

◇◇ МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ◇◇

УДК 004.942

Адаптивная технология психологической диагностики на основе марковских и квантовых представлений процесса выполнения заданий

Куравский Л.С. *

Московский государственный психолого-педагогический университет
(ФГБОУ ВО МГППУ), г. Москва, Российская Федерация
ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-3375-8446>
e-mail: ls.kuravsky@gmail.com

Юрьев Г.А. **

Московский государственный психолого-педагогический университет
(ФГБОУ ВО МГППУ), г. Москва, Российская Федерация
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-2960-6562>
e-mail: g.a.yuryev@gmail.com

Юрьева Н.Е. ***

Московский государственный психолого-педагогический университет
(ФГБОУ ВО МГППУ), г. Москва, Российская Федерация
ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-1419-876X>
e-mail: yurieva.ne@gmail.com

Исаков С.С. ****

Московский государственный психолого-педагогический университет
(ФГБОУ ВО МГППУ), г. Москва, Российская Федерация
ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-1719-2355>
e-mail: isakovss@mgppu.ru

Несимова А.О. *****

Московский государственный психолого-педагогический университет
(ФГБОУ ВО МГППУ), г. Москва, Российская Федерация
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-8394-7376>
e-mail: sasha.n2230@gmail.com

Николаев И.А. *****

Московский государственный психолого-педагогический университет
(ФГБОУ ВО МГППУ), г. Москва, Российская Федерация
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-7715-5575>
e-mail: stripeddog@yandex.ru



Представлен метод построения адаптивных диагностических оценок с помощью идентифицируемых вероятностных марковских моделей, обеспечивающий индивидуальные траектории тестирования испытуемых путём обоснованного выбора оптимальной последовательности предъявления заданий. Особенности применяемого адаптивного подхода являются: выявление и использование при построении расчётных оценок временной динамики изменения способности справляться с заданиями; возможность учёта времени, затрачиваемого на выполнение заданий; меньшее по сравнению с другими подходами число заданий, которое следует предъявлять, – что обеспечивает представленному подходу преимущества перед аналогами. Рассмотрен новый подход к решению задач диагностики путем свёртки прикладных марковских моделей в квантовые представления, что позволяет выявлять структуру процесса выполнения заданий с помощью квантового спектрального анализа и использовать при формировании диагностического решения только существенную информацию, повышая надёжность результатов.

Ключевые слова: марковские модели, квантовые представления, психологическая диагностика, адаптивное тестирование.

Финансирование. Работа выполняется в рамках государственного задания Министерства просвещения РФ № 073–00110–22–06 от 12.12.2022 г.

Для цитаты:

Куравский Л.С., Юрьев Г.А., Юрьева Н.Е., Исаков С.С., Несимова А.О., Николаев И.А. Адаптивная технология психологической диагностики на основе марковских и квантовых представлений процесса выполнения заданий // Моделирование и анализ данных. 2022. Том 12. № 4. С. 36–55. DOI: <https://doi.org/10.17759/mda.2022120403>

**Куравский Лев Семенович*, доктор технических наук, профессор, декан факультета информационных технологий, Московский государственный психолого-педагогический университет (ФГБОУ ВО МГППУ), г. Москва, Российская Федерация, ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-3375-8446>, e-mail: l.s.kuravsky@gmail.com

***Юрьев Григорий Александрович*, кандидат физико-математических наук, доцент, ведущий кафедрой, Московский государственный психолого-педагогический университет (ФГБОУ ВО МГППУ), г. Москва, Российская Федерация, ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-2960-6562>, e-mail: g.a.yuryev@gmail.com

****Юрьева Наталия Евгеньевна*, кандидат технических наук, научный сотрудник центра информационных технологий для психологических исследований факультета информационных технологий, Московский государственный психолого-педагогический университет (ФГБОУ ВО МГППУ), г. Москва, Российская Федерация, ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-1419-876X>, e-mail: yurieva.ne@gmail.com

*****Исаков Сергей Сергеевич*, преподаватель, аспирант, Московский государственный психолого-педагогический университет (ФГБОУ ВО МГППУ), г. Москва, Российская Федерация, ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-1719-2355>, e-mail: isakovss@mgppu.ru

******Несимова Александра Олеговна*, студент, Московский государственный психолого-педагогический университет (ФГБОУ ВО МГППУ), г. Москва, Российская Федерация, ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-8394-7376>, e-mail: sasha.n2230@gmail.com

******Николаев Иван Александрович*, студент, Московский государственный психолого-педагогический университет (ФГБОУ ВО МГППУ), г. Москва, Российская Федерация, ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-7715-5575>, e-mail: stripeddog@yandex.ru



1. ВВЕДЕНИЕ

В последние годы выросла популярность различных форм психологических диагностик, охватывающих, в широком смысле, практически все формы и способы передачи знаний, умений и навыков с помощью информационных и коммуникационных технологий. Подходы к психологической диагностике имеют как известные преимущества, так и недостатки, наиболее значимые из которых обусловлены отсутствием эффективной адаптации диагностического процесса к индивидуальным особенностям и возможностям его участников. Проблемы, связанные с адаптацией такого рода, сложны для решения и наиболее актуальны при диагностике неформализуемых умений и навыков. Существующие средства организации электронной диагностики, включая системы управления обучением и учебным контентом, обходят рассматриваемую проблему, решая более доступные задачи. Причина этого заключается, в первую очередь, в трудностях формализации и отсутствии подходящего математического аппарата.

Указанные проблемы сделали актуальной разработку новых подходов. В 2010–2012 годах был разработан метод адаптивного тестирования [1-3], построенный на применении *идентифицируемых марковских моделей* с непрерывным временем и *байесовской классификации*. Как развитие этого результата, в 2017 году предложен новый вариант марковской модели адаптивного тестирования с дискретным временем [4], предполагающий оценки конструкторов с использованием предельных распределений вероятностей пребывания в состояниях, вычисленных с помощью матриц вероятностей перехода.

Различные возможности марковских процессов для решения диагностических, прогностических и других задач подробно рассмотрены в работах [5, 6, 7–10], где разработаны многочисленные решения, реализованные в различных областях, таких как инженерия, психологический анализ данных, системы поддержки принятия решений, адаптивное тестирование и обучение, прикладное управление мультиагентными системами. Однако, диагностика на основе процессов такого типа требует обычно детальной информации о наблюдаемых переходах между многочисленными состояниями и поэтому нуждается в огромном числе эмпирических данных, которых часто нет (подходящие примеры можно найти в [7]). Эти причины формируют запрос на разработку более эффективных математических представлений в исследуемых областях применения.

Применение квантовых представлений, аналогичных тем, что были в работах [11–12], для моделирования поведения марковских процессов при решении диагностических задач может дать требуемое решение благодаря тому, что такие квантовые структуры являются обобщением традиционных вероятностных конструкций (поэтому они лучше отвечают имеющимся результатам наблюдений), а число необходимых кубитов обычно намного меньше, чем число состояний соответствующей марковской модели. Следуя субъективной интерпретации вероятностной конструкции вместо частотной, этот подход дает новую гибкую форму для представления поведения прикладных вероятностных систем, что существенно расширяет возможности их анализа.

В статье рассмотрен новый подход к решению задач диагностики путем свёртки прикладных марковских моделей в квантовые представления, что позволяет выяв-



лять структуру процесса выполнения заданий с помощью квантового спектрального анализа.

2. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ДИАГНОСТИЧЕСКОЙ ПРОЦЕДУРЫ

Для реализации диагностических процедур применяется марковский процесс с дискретными состояниями и непрерывным временем [13-14], для которого известны начальные распределения вероятностей и наблюдаемые частоты нахождения в состояниях процесса $F_{i,d}$ в контрольные моменты времени $\{t_d\}_{d=0,\dots,D-1}$, где i – индекс состояния, D – число моментов времени, для которых известны частоты $F_{i,d}$, $0 \leq t_d \leq T$, T – конечный момент времени. Интенсивности переходов между состояниями являются идентифицируемыми параметрами рассматриваемых моделей.

