

3

МОДЕЛИРОВАНИЕ И АНАЛИЗ ДАННЫХ

НАУЧНЫЙ ЖУРНАЛ

MODELLING AND DATA ANALYSIS

SCIENTIFIC JOURNAL

2023

ISSN: 2219-3758
ISSN: 2311-9454 (ONLINE)

МОДЕЛИРОВАНИЕ И АНАЛИЗ ДАННЫХ

НАУЧНЫЙ ЖУРНАЛ

2023 • Том. 13 • № 3

MODELLING AND DATA ANALYSIS

SCIENTIFIC JOURNAL

2023 • Vol. 13 • № 3



Московский государственный
психолого-педагогический университет
Moscow State University
of Psychology & Education

Моделирование и анализ данных

Главный редактор:

Л.С. Куравский ФГБОУ ВО МГППУ, Россия

Заместители главного редактора:

С.Д. Кулик МИФИ, Россия

А.В. Пантелеев МАИ, Россия

Редакционный совет

Председатель редакционного совета:

Г.Г. Амосов МИАН, Россия

Члены редакционного совета:

В.А. Барабанщиков ФГБОУ ВО МГППУ, Россия
Питер Бентлер Калифорнийский университет
Лос-Анджелеса, США

А.В. Горбатов МИСиС, Россия
Л.С. Куравский ФГБОУ ВО МГППУ, Россия
Леонид Либкин Эдинбургский университет,
Великобритания

А.А. Марголис ФГБОУ ВО МГППУ, Россия
В.В. Рубцов ФГБОУ ВО МГППУ, Россия
Д.В. Ушаков ИП РАН, Россия
Девид Фрэнсис Университет Хьюстона, США

Редакционная коллегия:

К.К. Абгарян ФИЦ ИУ РАН, Россия
Г.Г. Амосов МИАН, Россия
М.В. Воронов ФГБОУ ВО МГППУ, Россия
Е.Л. Григоренко МГУ им. М.В. Ломоносова,
Россия; Йельский университет,
США

В.К. Захаров МГУ им. М.В. Ломоносова,
Россия

А.И. Кибзун МАИ, Россия
Леонид Либкин Эдинбургский университет,
Великобритания

В.Р. Милов НГТУ им. Р.Е. Алексеева,
Россия

А.В. Наумов МАИ, Россия
Д.Л. Ревизников МАИ, Россия
Холлинг Хайнц Университет Мюнстера,
Германия

Девид Фрэнсис Университет Хьюстона,
США

К.В. Хорошенков Брэдфордский университет,
Великобритания.

Г.А. Юрьев ФГБОУ ВО МГППУ, Россия

Моделирование и анализ данных

Издательство ФГБОУ ВО МГППУ

Издается с 2011 года. Периодичность: 4 раза в год.

Свидетельство регистрации СМИ: ПИ № ФС77-66444

Дата регистрации: 14.07.2016

Формат: 70×100/16

Тираж 500 экз.

Все права защищены. Название журнала, логотип, рубрики, все тексты и иллюстрации являются собственностью ФГБОУ ВО МГППУ и защищены авторским правом. Перепечатка материалов и использование иллюстраций допускается только с письменного разрешения редакции.

© ФГБОУ ВО «Московский государственный психолого-педагогический университет», 2023, № 3

Modelling and Data Analysis

Editor-in-Chief:

L.S. Kuravsky MSUPE, Russia

Deputy Editors-in-Chief:

S.D. Kulik MPEPhI, Russia

A.V. Panteleev MAI, Russia

The Editorial Council

Chairman of the Editorial Council:

G.G. Amosov MI RAS, Russia

The Members of the Editorial Council:

V.A. Barabanschikov MSUPE, Russia
Peter Bentler University of California,
USA

A.V. Gorbатов MISIS, Russia
L.S. Kuravsky MSUPE, Russia
Leonid Libkin University of Edinburgh,
UK

A.A. Margolis MSUPE, Russia
V.V. Rubtsov MSUPE, Russia
D.V. Ushakov IP RAS, Russia
David Francis University Of Houston, USA

The Editorial Board:

K.K. Abgaryan IU RAS, Russia
G.G. Amosov MI RAS, Russia
M.V. Voronov MSUPE, Russia
E.L. Grigorenko Lomonosov Moscow State
University, Russia;
Yale University, USA

V.K. Zakharov Lomonosov Moscow State
University, Russia

A.I. Kibzun MAI, Russia
Leonid Libkin University of Edinburgh,
UK

V.R. Milov NNSTU n.a. R.E. Alekseev,
Russia

A.V. Naumov MAI, Russia
D.L. Reviznikov MAI, Russia
Holling Heinz University Of Münster,
Germany

David Francis University Of Houston,
USA

K.V. Horoshenkov University of Bradford,
UK

G.A. Yuryev MSUPE, Russia

Modelling and Data Analysis

Publisher MSUPE

Frequency: since 2011

Published: 4 times a year

The mass medium registration certificate:

PN № ФС77-66444.

From: 14.07.2016

Format: 70×100/16

500 copies

All rights reserved. Journal title, logo, rubrics, all texts and images are the property of MSUPE and copyrighted. Using reprints and illustrations is allowed only with the written permission of the publisher.

© MSUPE, 2023, no. 3



Долгих А.Д.

Использование тепловых карт для оптимизации образовательных бизнес процессов в компании Скилбокс	144
--	-----



Dolgikh A.D.

Using Heat Maps to Optimize Educational
Business Processes in The Skill Box Company..... 154

◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇ **DATA ANALYSIS** ◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇

УДК 004.8

Mapping the Research Landscape of Organizational Climate and Performance Using Bibliometric Analysis

Sif Islem Amalou*

Higher National School of Management (HNSM), Kolea, Algeria

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-8861-8387>

e-mail: amalouseif@gmail.com

Tayeb Brahimi**

College of Engineering Effat University (CEEU), Jeddah, Saudi Arabia

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-1575-4943>

e-mail: tbrahimi@effatuniversity.edu.sa

This study aims to address the limited understanding of organizational climate and performance by conducting a comprehensive bibliometric analysis of scholarly publications. The methodology involves analyzing publications using bibliometric techniques and VOSviewer. The results indicate that organizational performance, employee engagement, job satisfaction, leadership, and leadership culture are prominent topics within the field. The top five countries in terms of published documents and citations are the USA, India, the UK, Australia, and Malaysia. Recent publications have prioritized topics such as quality of work life, innovation, productivity, well-being, organizational commitment, work engagement, and corporate social responsibility. This study provides valuable insights for researchers, practitioners, and organizations to improve employee performance and productivity. The significance of this work lies in its ability to inform future research directions and guide collaboration efforts. Ultimately, this study advances the understanding of organizational climate and performance with practical implications for various organizational settings.

Keywords: organizational climate, performance, bibliometric, Scopus database, VOSviewer.

Acknowledgements. The authors acknowledge the support provided by the Higher National School of Management, Kolea, Algeria, and the College of Engineering at Effat University, Jeddah, Saudi Arabia.



For citation:

Sif Islem Amalou, Tayeb Brahimi. Mapping the Research Landscape of Organizational Climate and Performance Using Bibliometric Analysis. *Modelirovanie i analiz dannykh = Modelling and Data Analysis*, 2023. Vol. 13, no. 3, pp. 7–27. DOI: 10.17759/mda.2023130301 (In Engl., abstr. in Russ.).

***Sif Islem Amalou**, Higher National School of Management (HNSM), Kolea, Algeria ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-8861-8387>, e-mail: amalouseif@gmail.com

****Tayeb Brahimi**, College of Engineering Effat University (CEEU), Jeddah Saudi Arabia ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-1575-4943>, e-mail: tbrahimi@effatuniversity.edu.sa

1. BACKGROUND

In recent times, organizational management has come to acknowledge that human resources play a vital role in achieving a long-lasting competitive edge and effectiveness. The workforce is no longer perceived as a costly liability but, instead, is recognized as a valuable asset that generates productivity [1]. While it is recognized that cultivating a favorable work environment is an objective of most organizations to foster the growth of their employees, a considerable number of organizations tend to overlook the significance of the organizational climate. This is even though human resources are integral to the advancement and success of the organization [2]–[4].

In the field of organizational behavior, the concept of organizational climate has garnered substantial attention and discourse since the 1960s [5]. The importance of this component cannot be overstated, as it has a profound influence on the views of employees regarding their interpersonal connections, feelings of inclusion, and overall work productivity [6]. Nasution et al. ([7] reported that the organizational climate exerts a substantial influence on the human resources practices and policies implemented by members of the organization. The organizational climate can exert a considerable impact on members' conduct, motivation, and commitment to the organization. A cooperative and affable organizational climate between members can alleviate negative circumstances, including emotional dissonance. Notably, internal organizational efforts to alleviate work stress can foster a positive organizational climate [8]. Although the development of human capital, lifelong learning, and continuous focus on skill development has become more common recently, many issues are still simply treated on the surface rather than addressing their root causes. Human desires are significant, particularly in terms of motivation and fulfillment, and a focus on workplace situations and values has been essential because giving employees the right mindset is crucial for the economic development of companies, regardless of how technology enhances our quality of life, a company's ability to function effectively relies heavily on the engagement of its human resources. The support that a company provides for employee well-being in exchange for performance improvement is the organizational climate. The study of organizational climate and its impact on various aspects of organizational performance has garnered significant attention in research literature. Understanding the complex interplay between organizational climate, work environment, employee satisfaction, and employee engagement is crucial for organizations striving to enhance their overall performance and



productivity. Additionally, investigating the relationship between organizational climate and performance outcomes, such as employee productivity and organizational behavior, provides valuable insights for effective management strategies.

Bibliometric analysis has emerged as a powerful quantitative method for evaluating scholarly communication, identifying research trends, and gaining insights into the scientific landscape. Researchers have used this tool in many fields such as business, health, space technology, computer science, and many other fields [9]–[13] to gain valuable insights into article characteristics, including keywords, institutions, journals, countries, and authors, which are often challenging to ascertain through traditional methods.

In the context of mapping the landscape of organizational climate and performance research, conducting a bibliometric analysis necessitates the utilization of a reliable and comprehensive database. This study leverages the renowned Scopus database, which has established itself as a trusted resource for researchers, institutions, and libraries worldwide [14], [15]. The selection of Scopus as the database for this study stems from its distinct advantages over other specialized databases as it provides an extensive collection of scholarly articles along with a user-friendly interface that includes robust features that streamline the research process.

In the present study, a bibliometric analysis is conducted to offer a comprehensive overview of the existing research on organizational climate and performance. The analysis aims to identify significant patterns, emerging trends, influential authors, and noteworthy journals in this field. By mapping the literature landscape, this study contributes to advancing the understanding of the current state of knowledge on organizational climate and performance. Furthermore, it seeks to contribute to the understanding of the current state of knowledge and identify potential avenues for future research and theoretical advancements in organizational climate and performance research.

The rest of the article is structured as follows: Section 2 provides a comprehensive review of the literature related to organizational climate and its impact on employee performance. In Section 3, the methodology and data collection process used in this study are presented. Section 4 presents the results of the bibliometric analysis, along with a detailed discussion of the findings. Finally, in Section 5, the conclusions of the study are summarized, and recommendations for future research are provided.

2. LITERATURE REVIEW

Understanding the relationship between organizational climate and performance is a topic of significant interest in the research community. Numerous studies have investigated various aspects of organizational climate and how they may affect organizational outcomes. These studies have highlighted the significance of important elements such as work environment, employee satisfaction, behavioral ethics, engagement, and productivity [2], [6], [16], [17].

Meta-analytical research by Kish-Gephart et al. [18] has played a pivotal role in consolidating findings from numerous studies in the field of behavioral ethics. Their comprehensive analysis of 136 studies highlighted key drivers of unethical decisions, including



individual characteristics (“bad apples”), moral issues (“bad cases”), and the organizational environment (“bad barrels”). This meta-analysis underscored the need for a holistic understanding of unethical decision-making within organizations and called for further exploration of complex relationships.

Building upon the findings of Kish-Gephart et al. [18], recent studies went deeper into specific aspects of unethical behavior within organizational settings. For instance, Cialdini et al. [19] conducted experiments and surveys to investigate the impact of unethical leader behavior on group dynamics and member behavior. Their findings indicated that exposure to unethical leader behavior increased the likelihood of group members choosing to leave the group, while those who remained were more prone to engaging in unethical conduct. In the same context

Hassan ate al. (2019) [20], [21] called for further research to build upon these findings and provide additional evidence for enhancing ethical practices in organizations. In a recent comprehensive literature review conducted by Bohórquez et al. [22] on organizational climate and its importance to organizational success, the authors identified nine dimensions for measuring organizational climate: interpersonal relationships, motivation, leadership, autonomy, support, physical conditions, conformity to work, commitment, and innovation. These dimensions provide a comprehensive framework for understanding the impact of organizational climate on success. Understanding and effectively managing these dimensions is essential for organizations seeking to optimize their performance and achieve success. Other studies investigated the effect of leadership, leadership style, communication, work environment, organizational culture, work stress, work-family conflict, employee involvement, etc. [23]–[25].

While previous studies have provided valuable insights into the field of organizational climate and performance, it is equally important to examine the research landscape through a bibliometric lens. A simple search on “organizational climate” in the Scopus database can retrieve thousands of documents, making it impractical to analyze them through traditional means. Through bibliometric analysis, researchers can map the research landscape, identify significant trends, and recognize influential authors and publications, offering a comprehensive understanding of the field’s progress and direction. One such study, “A Bibliometric Analyses on Ethical Climate” by [26], focused specifically on the prevalence of ethical climate research. The study sought to examine previous works on this topic, utilizing the bibliometric analysis method and the Web of Science database to survey publications between 1970 and 2020. Using the VOSviewer, the authors explored several key aspects of these publications, including author keywords, bibliographic associations of publications, journals, countries, and authors. The analysis revealed that the majority of studies related to ethical climate centered around themes such as moral leadership, moral distress, organizational climate, and employee burnout.

In the same context, the study conducted by [17] on the role of organizational climate in improving job satisfaction aimed to shed light on the significant developments in organizational climate over the years. To achieve this objective, the study employed bibliometric analysis and visualized bibliographic data using the VOSviewer program. The analysis



included the co-occurrence of keywords and was based on documents obtained from the Scopus database, spanning the years from 1969 to 2022. By providing insightful information to writers seeking to explore the topic of organizational climate, particularly in the field of human resource development, this study plays a vital role in advancing the field. The results of the study were promising, as they furnished a comprehensive bibliometric analysis and identified key publication trends in Scopus, which could help to improve research quality in this field.

The studies mentioned above were centered around gauging the advancement of scientific publishing concerning the ethical climate, examining the correlation between organizational climate and job satisfaction, and investigating the influence of leadership in activating the organizational climate. Unlike previous studies that often focused on examining one aspect of organizational performance or climate, our present study takes a more comprehensive approach by incorporating multiple dimensions and factors.

Using a query that includes keywords related to organizational climate, work environment, employee satisfaction, employee engagement, organizational performance, employee productivity, organizational behavior, and performance. We aim to capture a broader range of research that explores the interconnection between these different aspects. This multi-dimensional perspective allows for a more holistic understanding of the complex relationships and dynamics within organizations, shedding light on the various factors that influence performance outcomes.

3. METHODOLOGY

The research methodology utilized in this study combines both quantitative and qualitative approaches, incorporating bibliometric analysis and the visualization of similarities method [27]. These techniques are employed to effectively analyze and map the research landscape surrounding the organizational climate and performance research. The data used for analysis was extracted from the Scopus database, a widely recognized and comprehensive source of peer-reviewed scientific and academic material [14], [15].

Conducting a comprehensive bibliometric analysis involves several crucial steps as shown in Fig. 1. Firstly, clearly define the research question or objective that you want to address. This step helps guide the subsequent stages of the analysis. Secondly, determine a suitable database that encompasses a wide range of peer-reviewed scientific and academic materials. Then, step 3, begins by identifying relevant keywords related to the research topic, and collect the articles that match your research question from the selected databases. The selected keywords are used to construct query strings for searching the database's search field and retrieving publications that closely match the research topic. Step 4 involves cleaning the collected data to eliminate any duplicates, incomplete information, or irrelevant documents. The PRISMA model (Preferred Reporting Items for Systematic Reviews and Meta-Analyses) [28] is commonly employed to guide the identification, screening, and selection of eligible publications for analysis. In step 5, the collected data undergo analysis using various bibliometric techniques to extract meaningful insights from the collected

dataset. This may involve analyzing publication trends, authorship patterns, citation networks, or co-occurrence of keywords to understand the research landscape. Finally, in step 6, the extracted data, typically in the form of a CSV file, are imported into specialized software tools like VOSviewer for mapping and visualization purposes. This step aids in identifying patterns and trends within different research fields. VOSviewer can generate maps, cluster analyses, and network visualizations based on co-occurrence or citation data, providing a graphical representation of the research landscape.

The nearest matching publication was conducted using the query: (TITLE-ABS-KEY (“organizational climate”) OR TITLE-ABS-KEY (“work environment”) OR TITLE-ABS-KEY (“employee satisfaction” OR TITLE-ABS-KEY (“employee engagement”))) AND (TITLE-ABS-KEY (“organizational performance”) OR TITLE-ABS-KEY (“employee productivity”) OR TITLE-ABS-KEY (“organizational behavior”)) AND (TITLE-ABS-KEY (“performance”) OR TITLE-ABS-KEY (“performance outcomes”) OR TITLE-ABS-KEY (“performance measurement”)). AND (LIMIT-TO (LANGUAGE , “English”)) AND (LIMIT-TO (DOCTYPE , “ar”) OR LIMIT-TO (DOCTYPE , “cp”) OR LIMIT-TO (DOCTYPE , “re”) OR LIMIT-TO (DOCTYPE , “ch”)). This is a Boolean search query that combines multiple search terms and operators to retrieve relevant research articles which includes i) a set of terms focusing on aspects related to employee satisfaction, organizational climate, work environment, and employee engagement, ii) a set of terms pertains to organizational performance, employee productivity, and organizational behavior, and iii) a set of terms relates to performance, performance outcomes, and performance measurement. By combining these sets of terms with the Boolean operators “OR” and “AND” the query aims to find research articles that explore the relationships between these different concepts. The Visualization is conducted by VOSviewer software 1.6.19 [29].

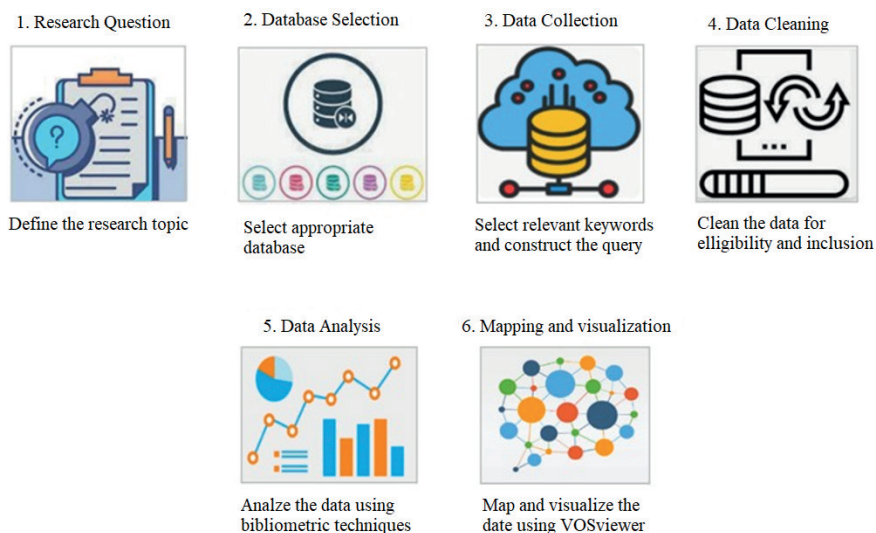


Fig. 1. Main stages of the bibliometric analysis

4. RESULTS AND DISCUSSION

The query discussed in the methodology section and employed in this study aims to capture articles that discuss the diverse dimensions of organizational climate, work environment, employee satisfaction, employee engagement, organizational performance, employee productivity, organizational behavior, and performance measurement. The query retrieves articles that mention any of the specified keywords within the title, abstract, or keywords.

Performed on May 30th, 2023, the query was limited to English documents and document types: articles (604), conference paper (73), review (33) and book chapter (21) for a total of 731 documents retrieved from 1973 to 2022. The first study of its kind to explore the impact of expectations on task performance within the context of organizational climate was conducted in 1973 titled “The effects of expectations upon task performance as moderated by levels of self-esteem” [30]. The findings revealed that only individuals with high self-esteem showed significant differences in their response to the manipulation of expectations. Notably, this paper received only one citation, indicating limited recognition at the time. Since then, the number of documents and the number of citations increased from one document and one citation in 1973 to 79 documents and 2837 citations in 2022 indicating a growing interest and recognition in the field.

For simplicity, Fig. 2 presents the distribution of published documents and their corresponding citations from the year 2000 to 2022. This representation highlights the continued interest and relevance of organizational climate research over the years and the growing recognition of its impact on various aspects of organizational performance and employee outcomes.

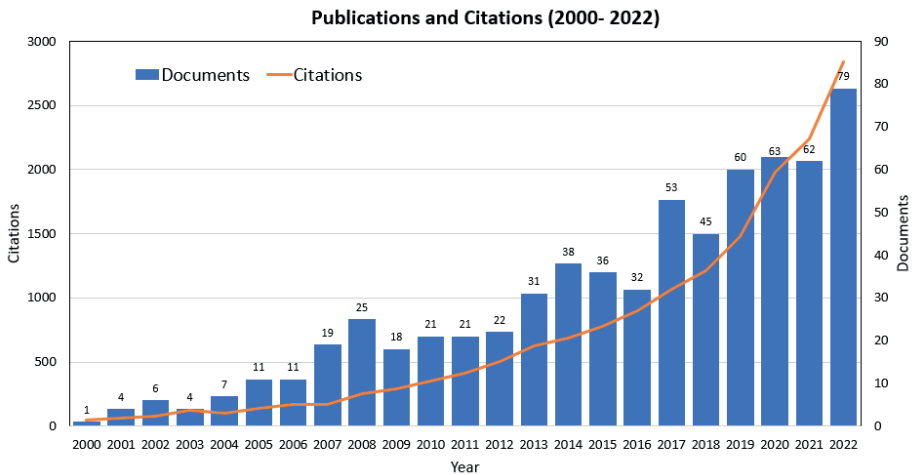


Fig. 2. Distribution of published documents and citations from the year 2000 to 2022

At this stage and before using VOSviewer, it is important to ensure the accuracy and reliability of our data analysis by undergoing a thorough process of data cleaning and

elimination of irrelevant or duplicated documents. The process is based on the guidelines provided by the PRISMA model (Preferred Reporting Items for Systematic Reviews and Meta-Analyses) [28].

Figure 3 depicts the PRISMA flow diagram, which outlines the systematic process of identifying, screening, and selecting publications for our analysis. The initial search yielded a total of 751 publications, encompassing various sources such as articles, conference papers, reviews, book chapters, and books. From this initial pool, we excluded 20 documents classified as editorials, letters, or notes, resulting in 731 remaining publications. Next, we conducted a careful examination of these 731 documents, eliminating 12 duplicates and records with missing authors or titles. We also excluded 9 documents due to lack of relevance. This cleaning process led us to a final set of 710 eligible documents that were included in the subsequent bibliometric analysis.

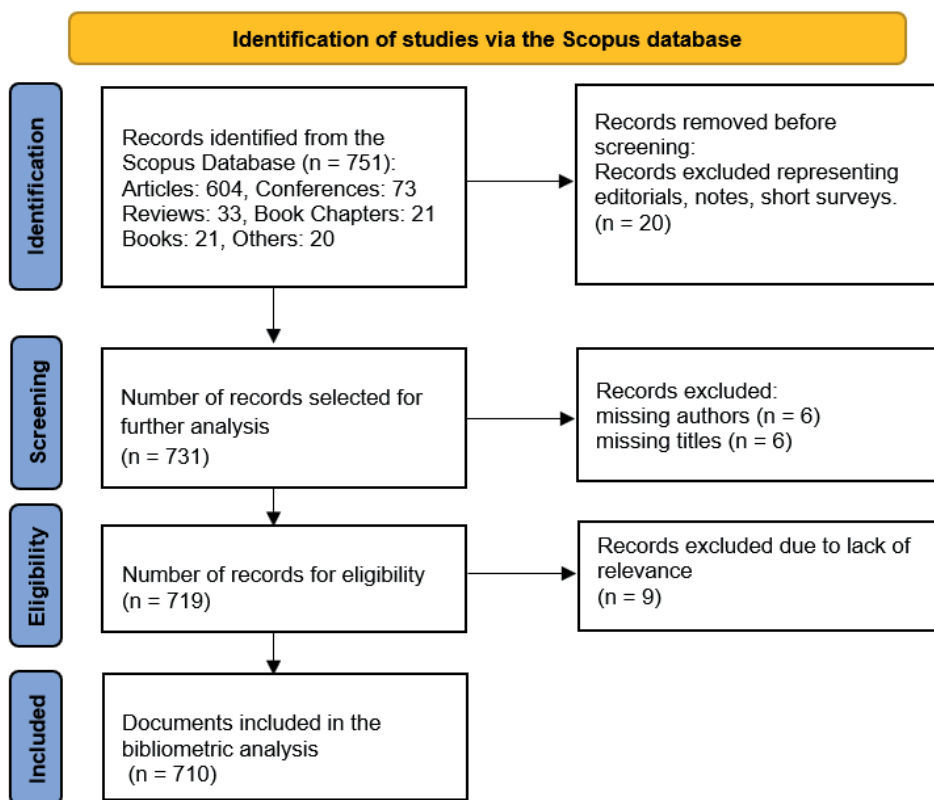


Fig. 3. PRISMA flow diagram screening process for eligibility and inclusion

Figure 4 illustrates the distribution of subject areas covered in the published documents. The analysis reveals that most of the documents, accounting for nearly 50 %, fall within

the domains of business and management as well as social sciences. Following behind are subject areas such as engineering, medicine, decision sciences, and economics, though with relatively lower percentages. This indicates that the research focus in the field of organizational climate and performance is primarily centered around business and management, with significant contributions from social sciences and other related disciplines.

