



УДК 519.71

Об одном методе декомпозиции в задаче быстродействия для линейной дискретной системы с ограниченным управлением

Ибрагимов Д.Н.*

МАИ (НИУ), Москва, Россия
rikk.dan@gmail.com

Турчак Е.Е.**

МАИ (НИУ), Москва, Россия
turchak.kate@mail.ru

В работе рассматривается задача быстродействия для линейной дискретной системы с ограниченным управлением. Стоит отметить, что в работе рассматриваются также системы с вырожденной матрицей состояния. Для случая, когда минимальное число шагов, необходимое для достижения системой нуля, значительно превышает размерность фазового пространства, разработан метод декомпозиции на скалярные и двумерные подсистемы, основанный на приведении матрицы состояния к нормальной жордановой форме. При этом за счёт разработанного алгоритма сложения двух многогранников, обладающего линейной сложностью, множества 0- управляемости для двумерных подсистем удаётся построить в явном виде. Также представлено описание основных инструментов решения задачи быстродействия, а также производится постановка задачи декомпозиции. Далее сформулированы и доказаны некоторые свойства многогранников на плоскости, на основе которых разработан алгоритм вычисления множества вершин суммы двух многогранников в R^2 в явном виде. В заключение сформулирована и доказана основная теорема о декомпозиции. А на основе разработанных методов построено решение задачи оптимального по быстродействию демпфирования высотного сооружения, расположенного в зоне сейсмической активности.

Для цитаты:

Ибрагимов Д.Н., Турчак Е.Е. Об одном методе декомпозиции в задаче быстродействия для линейной дискретной системы с ограниченным управлением // Моделирование и анализ данных. 2019. Том 09. № 4. С. 157–161. doi: 10.17759/mda.2019090413

***Ибрагимов Данис Наилевич**, кандидат физико-математических наук, старший преподаватель, Московский авиационный институт (Национальный исследовательский университет), Москва, Россия. E-mail: rikk.dan@gmail.com

****Турчак Екатерина Евгеньевна**, студентка магистратуры Московского авиационного института (Национальный исследовательский университет «Москва»), Россия. E-mail: turchak.kate@mail.ru



Ключевые слова: линейная дискретная система, задача быстродействия, метод декомпозиции.

Математические модели, возникающие в различных областях прикладной математики, нередко характеризуются высокой размерностью, что приводит к соответствующим вычислительным трудностям при решении задач анализа и синтеза. Одним из распространённых подходов в теории управления снижения сложности решаемых задач является декомпозиция исходной динамической системы на подсистемы меньшей размерности. В случае линейных систем данный подход во многом сопряжён с различными разложениями матрицы состояния, подробно рассмотренными и описанными в работе.

В свою очередь, задача быстродействия, являясь частным случаем задачи оптимального управления, в дискретной постановке обладает определёнными особенностями, определяющими специфику методов, применяемых для её решения. Такой инструмент, как принцип максимума, оказывается несостоятельным в силу нерегулярности экстремума почти для всех начальных состояний. С другой стороны, метод динамического программирования в силу дискретности критериальной функции в общем случае сводится к полному перебору.

В работе была предложена эффективная модификация метода динамического программирования, которая во многом базировалась на использовании аппарата множеств управляемости и достижимости. Разработанный подход позволяет построить оптимальный по быстродействию процесс для конечномерной линейной дискретной системы с линейными ограничениями на управление посредством решения ряда задач линейного программирования. Также был рассмотрен более общий случай выпуклых ограничений на управление, где на основе алгоритмов полиэдральной аппроксимации, задача быстродействия для исходной системы сводится к случаю линейных ограничений.

Принципиальная сложность использования данных методов заключается в том, что для этого требуется в явном виде построить множества 0 -управляемости системы за произвольное число шагов. Даже в случае линейных ограничений, где множества 0 -управляемости являются многогранниками, процедура вычисления их вершин сводится к построению конечной суммы Минковского многогранников. Хотя существует большое количество алгоритмов сложения многогранников, основная их часть в n -мерном пространстве заключается в практически полном переборе элементов верхней оценки множества вершин, число которых растёт экспоненциально. При этом проверка, является ли некоторая точка вершиной многогранника, основывается на свойствах выпуклых множеств и заключается в решении задачи линейного программирования.

Таким образом вычислительная сложность решения задачи быстродействия для конечномерной системы возрастает экспоненциально при росте минимального числа шагов, необходимого для достижения нуля. Данный факт делает актуальным поиск и разработку методов декомпозиции исходной системы на подсистемы, допускающие более быстрое решение за счёт аналитического описания оптимального управления или построения множеств 0 -управляемости в явном виде.