Полагается, что каждый испытуемый имеет одну из заданных оценок диагностического уровня с индексами $l \in \{1, \dots, 3\}$. Вероятности пребывания в состояниях процесса, как функции времени, определяются следующей системой обыкновенных дифференциальных уравнений Колмогорова в матричной форме:

$$\frac{d\mathbf{p}_l(t)}{dt} = \mathbf{M}(\lambda_l)\mathbf{p}_l(t),$$

где $0 \leq t \leq T$, $\{x_{ij}\}_{i=0,\dots,n}$ и $\{x_{i*}\}_{i=0,\dots,n}$ – состояния марковского процесса, $\mathbf{p}_l(t)$ представляет вероятности пребывания в состояниях процесса для определенного уровня подготовки испытуемого l , $\mathbf{M}(\lambda_l) = \|m_{ij}(\lambda_l)\|$ – матрица, имеющая размер

$$2n + 2, \mathbf{p}_l(t) = (p_{0,l}(t), \dots, p_{n,l}(t), p_{0*,l}(t), \dots, p_{n*,l}(t))^T, \\ \lambda_l = (\lambda_{0,l}^+, \dots, \lambda_{n-1,l}^+, \mu_{0,l}^+, \dots, \mu_{n,l}^+, \mu_{0,l}^-, \dots, \mu_{n,l}^-)^T$$

– упорядоченное множество интенсивностей переходов между состояниями процесса для уровня подготовки испытуемого l .

Для определения того, как вероятности пребывания в состояниях изменяются со временем, используется марковский процесс, представляющей собой конечную цепь из $2n+2$ состояний (Рисунок 1). Состояния x_k и x_{k*} соответствуют фрагментам заданий, представляющим k^{bie} содержательные уровни процесса оценки. Для каждого k может быть определен свой собственный адаптирующийся к возможностям испытуемого набор заданий с релевантным содержанием.

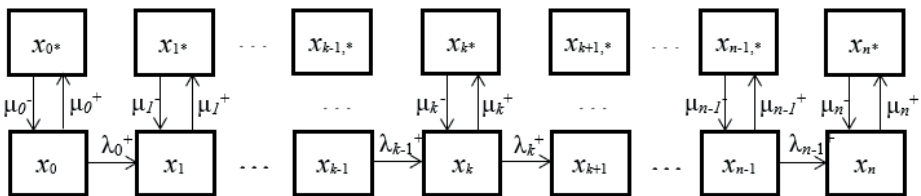


Рис. 1. Марковский процесс с дискретными состояниями и непрерывным временем, представляющий динамику оценки: $\{x_{ij}\}_{i=0,\dots,n}$ и $\{x_{i*}\}_{i=0,\dots,n}$ – состояния процесса,

$\lambda_l = (\lambda_{0,l}^+, \dots, \lambda_{n-1,l}^+, \mu_{0,l}^+, \dots, \mu_{n,l}^+, \mu_{0,l}^-, \dots, \mu_{n,l}^-)^T$ – упорядоченное множество интенсивностей переходов между состояниями для уровня подготовки испытуемого l .



Когда испытуемый находится в состоянии x_k , назначенное для выполнения тестовое задание адаптивно выбирается из множества возможных вариантов, соответствующих данному состоянию. Каждое задание имеет свои ограничения, в том числе по времени выполнения.

Переходы между состояниями определяются следующими правилами, обеспечивающими для испытуемого адаптивность диагностической процедуры:

- если испытуемый, пребывая в состоянии x_k , выполняет соответствующее задание правильно и не нарушает временные или другие ограничения, связанные с этим заданием, выполняется переход в состояние x_{k+1} ;
- если испытуемый, пребывая в состоянии x_k , выполняет соответствующее задание неправильно и не нарушает временные или другие ограничения, связанные с этим заданием, пребывание в состоянии x_k продолжается;
- если испытуемый, пребывая в состоянии x_k , выполняет соответствующее задание правильно, но нарушает временные или другие ограничения, связанные с этим заданием, выполняется переход в состояние x_{k*} ;
- если испытуемый, пребывая в состоянии x_{k*} , при выполнении задания нарушает временные или другие ограничения, связанные с этим заданием, либо выполняет соответствующее задание неправильно и не нарушает временные или другие ограничения, связанные с этим заданием, пребывание в состоянии x_{k*} продолжается;
- если испытуемый, пребывая в состоянии x_{k*} , выполняет соответствующее задание правильно и не нарушает временные или другие ограничения, связанные с этим заданием, выполняется возвращение в состояние x_k .

Полагается, что в начальный момент времени испытуемый находится в состоянии x_0 . Функционально состояния x_{k*} выполняют роль своего рода «ловушек» для тех испытуемых, которым не удаётся уложиться в заданные лимиты времени или другие ограничения при выполнении заданий.

Зная состояние процесса, в котором испытуемый в определенный момент времени оказывается после выполнения текущего задания, а также соответствующие прогнозируемые вероятности пребывания в состояниях процесса, которые можно рассчитать с помощью уравнений Колмогорова для каждого диагностического уровня, с помощью формулы Байеса оцениваются апостериорные вероятности диагностических уровней подготовки экипажа:

$$P(C_l|S(t)) = \frac{P(C_l)P(S(t)|C_l)}{\sum_{k=0}^z P(C_k)P(S(t)|C_k)},$$

где C_l – событие, состоящее в том, что испытуемый обладает l^{oi} оценкой диагностического уровня ($l \in \{1, \dots, z\}$), $S(t)$ – событие, состоящее в том, что испытуемый находится в указанном состоянии процесса в указанный момент времени, $P(C_l)$ – априорная вероятность того, что испытуемый обладает l^{oi} оценкой диагностического уровня, $P(S(t)|C_l)$ – вероятность пребывания в указанном состоянии процесса в указанный момент времени при условии, что испытуемый обладает l^{oi} оценкой диагностического уровня, $P(C_l|S(t))$ – вероятность того, что $l^{ая}$ оценка диагностического уровня соответствует испытуемому, который находится в указанном состоянии процесса в указанный момент времени.



Оценка диагностического уровня, при которой достигается наибольшее значение условной апостериорной вероятности $P(C_{max}|S(t)) = \max_l \{P(C_l|S(t))\}_{l=1,\dots,z}$ является искомой.

Процесс обхода состояний рассматриваемых марковских процессов прерывается, если указанное выше наибольшее значение условной апостериорной вероятности $P(C_{max}|S(t))$ превысит все оставшиеся значения апостериорных вероятностей $\{P(C_l|S(t))\}_{l=1,\dots,z}$ не менее чем на установленное критическое значение Δp_* . После этого адаптивная оценка диагностического уровня устанавливается по текущему результату.

Параметры марковского процесса $\lambda_l = (\lambda_{0,l}^+, \dots, \lambda_{n-1,l}^+, \mu_{0,l}^+, \dots, \mu_{n,l}^+, \mu_{0,l}^-, \dots, \mu_{n,l}^-)^T$ идентифицируются по наблюдаемым и прогнозируемым гистограммам, представляющим распределения частот пребывания в состояниях процесса. Вычисляются оценки этих параметров, обеспечивающие наибольшее согласование между наблюдаемыми и прогнозируемыми частотами пребывания в контрольных состояниях процесса в заданные моменты времени, а именно: определяется множество интенсивностей переходов между состояниями λ_l , которому соответствует наименьшее значение статистики Пирсона:

$$\chi^2(\lambda_l) = \sum_{d=0}^{D-1} \sum_{i=0}^n \left[\frac{(p_i(t_d)N_d - F_{i,d})^2}{p_i(t_d)N_d} + \frac{(p_{i*}(t_d)N_d - F_{i*,d})^2}{p_{i*}(t_d)N_d} \right],$$

где $N_d = \sum_{i=0}^n (F_{i,d} + F_{i*,d})$, $F_{i,d}, F_{i*,d}$ – наблюдаемые частоты пребывания в состояниях процесса в моменты времени $\{t_d\}_{d=0,\dots,D-1}$. Эта статистика используется для проверки статистической гипотезы о том, что набор прогнозируемых частот попадания в состояния значимо не отличаются от соответствующего набора наблюдаемых частот [13, 15–24], и представляет собой меру согласования применяемой математической модели с наблюдениями.