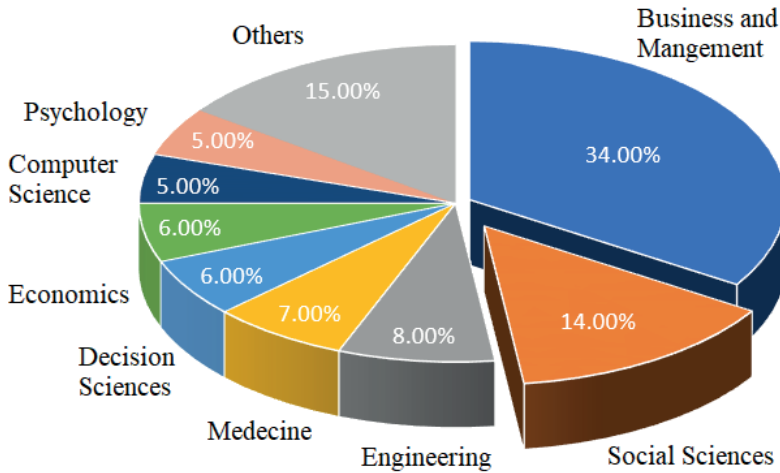


Fig. 4. Distribution of document by subject area

Application of VOSviewer: VOSviewer, a software tool developed by Leiden University Library [27], is used here to enable the creation and analysis of bibliographic networks using the 710 data retrieved from Scopus and cleaned based on the PRISMA model. This software serves as a valuable resource for mapping scientific fields, examining collaboration patterns, and identifying influential authors and papers in a specific domain. Accessible as a free download for Windows, Mac, and Linux, VOSviewer version 1.6.19 was used in this study[29].

The primary goal of conducting keyword co-occurrence analysis using VOSviewer is to extract frequency data from multiple documents and establish a network of relationships among keywords. This analysis enables the identification and highlighting of the dominant research trends in the field of organizational climate.

As depicted in Figure 5, the network visualization showcases the co-occurrence of author keywords, with the size of the circles indicating the number of published documents associated with each keyword. Larger circles represent keywords that appear in a greater number of documents. The distance between nodes reflects the strength of their connection, with shorter distances indicating stronger associations. Additionally, the thickness of the lines connecting nodes indicates the frequency of their co-occurrence. Thicker lines signify more frequent occurrences. The results of the analysis reveal that the most used keywords in the literature on organizational climate revolve around topics such as organizational



Table 1

Top 20 countries by number of documents including citations and TLS

Country	Documents	Citations	Total Link Strengths
USA	177	9031	41
India	72	596	11
UK	60	1943	36
Australia	44	1935	37
Malaysia	40	377	21
Canada	31	1093	16
China	31	802	30
Indonesia	31	80	3
South Africa	30	143	7
Portugal	20	351	7
Netherlands	19	2293	12
Pakistan	19	274	17
South Korea	18	534	9
Spain	18	343	11
Iran	17	148	3
Sweden	15	447	8
Italy	13	207	7
Saudi Arabia	11	77	6
UAE	11	40	7
Germany	10	554	6

In Figure 7, we can observe the network visualization of country collaboration based on co-authorship. The size of the circles in the network corresponds to the number of documents published by each country. Larger circles represent countries that have published a greater number of documents, while smaller circles represent countries with fewer publications. The distance between two nodes (circles) in the network reflects the strength of their co-authorship connection. A shorter distance indicates a stronger collaboration between the countries. Additionally, the thickness of the lines connecting the nodes represents the frequency of co-authorship occurrences between the countries. Thicker lines indicate that the countries have collaborated more frequently in co-authoring research papers. According to these definitions, it is obvious that the USA is the most active in terms of publications, it also has a high frequency of co-authorship with Australia and Canada suggesting strong collaborations. This type of visualization helps to understand the patterns and intensity of country-level collaborations in the field of organizational climate and performance.

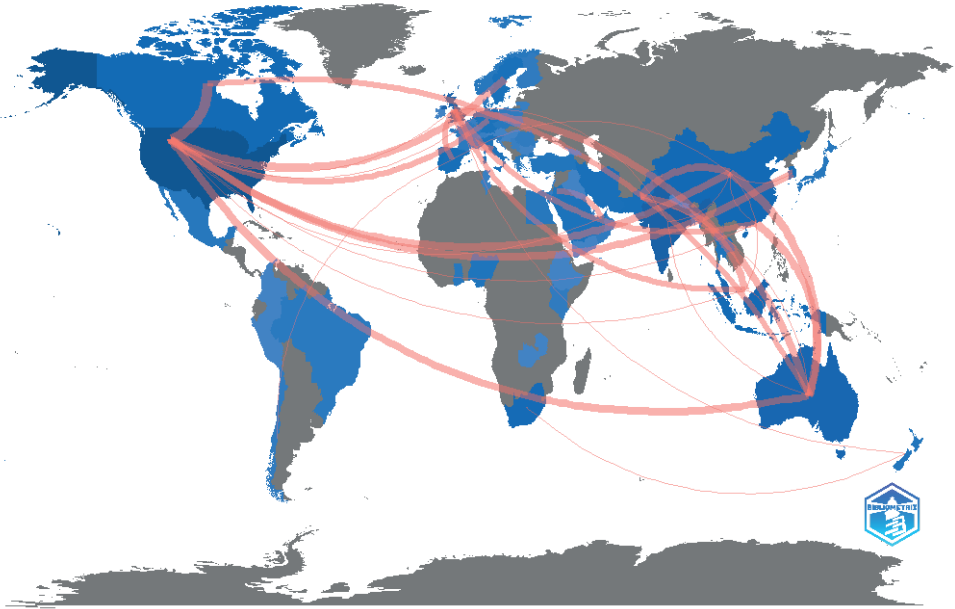


Fig. 6. Countries' Collaboration World Map

The top 10 sources in terms of citations are shown in Table 2. The International Journal of Human Resource Management ranked first, followed by the Journal of Organizational Effectiveness and the Journal of Nursing Administration. These journals mainly focus on management and administration within different domains. The International Journal of Human Resource Management emphasizes human resource management practices and theories. The Journal of Organizational Effectiveness explores factors that contribute to organizational success and the Journal of Nursing Administration focuses on nursing administration and leadership.

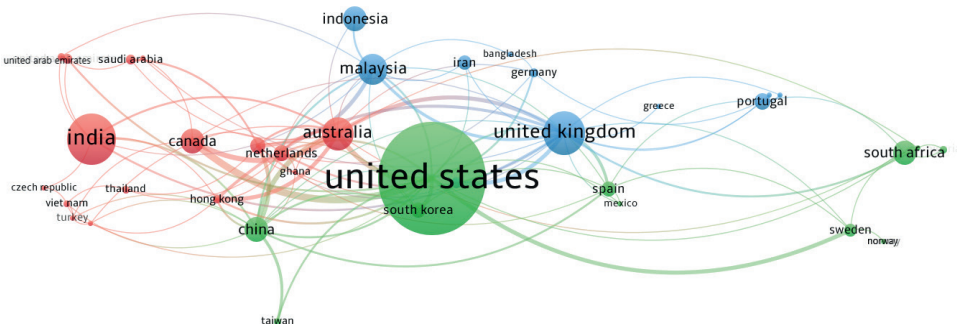


Fig. 7. Network of country collaboration based on co-authorship

5. CONCLUSIONS

Bibliometric analysis of research in organizational climate and performance offers unmatched opportunities to make important contributions to theory and practice that spans several fields and disciplines and highlights the relevance of the research in this field. This study showed that organizational climate plays a vital role in improving employee performance. Results revealed that most of the documents published were in the fields of organizational climate and revolve around topics such as organizational performance, employee engagement, job satisfaction, leadership, performance, organizational climate, and leadership culture. The five most active countries in terms of published documents are the USA (117 documents, 9031 citations), India (71 documents, 596 citations), the UK (60 documents, 1943 citations), Australia (44 documents, 1945 citations), and Malaysia (40 documents, 377 citations). Results from overlay visualization of recent publications in the field of organizational climate and performance have placed considerable emphasis on several key topics including quality of work life, innovation, productivity, well-being, organizational commitment, work engagement, and corporate social responsibility. This information can be instrumental in identifying significant areas of research, fostering potential collaborations, and identifying avenues for future study.

One potential limitation of this study is that it is based on a bibliometric analysis of published research, which may not capture the full extent of research activity in the field of organizational climate and performance as some publication are for internal use only. Despite this limitation, this bibliometric analysis provides valuable insights into the current state of research. In the present study, we focused on the relationship between various factors related to organizational climate, work environment, employee satisfaction, and employee engagement, and their impact on organizational performance, employee productivity, organizational behavior, and performance outcomes. Several areas can be explored for future research. For example, understand the specific mechanisms by which organizational climate, work environment, employee satisfaction, and employee engagement are interrelated. Secondly, exploring the role of organizational behavior in the context of employee productivity and its contribution to overall organizational performance. Finally, evaluating and refining existing performance measurement systems to ensure they align with organizational goals and effectively capture performance indicators. Addressing these three components can enhance our understanding of the complex dynamics of organizational climate and performance and provide practical implications for improving organizational performance.

References

1. M. Pasban and S. H. Nojehdeh, "A Review of the Role of Human Capital in the Organization," *Procedia-Social and Behavioral Sciences*, vol. 230, pp. 249–253, 2016, doi: 10.1016/j.sbspro.2016.09.032.
2. M. A. Bahrami, O. Barati, M. Ghoroghchian, R. Montazer-alfaraj, and M. Ranjbar Ezzatabadi, "Role of Organizational Climate in Organizational Commitment: The Case of Teaching Hospitals," *Osong Public Health and Research Perspectives*, vol. 7, no. 2, pp. 96–100, 2016, doi: 10.1016/j.phrp.2015.11.009.



3. R. Kalhor, O. Khosravizadeh, S. Moosavi, M. Heidari, and H. Habibi, "Role of Organizational Climate in Job Involvement: A Way to Develop the Organizational Commitment of Nursing Staff," *SAGE Open*, vol. 11, no. 2, p. 21582440211008456, 2018, doi: 10.1177/2515690X18790726.
4. M. Rožman and T. Štrukelj, "Organisational climate components and their impact on work engagement of employees in medium-sized organisations," *Journal of Management & Organization*, vol. 26, no. 4, pp. 567–585, 2020, doi: 10.1080/1331677X.2020.1804967.
5. B. Schneider, M. Ehrhart, and W. Macey, "Organizational climate research: Achievements and the road ahead," in *The handbook of organizational culture and climate*, 2011, pp. 29–49. doi: 10.4135/9781483307961.n3.
6. A. F. Obeng, Y. Zhu, S. A. Azinga, and P. E. Quansah, "Organizational Climate and Job Performance: Investigating the Mediating Role of Harmonious Work Passion and the Moderating Role of Leader–Member Exchange and Coaching," *SAGE Open*, vol. 11, no. 2, p. 21582440211008456, 2021, doi: 10.1177/21582440211008456.
7. A. P. Nasution, P. B. Mahargiono, and Y. Soesatyo, "Effect of Leadership Styles, Organizational Climate and Ethos of Work on Employee Productivity (PT. HP Metals Indonesia the Powder Coating)," *International Journal of Business and Management*, vol. 11, no. 2, p. 262, 2016, doi: 10.5539/ijbm.v11n2p262.
8. H.-Y. Ryu, D.-S. Hyun, D. R. Jeung, C.-S. Kim, and S.-J. Chang, "Organizational Climate Effects on the Relationship Between Emotional Labor and Turnover Intention in Korean Firefighters," *Safety and Health at Work*, vol. 11, no. 4, pp. 479–484, 2020, doi: 10.1016/j.shaw.2020.08.007.
9. C. Bota-Avram, "Bibliometric analysis of sustainable business performance: where are we going? A science map of the field," *Economic Research-Ekonomska Istraživanja*, vol. 36, no. 1, pp. 2137–2176, 2023.
10. T. Brahimi, "Data Mining and Visualization of Space Technology Research Trends in the Arab World," in *2023 20th Learning and Technology Conference (L&T)*, Jan. 2023, pp. 179–183. doi: 10.1109/LT58159.2023.10092340.
11. T. Brahimi and H. Abbas, "Research and Trends in COVID-19 Vaccines Using VOSviewer," in *Advanced Network Technologies and Intelligent Computing*, I. Woungang, S. K. Dhurandher, K. K. Pattanaik, A. Verma, and P. Verma, Eds., Cham: Springer International Publishing, 2022, pp. 288–296.
12. C. Cancino, J. M. Merigó, F. Coronado, Y. Dessouky, and M. Dessouky, "Forty years of Computers & Industrial Engineering: A bibliometric analysis," *Computers & Industrial Engineering*, vol. 113, pp. 614–629, 2017, doi: <https://doi.org/10.1016/j.cie.2017.08.033>.
13. M. A. Rojas-Sánchez, P. R. Palos-Sánchez, and J. A. Folgado-Fernández, "Systematic literature review and bibliometric analysis on virtual reality and education," *Educ Inf Technol*, vol. 28, no. 1, pp. 155–192, Jan. 2023, doi: 10.1007/s10639-022-11167-5.
14. J. F. Burnham, "Scopus database: A review," *Biomedical Digital Libraries*, vol. 3, no. 1, p. 1, 2006, doi: 10.1186/1742-5581-3-1.
15. R. Prancutė, "Web of Science (WoS) and Scopus: The Titans of Bibliographic Information in Today's Academic World," *Publications*, vol. 9, p. 12, Mar. 2021, doi: 10.3390/publications9010012.
16. A. Newman, H. Round, S. Bhattacharya, and A. Roy, "Ethical Climates in Organizations: A Review and Research Agenda," *Business Ethics Quarterly*, vol. 27, no. 4, pp. 475–512, Oct. 2017, doi: 10.1017/beq.2017.23.
17. D. Suma and B. A. Siregar, "The Role of Organizational Climate in Improving Job Satisfaction," *Jurnal Mantik*, vol. 5, no. 4, Art. no. 4, Jan. 2022.



18. J. Kish-Gephart, D. Harrison, and L. Treviño, “Bad Apples, Bad Cases, and Bad Barrels: Meta-Analytic Evidence About Sources of Unethical Decisions at Work,” *The Journal of applied psychology*, vol. 95, pp. 1–31, Jan. 2010, doi: 10.1037/a0017103.
19. R. Cialdini, Y. J. Li, A. Samper, and N. Wellman, “How Bad Apples Promote Bad Barrels: Unethical Leader Behavior and the Selective Attrition Effect,” *J Bus Ethics*, vol. 168, no. 4, pp. 861–880, Feb. 2021, doi: 10.1007/s10551-019-04252-2.
20. S. Hassan, “We Need More Research on Unethical Leadership Behavior in Public Organizations,” *Public Integrity*, vol. 21, no. 6, pp. 553–556, Nov. 2019, doi: 10.1080/10999922.2019.1667666.
21. R. Veetikazhi, T. J. Kamalanabhan, P. Malhotra, R. Arora, and A. Mueller, “Unethical employee behaviour: a review and typology,” *The International Journal of Human Resource Management*, vol. 33, no. 10, pp. 1976–2018, May 2022, doi: 10.1080/09585192.2020.1810738.
22. E. Bohórquez, M. Pérez, A. Benavides, and E. Pérez, “Organizational Climate and Its Importance for Organizational Success: A Literature Review,” in *Perspectives and Trends in Education and Technology*, A. Mesquita, A. Abreu, J. V. Carvalho, and C. H. P. de Mello, Eds., Singapore: Springer Nature Singapore, 2023, pp. 441–450.
23. L. Iswahyuni and R. Abadiyah, “The Effect of Work Stress, Work Family Conflict, Organizational Climate, and Organizational Support Burn Out on Employee at Company.,” *Indonesian Journal of Law and Economics Review*, vol. 18, p. 10.21070/ijler.v18i0.873-10.21070/ijler.v18i0.873, 2023, doi: 10.21070/ijler.v18i0.873.
24. F. Nooraie, M. Salehi, and T. Enayati, “The effect of emotional and organizational intelligence on academic entrepreneurship,” *Educational researches*, vol. 18, no. 73, Feb. 2023, doi: 10.30495/educ.2022.1966620.2914.
25. D. A. P. Palupi, M. P. Cahjono, and Suprayitno, “The Effect of Leadership, Organizational Climate, And Employee Motivation of Pt Delta Merlin Dunia Textile VII,” *Utsaha (Journal of Entrepreneurship)*, pp. 1–14, Jan. 2023, doi: 10.56943/joe.v2i1.205.
26. W. Z. Wan Abdul Razak and N. M. Mustamil, “A Bibliometric Analysis on Ethical Climate,” *International Journal of Business and Management*, vol. 4, no. 2, pp. 12–21, 2020, doi: 10.26666/rmp.ijbm.2020.2.2.
27. N. J. van Eck and L. Waltman, “VOS: A New Method for Visualizing Similarities Between Objects,” in *Advances in Data Analysis*, R. Decker and H.-J. Lenz, Eds., in *Studies in Classification, Data Analysis, and Knowledge Organization*. Berlin, Heidelberg: Springer, 2007, pp. 299–306. doi: 10.1007/978-3-540-70981-7_34.
28. M. J. Page, D. Moher, and J. E. McKenzie, “Introduction to PRISMA 2020 and implications for research synthesis methodologists,” *Research Synthesis Methods*, vol. 13, no. 2, pp. 156–163, Mar. 2022, doi: 10.1002/jrsm.1535.
29. N. J. van Eck and L. Waltman, “VOSviewer.” 2023. [Online]. Available: <https://www.vosviewer.com>
30. C. S. Raben and R. J. Klimoski, “The effects of expectations upon task performance as moderated by levels of self-esteem,” *Journal of Vocational Behavior*, vol. 3, no. 4, pp. 475–483, 1973, doi: 10.1016/0001-8791(73)90059-6.



Применение библиометрического анализа для оценки взаимосвязи социально-психологического климата и производительности труда

Сиф Ислем Амалу*

Высшая национальная школа менеджмента (ВНШМ), г. Колеа, Алжир

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-8861-8387>

e-mail: amalouseif@gmail.com

Тайеб Брахими**

Инженерный колледж Университета Эффат (ИКУЭ)

г. Джидда, Саудовская Аравия

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-1575-4943>

e-mail: tbrahimi@effatuniversity.edu.sa

Целью исследования является получение более глубокого и системного понимания взаимосвязи социально-психологического климата с производительностью труда. Методология предполагает анализ публикаций с использованием библиометрических методов и специализированного средства визуализации данных – VOSviewer. Результаты показывают, что эффективность работы организации, вовлеченность сотрудников, удовлетворенность работой, лидерство и культура лидерства являются ключевыми и тесно взаимосвязанными понятиями в исследованиях социально-психологического климата. В первую пятерку стран по количеству опубликованных документов и цитирований по данной тематике входят США, Индия, Великобритания, Австралия и Малайзия. В недавних публикациях в этой отрасли приоритетными были названы такие темы, как качество трудовой жизни, инновации, производительность, благополучие, приверженность организации, вовлеченность в работу и корпоративная социальная ответственность. Это исследование дает ценную для повышения эффективности работы сотрудников информацию, которая может быть полезна исследователям, практикантам и организациям. Важность работы заключается в определении направления будущих исследований и возможных точек соприкосновения в междисциплинарных исследованиях, а также способствует пониманию взаимосвязи социально-психологического климата в трудовом коллективе и изменении производительности труда.

Ключевые слова: социально-психологический климат, производительность труда, библиометрия, Scopus, VOSviewer.

Благодарности. Авторы выражают признательность за поддержку, оказанную Высшей национальной школой менеджмента, г. Колеа, Алжир, и Инженерным колледжем Университета Эффат, г. Джидда, Саудовская Аравия.



Для цитаты:

Сиф Ислем Амалу, Тайеб Брахими. Применение библиометрического анализа для оценки взаимосвязи социально-психологического климата и производительности труда // Моделирование и анализ данных. 2023. Том 13. № 3. С. 7–27. DOI: <https://doi.org/10.17759/mda.2023130301>

*Сиф Ислем Амалу, Высшая национальная школа менеджмента (ВНШМ), г. Колеа, Алжир, ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-8861-8387>, e-mail: amalouseif@gmail.com

**Тайеб Брахими, Инженерный колледж Университета Эффат (ИКУЭ), г. Джидда, Саудовская Аравия, ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-1575-4943>, e-mail: tbrahimi@effatuniversity.edu.sa

Литература

1. M. Pasban and S. H. Nojehed, “A Review of the Role of Human Capital in the Organization,” *Procedia-Social and Behavioral Sciences*, vol. 230, pp. 249–253, 2016, doi: 10.1016/j.sbspro.2016.09.032.
2. M. A. Bahrami, O. Barati, M. Ghoroghchian, R. Montazer-alfaraj, and M. Ranjbar Ezzatabadi, “Role of Organizational Climate in Organizational Commitment: The Case of Teaching Hospitals,” *Osong Public Health and Research Perspectives*, vol. 7, no. 2, pp. 96–100, 2016, doi: 10.1016/j.phrp.2015.11.009.
3. R. Kalhor, O. Khosravizadeh, S. Moosavi, M. Heidari, and H. Habibi, “Role of Organizational Climate in Job Involvement: A Way to Develop the Organizational Commitment of Nursing Staff,” *SAGE Open*, vol. 11, no. 2, p. 21582440211008456, 2018, doi: 10.1177/2515690X18790726.
4. M. Rožman and T. Štrukelj, “Organisational climate components and their impact on work engagement of employees in medium-sized organisations,” *Journal of Management & Organization*, vol. 26, no. 4, pp. 567–585, 2020, doi: 10.1080/1331677X.2020.1804967.
5. B. Schneider, M. Ehrhart, and W. Macey, “Organizational climate research: Achievements and the road ahead,” in *The handbook of organizational culture and climate*, 2011, pp. 29–49. doi: 10.4135/9781483307961.n3.
6. A. F. Obeng, Y. Zhu, S. A. Azinga, and P. E. Quansah, “Organizational Climate and Job Performance: Investigating the Mediating Role of Harmonious Work Passion and the Moderating Role of Leader–Member Exchange and Coaching,” *SAGE Open*, vol. 11, no. 2, p. 21582440211008456, 2021, doi: 10.1177/21582440211008456.
7. A. P. Nasution, P. B. Mahargiono, and Y. Soesaty, “Effect of Leadership Styles, Organizational Climate and Ethos of Work on Employee Productivity (PT. HP Metals Indonesia the Powder Coating),” *International Journal of Business and Management*, vol. 11, no. 2, p. 262, 2016, doi: 10.5539/ijbm.v11n2p262.
8. H.-Y. Ryu, D.-S. Hyun, D. R. Jeung, C.-S. Kim, and S.-J. Chang, “Organizational Climate Effects on the Relationship Between Emotional Labor and Turnover Intention in Korean Firefighters,” *Safety and Health at Work*, vol. 11, no. 4, pp. 479–484, 2020, doi: 10.1016/j.shaw.2020.08.007.
9. C. Bota-Avram, “Bibliometric analysis of sustainable business performance: where are we going? A science map of the field,” *Economic Research-Ekonomska Istraživanja*, vol. 36, no. 1, pp. 2137–2176, 2023.
10. T. Brahim, “Data Mining and Visualization of Space Technology Research Trends in the Arab World,” in *2023 20th Learning and Technology Conference (L&T)*, Jan. 2023, pp. 179–183. doi: 10.1109/LT58159.2023.10092340.
11. T. Brahim and H. Abbas, “Research and Trends in COVID-19 Vaccines Using VOSviewer,” in *Advanced Network Technologies and Intelligent Computing*, I. Woungang, S. K. Dhurandher,