Финансирование

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 18–08–00128-а).



Литература

1. *Елкин В.И.* Подсистемы управляемых систем и задача терминального управления // *АиТ.* 1995. No 1. С. 21–29.
2. *Камачкин А.М., Шамберов В.Н.* Метод декомпозиции в многомерных нелинейных динамических системах // *Вестник ВГУ. Серия: Системный анализ и информационные технологии.* 2012. No 1. С. 47–55.
3. *Weibel C.* Minkowski sums of polytopes: combinatorics and computation. Lausanne:EPFL, 2007.
4. *Fukuda K., Weibel C.* On f-vectors of Minkowski additions of convex polytopes // *Discrete and Computational Geometry.* 2007. No. 37. P. 503–516.
5. *Ангелов Т.А.* Нахождение крайних точек суммы двух политопов // *Вестн. Вол-гогр. гос. ун-та. Сер. 1, Мат. Физ.* 2016. Т. 37. No 6. С. 7–17.
6. *Barber C.B., Dobkin D.P., Huhdanpaa H.* The quickhull algorithm for convex hulls // *ACM Transactions on Mathematical Software.* V. 4. No. 22. 1996. P. 469–483.
7. *Каменев Г.К., Поспелов А.И.* Полиэдральная аппроксимация выпуклых компактных тел методами наполнения // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* 2012. Т. 52. No 5. С. 818–828.
8. *Каменев Г.К.* Численное исследование эффективности методов полиэдральной аппроксимации выпуклых тел. М.:Вычислительный центр РАН, 2010.
9. *Циглер Г.М.* Теория многогранников. М.:МЦНМО, 2014.
10. *Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Б.Ф.* Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1969.
11. *Беллман Р.* Динамическое программирование. М.: ИИЛ, 1960.
12. *Хорн Р., Джонсон Ч.* Матричный анализ. М.:Мир, 1989.
13. *Рокафеллар Р.* Выпуклый анализ. М.: Мир, 1973.
14. *Сиротин А.Н., Формальский А.М.* Достижимость и управляемость дискретных систем при ограниченных по величине и импульсу управляющих воздействиях // *АиТ.* 2003. No 12. С. 17–32.
15. *Ибрагимов Д.Н., Сиротин А.Н.* О задаче оптимального быстрогодействия для линейной дискретной системы с ограниченным скалярным управлением на основе множеств 0-управляемости // *АиТ.* 2015. No 9. С. 3–30.
16. *Ибрагимов Д.Н.* Оптимальное по быстроддействию управление движением аэростата // *Электрон. журн. Тр. МАИ.* 2015. No 83.
17. *Ибрагимов Д.Н.* Аппроксимация множества допустимых управлений в задаче быстрогодействия линейной дискретной системой // *Электрон. журн. Тр. МАИ.* 2016. No 87.
18. *Ибрагимов Д.Н.* О задаче быстрогодействия для класса линейных автономных бесконечномерных систем с дискретным временем, ограниченным управлением и вырожденным оператором // *АиТ.* 2019. No 3. С. 3–25.
19. *Ибрагимов Д.Н., Сиротин А.Н.* О задаче быстрогодействия для класса линейных автономных бесконечномерных систем с дискретным временем и ограниченным управлением // *АиТ.* 2017. No 10. С. 3–32.



On a decomposition method in the problem of operation speed for a linear discrete system with bounded control

Ibragimov D.N. *

Moscow Aviation Institute, Moscow, Russia
rikk.dan@gmail.com

Turchak E.E. **

Moscow Aviation Institute, Moscow, Russia
turchak.kate@mail.ru

The article presents the problem of operation speed for a linear discrete system with bounded control. For the case when the minimum number of steps necessary for the system to reach zero significantly exceeds the dimension of the phase space, a method of decomposition into scalar and two-dimensional subsystems is developed, based on the reduction of the state matrix to normal Jordan form. Moreover, due to the developed algorithm for adding two polyhedrons with linear complexity, it is possible to construct sets of 0-controllability for two-dimensional subsystems in an explicit form. A description of the main tools for solving the problem of operation speed is also presented, as well as the statement of the decomposition problem. Further, some properties of polyhedrons in the plane are formulated and proved, on the basis of which an algorithm for calculating the set of vertices of the sum of two polyhedrons in R^2 in explicit form is developed. In conclusion, the main decomposition theorem is formulated and proved. And on the basis of the developed methods, the solution to the problem of the optimal damping speed of a high-rise structure located in the zone of seismic activity was constructed.