Для решения данной задачи идентификации разработан специальный численный метод [17]. При ограниченном объёме эмпирических данных интенсивности переходов между состояниями могут приближённо оцениваться как обратные величины к средним интервалам времени между двумя смежными переходами в соответствующем направлении [14], что является наиболее практичным решением в случае эмпирических данных ограниченного объёма.

Работа с эмпирическими данными показала, что использование для построения байесовских оценок диагностического уровня вероятностей пребывания в парах состояний « $x_k + x_{k*}$ » ($k = 0, 1, \dots, 6$) (т.е. состояний вместе с соответствующими им состояниями-«ловушками») обеспечивает существенно более высокий уровень дискриминации между оцениваемыми уровнями, чем в случае использования вероятностей пребывания в состояниях, вычисленных отдельно.

3. ИЛЛЮСТРАТИВНЫЙ ПРИМЕР

Например, если в модели используется 7 пар состояний, соответствующих последовательным этапам диагностической процедуры, приведённая выше в матричной форме система обыкновенных дифференциальных уравнений Колмогорова,



определяющая динамику пребывания в состояниях марковского процесса, приобретает вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dp_0}{dt} = \mu_0^- p_{0*} - (\mu_0^+ + \lambda_0^+) p_0 \\ \frac{dp_{0*}}{dt} = \mu_0^+ p_0 - \mu_0^- p_{0*} \\ \dots \\ \frac{dp_k}{dt} = \lambda_{k-1}^+ p_{k-1} + \mu_k^- p_{k*} - (\mu_k^+ + \lambda_k^+) p_k \\ \frac{dp_{k*}}{dt} = \mu_k^+ p_k - \mu_k^- p_{k*} \\ (k = 1, \dots, 5) \\ \dots \\ \frac{dp_6}{dt} = \lambda_5^+ p_5 + \mu_6^- p_{6*} - \mu_6^+ p_6 \\ \frac{dp_{6*}}{dt} = \mu_6^+ p_6 - \mu_6^- p_{6*} \end{array} \right.$$

(обозначения см. выше).

В качестве иллюстрации, в случае трёх вариантов диагностической оценки, эмпирические данные прохождения одного из тестов привели к временной динамике вероятностей пребывания в состояниях марковского процесса, представленной на Рисунках 2–4.

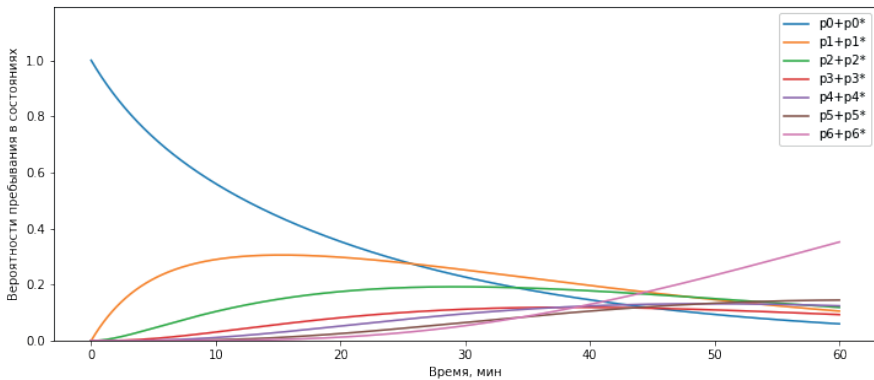


Рис. 2. Временная динамика вероятностей пребывания в двоенных состояниях марковского процесса в случае испытуемых, соответствующих диагностическому уровню 1.

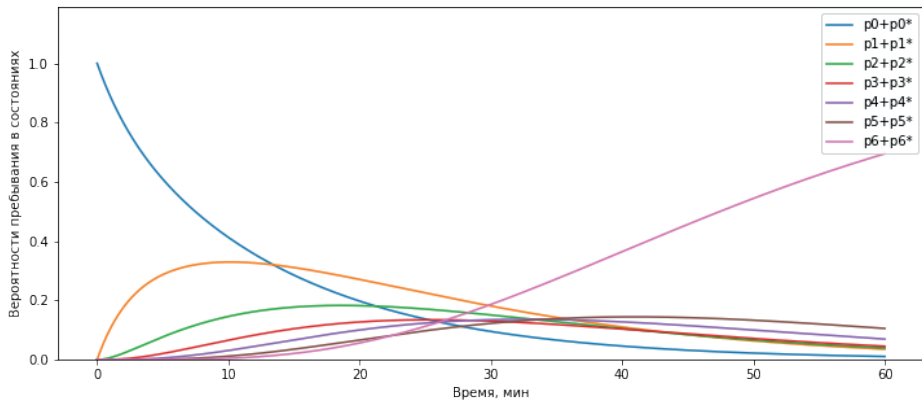


Рис. 3. Временная динамика вероятностей пребывания в двоянных состояниях марковского процесса в случае испытуемых, соответствующих диагностическому уровню 2.

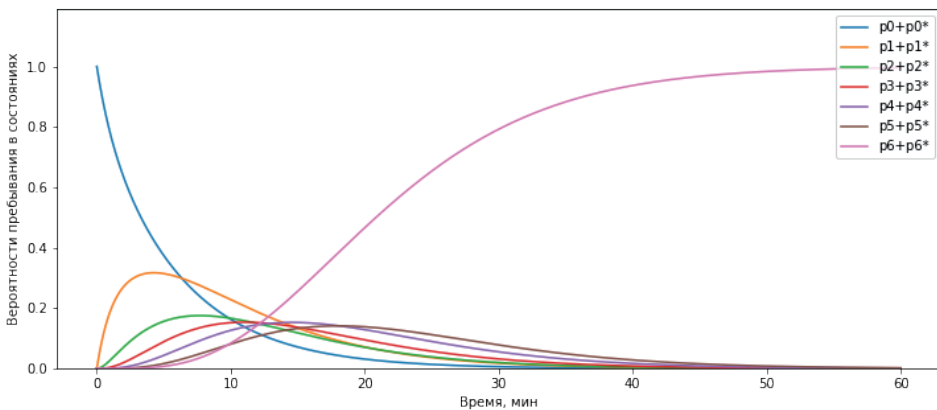


Рис. 4. Временная динамика вероятностей пребывания в двоянных состояниях марковского процесса в случае испытуемых, соответствующих диагностическому уровню 3.

Построение диагностической оценки проиллюстрировано на Рисунке 5 с помощью расчётной диаграммы для двоянных состояний. Приведённая оценка вычислялась для состояния процесса x_1 , в котором испытуемый находился в контрольный момент времени (3-я минута выполнения теста). Для повышения качества дискриминации, использовались вероятности пребывания в паре состояний « $x_1 + x_{1*}$ ». Текущая оценка, соответствующая контрольному моменту времени – уровень 3.