- K. K. Pattanaik, A. Verma, and P. Verma, Eds., Cham: Springer International Publishing, 2022, pp. 288–296.
12. C. Cancino, J. M. Merigó, F. Coronado, Y. Dessouky, and M. Dessouky, “Forty years of Computers & Industrial Engineering: A bibliometric analysis,” *Computers & Industrial Engineering*, vol. 113, pp. 614–629, 2017, doi: <https://doi.org/10.1016/j.cie.2017.08.033>.
 13. M. A. Rojas-Sánchez, P. R. Palos-Sánchez, and J. A. Folgado-Fernández, “Systematic literature review and bibliometric analysis on virtual reality and education,” *Educ Inf Technol*, vol. 28, no. 1, pp. 155–192, Jan. 2023, doi: [10.1007/s10639-022-11167-5](https://doi.org/10.1007/s10639-022-11167-5).
 14. J. F. Burnham, “Scopus database: A review,” *Biomedical Digital Libraries*, vol. 3, no. 1, p. 1, 2006, doi: [10.1186/1742-5581-3-1](https://doi.org/10.1186/1742-5581-3-1).
 15. R. Prancutè, “Web of Science (WoS) and Scopus: The Titans of Bibliographic Information in Today’s Academic World,” *Publications*, vol. 9, p. 12, Mar. 2021, doi: [10.3390/publications9010012](https://doi.org/10.3390/publications9010012).
 16. A. Newman, H. Round, S. Bhattacharya, and A. Roy, “Ethical Climates in Organizations: A Review and Research Agenda,” *Business Ethics Quarterly*, vol. 27, no. 4, pp. 475–512, Oct. 2017, doi: [10.1017/beq.2017.23](https://doi.org/10.1017/beq.2017.23).
 17. D. Suma and B. A. Siregar, “The Role of Organizational Climate in Improving Job Satisfaction,” *Jurnal Mantik*, vol. 5, no. 4, Art. no. 4, Jan. 2022.
 18. J. Kish-Gephart, D. Harrison, and L. Treviño, “Bad Apples, Bad Cases, and Bad Barrels: Meta-Analytic Evidence About Sources of Unethical Decisions at Work,” *The Journal of applied psychology*, vol. 95, pp. 1–31, Jan. 2010, doi: [10.1037/a0017103](https://doi.org/10.1037/a0017103).
 19. R. Cialdini, Y. J. Li, A. Samper, and N. Wellman, “How Bad Apples Promote Bad Barrels: Unethical Leader Behavior and the Selective Attrition Effect,” *J Bus Ethics*, vol. 168, no. 4, pp. 861–880, Feb. 2021, doi: [10.1007/s10551-019-04252-2](https://doi.org/10.1007/s10551-019-04252-2).
 20. S. Hassan, “We Need More Research on Unethical Leadership Behavior in Public Organizations,” *Public Integrity*, vol. 21, no. 6, pp. 553–556, Nov. 2019, doi: [10.1080/10999922.2019.1667666](https://doi.org/10.1080/10999922.2019.1667666).
 21. R. Veetikazhi, T. J. Kamalanabhan, P. Malhotra, R. Arora, and A. Mueller, “Unethical employee behaviour: a review and typology,” *The International Journal of Human Resource Management*, vol. 33, no. 10, pp. 1976–2018, May 2022, doi: [10.1080/09585192.2020.1810738](https://doi.org/10.1080/09585192.2020.1810738).
 22. E. Bohórquez, M. Pérez, A. Benavides, and E. Pérez, “Organizational Climate and Its Importance for Organizational Success: A Literature Review,” in *Perspectives and Trends in Education and Technology*, A. Mesquita, A. Abreu, J. V. Carvalho, and C. H. P. de Mello, Eds., Singapore: Springer Nature Singapore, 2023, pp. 441–450.
 23. L. Iswahyuni and R. Abadiyah, “The Effect of Work Stress, Work Family Conflict, Organizational Climate, and Organizational Support Burn Out on Employee at Company.,” *Indonesian Journal of Law and Economics Review*, vol. 18, p. 10.21070/ijler.v18i0.873-10.21070/ijler.v18i0.873, 2023, doi: [10.21070/ijler.v18i0.873](https://doi.org/10.21070/ijler.v18i0.873).
 24. F. Nooraie, M. Salehi, and T. Enayati, “The effect of emotional and organizational intelligence on academic entrepreneurship,” *Educational researches*, vol. 18, no. 73, Feb. 2023, doi: [10.30495/educ.2022.1966620.2914](https://doi.org/10.30495/educ.2022.1966620.2914).
 25. D. A. P. Palupi, M. P. Cahjono, and Suprayitno, “The Effect of Leadership, Organizational Climate, And Employee Motivation of Pt Delta Merlin Dunia Textile VII,” *Utsaha (Journal of Entrepreneurship)*, pp. 1–14, Jan. 2023, doi: [10.56943/joe.v2i1.205](https://doi.org/10.56943/joe.v2i1.205).
 26. W. Z. Wan Abdul Razak and N. M. Mustamil, “A Bibliometric Analysis on Ethical Climate,” *International Journal of Business and Management*, vol. 4, no. 2, pp. 12–21, 2020, doi: [10.26666/rmp.ijbm.2020.2.2](https://doi.org/10.26666/rmp.ijbm.2020.2.2).
 27. N. J. van Eck and L. Waltman, “VOS: A New Method for Visualizing Similarities Between Objects,” in *Advances in Data Analysis*, R. Decker and H.-J. Lenz, Eds., in *Studies in Classification*,



- Data Analysis, and Knowledge Organization. Berlin, Heidelberg: Springer, 2007, pp. 299–306. doi: 10.1007/978-3-540-70981-7_34.
28. M. J. Page, D. Moher, and J. E. McKenzie, “Introduction to PRISMA 2020 and implications for research synthesis methodologists,” *Research Synthesis Methods*, vol. 13, no. 2, pp. 156–163, Mar. 2022, doi: 10.1002/jrsm.1535.
29. N. J. van Eck and L. Waltman, “VOSviewer.” 2023. [Online]. Available: <https://www.vosviewer.com>
30. C. S. Raben and R. J. Klimoski, “The effects of expectations upon task performance as moderated by levels of self-esteem,” *Journal of Vocational Behavior*, vol. 3, no. 4, pp. 475–483, 1973, doi: 10.1016/0001-8791(73)90059-6.

Получена 06.06.2023

Принята в печать 12.07.2023

Received 06.06.2023

Accepted 12.07.2023

УДК 004.8

Оценка информационно-управляющего поля кабины пилотов с использованием нейронных сетей и методов

Махортов И.А. *

Московский государственный психолого-педагогический университет
(ФГБОУ ВО МГППУ), г. Москва, Российская Федерация
Государственный научно-исследовательский институт авиационных систем
(ФАУ ГосНИИАС), г. Москва, Российская Федерация
e-mail: iamahortov@2100.gosniias.ru

Грешников И.И. **

Государственный научно-исследовательский институт авиационных систем
(ФАУ ГосНИИАС), г. Москва, Российская Федерация
Московский государственный психолого-педагогический университет
(ФГБОУ ВО МГППУ), г. Москва, Российская Федерация
ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-5474-3094>
e-mail: iigreshnikov@2100.gosniias.ru

В работе рассматривается методика оценки ИУП кабины пилотов с использованием показателей глазодвигательной активности и вероятностной нейронной сети, при помощи которой вычисляется итоговая оценка рассматриваемого варианта индикации. Данная методика была апробирована на базе универсального стенда прототипирования с участием лётных экспертов. Применение данной методики способствует быстрому и качественному проведению эргономической оценки ИУП кабины пилотов, что в свою очередь повышает эффективность человеко-машинного взаимодействия и как следствие безопасность авиaperезовок.

Ключевые слова: эргономическая оценка, глазодвигательная активность, информационно-управляющее поле, вероятностная нейронная сеть.

***Махортов Иннокентий Александрович**, студент, Московский государственный психолого-педагогического университет (ФГБОУ ВО МГППУ), г. Москва, Российская Федерация; инженер, Государственный научно-исследовательский институт авиационных систем (ФАУ ГосНИИАС), г. Москва, Российская Федерация, e-mail: iamahortov@2100.gosniias.ru

****Грешников Иван Игоревич**, кандидат технических наук, начальник сектора, Государственный научно-исследовательский институт авиационных систем (ФАУ ГосНИИАС), г. Москва, Российская Федерация; аспирант МГППУ (ФГБОУ ВО МГППУ), г. Москва, Российская Федерация, ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-5474-3094>, e-mail: iigreshnikov@2100.gosniias.ru



Благодарности. Авторы благодарят за научно-технические консультации Л.С. Куравского.

Для цитаты:

Махортов И.А., Грешников И.И. Оценка информационно-управляющего поля кабины пилотов с использованием нейронных сетей и методов // Моделирование и анализ данных. 2023. Том 13. № 3. С. 28–38. DOI: <https://doi.org/10.17759/mda.2023130302>

1. ВВЕДЕНИЕ

Целью оценки информационно-управляющего поля (ИУП) кабины пилотов является оптимизация ИУП и как следствие снижение нагрузки на экипаж, что служит залогом снижения числа лётных происшествий, основной причиной которых по-прежнему является человеческий фактор. Рассматриваемый в данной публикации подход основывается на использовании первичных показателей ГДА, фиксируемых в процессе проведения лётных экспериментов с помощью айтрекера, и последующем сравнении данных показателей, относящихся к различным оцениваемым вариантам индикации с помощью вероятностной нейронной сети. Основное преимущество данной оценки – это получение быстрого и обоснованного результата с использованием такого объективного средства контроля, как айтрекинг.

Учитывая колоссальный объём данных, который вынужден обрабатывать пилот при взаимодействии с ИУП современных ВС, задача оптимизации ИУП кабины пилотов является актуальной. ИУП с высокими эргономическими показателями позволяет минимизировать информационную загруженность и улучшить ситуационную осведомленность пилота [1], [2].

Летные происшествия, обусловленные потерей управляемости в полете, чаще остальных являются фатальными по последствиям ([3], [4]). В [5] сказано, что с 2001 по 2011 год летные происшествия, связанные с этими инцидентами, были главной причиной катастроф в гражданской авиации. С этой категорией происшествий связано такое понятие как попадание в сложное пространственное положение (СПП). Корректные действия пилота определяют, разовьется СПП в катастрофическую ситуацию (в частности, аэродинамическое сваливание) или же удастся вернуться к запланированным параметрам полета.

Целью данной работы является разработка системы быстрой оценки на основе видеоокулографии, обеспечивающей выбор наилучшего варианта индикации из рассматриваемых, и решение конкретной прикладной задачи по определению кадра пилотажной индикации оптимального для вывода из СПП. Для этого необходимо решить задачи по разработке соответствующего математического аппарата и программного обеспечения, после чего провести серию лётных экспериментов на специальном пилотажном стенде и с использованием предлагаемой системы оценки определить лучший вариант индикации из рассматриваемых.



2. МЕТОДИКА ЭКСПРЕСС-ОЦЕНКИ ИНФОРМАЦИОННО-УПРАВЛЯЮЩЕГО ПОЛЯ КАБИНЫ ПИЛОТОВ

Методика экспресс-оценки ИУП кабины пилотов базируется на анализе первичных показателей ГДА давно известных и описанных в экспериментальной психологии [6].

Авторами статьи была проведена оценка уровня корреляционных связей между показателями ГДА. С помощью метода главных компонент, были выделены три основных компонента, объясняющих 86,5 % суммарной наблюдаемой дисперсии. Для упрощения вычислений и в целях наибольшей наглядности при интерпретации результатов эргономической оценки, для каждого компонента были найдены наиболее близкие (коллинеарные) показатели ГДА, которые в контексте решаемой задачи являются критериями оценки эффективности считывания информации с индикаторов (см. Таблица 1):

Таблица 1

Критерии для оценки эффективности считывания информации с индикаторов

Критерий	Маркером/предиктором чего является	Оцениваемая характеристика пилота
Общая продолжительность фиксации взора	Наличие опыта в решении поставленной задачи, наличие затруднений в переработке получаемой информации, предиктор скорости протекания когнитивных процессов. Дольше рассматриваются зоны, содержащие высокоинформативные объекты или изменяющиеся объекты	Сумма величины, представляющей распределённое время, потраченное на обдумывание ситуации, планирование действий и принятие решений, и времени, необходимого для «технического» считывания информации с индикаторов без обдумывания её содержания и последующих действий. Уменьшение общей продолжительности фиксации свидетельствует о повышении эффективности считывания информации с индикаторов. <u>В целом критерий оценивает продолжительность считывания информации с индикатора и сопутствующие считыванию действия пилота, включая время принятия решений.</u>
Частоты горизонтальных и вертикальных саккад	Маркер уровня нагрузки на память, уровня возбуждения, наличия психиатрических и нейрофизиологических расстройств	Увеличение частоты саккад свидетельствует о повышении эффективности считывания динамически изменяющейся информации с индикаторов. <u>В целом критерий интегрально оценивает интенсивность переходов взора между зонами внимания, характеризующую пространственно-временную динамику переключения внимания между зонами внимания стимулов.</u>
Энтропия распределения пребывания взора в области индикатора	Среднее время распознавания ситуации по зрительному стимулу	Среднее время распознавания ситуации, которое, как экспериментально установлено, прямо пропорционально энтропии распределения пребывания взора в области индикатора. Уменьшение этого показателя свидетельствует о повышении эффективности считывания информации с индикаторов. <u>В целом критерий оценивает продолжительность считывания информации с индикатора с учётом её распределения по зонам внимания и сопутствующие считыванию действия пилота, включая время принятия решений.</u>

Общая оценка ИУП кабины пилотов вычисляется с помощью вероятностной нейронной сети, суть работы которой заключается в классификации образцов на основе оценок их близости к эталонам, принадлежащим к различным классам. В контексте задачи под эталонами понимаются оцениваемые варианты индикации и их признаки (первичные показатели ГДА).

Данная сеть не требует обучения в обычном понимании и способна настраиваться по малым выборкам эталонов. Для построения модели требуется обучающий набор данных, и настройка параметров функций активации нейронов внутреннего слоя.

В контексте рассматриваемой задачи сеть состоит из 3-х слоев:

- **Входной слой.** Кол-во компонентов входного сигнала равно количеству параметров класса (в данной задаче – количеству критериев оценки, т.е. трём).
- **Слой эталонов (внутренний слой).** Этот слой состоит из элементов на радиальных базисных функциях. Количество его элементов равно количеству эталонов, которые должны быть сгруппированы по классам. В контексте задачи каждый элемент на радиальных базисных функциях соответствует одному из вариантов индикации. Количество классов равно двум – «хорошая индикация» и «плохая индикация», причём принадлежность каждого варианта индикации к одному из этих классов определяется с помощью экспертных оценок.
- **Выходной слой,** построенный по схеме «Один-из-N» (в данной задаче $N=2$). В этом слое суммируются полученные значения из внутреннего слоя. Каждому классу соответствует один выходной элемент. Каждый такой элемент соединен со всеми радиальными элементами, относящимися к его классу, со всеми остальными радиальными элементами соединение отсутствует. Таким образом, выходной элемент просто складывает отклики всех элементов, принадлежащих к его классу. Значения выходных сигналов интерпретируются как пропорциональные оценкам вероятности принадлежности соответствующим классам. После нормировки получаются окончательные оценки вероятностей принадлежности к заданным классам.

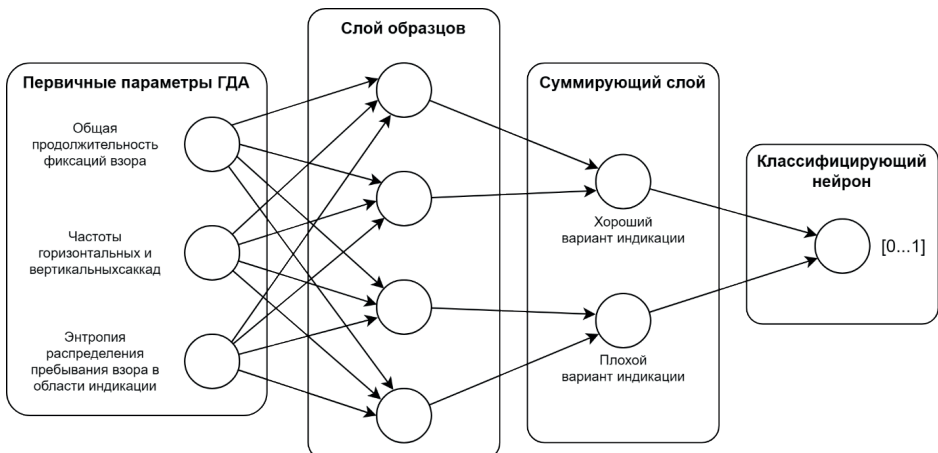


Рис 1. Модель вероятностной нейронной сети для получения итоговой оценки



В качестве функции активации эталонов внутреннего слоя используется функция Гаусса:

$$O_j = \exp\left(\frac{-\sum (w_{ij} - x_i)^2}{\sigma^2}\right),$$

где x обозначает сигнал с входящего синапса, σ задает «ширину» функции, причем для каждого элемента на радиальных базисных функциях можно задать свое значение для получения наиболее достоверного результата.

Общая оценка представляет из себя вещественное значение в диапазоне от 0 до 1, где в качестве нуля принимается наихудший вариант индикации, а в качестве единицы – наилучший.

3. АРХИТЕКТУРА ПРОГРАММНОЙ РЕАЛИЗАЦИИ СИСТЕМЫ ОЦЕНКИ ИУП

Программный модуль экспресс-оценки ИУП является составной частью комплекса эргономических оценок [7], [8]. Процесс получения показателей ГДА и других данных с использованием данного комплекса подробно рассмотрен в соответствующей публикации [9], поэтому в данном разделе будет рассмотрен только процесс обработки уже полученных данных – первичных показателей ГДА.

Итак, рассмотрим архитектуру программной реализации модуля экспресс-оценки ИУП (см. Рисунок 2).

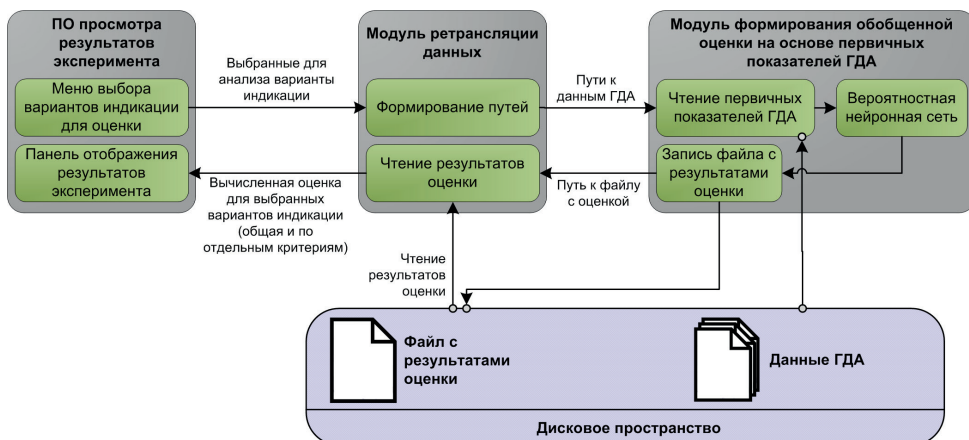


Рис. 2. Архитектура программной реализации модуля экспресс-оценки

С помощью ПО просмотра результатов эксперимента, производится выбор вариантов индикации для оценки. Затем формируются пути к файлам содержащим данные с первичными показатели ГДА для выбранных вариантов индикации и передаются в модуль ретрансляции данных.

Модуль ретранслятор данных запускает приложение формирования обобщенной оценки, которое читает данные об экспериментальной ситуации из файла данных ГДА, на основании которых вычисляются первичные показатели ГДА, которые затем используются при формировании итоговой оценки, с помощью вероятностной нейронной сети. По завершении вычислений, приложение сохраняет в файл оценку по каждому критерию и общую итоговую оценку.

Когда модуль ретранслятор получает сигнал о завершении расчета критериев, он передает путь к данному файлу программе просмотра экспериментов (является частью комплекса эргономических оценок), которая в свою очередь использует эти данные для отображения данных и графиков.

4. ИСПЫТАТЕЛЬНАЯ СРЕДА

Первичные показатели ГДА фиксировались на пилотажном стенде разработанным в ФАУ «ГосНИИАС» при помощи айтрекера Gazepoint GP3 (см. Рисунок 3). Для проведения эксперимента использовалась модель системы управления и динамики самолёта SSJ100 к которой были подключены оцениваемые кадры пилотажной индикации. Перед проведением экспериментов у пилотов была возможность совершить тестовой полёт с каждым вариантом индикации в течении 25 минут.

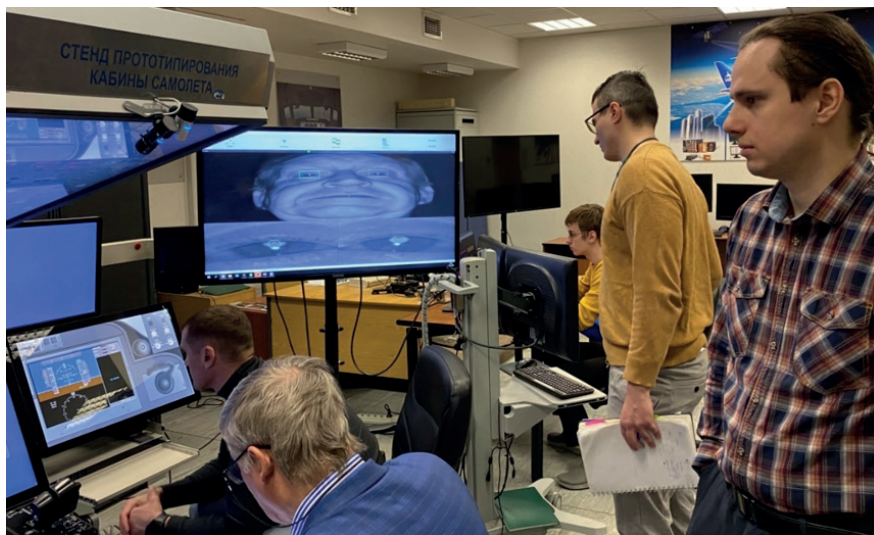


Рис. 3. Пилотажный стенд ФАУ «ГосНИИАС»



5. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ПО ВЫБОРУ ОПТИМАЛЬНОГО ВАРИАНТА ПИЛОТАЖНОЙ ИНДИКАЦИИ ДЛЯ ВЫВОДА ИЗ СПП. ИЗ СЛОЖНОГО ПРОСТРАНСТВЕННОГО ПОЛОЖЕНИЯ

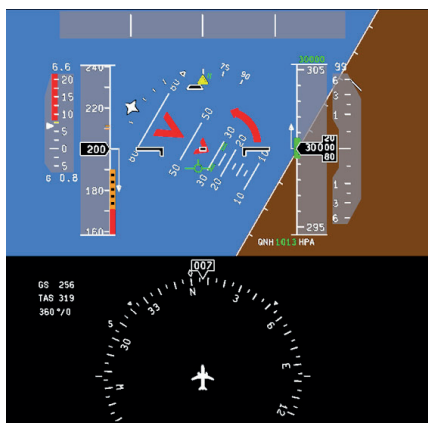
Задача ставится как поиск оптимального варианта пилотажной индикации для вывода из СПП. На основе анализа зарубежного и отечественного опыта, а также на основе консультации с лётными экспертами, авторами были разработаны три варианта индикации для вывода из СПП. Варианты различаются между собой местонахождением и типом шкал и цифробуквенных обозначений, принципом поведения динамических мнемосимволов, наличием слоя синтезированного видения, и т.д. (см. Рисунок 4).



Вариант КПИ 1 (Штатный)



Вариант КПИ 2 (Штатный с синтезированным видением)



Вариант КПИ 3 (Штатный с дополнительными символами)

Рис. 4. Варианты индикации для вывода из СПП

В экспериментах участвовали три опытных пилота (см. Таблица 2).

Таблица 2

Участники экспериментов

№	Рост, см	Возраст, лет	Налёт с различными видами индикации, час
Пилот 1	171	71	12000
Пилот 2	188	41	3500
Пилот 3	183	54	5400

В результате эксперимента были получены результаты, свидетельствующие о превосходстве варианта 2 над другими вариантами (см. Рисунок 5). Полученные данные также согласуются с экспертной оценкой пилотов, сформированной после проведения экспериментов.

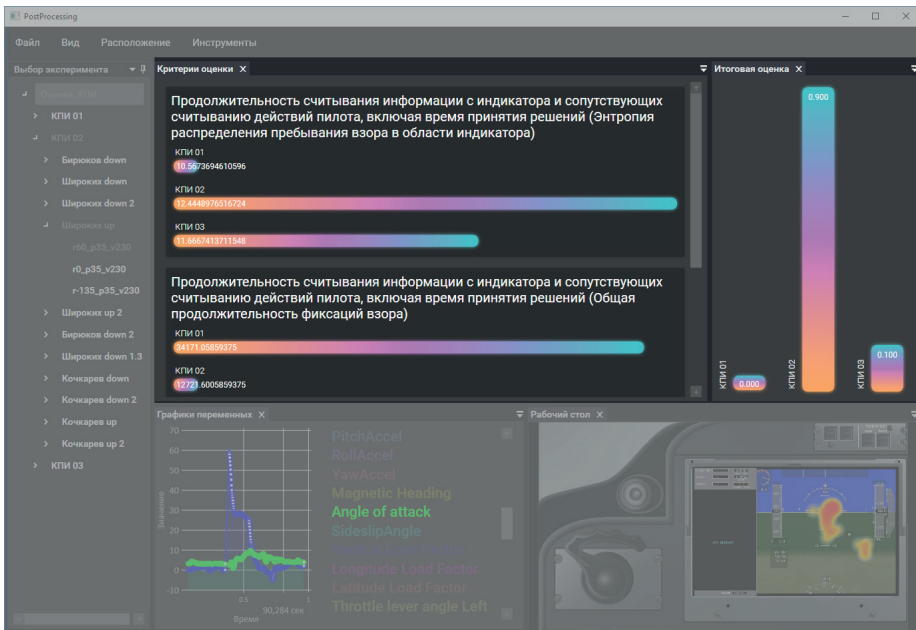


Рис. 5. Результаты проведения оценки

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В результате исследования были успешно выполнены задачи по разработке математического аппарата для поиска оптимальных вариантов индикации на основе вероятностной нейронной сети и созданию программного обеспечения на его основе. Данное ПО было внедрено в комплекс эргономической оценки ИУП и апробировано при решении задачи поиска оптимального варианта индикации для выхода из СПП.



Применение данного подхода позволяет проводить быструю эргономическую оценку ИУП кабины пилотов, получая результаты с достаточно высокой степенью достоверности, что снижает временные затраты пилотов и другого высококвалифицированного персонала, и определяет высокую практическую значимость работы, поэтому целесообразно продолжать развитие и внедрение систем эргономической оценки, основанных на применении данного подхода.

