по следующей формуле:

$$S^{(0)} = \left\| S_{ij}^{(0)} \right\| = D \vee E, \text{где } E - \text{единичная матрица порядка } n,$$

$$S^{(l)} = \left\| S_{ij}^{(l)} \right\|, \text{где } S_{ij}^{(l)} = S_{ij}^{(l-1)} \vee \left(S_{il}^{(l-1)} \& S_{lj}^{(l-1)} \right), \quad l = \overline{1,n}$$

Тогда $S = S(n)$ – матрица связности.

Из полученной матрицы связности находим число p компонент связности, т.е. число максимальных (по включению) связных подграфов графа.

Для определения того, какие вершины принадлежат одной компоненте связности, также воспользуемся известным алгоритмом, приведенным, например, в [1; 3].

Все изложенные алгоритмы реализованы в программной среде Delphi. Данная программная система позволяет упростить процедуру формирования матрицы парных сравнений при использовании метода анализа иерархий.

На практике эксперт может определять достоверные оценки лишь при сравнении некоторого набора пар элементов и может затрудняться при сравнении всех элементов. Таким образом, при экспертном оценивании для построения матрицы парных сравнений элементов следует осуществить проверку, является ли данный набор элементов базисным (или определяющим) и дать рекомендации в случае, если он таковым не является. Если набор элементов оказался базисным, то, используя свойства 1) – 3), определяем остальные элементы матрицы парных сравнений. В противном случае от эксперта требуется дополнительно сравнить пары элементов. Их количество зависит от числа компонент связности. В частности, если число компонент связности $p = 2$, то достаточно добавить одну экспертную оценку, чтобы граф стал связным, в общем случае требуется $p - 1$ экспертная оценка. Эксперт сам может выбрать подходящую для него пару элементов из разных компонент связности для оценивания. В результате получается связный порожденный граф, и, следовательно, базисный набор элементов.

В работе [2] не отмечено, что при использовании упрощенного МАИ для формирования матрицы парных сравнений, вновь полученные элементы матрицы могут иметь значения, выходящие за пределы шкалы, используемой в МАИ. В этом случае следует последовательно сравнивать другие пары элементов, обеспечивающие базисный или определяющий набор, в итеративном режиме получать наиболее достоверные оценки либо отказаться от применения метода.

2. ПРИМЕНЕНИЕ УПРОЩЕННОГО МЕТОДА АНАЛИЗА ИЕРАРХИЙ К ОЦЕНКЕ СТОИМОСТИ ЛЕТАТЕЛЬНОГО АППАРАТА ПРИ ЛИЗИНГЕ

Авиационный лизинг значительно выделяется среди других видов этой услуги ввиду специфики оформления техники и её регистрации, а также наличие регламента постоянного дорогостоящего обслуживания.

Основными видами авиационного лизинга являются финансовый и операционный. При финансовом лизинге компания-эксплуататор может получить в собственность летательный аппарат (ЛА) после окончания действия договора, либо выкупить его по остаточной стоимости. При операционном лизинге, как правило, происходит неполный износ техники и после окончания срока аренды ЛА может быть возвращен лизингодателю, либо же срок аренды может быть продлен.

Рассматривая предложения лизинговой компании, авиакомпании проводят собственную оценку стоимости предложенных ЛА в соответствии с выбранной стратегией и анализом критериев, характеризующих воздушное судно, а также предложениями на рынке лизинговых услуг.

Рассмотрим следующий модельный пример. Авиакомпания рассматривает возможность сделки по лизингу конкретного самолета (СМ) и хочет оценить разумность стоимости сделки. При этом уже имеются некоторые данные о параметрах сделок с самолетами аналогичного типа (Аналог 1, Аналог 2, Аналог 3, Аналог 4 и Аналог 5).

Проведем сравнение рассматриваемых ЛА с точки зрения привлекательности сделки и оценим стоимость СМ с помощью упрощенного метода анализа иерархий. В нашем случае проводится сравнение между шестью альтернативами $A_1, A_2, \ldots, A_6$ (СМ и его аналоги). Иерархическая структура процесса сравнения представлена на рис.1.