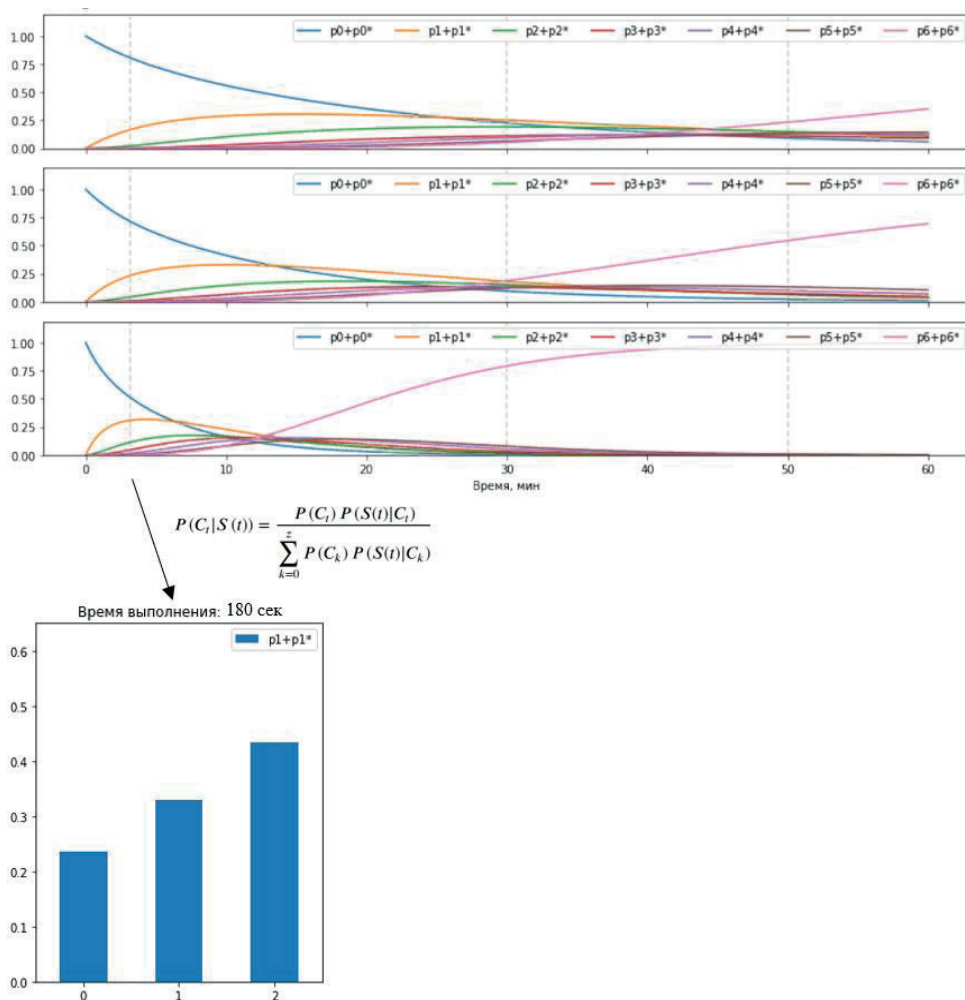


Рис. 5. Построение байесовской диагностической оценки на 3-й минуте выполнения тестовых заданий с помощью графиков вероятностей пребывания в состояниях соответствующего марковского процесса.

4. ПОСТРОЕНИЕ КВАНТОВЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ ДЛЯ АНАЛИЗА ДИНАМИКИ МАРКОВСКИХ ПРОЦЕССОВ

Применение квантовых представлений для анализа марковских процессов при решении диагностических задач может дать необходимое решение благодаря тому, что такие квантовые структуры являются обобщением традиционных вероятностных конструкций (поэтому они лучше отвечают имеющимся результатам наблюдений). Следуя субъективной интерпретации вероятностной конструкции вместо частотной,



этот подход дает новую гибкую форму для представления поведения прикладных вероятностных систем, что существенно расширяет возможности их анализа.

Для представления динамики поведения исследуемой системы используются *марковские процессы с дискретными состояниями и дискретным временем*, при этом вероятности перехода из состояния в состояние являются параметрами модели. Переход к указанному варианту марковских процессов от рассмотренных выше процессов с непрерывным временем очевиден: функциональные зависимости $\mathbf{p}_i(t)$ преобразуются в соответствующие ряды путём дискретизации с заданным постоянным временным шагом.

Динамика вероятностей пребывания в состояниях марковского процесса определяется следующим матричным уравнением:

$$\mathbf{p}_{i+1} = \mathbf{U}_d \mathbf{p}_i,$$

где значения индекса $i \in \{1, 2, \dots, N\}$ соответствуют дискретным моментам времени в основной шкале; вероятности пребывания в состояниях в момент времени i представляются как $\mathbf{p}_i = (p_{i,1}, \dots, p_{i,G})^T$; G – количество состояний марковского процесса; $\mathbf{U}_d = \|u_{d,ij}\|$ – стохастическая матрица размера $G \times G$ вероятностей перехода между состояниями, в которой $u_{d,ij}$ – вероятность перехода из состояния j в состояние i . Каждому состоянию марковской цепи взаимнооднозначно соответствует определённая область (ячейка) комплексной плоскости, по которой перемещаются собственные значения матриц \mathbf{T}_i .

Преобразование марковских моделей в квантовые представления позволяет выявить структуру исследуемых процессов с помощью квантового спектрального анализа [25–26]. Результаты этого анализа, подобно анализу функций с помощью преобразования Фурье, выражают внутреннюю структуру случайного наблюдаемого процесса в частотной области. Они, в свою очередь, могут быть использованы для последующего углублённого анализа поведения квантовой системы. Накопленный эмпирический опыт показывает, что такой подход существенно увеличивает количество полезной и значимой информации о поведении исследуемой системы по сравнению с марковскими процессами.

Чтобы представить прикладной марковский процесс данного типа для решения диагностической задачи, используется набор M кубитов $\{|q_k\rangle\}_{k=0}^{M-1}$, размер и величина которого определяются количеством распознаваемых состояний. Полученное представление кубитов отражает переходы между кластерами состояний, число которых значительно меньше числа состояний исходной марковской модели. Кластеры распознаваемых состояний определяются на основе эмпирических данных, содержащихся в матрице вероятностей переходов, элементами которой являются выборочные оценки вероятностей переходов между состояниями марковской модели, преобразуемой посредством процедуры многомерного шкалирования.

Таким образом, этапами свёртки марковского процесса в систему кубитов являются как многомерное шкалирование [27–30] для получения определённого представления состояний марковской модели в пространстве шкалирования, так и последующий кластерный анализ [28–29] для формирования кластеров объединённых состояний этой модели. Пары состояний марковской модели, которые имеют большие



вероятности взаимных переходов, в результате выполнения указанной процедуры располагаются в пространстве шкалирования ближе друг к другу.

По сравнению с исходным марковским процессом предлагаемое представление имеет преимущества в двух аспектах: за счет уменьшения размерности задачи (число кубитов определяется числом кластеров и поэтому в несколько раз меньше числа состояний в исходном марковском процессе) и использования более обобщенного и гибкого квантового представления вероятности [25–26]. Каждое квантовое представление соответствует одному из кластеров, выявленных в результате проведенного кластерного анализа. Оптимальное количество кластеров может быть определено с использованием информации об эффективности решения рассматриваемой прикладной задачи [26]. Благодаря кластеризации для принятия диагностического решения используется только существенная информация.

Для рассматриваемых квантовых систем наблюдаемой величиной является пребывание марковского процесса в кластере заданных состояний. Поэтому ее наблюдаемые значения могут быть представлены биполярными константами типа либо I (марковский процесс находится внутри набора заданных состояний), либо $-I$ (марковский процесс без этого набора состояний).

Исследуемые марковские процессы могут быть выражены с помощью кубитовых представлений пребывания в соответствующих кластерах состояний, а именно: вероятностная структура, представляемая кубитами, должна содержать несколько кластеров состояний, причем рассматриваемый процесс в любой момент времени находится в одном и только одном из M рассматриваемых кластеров.

Пребывание процесса в кластере состояний k ($k = 0, \dots, M - 1$) представлено кубитом $|q_k(t)\rangle = A_k(t)|a_k\rangle + B_k(t)|b_k\rangle$, где t – время; векторы $|a_k\rangle$ и $|b_k\rangle$ образуют основу кластера состояний, векторы которого должны быть выбраны в качестве результатов измерений, полученных путем проецирования; $A_k(t), B_k(t) \in \mathbb{C}$ (\mathbb{C} – множество комплексных чисел); $|A_k(t)|^2 + |B_k(t)|^2 = 1$, где $|A_k(t)|^2$ рассматривается как вероятность пребывания в кластере состояний k в соответствии с правилом Борна, $|B_k(t)|^2$ рассматривается как вероятность не остаться в кластере состояния k (то есть остаться в любом другом доступном кластере системы $j \neq k$, который не совпадает с кластером i) в соответствии с правилом Борна.