Keywords: linear discrete system, problem of operation speed, method of decomposition.

Funding

This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research (project № .18–08–00128-a)

For citation:

Ibragimov D.N., Turchak E.E. On a decomposition method in the problem of operation speed for a linear discrete system with bounded control. *Modelirovanie i analiz dannykh = Modelling and Data Analysis*, 2019. Vol. 09, no. 4, pp. 157–161. doi: 10.17759/mda.2019090413 (In Russ., abstr. in Engl.)

***Ibragimov Danis Nailevich**, Ph.D. in Physics and Mathematics, Senior Lecturer, Moscow Aviation Institute (National Research University), Moscow, Russia. Email: rikk.dan@gmail.com

****Turchak Ekaterina Evgenevna**, student of magistracy, Moscow Aviation Institute (National Research University Moscow, Russia. E-mail: turchak.kate@mail.ru



References

1. Elkin V.I. Subsystems of controllable systems and the problem of terminal control // *Autom. Remote Control*. 1995. V. 56. No. 1. P. 16–22.
2. Kamachkin A.M., SHamberov V.N. Metod dekompozicii v mnogomernykh nelinejnykh dinamicheskikh sistemah // *Vestnik VGU. Seriya: Sistemnyj analiz i informacionnye tekhnologii*. 2012. No 1. S. 47–55.
3. Weibel C. Minkowski sums of polytopes: combinatorics and computation. Lausanne:EPFL, 2007.
4. Fukuda K., Weibel C. On f-vectors of Minkowski additions of convex polytopes // *Discrete and Computational Geometry*. 2007. No. 37. P. 503–516.
5. Angelov T.A. Nahozhdenie krajnih toček summy dvuh politopov // *Vestn. Vol-gogr. gos. un-ta. Ser. 1, Mat. Fiz.* 2016. T. 37. No 6. S. 7–17.
6. Barber C.B., Dobkin D.P., Huhdanpaa H. The quickhull algorithm for convex hulls // *ACM Transactions on Mathematical Software*. V. 4. No. 22. 1996. P. 469–483.
7. Kamenev G.K., Pospelov A.I. Poliedral'naya approksimaciya vypuklykh kompaktnykh tel metodami napolneniya // *ZH. vychisl. matem. i matem. fiz.* 2012. T. 52. No 5. S. 818–828.
8. Kamenev G.K. CHislennoe issledovanie effektivnosti metodov poliedral'noj approksimacii vypuklykh tel. M.:Vychislitel'nyj centr RAN, 2010.
9. Cigler G.M. Teoriya mnogogrannikov. M.:MCNMO, 2014.
10. Pontryagin L.S., Boltyanskij V.G., Gamkrelidze R.V., Mishchenko B.F. *Matematicheskaya teoriya optimal'nykh processov*. M.: Nauka, 1969.
11. Bellman R. *Dinamicheskoe programmirovaniye*. M.: IIL, 1960.
12. Horn R., Dzhonson CH. *Matrichnyj analiz*. M.:Mir, 1989.
13. Rokafellar R. *Vypuklyj analiz*. M.: Mir, 1973.
14. Sirotin A.N., Formal'skii A.M. Reachability and Controllability of Discrete-Time Systems under Control Actions Bounded in Magnitude and Norm // *Autom. Remote Control*. 2003. V. 64. No. 12. P. 1844–1857.
15. Ibragimov D.N., Sirotin A.N. On the Problem of Optimal Speed for the Discrete Linear System with Bounded Scalar Control on the Basis of 0-controllability Sets // *Autom. Remote Control*. 2015. V. 76. No. 9. P. 1517–1540.
16. Ibragimov D.N. Optimal'noe po bystrodejstvii upravleniye dvizheniem aerostata // *Elektron. zhurn. Tr. MAI*. 2015. No 83.
17. Ibragimov D.N. Approksimaciya mnozhestva dopustimykh upravlenij v zadache bystrodejstviya linejnoy diskretnoj sistemoj // *Elektron. zhurn. Tr. MAI*. 2016. No 87.
18. Ibragimov D.N. On the Optimal Speed Problem for the Class of Linear Autonomous Infinite-Dimensional Discrete-Time Systems with Bounded Control and Degenerate Operator // *Autom. Remote Control*. 2019. V. 80. No. 3. P. 393–412.
19. Ibragimov D.N., Sirotin A.N. On the Problem of Operation Speed for the Class of Linear Infinite-Dimensional Discrete-Time Systems with Bounded Control // *Autom. Remote Control*. 2017. V. 78. No. 10. P. 1731–1756.