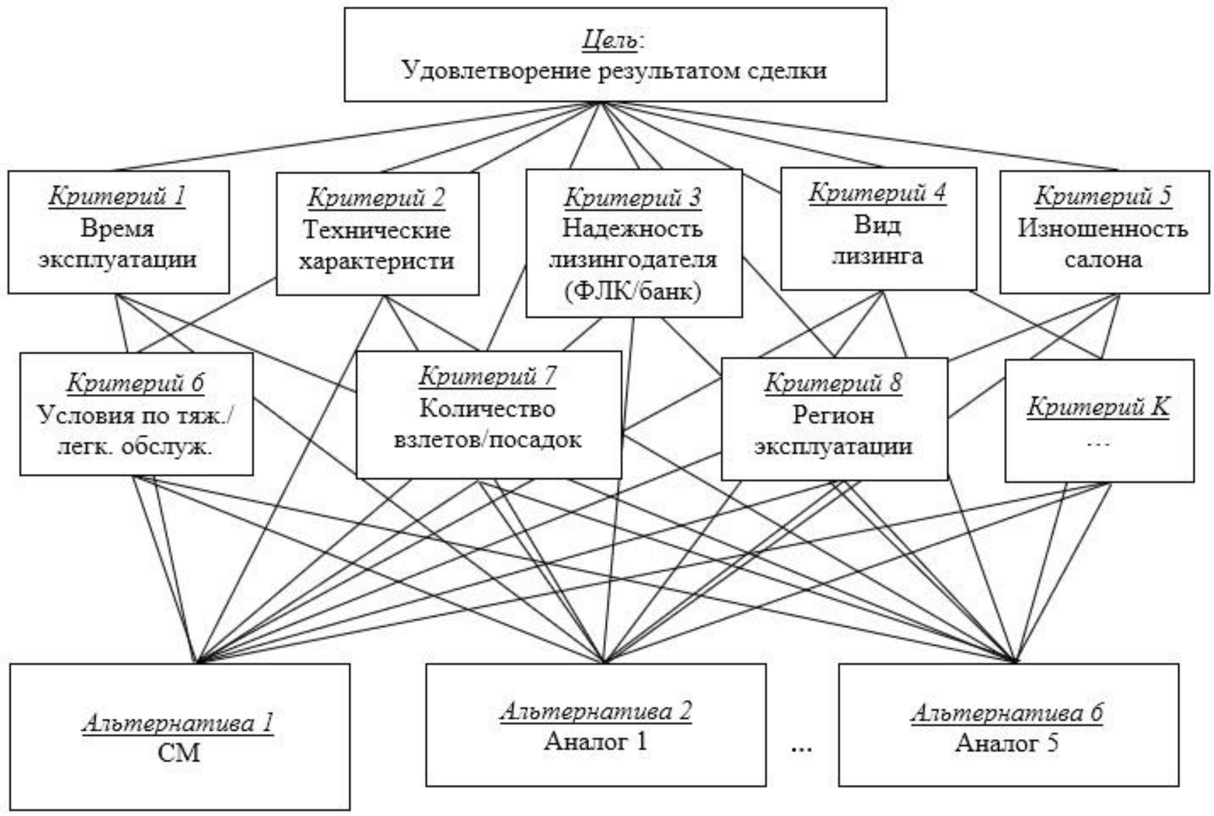

Рис. 1. Иерархическая структура процесса сравнения

При авиационном лизинге ЛА оценивается с помощью значительного числа критериев. В данном модельном примере ограничим сравнение ЛА с точки зрения привлекательности для лизинга восемью характеристиками, которые определяют критерии качества: K_1 – время эксплуатации, K_2 – технические характеристики, K_3 – надежность лизингодателя (финансовая лизинговая компания/банк), K_4 – вид лизинга, K_5 – изношенность салона , K_6 – условия по тяжелому/легкому обслуживанию, K_7 – количество взлетов/посадок, K_8 – регион эксплуатации. При сравнивании каждого ЛА по этим критериям дается оценка по девятибалльной шкале [4]: например, разница в 15 лет времени эксплуатации составляет значительное преимущество по сравнению с менее новым и оценивается в 7 баллов.

Матрица парных сравнений критериев $K_1, K_2, K_3, K_4, K_5, K_6, K_7, K_8$ относительно общей удовлетворенности покупкой представлена табл. 1.

Таблица 1

Матрица парных сравнений критериев

	K_1	K_2	K_3	K_4	K_5	K_6	K_7	K_8
K_1	1	3	5	7	9	7	5	7
K_2	1/3	1	3	5	7	9	7	5
K_3	1/5	1/3	1	3	5	7	9	7
K_4	1/7	1/5	1/3	1	3	5	7	9
K_5	1/9	1/7	1/5	1/3	1	3	5	7
K_6	1/7	1/9	1/7	1/5	1/3	1	3	5
K_7	1/5	1/7	1/9	1/7	1/5	1/3	1	3
K_8	1/7	1/5	1/7	1/9	1/7	1/5	1/3	1

Для этой матрицы максимальное собственное значение $\lambda_{max} = 9{,}639$, что достаточно близко к порядку матрицы, который равен 8. Тогда ИС = 0,234; ОС = 0,166. Следовательно, матрица достаточно согласована.