Векторы $|a_k\rangle$ и $|b_k\rangle$ должны быть получены в виде результатов наблюдения, а именно: каждое проведенное измерение дает или $|a_k\rangle$, или $|b_k\rangle$ с двумя очевидными эквивалентными условиями нормализации, следующими из приведенных выше определений $A_k(t)$ и $B_k(t)$:

$$\sum_{k=0}^{M-1} |A_k(t)|^2 = 1, |B_k(t)|^2 = \sum_{j \neq k} |A_j(t)|^2.$$

Используя подход фон Неймана к интерпретации измерений [31], отличия от выраженных квантовых систем определяются с помощью следующих *преобразований нормализации* N_k для выполнения заданных условий для $A_k(t)$ и $B_k(t)$ ($k = 0, \dots, M - 1$), которые выполняются при измерениях:



$$N_k(A_k(t)|a_k\rangle + B_k(t)|b_k\rangle) = \frac{A_k(t)}{\sqrt{\sum_{j=0}^{M-1}|A_j(t)|^2}}|a_k\rangle + \text{sign}(B_k(t))\sqrt{1 - \frac{|A_k(t)|^2}{\sum_{j=0}^{M-1}|A_j(t)|^2}}|b_k\rangle.$$

Как отмечается в [25–26], эти преобразования нормализации делают представленные кубиты *запутанными при измерении (EM)*. Вся совокупность представленных кубитов, запутанных измерением, называется *EM-квантовой системой*. Нормализация, о которой идет речь, формирует ограничение, накладываемое рассматриваемыми приложениями. Фактически данные кубиты используются как зонды, которые получают информацию о состоянии системы и формируют фон для диагностических выводов.

Каждый кубит $|q_k(t)\rangle$ рассматривается как формальная квантовая структура, эволюция которой в *замкнутом режиме* описывается некоторым *унитарным оператором эволюции* $U_k(t_0, t)$ k -й квантовой системы:

$$|q_k((t_0 + t))\rangle = U_k(t_0, t)|q_k(t_0)\rangle,$$

где $|q_k(t_0)\rangle$ – текущее состояние исследуемой замкнутой системы в момент времени t_0 , $|q_k((t_0 + t))\rangle$ – последующее состояние той же замкнутой системы в момент времени $t_0 + t$.

Оператор $U_k(t_0, \Delta t)$ унитарной эволюции, который отвечает за эволюцию системы в течение малого промежутка времени Δt – от $|q_k(t_0)\rangle$ в момент времени t_0 до $|q_k((t_0 + \Delta t))\rangle$ в момент времени $t_0 + \Delta t$, – можно выразить как $I - i\Delta t H_k + o(\Delta t)$, где H_k – оператор Гамильтона (гамильтониан) k -й квантовой системы; I – оператор тождества. Это выражение вытекает из непрерывности оператора $U_k(t_0, \Delta t)$, причем $-i\Delta t H_k$ является его главной линейной частью приращения.

Если гамильтониан H_k установлен, то полное поведение k -го рассматриваемого кубита определяется с помощью решения уравнения Шрёдингера:

$$\frac{d}{dt} U_k(t_0, t) = -i H_k U_k(t_0, t).$$

Эта форма уравнения легко выводится из условий непрерывности и унитарности для рассматриваемого оператора эволюции. Очевидно, что данные гамильтонианы полностью определяют поведение EM-квантовой системы. Экспериментально наблюдаемыми являются величины, которые определяются этим оператором.

Используемая вероятностная модель квантовых представлений была подтверждена известными экспериментами [32].

Согласно одному из основных постулатов квантовой механики, каждой экспериментально наблюдаемой величине соответствует определенный эрмитов оператор в гильбертовом пространстве, причем собственные значения этого оператора являются ее измеряемыми величинами. Поскольку исследуемые системы являются нефизическими, в качестве экспериментальных результатов можно рассматривать биполярные константы $-I$ и I со следующей интерпретацией: $-I$ – если система не находится в данном кластере состояний; I – если система находится в данном кластере состояний.



Решение уравнения Шрёдингера имеет вид: $\mathbf{U}_k(t_0, t) = \mathbf{U}_k(t_0, 0)e^{-i\mathbf{H}_k t}$. Так как используемый гамильтониан является эрмитовым оператором, $\{\mathbf{H}_k\}_{k=0}^{M-1}$ должен определяться измеренными биполярными собственными значениями (-1 или 1). Начальные условия для решения уравнения могут быть представлены в любой удобной форме, поскольку начальный момент времени может быть расположен в любой точке оси времени.

В качестве решения уравнения Шрёдингера допустим хорошо известный оператор вращения, который использовался в работах [25–26, 33] для описания соответствующего поведения квантовой системы, а именно:

$$\mathbf{U}_k(t_0, t) = \mathbf{U}_k(t_0, 0) \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}.$$

Скорость эволюции различных кубитов может различаться. Однако все кубиты, работающие в одной и той же ЕМ-квантовой системе, должны эволюционировать в одном и том же масштабе времени. Поэтому для каждого кубита $|q_k(t)\rangle$ должен быть определен частотный параметр θ_k . В этом случае вышеприведенный оператор вращения принимает вид:

$$\mathbf{U}_k(t_0, 0) \begin{pmatrix} \cos(2\pi\theta_k t) & -\sin(2\pi\theta_k t) \\ \sin(2\pi\theta_k t) & \cos(2\pi\theta_k t) \end{pmatrix},$$

где t – общее время; θ_k – частота вращения кубита, которую необходимо определить. Эволюция, представленная таким образом, выражает скрытую периодичность нахождения в заданных кластерах состояний в течение периода наблюдения.

Идентификации параметров представлений кубитов и сопутствующие проблемы представлены в работах [25–26]. С помощью моделирования динамики марковской цепи в соответствии с вероятностями перехода состояний соответствующих матриц генерируются выборки траекторий прохождения кластеров состояний (или траекторий кластеров состояний) для каждого распознаваемого класса испытуемых. Эти выборки, а также выявленные параметры представлений кубитов используются для вычисления элементов матриц взаимных расстояний в определённой далее спектральной метрике.

Для каждой исследуемой ЕМ-квантовой системы в качестве соответствующего спектра анализируемого процесса рассматриваются как значения частоты $\{\theta_k^*\}_{k=0, \dots, M-1}$, так и наблюдаемые числа $\{F_k\}_{k=0, \dots, M-1}$ попадания в состояния $k = 0, \dots, M-1$ в моменты времени $\{t_j\}_{j=1, 2, \dots, N}$, которые называются амплитудами $\{L_k\}_{k=0, \dots, M-1}$. Для выяснения поведения ЕМ-квантовой системы определяются скрытые периодичности нахождения в данных состояниях в течение периода наблюдения. Спектральная метрика [25–26] оказалась наиболее эффективной для сравнения спектров процессов для пары моделей поведения системы:

$$w_{uv} = M - Z_{uv} e^{-\beta \sum_{k=0}^{M-1} (L_{u,k} - L_{v,k})^2},$$

где u и v ($u, v = 1, \dots, Z$) – пара индексов сравниваемых моделей Z ; w_{uv} – расстояние между процессами u и v ; Z_{uv} – количество совпадающих частот $\{\theta_{u,k}^*\}_{k=0, \dots, M-1}$ и $\{\theta_{v,k}^*\}_{k=0, \dots, M-1}$ с одинаковыми индексами k для сравниваемых процессов u и v (частоты $\theta_{u,k}^*$ и $\theta_{v,k}^*$ с одинаковым индексом k считаются совпада-



ющими, если их разность меньше заданной общей точности $\Delta\theta$, то есть $|\theta_{u,k}^* - \theta_{v,k}^*| \leq \Delta\theta$; $L_{u,k}$ и $L_{v,k}$ – амплитуды k -го кубита для процессов u и v соответственно; $\beta \geq 0$ – определенный эмпирический коэффициент. Очевидно, что указанный экспоненциальный коэффициент принимает наибольшее значение, если $L_{u,k} = L_{v,k}$ для всех k , с расстоянием w_{uv} , принимающим наименьшее значение.