Литература

1. *Грешиников И.И., Златомрежев В.И.* Перспективное информационно-управляющее поле кабины, реализующее новые способы информационного обеспечения экипажа и управления информационным полем вс. 5-я Международная конференция «Перспективные направления развития бортового оборудования гражданских воздушных судов», сборник докладов. 2019 г.
2. *Грешиников И.И., Златомрежев В.И.* Использование передовых технологий для оптимизации информационно-управляющего поля кабины перспективного самолёта. XVIII все-российская научная конференция «нейрокомпьютеры и их применение», тезисы докладов. 2020 г.
3. «IATA» International Air Transport Association, 2019. [В Интернете]. Available: https://www.iata.org/contentassets/b6eb2adc248c484192101edd1ed36015/loc-i_2019.pdf. [Дата обращения: 14 июля 2023].
4. *Ахrameев В.* Подготовка пилотов по предотвращению и выводу из сложных пространственных положений и сваливания, Москва: Совещание рабочей группы Совета Федерации, 2019.
5. Руководство по подготовке для предотвращения попадания самолета в сложные пространственные положения и вывода из них, Montreal: International Civil Aviation Organisation, 2014.
6. *Барабаничиков В.А., Жегалло А.В.* Регистрация и анализ направленности зрения человека. – Москва : Институт психологии РАН, 2013. – 316 с. – (Методы психологии). – ISBN 978-5-9270-0278-8. – EDN RVLGBN.
7. *Грешиников И.И., Куравский Л.С., Златомрежев В.И., Юрьев Г.А.* Патент на изобретение № 2787317. Комплекс проведения эргономических оценок информационно-управляющего поля /Правообладатель ФАУ «ГосНИИАС» (Россия). – Заявка № 2021130113; Заяв. 15.10.2021; Зарегистр. 09.01.2023.–(РОСПАТЕНТ).
8. *Грешиников И.И.* Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2020663266 «ПО постобработки результатов экспериментов глазодвигательной активности» /Правообладатель ФГУП «ГосНИИАС» (Россия). – Заявка № 2020662389; Заяв. 15.10.2020; Зарегистр. 26.10.2020.–(РОСПАТЕНТ).
9. *Грешиников И.И.* Разработка архитектуры системы объективных и субъективных оценок информационно-управляющего поля для универсального стенда прототипирования кабины пилотов // Труды ГосНИИАС. Серия: Вопросы авионики. – 2020. – № 5(51). – С. 30–42. – EDN ВСЕJJK.



Assessment of Cockpit Information and Control Field Using Neural Networks and Methods

Innokenty A. Makhortov*

Moscow State University of Psychology and Education (MSUPE), Moscow, Russia
State Research Institute of Aviation Systems (GosNIIAS), Moscow, Russia
e-mail: iamahortov@2100.gosniias.ru

Ivan I. Greshnikov **

State Research Institute of Aviation Systems (GosNIIAS), Moscow, Russia
Moscow State University of Psychology and Education (MSUPE), Moscow, Russia
ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-5474-3094>
e-mail: iigreshnikov@2100.gosniias.ru

The paper deals with the methodology of estimating the cockpit information and control field using indicators of oculomotor activity and a probabilistic neural network, which is used to calculate the final estimate of the considered display version. This methodology was tested on the universal prototyping bench basis with the participation of pilots. The using of this methodology contributes to the rapid and qualitative ergonomic assessment of the cockpit information and control field, which in turn increases the efficiency of human-machine interaction and, as a consequence, the safety of air transportation.

Keywords: ergonomic assessment, oculomotor activity, cockpit information and control field, probabilistic neural network.

Acknowledgements. The authors are grateful for scientific and technical support Kuravsky L.S.

For citation:

Makhortov I.A., Greshnikov I.I. Assessment of Cockpit Information and Control Field Using Neural Networks and Methods. *Modelirovanie i analiz dannykh = Modelling and Data Analysis*, 2023. Vol. 13, no. 3, pp. 28–38. DOI: 10.17759/mda.2023130302 (In Russ., abstr. in Engl.).

****Innokenty A. Makhortov***, Student, Moscow State University of Psychology and Education (MSUPE), Moscow, Russia; Engineer, State Research Institute of Aviation Systems (GosNIIAS), Moscow, Russia, e-mail: iamahortov@2100.gosniias.ru

*****Ivan I. Greshnikov***, PhD (Technical Sciences), Head of Sector, State Research Institute of Aviation Systems (GosNIIAS), Moscow, Russia; Graduate Student, Moscow State University of Psychology and Education (MSUPE), Moscow, Russia ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-5474-3094>, e-mail: iigreshnikov@2100.gosniias.ru



References

1. Greshnikov I.I., Zlatomrezhev V.I. Perspektivnoe informacionno-upravlyayushchee pole kabiny, realizuyushchee novye sposoby informacionnogo obespecheniya ekipazha i upravleniya informacionnym polem vs. 5-ya Mezhdunarodnaya konferenciya «Perspektivnye napravleniya razvitiya bortovogo oborudovaniya grazhdanskih vozдушnyh sudov», sbornik dokladov.
2. Greshnikov I.I., Zlatomrezhev V.I. Ispol'zovanie peredovyh tekhnologij dlya optimizacii informacionno-upravlyayushchego polya kabiny perspektivnogo samolyota. XVIII vserossiyskaya nauchnaya konferenciya «nejrokomп'yutery i ih primeneniye», abstracts. 2020 г. (In Russ.).
3. “IATA” International Air Transport Association, 2019. [On the Internet]. Available: https://www.iata.org/contentassets/b6eb2adc248c484192101edd1ed36015/loc-i_2019.pdf. [Date of access: 14 July 2023].
4. Akhrameev V. Podgotovka pilotov po predotvrashcheniyu i vyvodu iz slozhnyh prostranstvennyh polozhenij i svalivaniya, Moscow: Federation Council Working Group Meeting, 2019. (In Russ.).
5. Rukovodstvo po podgotovke dlya predotvrashcheniya popadaniya samoleta v slozhnye prostranstvennye polozheniya i vyvodu iz nih, Montreal: International Civil Aviation Organization, 2014. (In Russ.).
6. Drumshchikov V.A., Zhegallo A.V. Registraciya i analiz napravlenosti vzora cheloveka. – Moscow: Institute of Psychology RAS, 2013. – 316 с. – (Methods of psychology). – ISBN 978-5-9270-0278-8. – EDN RVLGBN. (In Russ.).
7. Greshnikov I.I., Kuravsky L.S., Zlatomrezhev V.I., Yuriev G.A. Patent for invention № 2787317. Komleks provedeniya ergonomicheskikh ocenok informacionno-upravlyayushchego polya / Right holder FAU “GosNIAS” (Russia). – Application No. 2021130113; Application. 15.10.2021; Registered. 09.01.2023.–(ROSPATENT). (In Russ.).
8. Greshnikov I.I. Certificate of state registration of the computer program № 2020663266 “PO postobrabotki rezul'tatov eksperimentov glazodvigatel'noj aktivnosti “/Right holder FGUP “GosNIAS” (Russia). – Application № 2020662389; Application. 15.10.2020; Registered. 26.10.2020.–(ROSPATENT). (In Russ.).
9. Greshnikov I.I. Razrabotka arhitektury sistemy ob'ektivnyh i sub'ektivnyh ocenok informacionno-upravlyayushchego polya dlya universal'nogo stenda prototipirovaniya kabiny pilotov // Proceedings of GosNIAS. Series: Issues of avionics. – 2020. – № 5(51). – С. 30–42. – EDN BCEJJK. (In Russ.).

Получена 15.07.2023

Принята в печать 09.08.2023

Received 15.07.2023

Accepted 09.08.2023

Применение вероятностных сетей к проблеме распознавания речи

Левонич Н.И.*

Московский государственный психолого-педагогический университет
(ФГБОУ ВО МГППУ), г. Москва, Российская Федерация
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-8580-0490>
e-mail: levonikitech@yandex.ru

Козырев А.Д.**

Московский государственный психолого-педагогический университет
(ФГБОУ ВО МГППУ)
Государственный научно-исследовательский институт авиационных систем
(ФАУ «ГосНИИАС»), г. Москва, Российская Федерация
ORCID: <https://orcid.org/0009-0008-1769-4121>
e-mail: adkozyrev@2100.gosniias.ru

В статье рассмотрен подход к решению задачи распознавания речи, основанный на использовании вероятностных нейронных сетей. Задача ставится как задача распознавания голосовых команд заданной длины в словах, в которой на каждой позиции может стоять определенный набор слов. Наборы слов не пересекаются по позициям. Для решения данной задачи разработан алгоритм распознавания, ядром которого является вероятностная сеть, распознающая модифицированные оценки спектральных плотностей. Представленный алгоритм позволяет получить высокую точность распознавания, достаточную для создания голосовых интерфейсов.

Ключевые слова: автоматическое распознавание речи, автоматическое распознавание команд, спектральный анализ, сверточные нейронные сети, вероятностные нейронные сети.

Для цитаты:

Левонич Н.И., Козырев А.Д. Применение вероятностных сетей к проблеме распознавания речи // Моделирование и анализ данных. 2023. Том 13. № 3. С. 39–51. DOI: <https://doi.org/10.17759/mda.2023130303>

***Левонич Никита Ильич**, студент, Московский государственный психолого-педагогический университет (ФГБОУ ВО МГППУ), г. Москва, Российская Федерация, ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-8580-0490>, e-mail: levonikitech@yandex.ru

****Козырев Алексей Денисович**, аспирант, Московский государственный психолого-педагогический университет (ФГБОУ ВО МГППУ), инженер, Государственный научно-исследовательский институт авиационных систем (ФАУ «ГосНИИАС»), г. Москва, Российская Федерация, ORCID: <https://orcid.org/0009-0008-1769-4121>, e-mail: adkozyrev@2100.gosniias.ru



1. ВВЕДЕНИЕ

Распознавание речи – важная часть современных интерфейсов взаимодействия человека и машины. Оно необходимо для реализации голосового управления – наиболее естественного для человека способа управления. Система голосового управления может иметь в своем составе следующие модули: модуль распознавания речи, модуль синтеза речи, модуль обработки естественного языка и интеллектуальной интерпретации речи.

Модуль распознавания речи в свою очередь состоит из подмодулей – акустическая модель, языковая модель и декодер. В настоящее время проблема распознавания речи решается с помощью комбинации различных методов, таких как дискриминантный анализ, основанный на теореме Байеса, скрытые марковские модели, нейронные сети. Среди нейронных сетей при распознавании речи наибольшую популярность приобрели свёрточные сети LSTM-сети.

Акустическая модель позволяет по признакам входного сигнала на фрейме получить распределение вероятностей нахождения акустических единиц, например фонем, на данном участке сигнала.

Языковые модели предназначены для учета контекста, они позволяют выявить наиболее вероятные последовательности фонем и слов с точки зрения структуры языка и текущего контекста

Декодер на базе вероятностей, которые являются результатом работы акустической модели с учетом языковой модели выбирает конкретную речевую единицу.

В данной статье рассмотрен подход к решению частной задачи распознавания речи, а именно к распознаванию голосовых команд заданной длины в словах, в которой на каждой позиции может стоять определенный набор слов и эти наборы не пересекаются по позициям.

Граф устройства голосовой команды изображен на рисунке 1.

2. ПОДХОД К РАСПОЗНАВАНИЮ РЕЧИ

Основой предложенного подхода служат вероятностные сети (сети на радиальных базисных элементах). Для реализации распознавания речи с их помощью, необходимо извлечь из звукового сигнала статичные образцы (наборы признаков), на которых будет обучаться сеть.

Для извлечения признаков из сигнала используется спектральный анализ в форме оценки спектральных плотностей. Оценки спектральных плотностей представляются в виде спектрограмм и преобразуются с помощью специального преобразования, вид которого приведен в статье «О методе распознавания голосовых команд с применением особого преобразования спектральных плотностей» [1]. Для понижения размерности спектрограмм (с целью использования вероятностных сетей) используются субдискретизирующие слои [2], подобные тем, что используются внутри сверточных нейронных сетей.

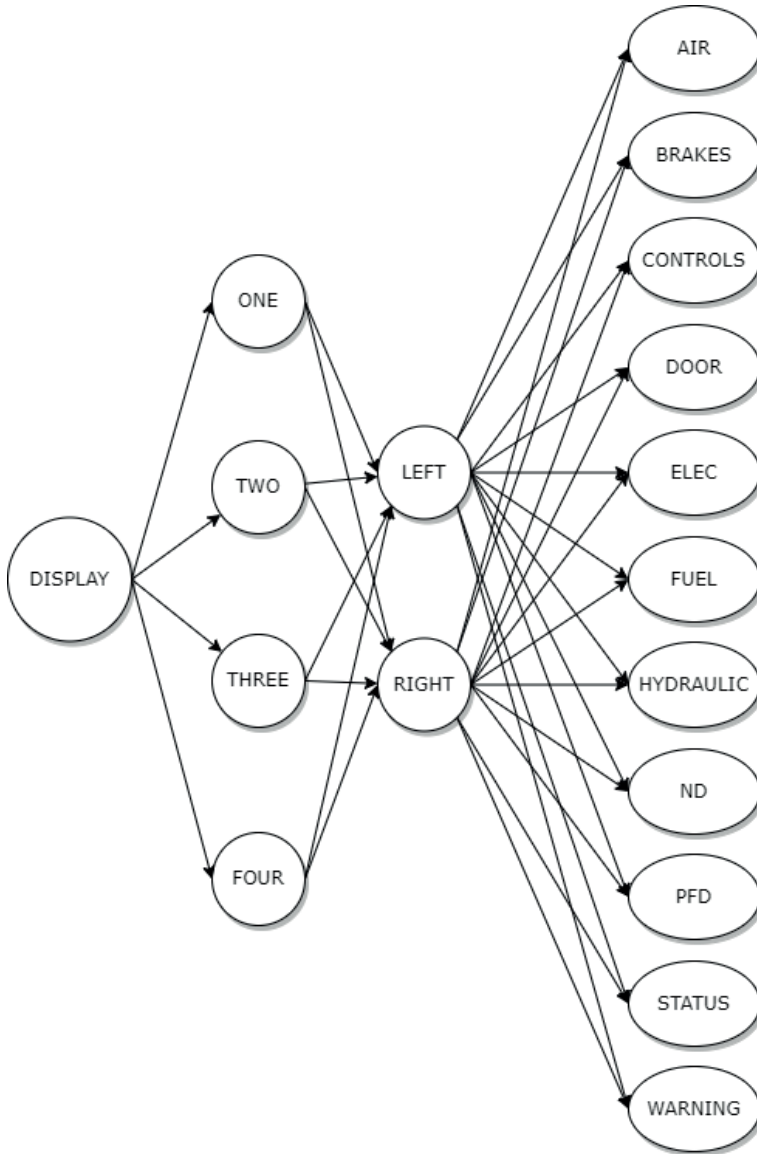


Рис. 1. Граф устройства голосовой команды

Признаки сигнала извлекаются на коротких пересекающихся интервалах с помощью оконной функции, шаг перемещения оконной функции меньше её длины. Пример перемещения окна изображен на рисунке 2. На рисунке 3 изображен отрезок сигнала входящий в одно окно. В ходе экспериментов было установлено, что оптимальным является окно в 500 мс, а оптимальным шагом 250 мс.

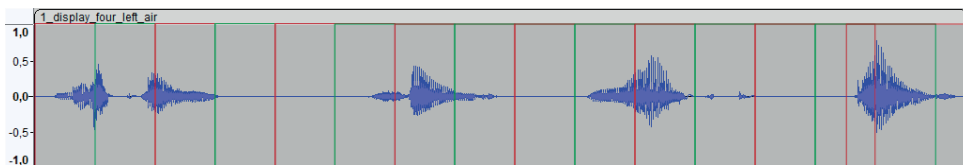


Рис. 2. Пример перемещения окна по сигналу

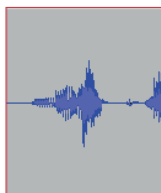


Рис. 3. Пример отрезка сигнала в окне

Примеры исходной спектрограммы и спектрограммы, преобразованной субдискретизирующим слоем с функцией максимума изображен на рисунке 4 (на нем обработанная спектрограмма изображена в том же размере, тогда как на самом деле она меньше в 3 раза по каждой из осей). Наиболее качественно на имеющихся данных показал размер ядра 3×3 .

После перехода от исходной спектрограммы к её сжатой версии, обучается вероятностная сеть на отрезках сигнала, которые получаются в результате прохода окна. Для обучения сети образцы предварительно размечаются вручную. Фрагменты аудиосигнала размечаются по следующему принципу, если во фрагменте слово или его часть занимает больше половины фрагмента, и при этом во фрагменте не содержатся части другого слова, то фрагмент помечается меткой этого слова, в противном случае файл помечается специальной меткой, которая обозначает отсутствие полезной информации во фрагменте. В данной работе в качестве специальной пометки используется слово «trash».

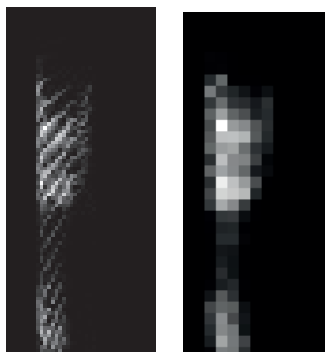


Рис. 4. Пример преобразования спектрограммы субдискретизирующим слоем

Основу вероятностной сети [3, с. 118] составляют радиальные базисные элементы, которые реализуют функцию, вычисляющую значение некоторой радиальной базисной функции с центром в точке $A(\mathbf{c})$, которая в общем виде задается формулой 1.

$$\phi_A(\mathbf{x}) = \phi(\|\mathbf{x} - \mathbf{c}\|) \quad (1)$$

В рамках данной статьи в качестве радиальной базисной функции в вероятностных сетях Гаусса (формула 2). Она имеет один настраиваемый параметр ϵ .

$$\phi(r) = e^{-(\epsilon r)^2} \quad (2)$$

Топология сети на радиальных базисных элементах изображена на рисунке 5.

Для обучения вероятностных сетей расчет исходных спектрограмм слов осуществлялся на частотах 0–3008 Гц с шагом 32 Гц. По времени спектрограмма отрезка была посчитана с 32-ти миллисекундным шагом. Размер исходных спектрограмм составил 36x94 (3348 точек). Размер спектрограмм, прошедших субдискретизирующий слой – 12x31 (372 точки).

Обучение вероятностной сети производится с помощью задания правильной топологии, центры радиальных базисных элементов устанавливаются в координаты образцов обучающей выборки, радиальные базисные элементы одного класса, связываются с одним нейроном-сумматором, который отвечает за вычисление веса данного класса. Далее веса нормируются с целью получения вероятности.

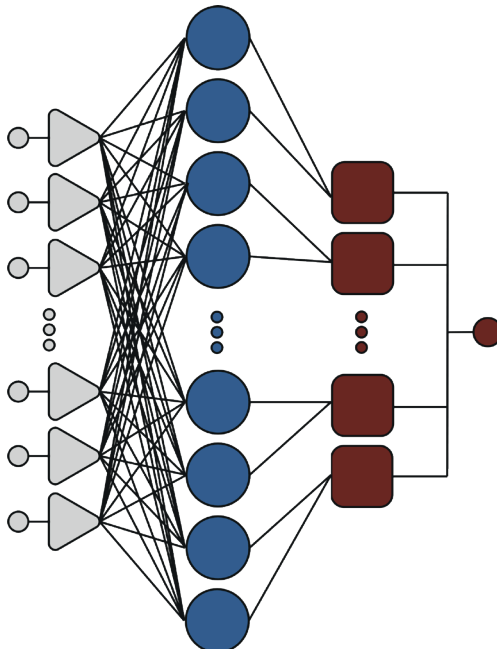


Рис. 5. Топология вероятностной сети



Доля верных ответов при распознавании единичного окна, как правило, не очень высока и колеблется на уровне 60–70 %, однако данный классификатор может служить основой для алгоритма распознавания команды. Рассмотрим пример такого алгоритма, в данном примере окно движется с половинным шагом окна (125мс).

Если пройтись по аудио записи окном и в каждом окне применить вероятностную сеть, то результат можно представить в виде таблицы таблица 1. В качестве исходной аудиодорожки взята запись команды «display four left air».

Таблица 1

**Результат распознавания фрагментов команды
«display four left air» вероятностной сетью**

слово	вероятность нахождения в окне
display	0,999735
display	0,710781
display	0,994761
two	0,217422
display	0,688826
three	0,517768
trash	0,941634
trash	0,999633
trash	0,999974
four	0,991796
two	0,371546
four	0,526390
four	0,737630
warning	0,293155
trash	0,980138
trash	0,993597
one	0,884373
left	0,381266
left	0,987561
left	0,604423
elec	0,343962
status	0,332910
trash	0,999405
trash	0,790388
fuel	0,876582
air	0,664482
air	0,697840
air	0,975710

В результате распознавания появляется последовательность слов с вероятностями их нахождения в конкретном окне. Из анализа таблицы следует, что в некоторых окнах были распознаны слова, которых нет в команде, причем некоторые ошибочно распознанные слова имеют достаточно высокую оценку вероятности.



Второй шаг алгоритма – отбрасывание мусорных спецслов и определение веса слов, путем суммирования вероятностей подряд идущих слов. Дополнительно данный шаг нумерует результаты. Результаты представлены в таблице 2.

Таблица 2

**Результат второго шага алгоритма для команды
«display four left controls»**

№	слово	Вес
1	display	2,705277
2	two	0,217422
3	display	0,688826
4	three	0,517768
5	four	0,991796
6	two	0,371546
7	four	1,264020
8	warning	0,293155
9	one	0,884373
10	left	1,973250
11	elec	0,343962
12	status	0,332910
13	fuel	0,876582
14	air	2,338032

Третий шаг алгоритма строит графовое представление результата. Для команды из примера графовое представление изображено на рисунке 6.

Графовое представление результата строится следующим образом: каждому слову из таблицы 2 ставится в соответствие вершина, которая имеет две пометки, словесную и числовую, а также добавляются 2 специальные вершины, «BEGIN» помечается числом 0 и «END» помечается числом $N + 1$, где N количество слов. Числовая и словесная пометка остальных вершин берется из таблицы.

Далее вершины разбиваются на 6 классов эквивалентности. Эти классы эквивалентности имеют порядковые номера от 1 до 6. Классы 2–5 определяются на основании графа устройства команды, а еще 2, первый и шестой, содержат по одной вершине с пометками «BEGIN» и «END» соответственно.

Ребра графа являются ориентированными и взвешенными или, применяя другой термин, взвешенными дугами.

Дуга графа соединяет вершины тогда и только тогда, когда выполняется набор условий:

- конечная вершина лежит в классе с порядковым номером на 1 больше номера класса начальной вершины;
- конечная вершина имеет числовую пометку, которая больше числовой пометки начальной вершины.

Все входящие в вершину дуги помечаются весом слова-пометки данной вершины, вес вершины с пометкой «END» полагается равным 1.

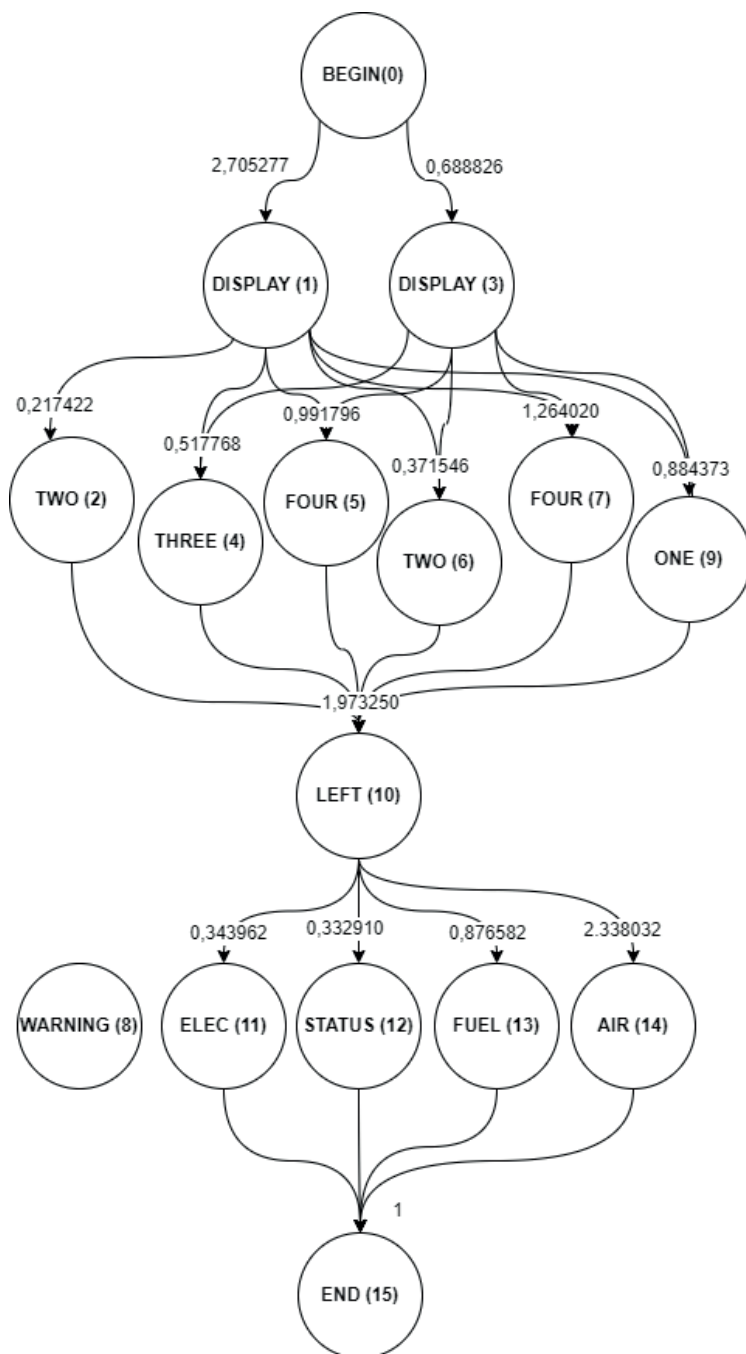


Рис. 6. Графовое представление результата



Далее, на четвертом шаге анализируются все пути из вершины пометкой «BEGIN» в вершину с пометкой «END», для каждого такого пути вычисляется метрика равная произведению весов дуг, по которым проходит данный путь – вес пути. Веса путей для данного графа приведены в таблице 3.