Можно вычислить вектор приоритетов (весов критериев) как собственный вектор, соответствующий λ_{max}, либо провести грубую оценку весов критериев, просуммировав элементы каждой строки и нормализовав делением на сумму всех элементов. Тогда вектор приоритетов (весов) равен $v = (0{,}253; 0{,}215; 0{,}187; 0{,}148; 0{,}097; 0{,}057; 0{,}03; 0{,}013)$.

Из этого следует, что в нашем примере наиболее важная характеристика – время эксплуатации, затем идут технические характеристики, надежность лизингодателя, вид лизинга, изношенность салона, условия по тяжелому/легкому обслуживанию, количество взлетов/ посадок, регион эксплуатации.

Сравнение предложенных для лизинга ЛА по каждому из восьми выбранных критериев проводится экспертом и определяется матрицами парных сравнений. Как правило, эксперт не может достаточно достоверно определить все значения матрицы парных сравнений. В табл. 2 представлены оценки эксперта при сравнении рассматриваемых ЛА с точки зрения критерия K_5 «Изношенность салона».

Таблица 2

Исходная матрица парных сравнений

K_5	СМ	Аналог 1	Аналог 2	Аналог 3	Аналог 4	Аналог 5
СМ	1		1/8			
Аналог 1		1	1/2			
Аналог 2			1			
Аналог 3				1	1/5	
Аналог 4					1	3
Аналог 5						1

Представим матрицу парных сравнений в виде графа, изображенного на рис.2.:

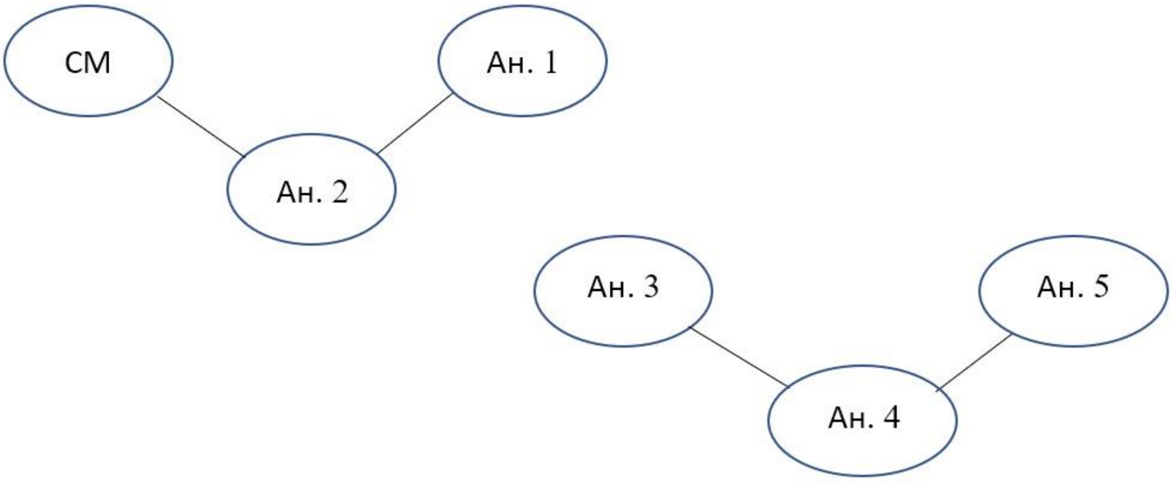

Рис. 2. Граф первоначальной матрицы парных сравнений

Число компонент связности этого графа $p = 2$. Следовательно, набор элементов не является базисным. Для матриц большого порядка следует использовать алгоритм Уоршелла проверки связности для порожденного графа, который позволяет определить является ли набор базисным. Т.к. $p = 2$, то достаточно добавить одну оценку, сравнивая любую вершину одной компоненты связности с любой вершиной другой компоненты. Допустим, исходя из экспертного анализа, было дополнительно проведено сравнение аналога 2 и аналога 3. Граф окончательной матрицы парных сравнений представлен на рис.3. Найден базисный набор элементов, по которому сможем найти остальные элементы матрицы парных сравнений, представленные в табл.3.