Для решения диагностической задачи для оцениваемого испытуемого, представленного определенной траекторией прохождения кластеров состояний, необходимо включить соответствующую исследуемую траекторию в выборку других допустимых траекторий. Используя вычисленную матрицу взаимных расстояний в качестве входных данных, многомерное шкалирование позволяет получить рассматриваемые траектории кластеров состояний (включая траекторию оцениваемого испытуемого) в виде точек в пространстве шкалирования заданной размерности. Основываясь на информации о принадлежности к заданным классификационным классам, дискриминантный анализ того или иного типа может выявить класс траектории оцениваемого испытуемого. Преимущества представленного подхода рассмотрены в работах [29, 33].

5. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ И ВЫВОДЫ

1. Разработан метод построения адаптивной диагностической оценки с помощью идентифицируемых вероятностных марковских моделей, который обеспечивает построение индивидуальной траектории тестирования путём обоснованного выбора оптимальной последовательности предъявления заданий, повышая эффективность диагностической процедуры.
2. Значения параметров применяемых марковских процессов идентифицируются с использованием наблюдаемых и прогнозируемых гистограмм, описывающих распределения частот пребывания в состояниях модели. Идентификация проводится отдельно для каждого из рассматриваемых диагностических уровней.
3. Принадлежность к различным диагностическим уровням определяется с помощью байесовских оценок.
4. Особенности применяемого адаптивного подхода являются: выявление и использование при построении расчётных оценок временной динамики изменения способности справляться с заданиями; возможность учёта при построении расчётных оценок времени, затрачиваемого на выполнение заданий; меньшее по сравнению с другими подходами число заданий, которое следует предъявлять, – что обеспечивает представленному подходу преимущества перед аналогами.
5. Разработан подход к решению задач диагностики путем свертки прикладных марковских моделей в квантовые представления. Эти представления подразумевают: запутывание путем измерения, количественную оценку соответствия между замкнутой системой кубитов и наблюдениями для определения параметров кубитов, а также специализированную спектральную метрику для сравнения марковских траекторий кластеров состояний.
6. Очевидным преимуществом представленного подхода является то, что число кубитов определяется числом кластеров и поэтому в несколько раз меньше числа состояний в исходном марковском процессе. Благодаря этому при формировании диагностического решения используется только существенная информация.



7. Преобразование марковских моделей в квантовые представления позволяет выявить структуру исследуемых процессов с помощью квантового спектрального анализа. Результаты этого анализа, подобно анализу функций с помощью преобразования Фурье, выражают внутреннюю структуру случайного наблюдаемого процесса в частотной области. Они, в свою очередь, могут быть использованы для последующего углублённого анализа поведения квантовой системы. Накопленный эмпирический опыт показывает, что такой подход существенно увеличивает количество полезной и значимой информации о поведении исследуемой системы по сравнению с марковскими процессами.

Литература

1. *Куравский Л.С., Юрьев Г.А.* Адаптивное тестирование как марковский процесс: модели и их идентификация. – *Нейрокомпьютеры: разработка и применение*. №2. 2011. С. 21–29.
2. *Куравский Л.С., Юрьев Г.А.* Вероятностный метод фильтрации артефактов при адаптивном тестировании. – *Экспериментальная психология*, т.5, №. 1. 2012. С. 119–131.
3. *Куравский Л.С., Юрьев Г.А.* Об одном подходе к адаптивному тестированию и устранению его артефактов. // *Нейрокомпьютеры: разработка и применение*. №1. 2012.
4. *Куравский Л.С., Артеменков С.Л., Юрьев Г.А., Григоренко Е.Л.* Новый подход к компьютеризованному адаптивному тестированию // *Экспериментальная психология*. 2017. Т. 10. №. 3. С. 33–45. doi:10.17759/exppsy.2017100303
5. *G.G. Amosov.* On Markovian Cocycle Perturbations in Classical and Quantum Probability. *Int. J. Math. & Math. Sci.*, 2003 (54), 3443–3467 (2003).
6. *G.G. Amosov.* On Markovian Perturbations of the Group of Unitary Operators Associated with a Stochastic Process with Stationary Increments. *Theory Prob. & its Applications*, 49 (1), 123–132 (2005).
7. *L.S. Kuravsky et al.* Markovian Models in Diagnostics and Forecasting Problems: Textbook (Moscow State Univ. Psych. Educ., Moscow, 2017) [in Russian].
8. *L.S. Kuravsky, A.A. Margolis, P.A. Marmalyuk, A.S. Panfilova, G.A. Yuryev, P.N. Dumin.* A Probabilistic Model of Adaptive Training. *Applied Math. Sciences*, 10 (48), 2369–2380 (2016).
9. *L.S. Kuravsky, S.L. Artemenkov, G.A. Yuryev, E.L. Grigorenko.* A New Approach to Computerized Adaptive Testing. *Exp. Psychology*, 10 (3), 33–45 (2017).
10. *L.S. Kuravsky, S.N. Baranov and G.A. Yuryev.* Synthesis and Identification of Hidden Markov Models Based on a Novel Statistical Technique in Condition Monitoring. In: *Proc. 7th Int. Conf. on Condition Monitoring & Machinery Failure Prevention Technologies (Stratford-upon-Avon, England, 2010)*.
11. *L.S. Kuravsky.* Discriminant analysis based on the approaches of quantum computing. *Lobachevskii J. Math.* 41 (12), 2338–2344 (2020).
12. *L.S. Kuravsky.* Modeling Dynamical Behavior of Stochastic Systems: Spectral Analysis of Qubit Representations vs the Mutual Markovian Model Likelihood Estimations. *Lobachevskii J. Math.*, 42 (10), 2364–2376 (2021).
13. *Марковские модели в задачах диагностики и прогнозирования: Учеб. пособие / Под ред. Л.С. Куравского.* – 2-е изд., доп. – М.: Изд-во МГППУ, 2017. – 197 с.
14. *Овчаров Л. А.* Прикладные задачи теории массового обслуживания. – М.: Машиностроение, 1969. – 324 с.
15. *Kuravsky L.S., Dumin P.N. and Yuryev G.A.* Adaptive Aircraft Crew Training Based on Accumulated Empirical Experience. *International Journal of Advanced Research in Engineering and Technology*, 12(1), 2021, pp. 256–264. <http://www.iaeme.com/IJARET/issues.asp?IType=IJARET&VType=12&IType=1>.