Таблица 3

Пути в графе из вершины «BEGIN» в вершины «END»

Команда	Путь	Вес	Команда	Путь	Вес
display two left elec	1 2 10 11	0,399216	display one left fuel	1 9 10 13	4,138299
display two left status	1 2 10 12	0,386388	display one left air	1 9 10 14	11,03773
display two left fuel	1 2 10 13	1,017396	display three left elec	3 4 10 11	0,242068
display two left air	1 2 10 14	2,713612	display three left status	3 4 10 12	0,23429
display three left elec	1 4 10 11	0,950691	display three left fuel	3 4 10 13	0,616907
display three left status	1 4 10 12	0,920144	display three left air	3 4 10 14	1,645422
display three left fuel	1 4 10 13	2,422823	display four left elec	3 5 10 11	0,463687
display three left air	1 4 10 14	6,462187	display four left status	3 5 10 12	0,448788
display four left elec	1 5 10 11	1,82107	display four left fuel	3 5 10 13	1,181698
display four left status	1 5 10 12	1,762556	display four left air	3 5 10 14	3,151842
display four left fuel	1 5 10 13	4,64097	display two left elec	3 6 10 11	0,173706
display four left air	1 5 10 14	12,37846	display two left status	3 6 10 12	0,168125
display two left elec	1 6 10 11	0,682208	display two left fuel	3 6 10 13	0,442687
display two left status	1 6 10 12	0,660288	display two left air	3 6 10 14	1,180741
display two left fuel	1 6 10 13	1,738597	display four left elec	3 7 10 11	0,589358
display two left air	1 6 10 14	4,637211	display four left status	3 7 10 12	0,570421
display four left elec	1 7 10 11	2,31463	display four left fuel	3 7 10 13	1,501971
display four left status	1 7 10 12	2,240258	display four left air	3 7 10 14	4,006078
display four left fuel	1 7 10 13	5,8988	display one left elec	3 9 10 11	0,413464
display four left air	1 7 10 14	15,73336	display one left status	3 9 10 12	0,400179
display one left elec	1 9 10 11	1,623827	display one left fuel	3 9 10 13	1,053707
display one left status	1 9 10 12	1,571651	display one left air	3 9 10 14	2,810461

На пятом шаге алгоритма (который является опциональным) происходит свертка путей – веса путей, имеющих одинаковые команды, складываются (таблица 4).

На шестом шаге алгоритма выбирается команда, имеющая максимальный вес, в данном случае это команда «display four left air», она имеет вес 35,26975.

Применение данного алгоритма позволяет верно распознать 84 из 88 команд (95 %) имеющейся выборки.

Блок-схема алгоритма изображена на рисунке 7.



Таблица 4

Веса кандидатов команд

display two left elec	4,233266
display two left status	1,220382
display two left fuel	3,19868
display two left air	8,531565
display three left elec	1,192759
display three left status	1,154434
display three left fuel	3,039729
display three left air	8,107609
display four left elec	5,188745
display four left status	5,022023
display four left fuel	13,22344
display four left air	35,26975
display one left elec	2,037291
display one left status	1,97183
display one left fuel	5,192006
display one left air	13,84819

Для демонстрации работы алгоритма было разработано программное обеспечение, имеющее графический интерфейс. на языке Python с использованием графического интерфейса Kivy [4]. Демонстрационное программное обеспечение представляет собой, однооконное приложение, которое позволяет выбрать и распознать файл. В результате своей работы программа выводит исходный сигнал аудиофайла, сигнал, обработанный модулем шумоподавления, отрезки сигнала, вырезанные скользящим окном, граф и результат распознавания. При этом граф распознавания находится в прокручиваемой области. Результат работы программы изображен на рисунке 8. На рисунке 9 отдельно изображен автоматически построенный программой граф распознавания команды.



Рис. 7. Блок-схема алгоритма распознавания речи

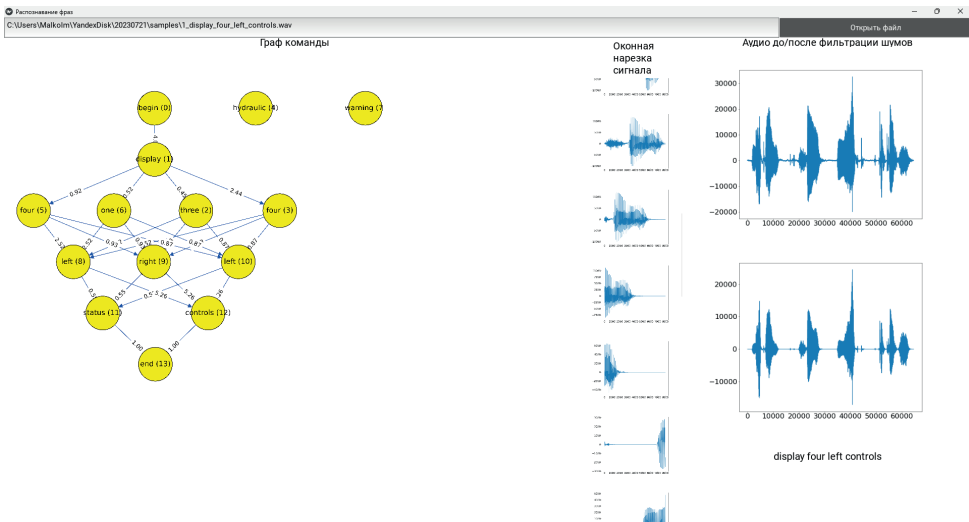


Рис. 8. Результат работы программы

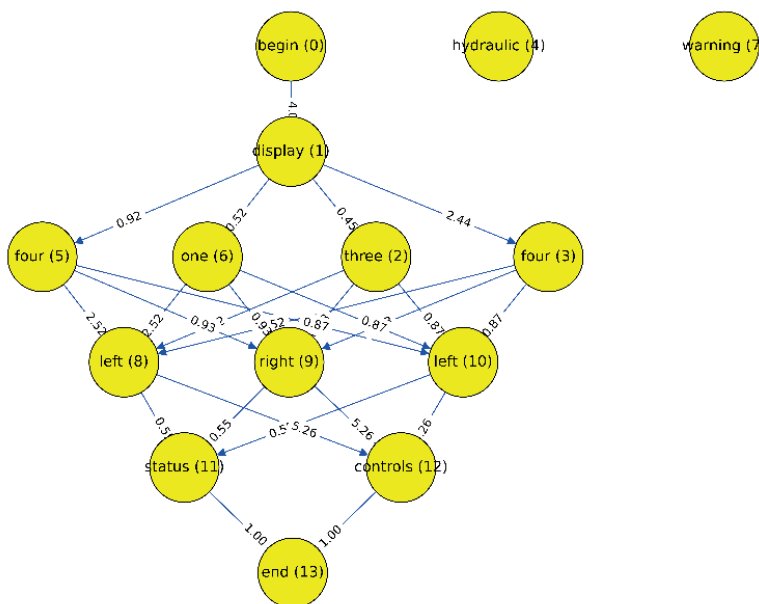


Рис. 9. Результирующий граф команды

3. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе предложен метод распознавания речи, основанный на применении вероятностных сетей. Данный метод применим для распознавания команд определенной структуры, и дает существенный прирост точности распознавания в сравнении с широко распространенными методами, основанными на сверточных нейронных сетях (95 % против 87 %). Данный результат является достаточно высоким для практического применения в сфере голосового управления.

Литература

1. Левонич Н.И. О методе распознавания голосовых команд с применением особого преобразования спектральных плотностей // Моделирование и анализ данных. 2022. Том 12. № 3. С. 49–57. DOI: 10.17759/mda.2022120304
2. Dumoulin, Vincent, and Francesco Visin. “A guide to convolution arithmetic for deep learning.” arXiv preprint arXiv:1603.07285 (2016).
3. Куравский Л.С., Баранов С.Н. Компьютерное моделирование и анализ данных. Конспекты лекций и упражнения: Учеб. пособие. – М.: РУСАВИА, 2012. – 218 с.:
4. Ulloa, Roberto. Kivy–Interactive Applications and Games in Python. Packt Publishing Ltd, 2015.



Probabilistic Neural Network Application to Speech Recognition Problem

Nikita I. Levonovich*

Moscow State University of Psychology and Education (MSUPE), Moscow, Russia
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-8580-0490>
e-mail: levonikitech@yandex.ru

Alexey D. Kozyrev**

Moscow State University of Psychology and Education (MSUPE)
State Research Institute of Aviation Systems (GosNIIAS), Moscow, Russia
ORCID: <https://orcid.org/0009-0008-1769-4121>
e-mail: adkozyrev@2100.gosniias.ru

This article discusses an approach to solving the problem of speech recognition based on probabilistic neural networks. The problem is formulated as a problem of command recognition. Commands have equal lengths (in words). Each word position has its own set of candidates. The recognition algorithm for solving this problem was developed. The core of the algorithm is a probabilistic network that recognizes modified estimates of spectral densities. The algorithm allows for high precision of recognition, which is sufficient for the creation of a voice user interface.

Keywords: automatic speech recognition, automatic commands recognition spectral density estimation, convolutional neural networks, probabilistic neural networks.

For citation:

Levonovich N.I., Kozyrev A.D. Probabilistic Neural Network Application to Speech Recognition Problem. *Modelirovanie i analiz dannykh = Modelling and Data Analysis*, 2023. Vol. 13, no. 3, pp. 39–51. DOI: <https://doi.org/10.17759/mda.2023130303> (In Russ., abstr. in Engl.).

References

1. Levonovich N.I. Voice Commands Recognition Method that Uses Special Spectral Density Transform. *Modelirovanie i analiz dannykh = Modelling and Data Analysis*, 2022. Vol. 12, no. 3, pp. 49–57. DOI: [10.17759/mda.2022120304](https://doi.org/10.17759/mda.2022120304). (In Russ., abstr. in Engl.)
2. Dumoulin, Vincent, and Francesco Visin. “A guide to convolution arithmetic for deep learning.” arXiv preprint [arXiv:1603.07285](https://arxiv.org/abs/1603.07285) (2016).
3. L.S. Kuravskii, S.N. Baranov *Komp'yuternoe modelirovanie i analiz dannykh. Konspekty lektsii i uprazhneniya*: Ucheb. posobie. – M.: RUSAVIA, 2012. – 218 s.:
4. Ulloa, Roberto. *Kivy–Interactive Applications and Games in Python*. Packt Publishing Ltd, 2015.

***Nikita I. Levonovich**, Student, Moscow State University of Psychology and Education (MSUPE), Moscow, Russia, ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-8580-0490>, e-mail: levonikitech@yandex.ru

****Alexey D. Kozyrev**, Post-Graduate Student, Moscow State University of Psychology and Education (MSUPE); Engineer, State Research Institute of Aviation Systems (GosNIIAS), Moscow, Russia, ORCID: <https://orcid.org/0009-0008-1769-4121>, e-mail: adkozyrev@2100.gosniias.ru

Получена 25.08.2023

Received 25.08.2023

Принята в печать 09.09.2023

Accepted 09.09.2023

◆◆◆◆◆ МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ ◆◆◆◆◆

УДК 519.862.6

Идентификация областей возможных оценок параметров моделей полносвязной линейной регрессии

Базилевский М.П.*

Иркутский государственный университет путей сообщения
(ФГБОУ ВО ИрГУПС), г. Иркутск, Российская Федерация
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-3253-5697>
e-mail: mik2178@yandex.ru

Статья посвящена исследованию моделей полносвязной линейной регрессии, в которых наблюдаемые переменные содержат ошибки, а пары истинных переменных связаны между собой линейными функциональными зависимостями. При оценивании полносвязных регрессий главной проблемой считается правильный выбор соотношений дисперсий ошибок переменных. Если выбор сделан неверно, то оценки полносвязной регрессии будут смещенными. Цель статьи состоит в поиске областей возможных оценок основных параметров полносвязных регрессий в зависимости от возможных соотношений дисперсий ошибок переменных. Впервые с помощью элементов матричной алгебры решена обратная задача – получены аналитические зависимости соотношений дисперсий ошибок переменных от основных параметров. Эти зависимости позволяют идентифицировать области возможных оценок параметров, в которых выполняется необходимое условие экстремума целевой функции. Доказано, что при определенных условиях для любых соотношений дисперсий ошибок переменных оценки параметров всегда лежат внутри открытого выпуклого многоугольника, расположенного только в одном из ортантов многомерного пространства. При этом знаки оценок всегда согласуются со знаками соответствующих коэффициентов корреляции. Проведен численный эксперимент, подтверждающий корректность полученных результатов.

Ключевые слова: модель с ошибками в переменных, модель полносвязной линейной регрессии, взвешенный метод наименьших полных квадратов, оценка параметров, выпуклый многоугольник.

Для цитаты:

Базилевский М.П. Идентификация областей возможных оценок параметров моделей полносвязной линейной регрессии // Моделирование и анализ данных. 2023. Том 13. № 3. С. 52–65. DOI: <https://doi.org/10.17759/mda.2023130304>

***Базилевский Михаил Павлович**, кандидат технических наук, доцент кафедры математики, Иркутский государственный университет путей сообщения (ФГБОУ ВО ИРГУПС), г. Иркутск, Российская Федерация, ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-3253-5697>, e-mail: mik2178@yandex.ru

1. ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время при проведении регрессионного анализа большинство исследователей по-прежнему отдаёт предпочтение моделям множественной линейной регрессии [1], которые представляют собой зависимости выходной (объясняемой) переменной y от одной или нескольких входных (объясняющих) переменных x_1, x_2, \dots, x_m , не содержащих ошибок. Оценки параметров таких регрессий найти довольно просто, например, с помощью метода наименьших квадратов. Реже применяются так называемые «errors-in-variables models» (EIV-модели) [2], в которых объясняющие переменные содержат ошибки. Такой подход к моделированию более реалистичен, но его применимость осложняет незнание в большинстве случаев дисперсий ошибок переменных, из-за чего полученные результаты могут быть неточными. Тем не менее, EIV-модели достаточно подробно изучены. Для их оценки разработаны, например, метод ортогональной регрессии [3], метод наименьших полных квадратов [4] и др. Подробное описание этих и других методов со ссылками на первоисточники можно найти в монографии [5].

В той же монографии автором были предложены модели полностью связанной линейной регрессии (МПЛР), в которых все наблюдаемые переменные содержат ошибки, а каждая истинная переменная связана со всеми другими линейными функциональными зависимостями. МПЛР имеет вид:

$$x_{ij} = x_{ij}^* + \varepsilon_i^{(x_j)}, \quad i = \overline{1, n}, \quad j = \overline{1, m}, \quad (1)$$

$$x_{ij}^* = a_j + b_j \cdot x_{im}^*, \quad i = \overline{1, n}, \quad j = \overline{1, m-1}, \quad (2)$$

где n – объем выборки; x_{ij} , $i = \overline{1, n}$, $j = \overline{1, m}$ – наблюдаемые значения m взаимосвязанных переменных x_1, x_2, \dots, x_m ; x_{ij}^* , $i = \overline{1, n}$, $j = \overline{1, m}$ – их истинные значения, которые неизвестны; a_j, b_j , $j = \overline{1, m-1}$ – неизвестные параметры; $\varepsilon_i^{(x_j)}$, $i = \overline{1, n}$, $j = \overline{1, m}$ – ошибки переменных. Подчеркнём, что в МПЛР (1), (2) все переменные с одной стороны выходные (объясняемые), а с другой – входные (объясняющие), поэтому правильнее называть их взаимосвязанными. Понятно, что МПЛР следует строить при сильной корреляции всех переменных.

Таким образом, МПЛР (1), (2) можно считать новым видом EIV-моделей. Если $m = 2$, то МПЛР вырождается в известную регрессию Деминга [6], которая находит широкое применение в клинической химии [7].

МПЛР (1), (2) оценивается с помощью взвешенного метода наименьших полных квадратов:

$$S(a_1, \dots, a_{m-1}, b_1, \dots, b_{m-1}, x_{1m}^*, \dots, x_{nm}^*) = \sum_{j=1}^{m-1} \lambda_j \sum_{i=1}^n (x_{ij} - a_j - b_j \cdot x_{im}^*)^2 + \sum_{i=1}^n (x_{im} - x_{im}^*)^2 \rightarrow \min, \quad (3)$$



где λ_j , $j = \overline{1, m-1}$ – положительные весовые коэффициенты, представляющие собой с вероятностно-статистической точки зрения отношения дисперсий ошибок переменных, т.е. $\lambda_j = \sigma_{\varepsilon^{(x_m)}}^2 / \sigma_{\varepsilon^{(x_j)}}^2$, $j = \overline{1, m-1}$. Геометрически это числа, задающие тип расположения от точек $(x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{im})$, $i = \overline{1, n}$ до линии регрессии.

В [8] доказано, что выбор связующей переменной x_m^* , входящей в правые части равенств (2), не влияет на решение задачи (3). А в [9,10] предложены алгоритмы численного решения задачи (3) при известных λ_j , $j = \overline{1, m-1}$.

Данная работа посвящена нахождению областей возможных оценок параметров b_j , $j = \overline{1, m-1}$, играющих главную роль при интерпретации МПЛР, в зависимости от любых значений λ_j , $j = \overline{1, m-1}$.

2. ПОИСК ЗАВИСИМОСТЕЙ КОЭФФИЦИЕНТОВ λ_j ОТ ПАРАМЕТРОВ b_j

При известных коэффициентах λ_j , $j = \overline{1, m-1}$ применение необходимых условий экстремума функции (3) приводит к нелинейной системе [5,9]:

$$b_p \cdot D_{x_m^*} = K_{x_p x_m^*}, \quad p = \overline{1, m-1}, \quad (4)$$

$$\text{где } K_{x_p x_m^*} = \left(1 + \sum_{j=1}^{m-1} \lambda_j b_j^2 \right)^{-1} \left(\sum_{j=1}^{m-1} \lambda_j b_j K_{x_j x_p} + K_{x_m x_p} \right),$$

$$D_{x_m^*} = \left(D_{x_m} + \sum_{j=1}^{m-1} \lambda_j^2 b_j^2 D_{x_j} + 2 \sum_{j_1=1}^{m-2} \sum_{j_2=j_1+1}^{m-1} \lambda_{j_1} \lambda_{j_2} b_{j_1} b_{j_2} K_{x_{j_1} x_{j_2}} + 2 \sum_{j=1}^{m-1} \lambda_j b_j K_{x_j x_m} \right) \left(1 + \sum_{j=1}^{m-1} \lambda_j b_j^2 \right)^{-2},$$

символом D обозначены дисперсии переменных, K – ковариации.

Сначала была поставлена задача, используя уравнения (4), выразить коэффициенты λ_j , $j = \overline{1, m-1}$ от параметров b_j , $j = \overline{1, m-1}$.

Как это сделано в [5,9], обозначим $\lambda_p b_p = q_p$, $p = \overline{1, m-1}$. Тогда система (4) примет вид

$$\begin{pmatrix} A_1 q_1 - B & A_1 q_2 & \dots & A_1 q_{m-1} \\ A_2 q_1 & A_2 q_2 - B & \dots & A_2 q_{m-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{m-1} q_1 & A_{m-1} q_2 & \dots & A_{m-1} q_{m-1} - B \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_{m-1} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \dots \\ A_{m-1} \end{pmatrix}, \quad (5)$$

$$\text{где } B = D_{x_m} + \sum_{j=1}^{m-1} q_j^2 D_{x_j} + 2 \sum_{j_1=1}^{m-2} \sum_{j_2=j_1+1}^{m-1} q_{j_1} q_{j_2} K_{x_{j_1} x_{j_2}} + 2 \sum_{j=1}^{m-1} q_j K_{x_j x_m}; \quad A_p = \sum_{j=1}^{m-1} q_j K_{x_j x_p} + K_{x_m x_p},$$

$$p = \overline{1, m-1}.$$

Будем решать систему (5) относительно параметров b_j методом Крамера по формулам $b_p = \frac{\Delta_p^*}{\Delta^*}$, $p = \overline{1, m-1}$, где Δ_p^* – определитель, полученный из Δ^* путём замены p -го столбца на столбец свободных членов $(-A_1 \quad -A_2 \quad \dots \quad -A_{m-1})^T$.

В [9] доказано, что определитель основной матрицы системы (5)

$$\Delta^* = (-1)^{m-1} B^{m-2} \left(B - \sum_{j=1}^{m-1} A_j q_j \right).$$

Используя свойства определителей, найдём, например, Δ_1^* :

$$\Delta_1^* = \begin{vmatrix} -A_1 & A_1 q_2 & \dots & A_1 q_{m-1} \\ -A_2 & A_2 q_2 - B & \dots & A_2 q_{m-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -A_{m-1} & A_{m-1} q_2 & \dots & A_{m-1} q_{m-1} - B \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -A_1 & 0 & \dots & 0 \\ -A_2 & -B & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -A_{m-1} & 0 & \dots & -B \end{vmatrix} = A_1 (-1)^{m-1} B^{m-2}.$$

Действуя по аналогии, получим

$$\Delta_p^* = A_p (-1)^{m-1} B^{m-2}, \quad p = \overline{1, m-1}.$$

Тогда по формулам Крамера впервые получим зависимости параметров b_j от переменных q_j :

$$b_p = \frac{A_p}{B - \sum_{j=1}^{m-1} A_j q_j}, \quad p = \overline{1, m-1}. \quad (6)$$

Число B в матричной форме имеет вид

$$B = \begin{pmatrix} q_1 \\ \dots \\ q_{m-1} \\ 1 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} D_{x_1} & K_{x_1 x_2} & \dots & K_{x_1 x_m} \\ K_{x_1 x_2} & D_{x_2} & \dots & K_{x_2 x_m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ K_{x_1 x_m} & K_{x_2 x_m} & \dots & D_{x_m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ \dots \\ q_{m-1} \\ 1 \end{pmatrix},$$

а сумма

$$\sum_{j=1}^{m-1} A_j q_j = \begin{pmatrix} q_1 \\ \dots \\ q_{m-1} \\ 1 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} D_{x_1} & K_{x_1 x_2} & \dots & K_{x_1 x_{m-1}} & 0 \\ K_{x_1 x_2} & D_{x_2} & \dots & K_{x_2 x_{m-1}} & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ K_{x_1 x_m} & K_{x_2 x_m} & \dots & K_{x_{m-1} x_m} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ \dots \\ q_{m-1} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$B - \sum_{j=1}^{m-1} A_j q_j = \begin{pmatrix} q_1 \\ \dots \\ q_{m-1} \\ 1 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & K_{x_1 x_m} \\ 0 & \dots & 0 & K_{x_2 x_m} \\ \dots & \dots & 0 & \dots \\ 0 & \dots & 0 & D_{x_m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ \dots \\ q_{m-1} \\ 1 \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^{m-1} q_j K_{x_j x_m} + D_{x_m}.$$

Следовательно, формулы (6) принимают вид:



$$b_p = \frac{\sum_{j=1}^{m-1} q_j K_{x_j x_p} + K_{x_m x_p}}{\sum_{j=1}^{m-1} q_j K_{x_j x_m} + D_{x_m}}, \quad p = \overline{1, m-1}. \quad (7)$$

А используя формулы (7), запишем линейную систему с переменными q_j :

$$\sum_{j=1}^{m-1} (b_p K_{x_j x_m} - K_{x_j x_p}) q_j = K_{x_m x_p} - b_p D_m, \quad p = \overline{1, m-1}, \quad (8)$$

которая может быть представлена в матричной форме:

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_{m-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K_{x_1 x_m} \\ K_{x_2 x_m} \\ \dots \\ K_{x_{m-1} x_m} \end{pmatrix}^T - \begin{pmatrix} D_{x_1} & K_{x_1 x_2} & \dots & K_{x_1 x_{m-1}} \\ K_{x_1 x_2} & D_{x_2} & \dots & K_{x_2 x_{m-1}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ K_{x_1 x_{m-1}} & K_{x_2 x_{m-1}} & \dots & D_{x_{m-1}} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \dots \\ q_{m-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K_{x_1 x_m} \\ K_{x_2 x_m} \\ \dots \\ K_{x_{m-1} x_m} \end{pmatrix} - D_m \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_{m-1} \end{pmatrix}.$$

Будем решать систему (8) относительно переменных q_j методом Крамера по формулам $q_p = \frac{\Delta_p}{\Delta}$, $p = \overline{1, m-1}$, где Δ – определитель основной матрицы, а Δ_p – определитель, полученный из Δ путём замены p -го столбца на столбец свободных членов.