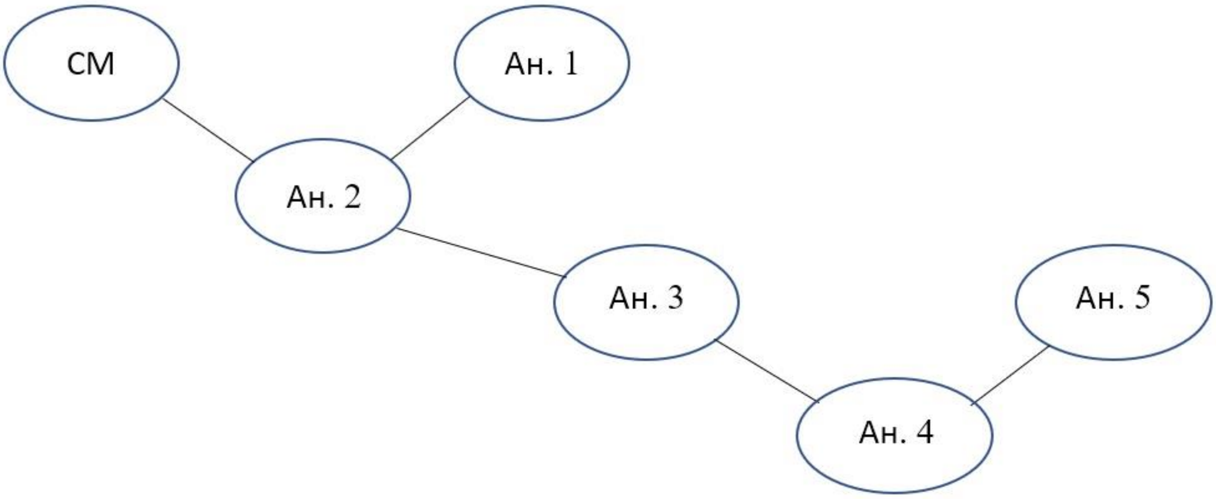

Рис. 3. Граф окончательной матрицы парных сравнений

Таблица 3

Окончательная матрица парных сравнений

K_5	СМ	Аналог 1	Аналог 2	Аналог 3	Аналог 4	Аналог 5
СМ	1	1/4	1/8	7/8	7/40	21/40
Аналог 1	4	1	1/2	7/2	7/10	21/10
Аналог 2	8	2	1	**7**	7/5	21/5
Аналог 3	8/7	2/7	1/7	1	1/5	3/5
Аналог 4	40/7	10/7	5/7	5	1	3
Аналог 5	40/21	10/21	5/21	5/3	1/5	1

Матрица согласована, следовательно, $\lambda_{max} = 6$, собственное значение равно порядку матрицы. После нормировки получаем следующий вектор $w^{(5)} = (0{,}046; 0{,}184; 0{,}368; 0{,}0525; 0{,}263; 0{,}088)$, определяющий вес каждого ЛА при сравнении по критерию K_5.

Аналогично проводим сравнения рассматриваемых ЛА по остальным критериям и формируем набор векторов весов ($w^{(1)}, \dots, w^{(8)}$).

Синтез полученных результатов осуществляется путем аддитивной свертки по формуле

$$s_i = \sum_{j=1}^{8} w_i^{(j)} \cdot v_j, \quad i = 1, \dots, 6,$$

где s_i – глобальный приоритет i-ой альтернативы, $w_i^{(j)}$ – вес (приоритет) альтернативы A_i, рассмотренный по отношению критерия K_j, v_j – вес (приоритет) критерия K_j с точки зрения поставленной цели.

Если известны стоимости $C_2, \dots, C_6$ аналогичных летательных аппаратов (Аналог 1, Аналог 2, …, Аналог 5), то можно оценить стоимость СМ как

$$C_1 = \frac{\sum_{i=2}^{6} s_i \cdot C_i}{1 - s_1}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Андерсон Д. Дискретная математика и комбинаторика: Пер. с англ. – М. : ООО «И. Д. Вильямс», 2017. – 960 с.
2. Ногин В. Д. Упрощенный вариант метода анализа иерархий на основе нелинейной свертки критериев // ЖВМиМФ, 2004, т. 44, № 7, С. 1259-1268.
3. Осипова В. А. Основы дискретной математики. 2-е изд., доп. – М. : ФОРУМ: ИНФРА-М, 2017. – 157 с.
4. Саати Т. Л. Принятие решений. Метод анализа иерархий. – М. : Радио и связь, 1989. – 316 с.

Работа поступила 24.03.2019г.