16. Kuravsky L.S., Greshnikov I.I. Optimizing the mutual arrangement of pilot indicators on an aircraft dashboard and analysis of this procedure from the viewpoint of quantum representations. – Journal of Applied Engineering Science, doi:10.5937/jaes0-31855.
17. Kuravsky L.S., Marmalyuk P.A., Yuryev G.A. and Dumin P.N. A Numerical Technique for the Identification of Discrete-State Continuous-Time Markov Models – Applied Mathematical Sciences. Vol. 9, 2015, No. 8, pp. 379–391. URL: <http://dx.doi.org/10.12988/ams.2015.410882>.
18. Kuravsky L.S., Marmalyuk P.A., Yuryev G.A., Belyaeva O.B. and Prokopiyeva O.Yu. Mathematical Foundations of Flight Crew Diagnostics Based on Videoculography Data. – Applied Mathematical Sciences, Vol. 10, 2016, no. 30, 1449–1466, <http://dx.doi.org/10.12988/ams.2016.6122>.
19. Kuravsky L.S., Yuriev G.A., Dumin P.N. Estimating the Influence of Human Factor on the Activity of Operators of Complex Technical Systems in Civil Engineering with the Aid of Adaptive Diagnostics, International Journal of Civil Engineering and Technology, 10(2), 2019, pp. 1930–1941. <http://www.iaeme.com/IJCIET/issues.asp?JType=IJCIET&VType=10&IType=02>.
20. Kuravsky L.S., Yuryev G.A. Detecting Abnormal Activities of Operators of Complex Technical Systems and their Causes Basing on Wavelet Representations, International Journal of Civil Engineering and Technology (IJCIET) 10(2), 2019, pp. 724–742. <http://www.iaeme.com/IJCIET/issues.asp?JType=IJCIET&VType=10&IType=2>.
21. Kuravsky L.S., Yuryev G.A., Zlatomrezhev V.I. New approaches for assessing the activities of operators of complex technical systems. Eksperimental'naya psikhologiya = Experimental psychology (Russia), 2019, vol. 12, no. 4, pp. 27–49. doi:10.17759/exppsy.2019120403.
22. Kuravsky L.S., Yuryev G.A., Zlatomrezhev V.I., Greshnikov I.I., Polyakov B.Y. Assessing the Aircraft Crew Activity Basing on Video Oculography Data. Eksperimental'naya psikhologiya = Experimental Psychology (Russia), 2021. Vol. 14, no. 1, pp. 204–222. DOI: <https://doi.org/10.17759/exppsy.2021140110>
23. Kuravsky L.S., Yuryev G.A., Zlatomrezhev V.I., Yuryeva N.E. Assessing the Aircraft Crew Actions with the Aid of a Human Factor Risk Model. Eksperimental'naya psikhologiya = Experimental Psychology (Russia), 2020. Vol. 13, no. 2, pp. 153–181. DOI: <https://doi.org/10.17759/exppsy.2020130211>.
24. Kuravsky L.S., Yuryev G.A., Zlatomrezhev V.I., Yuryeva N.E., Mikhaylov A.Y. Evaluating the Contribution of Human Factor to Performance Characteristics of Complex Technical Systems. – Modelirovanie i analiz dannykh = Modelling and Data Analysis, 2020. Vol. 10, no. 1, pp. 7–34. DOI: 10.17759/mda.2020100101.
25. L.S. Kuravsky. Modeling Dynamical Behavior of Stochastic Systems: Spectral Analysis of Qubit Representations vs the Mutual Markovian Model Likelihood Estimations. Lobachevskii J. Math., 42 (10), 2364–2376 (2021).
26. L.S. Kuravsky. Simplification of Solving Diagnostics Problems by Convolution of Applied Markovian Models into the Quantum Representations. Lobachevskii J. Math., 43 (7), 1669–1682 (2022).
27. Borg and P.J.F. Groenen. Modern Multidimensional Scaling Theory and Applications (Springer, New York, 2005).
28. D.F. Morrison. Multivariate Statistical Methods, 2nd ed. (McGraw-Hill, New York, 1976).
29. E. Lloyd. Handbook of Applicable Mathematics, Vol. 6: Statistics, Ed. by W. Ledermann (Wiley, Hoboken, 1984).
30. T.F. Cox and M.A.A. Cox. Multidimensional Scaling, 2nd ed. (Chapman and Hall/CRC, Boca Raton, 2001).
31. J. von Neumann. Mathematical Foundations of Quantum Mechanics (Princeton Univ. Press, Princeton, 1955).
32. S. Holevo. Probabilistic and Statistical Aspects of Quantum Theory, 2nd ed. (Edizioni della Normale, Pisa, 2011).
33. L.S. Kuravsky. Discriminant analysis based on the approaches of quantum computing. Lobachevskii J. Math. 41 (12), 2338–2344 (2020).



Adaptive Technology of Psychological Diagnostics Based on the Markovian and Quantum Representations of the Task Performing Process

Lev S. Kuravsky*

Moscow State University of Psychology and Education (MSUPE), Moscow, Russia
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-3375-8446>
e-mail: l.s.kuravsky@gmail.com

Grigory A. Yuryev**

Moscow State University of Psychology and Education (MSUPE), Moscow, Russia
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-2960-6562>
e-mail: g.a.yuryev@gmail.com

Nataliya E. Yuryeva***

Moscow State University of Psychology and Education (MSUPE), Moscow, Russia
ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-1419-876X>
e-mail: yurieva.ne@gmail.com

Sergey S. Isakov****

Moscow State University of Psychology and Education (MSUPE), Moscow, Russia
ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-1719-2355>
e-mail: isakovss@mgppu.ru

Alexandra O. Nesimova*****

Moscow State University of Psychology and Education (MSUPE), Moscow, Russia
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-8394-7376>
e-mail: sasha.n2230@gmail.com

Ivan A. Nikolaev*****

Moscow State University of Psychology and Education (MSUPE), Moscow, Russia
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-7715-5575>
e-mail: stripeddog@yandex.ru

A method for constructing adaptive diagnostic assessments using identifiable probabilistic Markovian models is presented, which provides individual test trajectories of subjects by reasonably choosing the optimal sequence of presenting tasks. The features of the applied adaptive approach are: identification and use in the construction of calculated estimates of the time dynamics of changes in the ability to cope with tasks; the possibility of taking into account the time spent on completing tasks; the number of tasks that should be submitted is smaller in comparison with other approaches, which provides the presented approach with advantages over analogues. A new approach to solving diagnostic problems by convolving applied Markovian models into quantum representations is considered, which makes it possible to identify the structure of the task execution process using quantum spectral analysis and use only essential information when forming a diagnostic solution, increasing the reliability of the results.

Keywords: Markovian models, quantum representations, psychological diagnostics, adaptive testing.



Funding. The work is carried out within the framework of the state task of the Ministry of Education of the Russian Federation No. 073–00110–22–06 dated 12.12.2022.

For citation:

Kuravsky L.S., Yuryev G.A., Yuryeva N.E., Isakov S.S., Nesimova A.O., Nikolaev I.A. Adaptive Technology of Psychological Diagnostics Based on the Markovian and Quantum Representations of the Task Performing Process. *Modelirovanie i analiz dannykh = Modelling and Data Analysis*, 2022. Vol. 12, no. 4, pp. 36–55. DOI: <https://doi.org/10.17759/mda.2022120403> (In Russ., abstr. in Engl.).

***Lev S. Kuravsky**, Doctor of Engineering, Professor, Dean of the Computer Science Faculty, Moscow State University of Psychology and Education (MSUPE), Moscow, Russia, ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-3375-8446>, e-mail: ls.kuravsky@gmail.com

****Grigory A. Yuryev**, PhD in Physics and Mathematics, Associate Professor, Head of Department of the Computer Science Faculty, Moscow State University of Psychology and Education (MSUPE), Moscow, Russia, ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-2960-6562>, e-mail: g.a.yuryev@gmail.com

*****Nataliya E. Yuryeva**, PhD in Engineering, Research Fellow, Information Technology Center for Psychological Studies of the Computer Science Faculty, Moscow State University of Psychology and Education (MSUPE), Moscow, Russia, ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-1419-876X>, e-mail: yurieva.ne@gmail.com

******Sergey S. Isakov**, Lecturer, Postgraduate Student of the Computer Science Faculty, Moscow State University of Psychology and Education (MSUPE), Moscow, Russia, ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-1719-2355>, e-mail: isakovss@mgppu.ru

*******Alexandra O. Nesimova**, Student, Moscow State University of Psychology and Education (MSUPE), Moscow, Russian Federation, ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-8394-7376>, e-mail: sasha.n2230@gmail.com

*******Ivan A. Nikolaev**, Student, Moscow State University of Psychology and Education (MSUPE), Moscow, Russian Federation, ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-7715-5575>, e-mail: stripeddogg@yandex.ru