Если $m = 2$, то из (8) вытекает необходимое условие $(K_{x_1 x_2} b_1 - D_{x_1}) \cdot q_1 = (K_{x_1 x_2} - D_{x_2} b_1)$ для регрессии Деминга, решение которого по методу Крамера можно записать в виде:

$$q_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} D_{x_1} & b_1 \\ K_{x_1 x_2} & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} - & b_1 \\ 1 & D_{x_2} \end{vmatrix}}.$$

Если $m = 3$, то система (8) принимает вид:

$$\begin{pmatrix} K_{x_1 x_3} b_1 - D_{x_1} & K_{x_2 x_3} b_1 - K_{x_1 x_2} \\ K_{x_1 x_3} b_2 - K_{x_1 x_2} & K_{x_2 x_3} b_2 - D_{x_2} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K_{x_1 x_3} - D_{x_3} b_1 \\ K_{x_2 x_3} - D_{x_3} b_2 \end{pmatrix}.$$

Используя свойства определителей, найдем Δ :

$$\begin{aligned} \Delta &= \begin{vmatrix} K_{x_1 x_3} b_1 - D_{x_1} & K_{x_2 x_3} b_1 - K_{x_1 x_2} \\ K_{x_1 x_3} b_2 - K_{x_1 x_2} & K_{x_2 x_3} b_2 - D_{x_2} \end{vmatrix} = \\ &= \begin{vmatrix} K_{x_1 x_3} b_1 & K_{x_2 x_3} b_1 \\ K_{x_1 x_3} b_2 - K_{x_1 x_2} & K_{x_2 x_3} b_2 - D_{x_2} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} D_{x_1} & K_{x_1 x_2} \\ K_{x_1 x_3} b_2 - K_{x_1 x_2} & K_{x_2 x_3} b_2 - D_{x_2} \end{vmatrix} = \\ &= \begin{vmatrix} K_{x_1 x_3} b_1 & K_{x_2 x_3} b_1 \\ K_{x_1 x_3} b_2 & K_{x_2 x_3} b_2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} K_{x_1 x_3} b_1 & K_{x_2 x_3} b_1 \\ K_{x_1 x_2} & D_{x_2} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} D_{x_1} & K_{x_1 x_2} \\ K_{x_1 x_3} b_2 & K_{x_2 x_3} b_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} D_{x_1} & K_{x_1 x_2} \\ K_{x_1 x_2} & D_{x_2} \end{vmatrix} = \end{aligned}$$



$$= b_1 \begin{vmatrix} K_{x_1x_2} & D_{x_2} \\ K_{x_1x_3} & K_{x_2x_3} \end{vmatrix} - b_2 \begin{vmatrix} D_{x_1} & K_{x_1x_2} \\ K_{x_1x_3} & K_{x_2x_3} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} D_{x_1} & K_{x_1x_2} \\ K_{x_1x_2} & D_{x_2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} D_{x_1} & K_{x_1x_2} & b_1 \\ K_{x_1x_2} & D_{x_2} & b_2 \\ K_{x_1x_3} & K_{x_2x_3} & 1 \end{vmatrix}.$$

Аналогично, можно получить:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & K_{x_1x_2} & K_{x_1x_3} \\ b_2 & D_{x_2} & K_{x_2x_3} \\ 1 & K_{x_2x_3} & D_{x_3} \end{vmatrix}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} D_{x_1} & b_1 & K_{x_1x_3} \\ K_{x_1x_2} & b_2 & K_{x_2x_3} \\ K_{x_1x_3} & 1 & D_{x_3} \end{vmatrix}.$$

Таким образом, при $m=3$ переменная q_1 в системе (8) находится как отношение определителя, полученного из матрицы ковариаций переменных

$$V_{3 \times 3} = \begin{pmatrix} D_{x_1} & K_{x_1x_2} & K_{x_1x_3} \\ K_{x_1x_2} & D_{x_2} & K_{x_2x_3} \\ K_{x_1x_3} & K_{x_2x_3} & D_{x_3} \end{pmatrix} \text{ путем замены первого столбца на вектор } (b_1 \ b_2 \ 1)^T,$$

к определителю, полученному из матрицы $V_{3 \times 3}$ путем замены третьего столбца на тот же вектор. Аналогично находится переменная q_2 .

То же самое происходит при $m=4$. Причем, перед определителями $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ и Δ появляется знак «-». Но это никак не влияет на переменные q_1, q_2 и q_3 .

Обобщим полученный результат. Переменные q_p зависят от параметров λ_p по формулам:

$$q_p = \frac{\Delta_p}{\Delta_m}, \quad p = \overline{1, m-1}, \quad (9)$$

где Δ_i – определитель, полученный из матрицы ковариаций $V_{m \times m}$ путём замены i -го столбца на столбец $(b_1 \ b_2 \ \dots \ b_{m-1} \ 1)^T$.

Учитывая, что $\lambda_p b_p = q_p, \quad p = \overline{1, m-1}$, из (9) получим зависимости коэффициентов $\lambda_j, \quad j = \overline{1, m-1}$ от параметров $b_j, \quad j = \overline{1, m-1}$:

$$\lambda_p = \frac{\Delta_p}{b_p \cdot \Delta_m}, \quad p = \overline{1, m-1}. \quad (10)$$

3. ПОИСК ОБЛАСТИ ВОЗМОЖНЫХ ОЦЕНОК ПАРАМЕТРОВ b_j

Поскольку по определению $\lambda_j, \quad j = \overline{1, m-1}$ – положительные коэффициенты, то, используя зависимости (10), получим условия, которым удовлетворяют все стационарные точки функции (3):

$$\frac{\Delta_p}{b_p \cdot \Delta_m} > 0, \quad p = \overline{1, m-1}. \quad (11)$$



Если из (10) выразить произведения $\lambda_p b_p$, $p = \overline{1, m-1}$, и подставить их в правую часть системы (4), то получим, что $D_{x_m}^* = \left(1 + \sum_{j=1}^{m-1} \lambda_j b_j^2\right)^{-1} \cdot \Delta_m^{-1} \cdot |V_{m \times m}|$. Из этого следует, что определитель Δ_m в (11) всегда положителен.

В [5] установлено, что для любых $\lambda_j > 0$, $j = \overline{1, m-1}$, система (4) всегда имеет 2^{m-1} решений. Причем, все эти точки в $(m-1)$ -мерном пространстве расположены в разных ортантах и только в одной из них целевая функция (3) достигает минимум. Следовательно, поскольку определители Δ_i , $i = \overline{1, m}$ представляют собой линейные комбинации параметров b_j , $j = \overline{1, m-1}$, то решение системы неравенств (11) представляет собой совокупность 2^{m-1} открытых выпуклых областей.

Введём матрицу $M_{(m-1) \times m}$, полученную из матрицы ковариаций $V_{m \times m}$ как результат поэлементного деления в ней первых $(m-1)$ строк на последнюю строку. И введём в рассмотрение m точек, координатами которых являются элементы столбцов матрицы M :

$$P_1 \left(\frac{D_{x_1}}{K_{x_1 x_m}}, \frac{K_{x_1 x_2}}{K_{x_1 x_m}}, \frac{K_{x_1 x_3}}{K_{x_1 x_m}}, \dots, \frac{K_{x_1 x_{m-1}}}{K_{x_1 x_m}} \right), P_2 \left(\frac{K_{x_1 x_2}}{K_{x_2 x_m}}, \frac{D_{x_2}}{K_{x_2 x_m}}, \frac{K_{x_2 x_3}}{K_{x_2 x_m}}, \dots, \frac{K_{x_2 x_{m-1}}}{K_{x_2 x_m}} \right),$$

$$\dots,$$

$$P_m \left(\frac{K_{x_1 x_m}}{D_{x_m}}, \frac{K_{x_2 x_m}}{D_{x_m}}, \frac{K_{x_3 x_m}}{D_{x_m}}, \dots, \frac{K_{x_{m-1} x_m}}{D_{x_m}} \right).$$

Рассмотрим определитель Δ_1 . Преобразуем его следующим образом:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & K_{x_1 x_2} & \dots & K_{x_1 x_m} \\ b_2 & D_{x_2} & \dots & K_{x_2 x_m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & K_{x_2 x_m} & \dots & D_{x_m} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_1 & K_{x_1 x_2} - K_{x_2 x_m} b_1 & \dots & K_{x_1 x_m} - D_{x_m} b_1 \\ b_2 & D_{x_2} - K_{x_2 x_m} b_2 & \dots & K_{x_2 x_m} - D_{x_m} b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 0 & \dots & 0 \end{vmatrix}.$$

Отсюда следует, что $\Delta_1 = 0$ в точках $P_2, P_3, \dots, P_{m-1}, P_m$.

Аналогично можно установить, что $\Delta_2 = 0$ в точках $P_1, P_3, \dots, P_{m-1}, P_m$, $\Delta_3 = 0$ в точках $P_1, P_2, P_4, P_5, \dots, P_{m-1}, P_m$ и т.д. Тогда справедливо следующее утверждение: точка P_k является точкой пересечения плоскостей $\Delta_j = 0$, $j \in \{1, 2, \dots, m-1\} \setminus \{k\}$.

Рассмотрим некоторые возможные решения задачи (3) при условии, когда только у одной из переменных дисперсия ошибок стремится к нулю.

Если $\sigma_{\varepsilon^{(x_m)}}^2 \rightarrow 0$, то $\lambda_j \rightarrow 0$, $j = \overline{1, m-1}$. В этом случае $x_{im}^* \rightarrow x_{im}$, $i = \overline{1, n}$, поэтому оценки параметров b_j МПЛР стремятся к оценкам соответствующих моделей парной линейной регрессии x_1 от x_m , x_2 от x_m , ..., x_{m-1} от x_m :

$$b_1 \rightarrow \frac{K_{x_1 x_m}}{D_{x_m}}, b_2 \rightarrow \frac{K_{x_2 x_m}}{D_{x_m}}, \dots, b_{m-1} \rightarrow \frac{K_{x_{m-1} x_m}}{D_{x_m}}.$$

Иными словами, оценки параметров b_j МПЛР стремятся к координатам точки P_m . Если $\sigma_{\epsilon^{(x_1)}}^2 \rightarrow 0$, то $\lambda_1 \rightarrow \infty$. В этом случае $x_{i1} - a_1 - b_1 x_{im}^* \rightarrow 0$, $i = \overline{1, n}$, откуда $x_{im}^* \rightarrow -\frac{a_1}{b_1} + \frac{1}{b_1} x_{i1}$, $i = \overline{1, n}$. Поэтому оценки параметров b_j МПЛР связаны с оценками моделей парной линейной регрессии x_2 от x_1 , x_3 от x_1 , ..., x_m от x_1 следующими соотношениями:

$$\frac{b_2}{b_1} \rightarrow \frac{K_{x_1 x_2}}{D_{x_1}}, \frac{b_3}{b_1} \rightarrow \frac{K_{x_1 x_3}}{D_{x_1}}, \dots, \frac{b_{m-1}}{b_1} \rightarrow \frac{K_{x_1 x_{m-1}}}{D_{x_1}}, \frac{1}{b_1} \rightarrow \frac{K_{x_1 x_m}}{D_{x_1}},$$

откуда

$$b_1 \rightarrow \frac{D_{x_1}}{K_{x_1 x_m}}, b_2 \rightarrow \frac{K_{x_1 x_2}}{K_{x_1 x_m}}, \dots, b_{m-1} \rightarrow \frac{K_{x_1 x_{m-1}}}{K_{x_1 x_m}}.$$

Иными словами, оценки параметров b_j МПЛР стремятся к координатам точки P_1 . Аналогично можно получить оставшиеся решения задачи (3) при условиях $\sigma_{\epsilon^{(x_j)}}^2 \rightarrow 0$, $j = \overline{2, m-1}$. Таким образом, при $\sigma_{\epsilon^{(x_j)}}^2 \rightarrow 0$, $j = \overline{1, m}$, оценки параметров b_j МПЛР стремятся к координатам соответствующих точек P_j , $j = \overline{1, m}$. Из этого следует, что в зависимости от коэффициентов λ_j , $j = \overline{1, m-1}$, оценки параметров b_j могут быть противоречивыми, т.е. для них могут не выполняться условия $K_{x_j x_m} b_j > 0$, $j = \overline{1, m-1}$, что негативно сказывается на интерпретационных характеристиках МПЛР.

Для того чтобы условия $K_{x_j x_m} b_j > 0$, $j = \overline{1, m-1}$, выполнялись всегда, т.е. для любых коэффициентов λ_j , $j = \overline{1, m-1}$, необходимо потребовать, чтобы все точки P_j , $j = \overline{1, m}$, лежали в одном ортанте $(m-1)$ -мерного пространства. Это требование равносильно тому, чтобы в матрице M элементы каждой строки были одинакового знака.

Теорема. Если в матрице M элементы каждой строки одного знака, то для любых $\lambda_j > 0$, $j = \overline{1, m-1}$, оценки параметров b_j , $j = \overline{1, m-1}$, МПЛР (1), (2) для метода (3) всегда лежат внутри открытого выпуклого m -угольника с вершинами в точках P_j , $j = \overline{1, m}$, расположенного в том ортанте $(m-1)$ -мерного пространства, в котором $K_{x_j x_m} b_j > 0$, $j = \overline{1, m-1}$.

Доказательство. Если в матрице M элементы каждой строки одного знака, то точки P_j , $j = \overline{1, m}$, лежат в одном ортанте $(m-1)$ -мерного пространства. При этом будут справедливы равенства

$$\operatorname{sgn}\left(K_{x_j x_m}\right) = \operatorname{sgn}\left(\frac{K_{x_j x_p}}{K_{x_p x_m}}\right), j = \overline{1, m-1}, p = \overline{1, m}, \quad (12)$$

т.е. первые координаты точек P_j , $j = \overline{1, m}$, имеют знак ковариации $K_{x_1 x_m}$, вторые – знак ковариации $K_{x_2 x_m}$ и т.д., поэтому все эти точки лежат в ортанте θ , в котором $K_{x_j x_m} b_j > 0$, $j = \overline{1, m-1}$.

Для ортанта θ условия (11) упрощаются:



$$\frac{\Delta_p}{\Delta_m} K_{x_p x_m} > 0, \quad p = \overline{1, m-1}. \quad (13)$$

Учитывая, что $\Delta_m > 0$, из (13) следуют равенства

$$\operatorname{sgn}(\Delta_j) = \operatorname{sgn}(K_{x_j x_m}), \quad j = \overline{1, m-1}. \quad (14)$$

Идентифицируем выпуклую область в органте θ . Рассмотрим в нём открытый выпуклый многоугольник (m -угольник), вершинами которого являются точки P_j , $j = \overline{1, m}$, а сторонами – плоскости $\Delta_j = 0$, $j = \overline{1, m}$. На плоскости $\Delta_m = 0$ из точек P_j , $j = \overline{1, m}$, не лежит только точка P_m . Подставим координаты точки P_m в определитель Δ_m :

$$\Delta_m(P_m) = \begin{vmatrix} D_{x_1} & K_{x_1 x_2} & \dots & \frac{K_{x_1 x_m}}{D_{x_m}} \\ K_{x_1 x_2} & D_{x_2} & \dots & \frac{K_{x_2 x_m}}{D_{x_m}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ K_{x_1 x_m} & K_{x_2 x_m} & \dots & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{D_{x_m}} \begin{vmatrix} D_{x_1} & K_{x_1 x_2} & \dots & K_{x_1 x_m} \\ K_{x_1 x_2} & D_{x_2} & \dots & K_{x_2 x_m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ K_{x_1 x_m} & K_{x_2 x_m} & \dots & D_{x_m} \end{vmatrix} > 0.$$

Таким образом, решением неравенства $\Delta_m > 0$ будет полупространство, направленное внутрь m -угольника.

Аналогично можно определить, что $\Delta_j(P_j) = \frac{1}{K_{x_j x_m}} |Y_{m \times m}|$, $j = \overline{1, m-1}$, поэтому решением неравенств $\Delta_p \cdot K_{x_p x_m} > 0$, $p = \overline{1, m-1}$, будут полупространства, также направленные внутрь m -угольника.

Таким образом, единственной областью в органте θ , каждая точка которой удовлетворяет системе (13), будет открытый выпуклый m -угольник с вершинами P_j , $j = \overline{1, m}$.

В [5,10] установлено, что необходимое условие минимума функции (3) представляет собой систему неравенств

$$b_p \cdot G_p > 0, \quad p = \overline{1, m-1}, \quad (15)$$

где $G_p = K_{x_p x_m} + \sum_{j \in \{1, \dots, m-1\} \setminus p} \lambda_j b_j K_{x_j x_p}$.

Учитывая зависимости (10), получим

$$G_p = K_{x_p x_m} + \Delta_m^{-1} \sum_{j \in \{1, \dots, m-1\} \setminus p} \Delta_j \cdot K_{x_j x_p}, \quad p = \overline{1, m-1}.$$

Из соотношений (12), (14) следует, что $\operatorname{sgn}(\Delta_j) = \operatorname{sgn}\left(\frac{K_{x_j x_p}}{K_{x_p x_m}}\right)$, $j = \overline{1, m-1}$, $p = \overline{1, m}$. Откуда $\operatorname{sgn}(\Delta_j \cdot K_{x_j x_p}) = \operatorname{sgn}(K_{x_p x_m})$, $j = \overline{1, m-1}$, $p = \overline{1, m}$. Это означает, что

$\text{sgn}(G_p) = \text{sgn}(K_{x_p x_m})$, $p = \overline{1, m-1}$. Тогда необходимое условие минимума (15) для стационарных точек из ортанта θ примет вид $b_p \cdot K_{x_p x_m} > 0$. Таким образом, условие (15) выполняется в любой точке открытого выпуклого m -угольника с вершинами P_j , $j = \overline{1, m}$.

Поскольку необходимое условие минимума выполняется абсолютно во всех точках открытого выпуклого m -угольника с вершинами P_j , $j = \overline{1, m}$, расположенного в ортанте θ , то оно никак не может выполняться в других ортантах $(m-1)$ -мерного пространства. Следовательно, для любых $\lambda_j > 0$, $j = \overline{1, m-1}$, оценки параметров b_j , $j = \overline{1, m-1}$, МПЛР всегда лежат внутри этого m -угольника.

Теорема доказана.

Вопрос о том, выполняется ли достаточное условие минимума во всех точках выпуклого m -угольника, пока остаётся открытым. Тем не менее, из теоремы вытекает следующее важное следствие.

Следствие. Если в матрице M элементы каждой строки одного знака, то для любых $\lambda_j > 0$, $j = \overline{1, m-1}$, знаки оценок параметров b_j , $j = \overline{1, m-1}$, МПЛР (1), (2) для метода (3) всегда согласуются со знаками соответствующих коэффициентов корреляции $r_{x_j x_m}$, $j = \overline{1, m-1}$.

4. ЧИСЛЕННЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ

Решалась задача построения МПЛР по ежегодным статистическим данным о численности и составе населения в Иркутской области (<https://rosstat.gov.ru/>) за период 2000–2020 гг. по следующим переменным:

x_1 – население в трудоспособном возрасте (в процентах от общей численности населения);

x_2 – численность рабочей силы (тыс. человек);

x_3 – численность пенсионеров (тыс. человек).

Вычисленная по этим данным матрица ковариаций имеет вид:

$$V = \begin{pmatrix} 9,096 & 121,234 & -93,284 \\ 121,234 & 2403,759 & -1451,256 \\ -93,284 & -1451,256 & 1176,521 \end{pmatrix}.$$

По этой матрице были определены коэффициенты парной корреляции переменных $r_{12} = 0,8199$, $r_{13} = -0,9017$, $r_{23} = -0,863$, что подтверждает их весьма тесную линейную зависимость.

Матрица M в этом случае имеет вид:

$$M = \begin{pmatrix} -0,0975 & -0,0835 & -0,0793 \\ -1,2996 & -1,6563 & -1,2335 \end{pmatrix}.$$

В этой матрице элементы каждой строки одного знака, поэтому в силу доказанной теоремы, для любых коэффициентов λ_j , $j = \overline{1, m-1}$, область возможных оценок

параметров b_j , $j = \overline{1, m-1}$, будет представлять собой открытый треугольник (рис. 1) с вершинами $P_1(-0.0975, -1.2996)$, $P_2(-0.0835, -1.6563)$, $P_3(-0.0793, -1.2335)$.

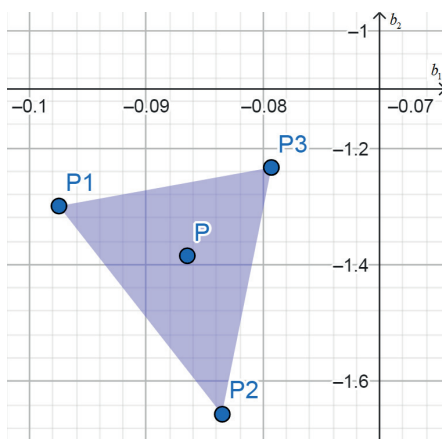


Рис. 1. Область возможных оценок МПЛР

Как видно, размеры полученной области (рис. 1) возможных оценок параметров b_j , $j = \overline{1, m-1}$, оказались довольно малы. Из этого следует, что даже если исследователь выберет значения коэффициентов λ_j , $j = \overline{1, m-1}$, случайно, то разница между полученными и несмещенными оценками МПЛР будет несущественна. В целом, если все абсолютные значения коэффициентов взаимосвязанных переменных в МПЛР стремятся к 1, то область возможных оценок параметров b_j , $j = \overline{1, m-1}$, сужается в точку.

В [10] коэффициенты λ_j , $j = \overline{1, m-1}$, предложено выбирать по формулам $\lambda_j = D_{x_m} / D_{x_j}$, $j = \overline{1, m-1}$. В нашем примере $\lambda_1 = D_{x_3} / D_{x_1} = 129,34$, $\lambda_2 = D_{x_3} / D_{x_2} = 0,489$. Численно полученные для этих значений оценки параметров b_1 и b_2 составили $\tilde{b}_1 = -0,08653$, $\tilde{b}_2 = -1,38486$. На рис. 1 этим оценкам соответствует точка P , расположенная очень близко к середине треугольника. Тем самым, точку P можно считать точечной характеристикой построенной области. В этой точке оцененная МПЛР имеет вид:

$$\tilde{x}_1 = 121,505 - 0,0865\tilde{x}_3, \quad \tilde{x}_2 = 2247,444 - 1,3848\tilde{x}_3.$$

Механизм интерпретации МПЛР, в частности, модели (16), будет исследован в будущих работах автора.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе доказано, что если в матрице M элементы каждой строки одного знака, что всегда выполняется при сильной корреляции всех пар взаимосвязанных

переменных, то для любых $\lambda_j > 0$, $j = \overline{1, m-1}$, оценки параметров b_j , $j = \overline{1, m-1}$, МПЛР всегда лежат внутри открытого выпуклого m -угольника и удовлетворяют неравенствам $K_{x_j x_m} b_j > 0$, $j = \overline{1, m-1}$. Таким образом, во-первых, условие, накладываемое на элементы матрицы M , можно считать критерием применимости полносвязных регрессий: если оно выполняется, то какими бы ни были дисперсии ошибок переменных, знаки оценок параметров b_j , $j = \overline{1, m-1}$, всегда будут согласованы со знаками соответствующих коэффициентов корреляции, т.е. даже случайный выбор коэффициентов $\lambda_j > 0$, $j = \overline{1, m-1}$, будет давать оценки, согласованные по знакам с несмещенными. Во-вторых, если дисперсии ошибок переменных неизвестны, то какими бы они ни были, всегда можно точно определить, в каких пределах будут меняться оценки параметров b_j , $j = \overline{1, m-1}$. Для этого достаточно найти в каждой строке матрицы M минимальный и максимальный элемент и составить соответствующие промежутки для каждого параметра. Причём, если $m = 2, 3, 4$, то выпуклый многоугольник можно изобразить графически. При сильной корреляции переменных выпуклый многоугольник такой узкий, что выбор в качестве оценок координат точки его центра сводит к минимуму разницу между ними и несмещенными оценками. В дальнейшем автор планирует исследовать вопросы интерпретации оценок МПЛР.

Литература

1. *Montgomery D.C., Peck E.A., Vining G.G.* Introduction to linear regression analysis. John Wiley & Sons, 2021.
2. *Xu P.* Improving the weighted least squares estimation of parameters in errors-in-variables models // Journal of the Franklin Institute. 2019. Vol. 356. № 15. P. 8785–8802. DOI:10.1016/j.jfranklin.2019.06.016
3. *Демиденко Е.З.* Линейная и нелинейная регрессии. М.: Финансы и статистика, 1981. 304 с.
4. *Golub G.H., Van Loan C.F.* An analysis of the total least squares problem // SIAM Journal on Numerical Analysis. 1980. Vol. 17. № 6. P. 883–893.
5. *Базилевский М.П.* Методы построения регрессионных моделей с ошибками во всех переменных. Иркутск: ИрГУПС, 2019. 208 с.
6. *Deming W.E.* Statistical adjustment of data. New York, Wiley, 2011. 288 p.
7. *Koh N.W.X., Markus C., Loh T.P., Lim C.Y.* Comparison of six regression-based lot-to-lot verification approaches // Clinical Chemistry and Laboratory Medicine. 2022. Vol. 60. № 8. P. 1175–1185. DOI:10.1515/cclm-2022-0274
8. *Базилевский М.П.* Исследование поведения относительных вкладов переменных в общую детерминацию в оцененном на основе метода выпрямления искаженных коэффициентов регрессионном уравнении // Вестник СибГУТИ. 2022. № 1(57). С. 89–96.
9. *Базилевский М.П.* Многофакторные модели полносвязной линейной регрессии без ограничений на соотношения дисперсий ошибок переменных // Информатика и её применения. 2020. Т. 14. № 2. С. 92–97. DOI:10.14357/19922264200213
10. *Базилевский М.П.* Метод выпрямления искаженных из-за мультиколлинеарности коэффициентов в регрессионных моделях // Информатика и её применения. 2021. Т. 15. № 2. С. 60–65. DOI:10.14357/19922264210209



Identification of Possible Estimates Areas for Parameters of Fully connected Linear Regression Models

Mikhail P. Bazilevskiy*

Irkutsk State Transport University (ISTU), Irkutsk, Russia

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-3253-5697>

e-mail: mik2178@yandex.ru

This article is devoted to the study of fully connected linear regression models, in which the observed variables contain errors, and the pairs of true variables are interconnected by linear functional dependencies. When estimating fully connected regressions, the main problem is the correct choice of the error variances ratios of the variables. If the choice is made incorrectly, then the fully connected regression estimates will be biased. The purpose of this article is to find the dependence of main parameters possible estimates areas on the possible error variances ratios of the variables in fully connected regressions. For the first time, with the help of matrix algebra elements, the inverse problem is solved – analytical dependences of the error variances ratios of variables on the main parameters are obtained. These dependences make it possible to identify the parameters possible estimates areas in which the necessary condition for the extremum of the objective function is satisfied. It is proved that, under certain conditions, for any error variances ratios of the variables, the parameters estimates always lie inside an open convex polygon located only in one of the orthants of the multidimensional space. In this case, the signs of the estimates always agree with the signs of the corresponding correlation coefficients. A numerical experiment was carried out, confirming the correctness of the results obtained.

Keywords: errors-in-variables model, fully connected linear regression model, weighted total least squares, parameter estimation, convex polygon.

For citation:

Bazilevskiy M.P. Identification of possible estimates areas for parameters of fully connected linear regression models. *Modelirovanie i analiz dannykh = Modelling and Data Analysis*, 2023. Vol. 13, no. 3, pp. 52–65. DOI: 10.17759/mda.2023130304 (In Russ., abstr. in Engl.).

References

1. Montgomery D.C., Peck E.A., Vining G.G. *Introduction to linear regression analysis*. John Wiley & Sons, 2021.
2. Xu P. Improving the weighted least squares estimation of parameters in errors-in-variables models, *Journal of the Franklin Institute*, 2019, vol. 356, no. 15, pp. 8785–8802. DOI:10.1016/j.jfranklin.2019.06.016

***Mikhail P. Bazilevskiy**, PhD (Engineering), Associate Professor, Department of Mathematics, Irkutsk State Transport University (ISTU), Irkutsk, Russia, ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-3253-5697>, e-mail: mik2178@yandex.ru



3. Demidenko E.Z. *Lineynaya i nelineynaya regressii* [Linear and nonlinear regressions]. Moscow, Finansy i statistika, 1981. 304 p.
4. Golub G.H., Van Loan C.F. An analysis of the total least squares problem, *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 1980, vol. 17, no. 6, pp. 883–893.
5. Bazilevskiy M.P. *Metody postroeniya regressionnykh modeley s oshibkami vo vsehkh peremennykh* [Methods for constructing errors-in-variables regression models]. Irkutsk, IrGUPS, 2019. 208 p.
6. Deming W.E. *Statistical adjustment of data*. New York, Wiley, 2011. 288 p.
7. Koh N.W.X., Markus C., Loh T.P., Lim C.Y. Comparison of six regression-based lot-to-lot verification approaches, *Clinical Chemistry and Laboratory Medicine*, 2022, vol. 60, no. 8, pp. 1175–1185. DOI:10.1515/cclm-2022-0274
8. Bazilevskiy M.P. Issledovanie povedeniya otnositel'nykh vkladov peremennykh v obshchuyu determinatsiyu v otsenennom na osnove metoda vypryamleniya iskazhennykh koeffitsientov regressionnom uravnenii [Researching the behavior of variables relative contributions to the total determination in regression equation estimated using the method of distorted coefficients straightening], *The Herald of the Siberian State University of Telecommunications and Information Science*, 2022, no. 1(57), pp. 89–96.
9. Bazilevskiy M.P. Mnogofaktornye modeli polnosvyaznoy lineynoy regressii bez ogranicheniy na sootnosheniya dispersiy oshibok peremennykh [Multifactor fully connected linear regression models without constraints to the ratios of variables errors variances], *Informatics and Applications*, 2020, vol. 14, no. 2, pp. 92–97. DOI:10.14357/19922264200213
10. Bazilevskiy M.P. Metod vypryamleniya iskazhennykh iz-za mul'tikollinearnosti koeffitsientov v regressionnykh modelyakh [Method of straightening distorted due to multicollinearity coefficients in regression models], *Informatics and Applications*, 2021, vol. 15, no. 2, pp. 60–65. DOI:10.14357/19922264210209

Получена 10.07.2023
Принята в печать 09.08.2023

Received 10.07.2023
Accepted 09.08.2023

УДК 519.62

Идентификация интервальных констант скоростей химической реакции окисления нафталина

*Морозов А.Ю.**

Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление»
Российской академии наук (ФИЦ ИУ РАН), г. Москва, Российская Федерация
ORCID: 0000-0003-0364-8665, e-mail: morozov@infway.ru

В работе выполняется применение ранее разработанного подхода параметрической идентификации динамических систем с интервальными параметрами к задаче нахождения констант скоростей химической реакции окисления нафталина. Данная реакция имеет практическое значение при производстве пластмасс и лакокрасочных материалов. Суть рассматриваемого подхода заключается в составлении целевой функции в пространстве границ интервальных параметров и характеризующей отклонение модельного решения от экспериментальных данных. Для целевой функции имеется возможность построить градиент и использовать для ее оптимизации методы первого порядка. В основе подхода лежит алгоритм адаптивной интерполяции, позволяющий получать для прямых интервальных задач решение в виде явных параметрических множеств. Найденные интервальные оценки констант скоростей согласуются с известными, но при этом имеют меньшую ширину, что демонстрирует преимущество применяемого подхода.

Ключевые слова: интервальная параметрическая идентификация, алгоритм адаптивной интерполяции, интервальная система обыкновенных дифференциальных уравнений, оптимизация, градиентные методы, химическая кинетика, константы скоростей, окисление нафталина.

Для цитаты:

Морозов А.Ю. Идентификация интервальных констант скоростей химической реакции окисления нафталина // // Моделирование и анализ данных. 2023. Том 13. № 3. С. 66–78. DOI: <https://doi.org/10.17759/mda.2023130305>

**Морозов Александр Юрьевич*, кандидат физико-математических наук, научный сотрудник отдела 27 «Математического моделирования гетерогенных систем», Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» Российской академии наук (ФИЦ ИУ РАН), г. Москва, Российская Федерация, ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-0364-8665>, e-mail: morozov@infway.ru

1. ВВЕДЕНИЕ

Важную роль при построении математических моделей процессов, которые происходят в окружающем нас физическом мире, играют обратные задачи. Их суть заключается в определении закономерностей по имеющимся экспериментальным данным. Задача параметрической идентификации возникает на этапе, когда математическая модель процесса уже известна, но неизвестными остаются ее параметры, которые необходимо подобрать так, чтобы модель наилучшим образом воспроизводила эксперимент.

Использование интервального аппарата [1–4] в данных задачах связано с предположением о том, что в параметрах модели могут содержаться интервальные неопределенности. В отличие от классических моделей, которые аппроксимируют интересующие величины, интервальные модели дают ограничения сверху и снизу на эти величины. В этом случае, как правило, имеется возможность подобрать интервальные параметры таким образом, чтобы модель полностью покрывала экспериментальные данные.

Существует ряд публикаций, посвященных подобным задачам. В сборнике [5] представлены статьи по системной идентификации и обработке данных в условиях ограниченной, в частности, интервальной неопределённости. В [6] и [7] рассматривается задача восстановления зависимостей по данным с интервальной неопределенностью.

Настоящая работа посвящена применению ранее разработанного подхода [8, 9] к решению задачи идентификации интервальных констант скоростей химической реакции окисления нафталина, приведенной в [10]. Данная реакция имеет практическое значение при производстве пластмасс и лакокрасочных материалов. В исходной работе [10] представлен алгоритм на основе метода Хука – Дживса для решения рассматриваемой задачи и приведены соответствующие результаты, с которыми в дальнейшем будет выполняться сравнение.

Отметим, что химическая кинетика [11, 12] играет важную роль в авиационно-космической отрасли, например при моделировании течений [13].

Идея используемого подхода заключается в составлении целевой функции в пространстве границ интервальных параметров и характеризующей степень отклонения модельного решения от экспериментальных данных. Минимизация целевой функции осуществляется с помощью методов оптимизации первого порядка [14, 15], так как имеется возможность построить градиент.

Процесс интервальной параметрической идентификации условно можно представить как поиск для каждой экспериментальной точки прообраза в пространстве параметров и заключение всех прообразов в интервальную оценку. При этом поиск осуществляется для всех точек одновременно в рамках текущей области неопределенности параметров и по найденным прообразам оценивается, как должны измениться границы области.

Решение прямых интервальных задач в ходе вычисления значений целевой функции (и ее градиента) выполняется с помощью ранее разработанного, теоретически



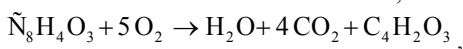
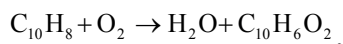
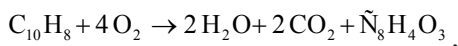
обоснованного и апробированного на прикладных задачах алгоритма адаптивной интерполяции [16–18]. Алгоритм относится к группе методов, определяющих явную зависимость решения задачи от значений интервальных параметров. Данная группа методов включает в себя символьные методы [19, 20] и полиномиальные методы [21, 22]. Алгоритм принадлежит к полиномиальным методам.

В первом разделе приводится постановка задачи в виде системы обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) с неизвестными интервальными параметрами; во втором разделе обсуждаются и сравниваются полученные решения. В заключении формулируются основные результаты работы.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Выполним постановку задачи идентификации интервальных констант скоростей химической реакции окисления нафталина в соответствии с работой [10].

Реакция окисления нафталина представляется в следующем виде:



где $C_{10}H_8$ – нафталин, $C_{10}H_6O_2$ – нафтохинон, $\tilde{N}_8H_4O_3$ – фталевый ангидрид, CO_2 – углекислый газ, $C_4H_2O_3$ – малеиновый ангидрид, O_2 – кислород, H_2O – вода.

Запишем математическую модель реакции в виде системы ОДУ:

$$\frac{dy_1}{dt} = -\beta_1 y_1 y_6^4 - \beta_2 y_1 y_6,$$

$$\frac{dy_2}{dt} = \beta_2 y_1 y_6,$$

$$\frac{dy_3}{dt} = \beta_1 y_1 y_6^4 - \beta_3 y_3 y_6^5,$$

$$\frac{dy_4}{dt} = 2\beta_1 y_1 y_6^4 + 4\beta_3 y_3 y_6^5,$$

$$\frac{dy_5}{dt} = \beta_3 y_3 y_6^5,$$

$$\frac{dy_6}{dt} = -4\beta_1 y_1 y_6^4 - \beta_2 y_1 y_6 - 5\beta_3 y_3 y_6^5, \quad (1)$$

$$\frac{dy_7}{dt} = 2\beta_1 y_1 y_6^4 + \beta_2 y_1 y_6 + \beta_3 y_3 y_6^5,$$

$$y_1(0) = y_6(0) = 1, \quad y_2(0) = y_3(0) = y_4(0) = y_5(0) = y_7(0) = 0,$$



$$\beta_1 \in [\underline{\beta}_1, \overline{\beta}_1], \beta_2 \in [\underline{\beta}_2, \overline{\beta}_2], \beta_3 \in [\underline{\beta}_3, \overline{\beta}_3],$$

$$t \in [0, 2],$$

где y_1, y_2, \dots, y_7 – концентрации реагентов в мольных долях: $y_1 - C_{10}H_8$, $y_2 - C_{10}H_6O_2$, $y_3 - \dot{N}_8H_4O_3$, $y_4 - CO_2$, $y_5 - C_4H_2O_3$, $y_6 - O_2$ и $y_7 - H_2O$; $\underline{\beta}_1 \leq \overline{\beta}_1, \underline{\beta}_2 \leq \overline{\beta}_2, \underline{\beta}_3 \leq \overline{\beta}_3$ – неизвестные нижние и верхние границы интервальных констант скоростей реакций.

Решение системы в каждый момент времени t_k является параметрическим множеством:

$$Y^k(\underline{\beta}_1, \overline{\beta}_1, \underline{\beta}_2, \overline{\beta}_2, \underline{\beta}_3, \overline{\beta}_3) = \left\{ y^k(z_1, z_2, z_3) \left| \begin{array}{l} z_1 \in [\underline{\beta}_1, \overline{\beta}_1], \\ z_2 \in [\underline{\beta}_2, \overline{\beta}_2], \\ z_3 \in [\underline{\beta}_3, \overline{\beta}_3]. \end{array} \right. \right\}, \quad (2)$$

где $y^k(z_1, z_2, z_3) = (y_1(t_k), y_2(t_k), \dots, y_7(t_k))^T$ – решение системы при значениях параметров $\beta_1 = z_1$, $\beta_2 = z_2$ и $\beta_3 = z_3$.

Ключевым моментом в применяемом подходе является то, что алгоритм адаптивной интерполяции позволяет в явном виде получать множества: для каждого момента времени t_k выполняется построение вектор-функции

$$P^k(z_1, z_2, z_3) = (P_1^k(z_1, z_2, z_3), P_2^k(z_1, z_2, z_3), \dots, P_7^k(z_1, z_2, z_3))^T,$$

интерполирующей $y^k(z_1, z_2, z_3)$ с контролируемой точностью.

В табл. 1 представлены значения концентраций в определенные моменты времени, принятые за экспериментальные данные [10].

Таблица 1

Экспериментальные значения концентраций

t	$t_1 = 0.5$ с	$t_2 = 1.0$ с	$t_3 = 1.5$ с	$t_4 = 2.0$ с
\hat{y}_1	0.8422	0.8015	0.7751	0.7549
\hat{y}_2	0.0361	0.0585	0.0765	0.0918
\hat{y}_3	0.1213	0.1395	0.1478	0.1526
\hat{y}_4	0.2452	0.2823	0.2992	0.3090
\hat{y}_5	0.0004	0.0005	0.0006	0.0006
\hat{y}_6	0.4748	0.3785	0.3268	0.2920
\hat{y}_7	0.2799	0.3391	0.3739	0.3989



Задача параметрической идентификации заключается в нахождении таких границ интервалов $\underline{\beta}_1, \overline{\beta}_1, \underline{\beta}_2, \overline{\beta}_2, \underline{\beta}_3, \overline{\beta}_3$, чтобы $\hat{\mathbf{y}}^k \in \mathbf{Y}^k(\underline{\beta}_1, \overline{\beta}_1, \underline{\beta}_2, \overline{\beta}_2, \underline{\beta}_3, \overline{\beta}_3)$, $k = 1, 2, 3, 4$ или чтобы сумма квадратов расстояний $\rho(\mathbf{Y}^k, \hat{\mathbf{y}}^k) = \min_{\mathbf{y}^k \in \mathbf{Y}^k} \|\mathbf{y}^k - \hat{\mathbf{y}}^k\|$ была минимальной, где $\hat{\mathbf{y}}^k = (\hat{y}_1^k, \hat{y}_2^k, \dots, \hat{y}_7^k)^\top$. В качестве $\|\cdot\|$ удобно использовать взвешенную евклидову норму, в этом случае целевая функция примет следующий итоговый вид:

$$J(\underline{\beta}_1, \overline{\beta}_1, \underline{\beta}_2, \overline{\beta}_2, \underline{\beta}_3, \overline{\beta}_3) = \sum_{k=1}^4 \min_{\substack{z_j \in [\underline{\beta}_j, \overline{\beta}_j] \\ j=1,2,3}} \sum_{i=1}^7 w_i^2 [P_i^k(z_1, z_2, z_3) - \hat{y}_i^k]^2, \quad (3)$$

где $w_1 = w_2 = w_3 = w_4 = w_6 = w_7 = 1$, $w_5 = 10^3$ – весовые коэффициенты, учитывающие разный порядок значений концентраций.

Запишем выражения для компонент градиента целевой функции :

$$J'_{\underline{\beta}_j} = 2 \sum_{k=1}^4 \max \left(0, \sum_{i=1}^7 w_i^2 [P_i^k(\tilde{z}_1^k, \tilde{z}_2^k, \tilde{z}_3^k) - \hat{y}_i^k] \frac{dP_i^k(\tilde{z}_1^k, \tilde{z}_2^k, \tilde{z}_3^k)}{dz_j} \right), j = 1, 2, 3,$$

$$J'_{\overline{\beta}_j} = 2 \sum_{k=1}^4 \min \left(0, \sum_{i=1}^7 w_i^2 [P_i^k(\tilde{z}_1^k, \tilde{z}_2^k, \tilde{z}_3^k) - \hat{y}_i^k] \frac{dP_i^k(\tilde{z}_1^k, \tilde{z}_2^k, \tilde{z}_3^k)}{dz_j} \right), j = 1, 2, 3,$$

где

$$(\tilde{z}_1^k, \tilde{z}_2^k, \tilde{z}_3^k) = \arg \min_{\substack{z_j \in [\underline{\beta}_j, \overline{\beta}_j] \\ j=1,2,3}} \sum_{i=1}^7 w_i^2 [P_i^k(z_1, z_2, z_3) - \hat{y}_i^k]^2.$$

Приведем дополнительные правила сужения интервалов:

$$\underline{\beta}_j = \min_k \tilde{z}_j^k, \text{ если } J'_{\underline{\beta}_j} = 0 \text{ и } \overline{\beta}_j = \max_k \tilde{z}_j^k, \text{ если } J'_{\overline{\beta}_j} = 0, j = 1, 2, 3. \quad (4)$$

Таким образом, решение исходной задачи сводится к минимизации целевой функции с помощью градиентных методов. Правила сужения применяются после каждого шага оптимизации.

3. РЕЗУЛЬТАТЫ

В данном разделе представлено полученное решение поставленной задачи. В качестве критерия остановки градиентного спуска применялось ограничение на значение минимизируемой функции $J < 10^{-7}$. Для решения прямых задач использовалась модификация алгоритма адаптивной интерполяции на основе разреженных сеток [23–25] с нелинейным базисом четвертой степени [18]. Значение параметра, отвечающего за точность: $\varepsilon = 10^{-6}$.

Начальное приближение в методе градиентного спуска: $\beta_1^{(0)} \in [0.70, 0.80]$, $\beta_2^{(0)} \in [0.09, 0.10]$, $\beta_3^{(0)} \in [0.15, 0.16]$. На 34-й итерации метод завершил работу. Получены следующие значения интервальных констант скоростей реакции:

$$\beta_1^{(34)} \in [1.3893, 1.3918], \beta_2^{(34)} \in [0.1298, 0.1397], \beta_3^{(34)} \in [0.1038, 0.1171]. \quad (5)$$

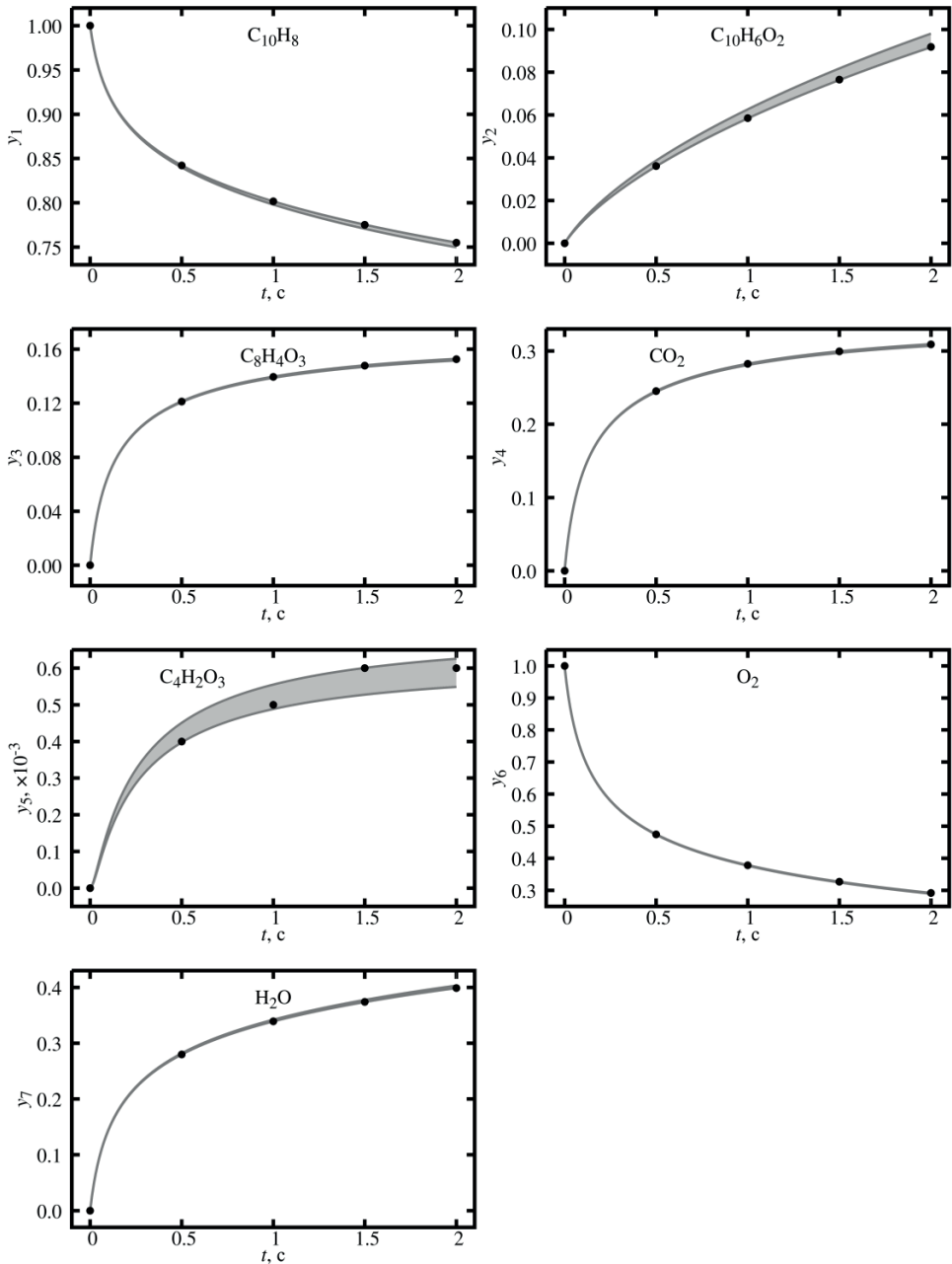


Рис. 1. Сравнение интервальных оценок концентраций, полученных при найденных значениях интервальных скоростей реакции (серый цвет), с экспериментальными данными (черные точки)

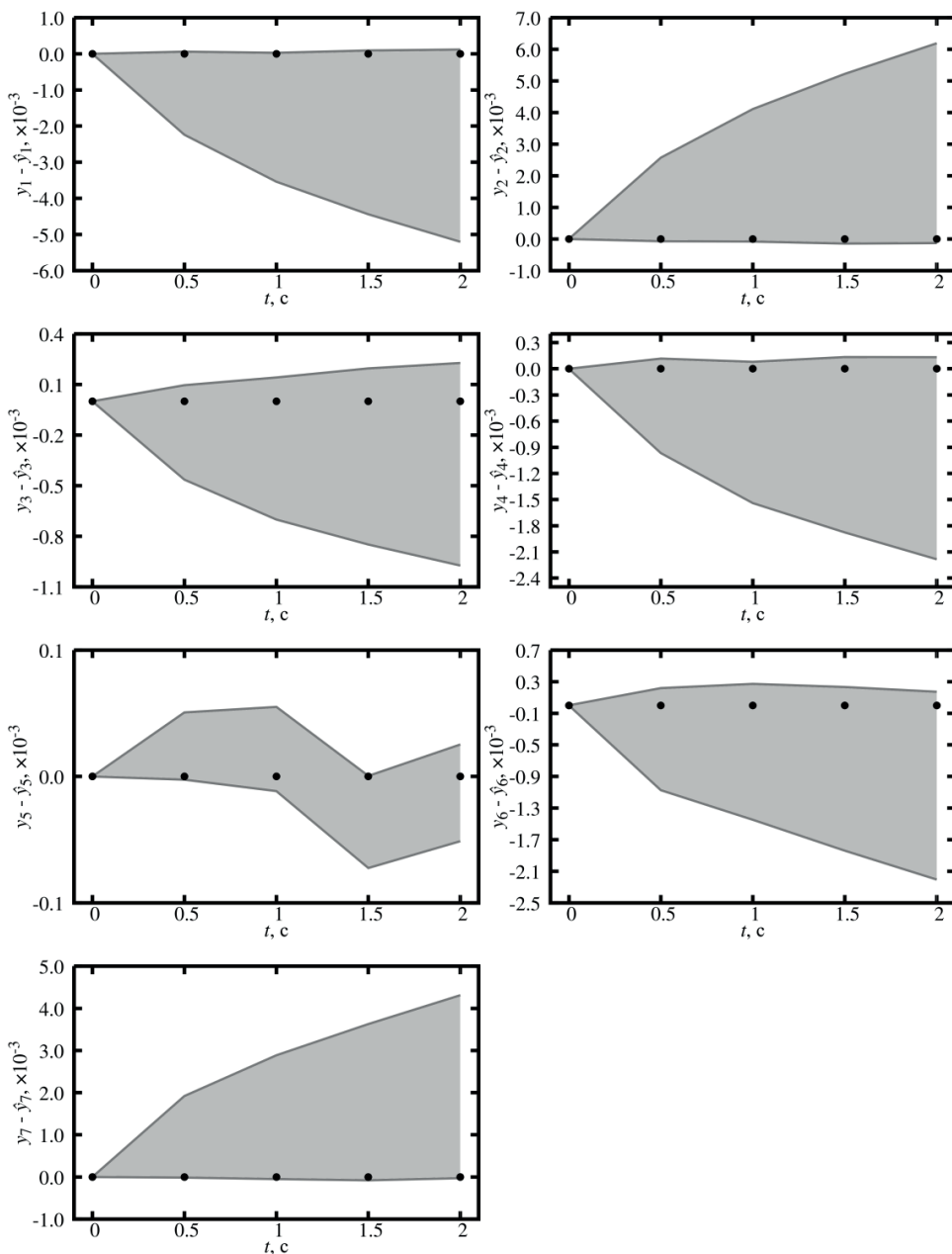


Рис. 2. Зависимости от времени интервальных оценок концентраций (серый цвет) относительно экспериментальных данных (черные точки)



На рис. 1 серым цветом показаны зависимости от времени интервальных оценок концентраций при найденных значениях констант скоростей. Черными точками показаны экспериментальные данные в соответствии с табл. 1. Оценки концентраций имеют небольшую ширину, и, чтобы показать, что все экспериментальные точки содержатся в полученных оценках, дополнительно приведем графики зависимостей относительно экспериментальных данных (рис. 2).