References

1. Kuravskii L.S., Yur'ev G.A. Adaptivnoe testirovanie kak markovskii protsess: modeli i ikh identifikatsiya. – *Neirokomp'yutery: razrabotka i primeneniye*, №2, 2011, pp. 21–29.
2. Kuravskii L.S., Yur'ev G.A. Veroyatnostnyi metod fil'tratsii artefaktov pri adaptivnom testirovanii. – *Ekspierimental'naya psikhologiya*, t.5, No.1, 2012, pp. 119–131.
3. Kuravskii L.S., Yur'ev G.A. Ob odnom podkhode k adaptivnomu testirovaniyu i ustraneniyu ego artefaktov. // *Neirokomp'yutery: razrabotka i primeneniye*, №1, 2012.
4. Kuravskii L.S., Artemenkov S.L., Yur'ev G.A., Grigorenko E.L. Novyi podkhod k komp'yuterizirovannomu adaptivnomu testirovaniyu. *Ekspierimental'naya psikhologiya= Experimental Psychology (Russia)*. 2017. T. 10. №. 3. pp. 33–45. doi:10.17759/exppsy.2017100303
5. G.G. Amosov. On Markovian Cocycle Perturbations in Classical and Quantum Probability. *Int. J. Math. & Math. Sci.*, 2003 (54), 3443–3467 (2003).
6. G.G. Amosov. On Markovian Perturbations of the Group of Unitary Operators Associated with a Stochastic Process with Stationary Increments. *Theory Prob. & its Applications*, 49 (1), 123–132 (2005).
7. L.S. Kuravsky et al. *Markovian Models in Diagnostics and Forecasting Problems: Textbook* (Moscow State Univ. Psych. Educ., Moscow, 2017) [in Russian].
8. L.S. Kuravsky, A.A. Margolis, P.A. Marmalyuk, A.S. Panfilova, G.A. Yuryev, P.N. Dumin. A Probabilistic Model of Adaptive Training. *Applied Math. Sciences*, 10 (48), 2369–2380 (2016).



9. L.S. Kuravsky, S.L. Artemenkov, G.A. Yuryev, E.L. Grigorenko. A New Approach to Computerized Adaptive Testing. *Exp. Psychology*, 10 (3), 33–45 (2017).
10. L.S. Kuravsky, S.N. Baranov and G.A. Yuryev. Synthesis and Identification of Hidden Markov Models Based on a Novel Statistical Technique in Condition Monitoring. In: *Proc. 7th Int. Conf. on Condition Monitoring & Machinery Failure Prevention Technologies (Stratford-upon-Avon, England, 2010)*.
11. L.S. Kuravsky. Discriminant analysis based on the approaches of quantum computing. *Lobachevskii J. Math.* 41 (12), 2338–2344 (2020).
12. L.S. Kuravsky. Modeling Dynamical Behavior of Stochastic Systems: Spectral Analysis of Qubit Representations vs the Mutual Markovian Model Likelihood Estimations. *Lobachevskii J. Math.*, 42 (10), 2364–2376 (2021).
13. *Markovskie modeli v zadachakh diagnostiki i prognozirovaniya: Ucheb. posobie / Pod red. L.S. Kuravskogo. – 2-e izd., dop. – M.: Izd-vo MGPPU, 2017. – 197 p.*
14. Ovcharov L.A. *Prikladnye zadachi teorii massovogo obsluzhivaniya. – M.: Mashinostroenie, 1969. – 324 p.*
15. Kuravsky L.S., Dumin P.N. and Yuryev G.A. Adaptive Aircraft Crew Training Based on Accumulated Empirical Experience. *International Journal of Advanced Research in Engineering and Technology*, 12(1), 2021, pp. 256–264. <http://www.iaeme.com/IJARET/issues.asp?JType=IJARET&VType=12&IType=1>.
16. Kuravsky L.S., Greshnikov I.I. Optimizing the mutual arrangement of pilot indicators on an aircraft dashboard and analysis of this procedure from the viewpoint of quantum representations. – *Journal of Applied Engineering Science*, doi:10.5937/jaes0-31855.
17. Kuravsky L.S., Marmalyuk P.A., Yuryev G.A. and Dumin P.N. A Numerical Technique for the Identification of Discrete-State Continuous-Time Markov Models - *Applied Mathematical Sciences*. Vol. 9, 2015, No. 8, pp. 379–391. URL: <http://dx.doi.org/10.12988/ams.2015.410882>.
18. Kuravsky L.S., Marmalyuk P.A., Yuryev G.A., Belyaeva O.B. and Prokopieva O.Yu. *Mathematical Foundations of Flight Crew Diagnostics Based on Videoculography Data. – Applied Mathematical Sciences*, Vol. 10, 2016, no. 30, 1449–1466, <http://dx.doi.org/10.12988/ams.2016.6122>.
19. Kuravsky L.S., Yuriev G.A., Dumin P.N. Estimating the Influence of Human Factor on the Activity of Operators of Complex Technical Systems in Civil Engineering with the Aid of Adaptive Diagnostics, *International Journal of Civil Engineering and Technology*, 10(2), 2019, pp. 1930–1941. <http://www.iaeme.com/IJCIET/issues.asp?JType=IJCIET&VType=10&IType=02>.
20. Kuravsky L.S., Yuryev G.A. Detecting Abnormal Activities of Operators of Complex Technical Systems and their Causes Basing on Wavelet Representations, *International Journal of Civil Engineering and Technology (IJCIET)* 10(2), 2019, pp. 724–742. <http://www.iaeme.com/IJCIET/issues.asp?JType=IJCIET&VType=10&IType=2>.
21. Kuravsky L.S., Yuryev G.A., Zlatomrezhev V.I. New approaches for assessing the activities of operators of complex technical systems. *Ekspperimental'naya psikhologiya = Experimental psychology (Russia)*, 2019, vol. 12, no. 4, pp. 27–49. doi:10.17759/expsy.2019120403.
22. Kuravsky L.S., Yuryev G.A., Zlatomrezhev V.I., Greshnikov I.I., Polyakov B.Y. Assessing the Aircraft Crew Activity Basing on Video Oculography Data. *Ekspperimental'naya psikhologiya = Experimental Psychology (Russia)*, 2021. Vol. 14, no. 1, pp. 204–222. DOI: <https://doi.org/10.17759/expsy.2021140110>
23. Kuravsky L.S., Yuryev G.A., Zlatomrezhev V.I., Yuryeva N.E. Assessing the Aircraft Crew Actions with the Aid of a Human Factor Risk Model. *Ekspperimental'naya psikhologiya = Experimental Psychology (Russia)*, 2020. Vol. 13, no. 2, pp. 153–181. DOI: <https://doi.org/10.17759/expsy.2020130211>.
24. Kuravsky L.S., Yuryev G.A., Zlatomrezhev V.I., Yuryeva N.E., Mikhaylov A.Y. Evaluating the Contribution of Human Factor to Performance Characteristics of Complex Technical Systems. – *Modelirovanie i analiz dannykh = Modelling and Data Analysis*, 2020. Vol. 10, no. 1, pp. 7–34. DOI: 10.17759/mda.2020100101.



25. L.S. Kuravsky. Modeling Dynamical Behavior of Stochastic Systems: Spectral Analysis of Qubit Representations vs the Mutual Markovian Model Likelihood Estimations. *Lobachevskii J. Math.*, 42 (10), 2364–2376 (2021).
26. L.S. Kuravsky. Simplification of Solving Diagnostics Problems by Convolution of Applied Markovian Models into the Quantum Representations. *Lobachevskii J. Math.*, 43 (7), 1669–1682 (2022).
27. Borg and P.J.F. Groenen. *Modern Multidimensional Scaling Theory and Applications* (Springer, New York, 2005).
28. D.F. Morrison. *Multivariate Statistical Methods*, 2nd ed. (McGraw-Hill, New York, 1976).
29. E. Lloyd. *Handbook of Applicable Mathematics*, Vol. 6: Statistics, Ed. by W. Ledermann (Wiley, Hoboken, 1984).
30. T.F. Cox and M.A.A. Cox. *Multidimensional Scaling*, 2nd ed. (Chapman and Hall/CRC, Boca Raton, 2001).
31. J. von Neumann. *Mathematical Foundations of Quantum Mechanics* (Princeton Univ. Press, Princeton, 1955).
32. S. Holevo. *Probabilistic and Statistical Aspects of Quantum Theory*, 2nd ed. (Edizioni della Normale, Pisa, 2011).
33. L.S. Kuravsky. Discriminant analysis based on the approaches of quantum computing. *Lobachevskii J. Math.* 41 (12), 2338–2344 (2020).

Получена 15.12.2022
Принята в печать 19.12.2022

Received 15.12.2022
Accepted 19.12.2022