Здесь все экспериментальные точки выстроились в одну линию ($y = 0$) и все они содержатся в соответствующих интервальных коридорах. Таким образом, поставленная задача успешно решена.

Отметим, что построение интервальных оценок концентраций выполнялось с помощью проекции полученных параметрических множеств в процессе работы алгоритма адаптивной интерполяции на координатные прямые:

$$y_i^k \in \left[\min_{\substack{z_j \in [\beta_j, \beta_j] \\ j=1,2,3}} P_i^k(z_1, z_2, z_3), \max_{\substack{z_j \in [\beta_j, \beta_j] \\ j=1,2,3}} P_i^k(z_1, z_2, z_3) \right], i = 1, 2, \dots, 7.$$

В исходной работе [10] приведены следующие интервальные значения констант скоростей реакции, полученные с помощью оригинального алгоритма на основе метода Хука – Дживса:

$$\begin{aligned} \beta_1 &\in [1.1170, 1.5160], \\ \beta_2 &\in [0.1113, 0.1547], \\ \beta_3 &\in [0.0967, 0.1199]. \end{aligned} \quad (6)$$

По сравнению с интервальные оценки имеют меньшую ширину и полностью содержатся в , что демонстрирует преимущество применяемого подхода. Однако заметим, что вычислительная сложность используемого в подходе алгоритма адаптивной интерполяции больше, чем аналогичного метода [26], применяемого в [10]. Тем не менее при современном уровне развития вычислительных технологий это является не критичным.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе успешно решена задача идентификации интервальных скоростей реакции окисления нафталина с помощью ранее разработанного подхода на основе алгоритма адаптивной интерполяции. Представлена целевая функция в пространстве границ интервальных параметров и характеризующая отклонение модельного решения от экспериментальных данных. Выполнена минимизация целевой функции с помощью метода градиентного спуска. Найденные интервальные оценки констант скоростей согласуются с известными, но при этом имеют меньшую ширину, что демонстрирует преимущество применяемого подхода.



Литература

1. Moore R.E., Kearfott R.B., Cloud M.J. Introduction to Interval Analysis, SIAM, 2009.
2. Добронез Б.С. Интервальная математика. Красноярск: Краснояр. гос. ун-т, 2007.
3. Шарый С.П. Конечномерный интервальный анализ. Новосибирск: XYZ, 2017.
4. Морозов А.Ю., Ревизников Д.Л. Моделирование динамических систем с интервальными параметрами. Обзор методов и программных средств // Моделирование и анализ данных. 2019. № 4. С. 5–31. DOI: 10.17759/mda.2019090401
5. Дилигенская А.Н., Самокиш А.В. Параметрическая идентификация в обратных задачах теплопроводности в условиях интервальной неопределенности на основе нейронных сетей // ВЕСТН. САМАР. ГОС. ТЕХН. УН-ТА. СЕР. ТЕХНИЧЕСКИЕ НАУКИ. 2020. Т. 28. № 4. С. 6–18.
6. Петрикевич Я.И. Структурно-параметрическая идентификация динамических объектов по интервальным исходным данным : диссертация ... кандидата технических наук : 05.13.18. – Кемерово, 2006.- 225 с.: ил. РГБ ОД, 61 06-5/2799
7. Milanese M., Norton J., Piet-Lahanier H., Walter E., eds. Bounding Approaches to System Identification. – New York: Plenum Press, 1996.
8. Шарый С.П. Восстановление функциональных зависимостей по данным с интервальной неопределенностью // Информатика и системы управления. 2022. № 3(73). с. 130–143. DOI: 10.22250/18142400_2022_73_3_130
9. Шарый С.П. Задача восстановления зависимостей по данным с интервальной неопределенностью // Заводская лаборатория. диагностика материалов. 2020. Т. 86. № 1. С. 62–74. DOI: 10.26896/1028-6861-2020-86-1-62-74
10. Морозов А.Ю., Ревизников Д.Л. Интервальный подход к решению задач параметрической идентификации динамических систем // Дифференциальные уравнения. 2022. Т. 58. № 7. С. 962–976. DOI: 10.31857/S0374064122070081.
11. Морозов А.Ю. Параллельный алгоритм параметрической идентификации динамических систем с интервальными параметрами // Программная инженерия. 2022. Т. 13. № 10. С. 497–507. DOI: 10.17587/prin.13.497-507.
12. Мифтахов Э.Н., Зигангирова Д.Р., Мустафина С.А., Морозкин Н.Д. Алгоритм решения обратной задачи химической кинетики в условиях неопределенности исходных данных // Вестник технологического университета. 2020. Т. 23. № 11. С. 101–105.
13. Яблонский Г.С., Спивак С.И. Математические модели химической кинетики. М.: Знание, 1977
14. Быков В.И., Добронез Б.С. К интервальному анализу уравнений химической кинетики. Математические проблемы химической кинетики. Новосибирск: Наука, 1989. С. 226–232.
15. Гидаспов В.Ю., Кононов Д.С. Численное моделирование сжигания топлива в стационарной детонационной волне в канале переменного сечения со сверхзвуковым потоком на входе и выходе [Электронный ресурс] // Труды МАИ. 2019. № 109. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=111353>. DOI: 10.34759/trd-2019-109-6
16. Гилл Ф., Мюррей У., Райт М. Практическая оптимизация. М.: Мир, 1985.
17. Пантелеев А.В., Летова Т.А. Методы оптимизации в примерах и задачах: Учеб. пособие. 2-е изд. М.: Высш. шк., 2005. 544 с.
18. Морозов А.Ю. Алгоритм адаптивной интерполяции для решения задач небесной механики с интервальными неопределенностями [Электронный ресурс] // Труды МАИ. 2022. № 123. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=165501>. DOI: 10.34759/trd-2022-123-24
19. Морозов А.Ю. Интерполяционный подход в задачах моделирования динамических систем с эллипсоидными оценками параметров [Электронный ресурс] // Труды МАИ. 2022. № 124. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=167168>. DOI: 10.34759/trd-2022-124-24



20. Морозов А.Ю. Параллельный алгоритм адаптивной интерполяции на основе разреженных сеток для моделирования динамических систем с интервальными параметрами // Программная инженерия. 2021. Т. 12. № 8. С. 395–403. DOI: 10.17587/prin.12.395-403.
21. Berz M., Makino K. Verified integration of ODEs and flows with differential algebraic methods on Taylor models // *Reliable Computing*. Vol. 4. № 4. 1998. P. 361–369.
22. Роголев А.Н. Гарантированные методы решения систем обыкновенных дифференциальных уравнений на основе преобразования символьных формул // *Вычислительные технологии*. 2003. Т. 8. № 5. С. 102–116.
23. Fu C., Ren X., Yang Y.-F., Lu K., Qin W. Steady-state response analysis of cracked rotors with uncertain but bounded parameters using a polynomial surrogate method. *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.* 2019, 68, 240–256, doi:10.1016/j.cnsns.2018.08.004.
24. Fu C., Xu Y., Yang Y., Lu K., Gu F., Ball A. Response analysis of an accelerating unbalanced rotating system with both random and interval variables. *J. Sound Vib.* 2020, 466, 115047, doi:10.1016/j.jsv.2019.115047.
25. Смоляк С.А. Квадратурные и интерполяционные формулы на тензорных произведениях некоторых классов функций // Докл. АН СССР, 148:5 (1963), 1042–1045.
26. Bungartz H.-J., Griebel M. Sparse grids // *Acta Numerica*. 2004. Vol. 13, no. 1. pp. 147–269.
27. Gerstner T., Griebel M. Sparse grids // *Encyclopedia of Quantitative Finance* / Ed. R. Cont. New York, 2010.
28. Вайтмиев В.А., Мустафина С.А. Построение двусторонних оценок решения прямой задачи химической кинетики // *Журнал Средневолжского математического общества*. 2012. Т. 14. № 4. С. 18–25.



Identification of the Interval Constants of the Rates of the Chemical Reaction of Naphthalene Oxidation

*Alexander Yu. Morozov**

Federal Research Center Computer Science and Control

of the Russian Academy of Sciences (FRC CSC RAS), Moscow, Russia

ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-0364-8665>

e-mail: morozov@infway.ru

In this work, the previously developed approach of parametric identification of dynamic systems with interval parameters is applied to the problem of finding the rate constants of the chemical reaction of naphthalene oxidation. This reaction is of practical importance in the production of plastics and paints and varnishes. The essence of the considered approach lies in the compilation of the objective function in the space of the boundaries of the interval parameters and characterizing the deviation of the model solution from the experimental data. For the objective function, it is possible to construct a gradient and use first-order methods to optimize it. The approach is based on the adaptive interpolation algorithm, which makes it possible to obtain solutions for direct interval problems in the form of explicit parametric sets. The found interval estimates of the rate constants are consistent with the known ones, but at the same time they have a smaller width, which demonstrates the advantage of the approach used.

Keywords: interval parametric identification, adaptive interpolation algorithm, interval system of ordinary differential equations, optimization, gradient methods, chemical kinetics, rate constants, naphthalene oxidation.

For citation:

Morozov A.Yu. Identification of the Interval Constants of the Rates of the Chemical Reaction of Naphthalene Oxidation. *Modelirovanie i analiz dannykh = Modelling and Data Analysis*, 2023. Vol. 13, no. 3, pp. 66–78. DOI: 10.17759/mda.2023130305 (In Russ., abstr. in Engl.).

References

1. Moore R.E., Kearfott R.B., Cloud M.J. Introduction to Interval Analysis, SIAM, 2009.
2. Dobronets B.S. Interval'naya matematika [Interval mathematics]. Krasnoyarsk: Publ. Krasnoyarsk. state un-t, 2007. (In Russ.)
3. Sharyi S.P. Konechnomernyi interval'nyi analiz [Finite-dimensional interval analysis]. Novosibirsk: Publ. XYZ, 2017. (In Russ.)

***Alexander Yu. Morozov**, PhD (Physical and Mathematical), Researcher, Department 27 "Mathematical Modeling of Heterogeneous Systems", Federal Research Center Computer Science and Control of the Russian Academy of Sciences (FRC CSC RAS), Moscow, Russia, ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-0364-8665>, e-mail: morozov@infway.ru



4. Morozov A.Yu., Reviznikov D.L. Modelirovanie dinamicheskikh sistem s interval'nymi parametrami. Obzor metodov i programmnykh sredstv [Modeling of dynamic systems with interval parameters. Overview of Methods and Software]. Modelirovanie i analiz dannykh = Modeling and data analysis, 2019, no. 4, pp. 5–31. DOI: 10.17759/mda.2019090401 (In Russ.)
5. Diligenskaya A.N., Samokish A.V. Parametricheskaya identifikatsiya v obratnykh zadachakh teploprovodnosti v usloviyakh interval'noi neopredelennosti na osnove neironnykh setei [Parametric identification in inverse problems of heat conduction under conditions of interval uncertainty based on neural networks]. Vestnik Samarskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta = Bulletin of the Samara State Technical University, 2020, V. 28, no. 4 (68), pp. 6–18. (In Russ.)
6. Petrikevich Ya. I. Strukturno-parametricheskaya identifikatsiya dinamicheskikh ob'ektov po interval'nym iskhodnym dannym: dis. kand. tekhn. nauk: 05.13.18 [Structural-parametric identification of dynamic objects by interval initial data: dis. ... cand. tech. Sciences: 05.13.18.], Kemerovo: Kemer. state un-t, 2006. 225 p. (In Russ.)
7. Milanese M., Norton J., Piet-Lahanier H., Walter E., eds. Bounding Approaches to System Identification. – New York: Plenum Press, 1996.
8. Sharyi S.P. Vosstanovlenie funktsional'nykh zavisimostei po dannym s interval'noi neopredelennost'yu [Recovery of functional dependencies from data with interval uncertainty]. Informatika i sistemy upravleniya = Informatics and control systems, 2022, no. 3(73). pp. 130–143. DOI: 10.22250/18142400_2022_73_3_130 (In Russ.)
9. Sharyi S.P. Zadacha vosstanovleniya zavisimostei po dannym s interval'noi neopredelennost'yu [The problem of recovering dependencies from data with interval uncertainty]. Zavodskaya laboratoriya. diagnostika materialov = Zavodskaya lab. material diagnostics, 2020, V. 86, no. 1. pp. 62–74. DOI: 10.26896/1028-6861-2020-86-1-62-74 (In Russ.)
10. Morozov A. Yu., Reviznikov D.L. Interval approach to solving parametric identification problems for dynamical systems. Differential Equations, 2022, V. 58, no. 7, pp. 952–965. DOI: 10.1134/S0012266122070084
11. Morozov A.Yu. Parallelnyi algoritm parametricheskoi identifikatsii dinamicheskikh sistem s interval'nymi parametrami [Parallel Algorithm for Parametric Identification of Dynamic Systems with Interval Parameters]. Programmnyaya inzheneriya=Software Engineering, 2022, V. 13, no. 10, pp. 497–507. DOI: 10.17587/prin.13.497-507 (In Russ.)
12. Miftakhov E.N., Zigangirova D.R., Mustafina S.A., Morozkin N.D. Algoritm resheniya obratnoi zadachi khimicheskoi kinetiki v usloviyakh neopredelennosti iskhodnykh dannykh [Algorithm for solving the inverse problem of chemical kinetics under conditions of initial data uncertainty]. Vestnik tekhnologicheskogo universiteta = Vestnik tekhnologicheskogo universiteta, 2020, V. 23, no. 11, pp. 101–105. (In Russ.)
13. Yablonskii G.S., Spivak S.I. Matematicheskie modeli khimicheskoi kinetiki [Mathematical models of chemical kinetics], Moscow: Publ. Knowledge, 1977. (In Russ.)
14. Bykov V.I., Dobronets B.S. K interval'nomu analizu uravnenii khimicheskoi kinetiki [To the interval analysis of the equations of chemical kinetics]. Matematicheskie problemy khimicheskoi kinetiki = Mathematical problems of chemical kinetics. Novosibirsk: Nauka, 1989, pp. 226–232. (In Russ.)
15. Gidasov V.Yu., Kononov D.S. Chislennoe modelirovanie szhiganiya topliva v statsionarnoi detonatsionnoi volne v kanale peremennogo secheniya so sverkhzvukovym potokom na vkhode i vykhode [Elektronnyi resurs] [Numerical modeling of fuel combustion in a stationary detonation wave in a channel of variable cross section with a supersonic flow at the inlet and outlet]. Trudy MAI = Proceedings of the MAI, 2019, no. 109, URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=111353>. DOI: 10.34759/trd-2019-109-6 (In Russ.)



16. Gill P.E., Murray W., Wright M.H. Practical Optimization, ACADEMIC PRESS, INC. San Diego, 1997.
17. Panteleev A.V., Letova T.A. Metody optimizatsii v primerakh i zadachakh: Ucheb. posobie. 2-e izd [Optimization methods in examples and tasks: Proc. allowance. 2nd ed.] Moscow: Publ. Higher school, 2005, 544 p. (In Russ.)
18. Morozov A.Yu. Algoritm adaptivnoi interpoliyatsii dlya resheniya zadach nebesnoi mekhaniki s interval'nymi neopredelennostyami [Elektronnyi resurs] [Adaptive interpolation algorithm for solving problems of celestial mechanics with interval uncertainties]. Trudy MAI = Proceedings of MAI, 2022, no. 123. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=165501>. DOI: 10.34759/trd-2022-123-24 (In Russ.)
19. Morozov A.Yu. Interpolyatsionnyi podkhod v zadachakh modelirovaniya dinamicheskikh sistem s ellipsoidnymi otsenkami parametrov [Elektronnyi resurs] [Interpolation approach in the problems of modeling dynamic systems with ellipsoid parameter estimates]. Trudy MAI = Proceedings of MAI, 2022, no. 124. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=167168>. DOI: 10.34759/trd-2022-124-24 (In Russ.)
20. Morozov A.Yu. Parallelnyi algoritm adaptivnoi interpoliyatsii na osnove razrezhennykh setok dlya modelirovaniya dinamicheskikh sistem s interval'nymi parametrami [Parallel adaptive interpolation algorithm based on sparse grids for modeling dynamic systems with interval parameters]. Programmnyaya inzheneriya = Software Engineering, 2021, V. 12, no. 8, pp. 395–403. DOI: 10.17587/prin.12.395-403. (In Russ.)
21. Berz M., Makino K. Verified integration of ODEs and flows with differential algebraic methods on Taylor models // Reliable Computing. Vol. 4. № 4. 1998. P. 361–369.
22. Rogalev A.N. Garantirovannye metody resheniya sistem obyknovennykh differentsial'nykh uravnenii na osnove preobrazovaniya simvol'nykh formul [Guaranteed methods for solving systems of ordinary differential equations based on the transformation of symbolic formulas]. Vychislitel'nye tekhnologii = Computational technologies, 2003, V. 8, no. 5. pp. 102–116. (In Russ.)
23. Fu C., Ren X., Yang Y.-F., Lu K., Qin W. Steady-state response analysis of cracked rotors with uncertain but bounded parameters using a polynomial surrogate method. Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul. 2019, 68, 240–256, doi:10.1016/j.cnsns.2018.08.004.
24. Fu C., Xu Y., Yang Y., Lu K., Gu F., Ball A. Response analysis of an accelerating unbalanced rotating system with both random and interval variables. J. Sound Vib. 2020, 466, 115047, doi:10.1016/j.jsv.2019.115047.
25. Smolyak S.A. Kvadraturnye i interpoliyatsionnye formuly na tenzornykh proizvedeniyakh nekotorykh klassov funktsii [Quadrature and interpolation formulas on tensor products of some classes of functions]. Dokl. AN SSSR = Reports of the Academy of Sciences of the USSR, 1963, 148:5, pp. 1042–1045. (In Russ.)
26. Bungartz H.-J., Griebel M. Sparse grids // Acta Numerica. 2004. Vol. 13, no. 1. pp. 147–269.
27. Gerstner T., Griebel M. Sparse grids // Encyclopedia of Quantitative Finance / Ed. R. Cont. New York, 2010.
28. Vaitiev V.A., Mustafina S.A. Postroenie dvustoronnikh otsenok resheniya pryamoi zadachi khimicheskoi kinetiki [Construction of two-sided estimates for the solution of the direct problem of chemical kinetics]. Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva = Journal of the Middle Volga Mathematical Society, 2012, V. 14, no. 4, pp. 18–25. (In Russ.)

Алгоритмическое обеспечение численно- спектральных методов моделирования стохастических динамических систем

Рыбаков К.А.*

Московский авиационный институт (Национальный исследовательский университет) (ФГБОУ ВО МАИ), г. Москва, Российская Федерация
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-6839-1090>, e-mail: rkoffice@mail.ru

На основе спектральной формы математического описания получены представления повторных стохастических интегралов Стратоновича и Ито, имеющие как теоретическое, так и практическое значение. Последнее обусловлено возможностью построения достаточно простых алгоритмов приближенного моделирования повторных стохастических интегралов, необходимых для реализации численных методов решения стохастических дифференциальных уравнений. Применение спектральных представлений повторных стохастических интегралов в численных методах формирует численно-спектральные методы. Их алгоритмическое обеспечение представлено в виде программ для системы компьютерной математики Mathcad.

Ключевые слова: повторные стохастические интегралы, спектральная форма математического описания, спектральный метод, стохастическое дифференциальное уравнение, численно-спектральный метод, численный метод.

Для цитаты:

Рыбаков К.А. Алгоритмическое обеспечение численно-спектральных методов моделирования стохастических динамических систем // Моделирование и анализ данных. 2023. Том 13. № 3. С. 79–95. DOI: <https://doi.org/10.17759/mda.2023130306>

***Рыбаков Константин Александрович**, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математической кибернетики, Московский авиационный институт (Национальный исследовательский университет) (ФГБОУ ВО МАИ), г. Москва, Российская Федерация, ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-6839-1090>, e-mail: rkoffice@mail.ru



1. ВВЕДЕНИЕ

В работе описаны численно-спектральные методы моделирования стохастических динамических систем, математические модели которых задаются стохастическими дифференциальными уравнениями (СДУ). Основное внимание уделено описанию алгоритмического обеспечения этих методов в виде комплекса программ для системы компьютерной математики Mathcad. Ее выбор обусловлен большей наглядностью по сравнению с другими программными средствами автоматизации вычислений. Кроме того, Mathcad обеспечивает довольно компактное представление программ, что является несомненным плюсом, так как одна из целей работы – показать, что практическая реализация подобных методов моделирования стохастических систем не содержит сложностей.

Существует достаточно много численных методов решения СДУ (методов моделирования траекторий стохастических динамических систем), однако значительная их часть имеет довольно заметный недостаток для СДУ общего вида – низкий порядок сильной (потраекторной) сходимости. Конечно, есть численные методы решения СДУ с высокими порядками сильной сходимости, но они предполагают моделирование специальных случайных величин – повторных стохастических интегралов (ПСИ) [1, 3, 12–15]. Простые моделирующие формулы есть только для некоторых из них, а для остальных предлагается применять приближенные методы моделирования и один из них основан на спектральной форме математического описания систем управления. Изначально она была предложена как одна из форм математического описания линейных детерминированных систем [10], а затем стала применяться для линейных стохастических систем [5].

Спектральная форма математического описания предполагает, что входные, выходные и промежуточные сигналы в системе управления представляются коэффициентами разложения этих сигналов в ряды по ортонормированным и биортонормированным базисным системам, которые образуют спектральные характеристики сигналов, и все действия с сигналами переносятся на действия с их спектральными характеристиками. Так как спектральные характеристики – это бесконечные матрицы-столбцы, линейные операторы на множестве спектральных характеристик представляются бесконечными плоскими матрицами, билинейные операторы – бесконечными пространственными матрицами и т.п.

Для моделирования простейших ПСИ в работах [16, 17] предложено задействовать спектральную форму математического описания, далее в работе [6] класс ПСИ был расширен. В представленной работе показана одна из возможных реализаций алгоритмов моделирования ПСИ с применением спектральной формы математического описания для конкретного базиса в системе компьютерной математики Mathcad. Методы моделирования ПСИ ранее были реализованы в системе компьютерной математики Matlab [3] и в виде комплекса программ на языке Python [14], но без применения спектральной формы математического описания.

2. ОПИСАНИЕ НЕПРЕРЫВНЫХ СТОХАСТИЧЕСКИХ СИСТЕМ И ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ ИХ МОДЕЛИРОВАНИЯ

Рассмотрим стохастическую динамическую систему, описываемую СДУ Стратоновича:

$$dX(t) = a(t, X(t))dt + \sigma(t, X(t))dW(t), \quad X(t_0) = X_0, \quad (1)$$

в котором $X(\cdot)$ – n -мерный векторный случайный процесс, $t \in \mathbb{T} = [t_0, T]$ – время; $W(\cdot)$ – s -мерный стандартный винеровский процесс; X_0 – n -мерный случайный вектор (X_0 и $W(\cdot)$ независимы), $a(\cdot) : \mathbb{T} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ – вектор-функция, $\sigma(\cdot) : \mathbb{T} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n \times s}$ – матричная функция.

Наряду с уравнением (1) будем использовать СДУ Ито:

$$dX(t) = b(t, X(t))dt + \sigma(t, X(t))dW(t), \quad X(t_0) = X_0, \quad (2)$$

для которого добавляется обозначение вектор-функции $b(\cdot) : \mathbb{T} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$.

Здесь подробно не обсуждается, как определить решение СДУ (1) и (2), так как это хорошо известно [2, 4]. Однако для придания строгого смысла дальнейшим соотношениям будем полагать, что функции $a(\cdot)$, $b(\cdot)$ и $\sigma(\cdot)$ имеют достаточную гладкость. Это означает, что все их производные, которые далее появляются в формулах, существуют. Например, в соотношении

$$b(t, x) - a(t, x) = \frac{1}{2} \sum_{l=1}^s \frac{\partial \sigma_{*l}(t, x)}{\partial x} \sigma_{*l}(t, x),$$

где $\sigma_{*l}(\cdot)$ – столбец матричной функции $\sigma(\cdot)$ с номером l , при выполнении которого СДУ (1) и (2) эквивалентны, т.е. задают один и тот же случайный процесс $X(\cdot)$. Если функция $\sigma(\cdot)$ зависит только от времени t , то функции $a(\cdot)$ и $b(\cdot)$ совпадают.

Перейдем к численным методам моделирования динамических систем, описываемых СДУ (1) или (2), однако прежде определим функцию $\mathbb{k}_{n_1 \dots n_k}(\cdot)$:

$$\mathbb{k}_{n_1 \dots n_k}(t_1, \dots, t_k) = \begin{cases} (t_1 - t_0)^{n_1} \dots (t_k - t_0)^{n_k}, & t_1 < \dots < t_k, \\ 0 & \text{в остальных случаях,} \end{cases} \quad (3)$$

где k – некоторое натуральное число (число аргументов функции), а n_1, \dots, n_k – целые неотрицательные числа. В частном случае $n_1 = \dots = n_k = 0$ функцию $\mathbb{k}_{n_1 \dots n_k}(\cdot)$ будем обозначать $\mathbb{k}(\cdot)$:

$$\mathbb{k}(t_1, \dots, t_k) = \begin{cases} 1, & t_1 < \dots < t_k, \\ 0 & \text{в остальных случаях,} \end{cases} \quad (4)$$

а при $k = 1$ будем использовать обозначение $f_n(\cdot)$ и $f(\cdot)$ вместо $\mathbb{k}_{n_1 \dots n_k}(\cdot)$ и $\mathbb{k}(\cdot)$ соответственно: $f_n(t) = (t - t_0)^n$ и $f(t) \equiv 1$.



Для реализации численных методов решения СДУ с высокими порядками сильной сходимости требуется моделирование ПСИ Стратоновича (обозначение S) или Ито (обозначение I) вида

$${}^S \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 \dots j_k)} \mathbb{k}_{n_1 \dots n_k}(\cdot) = \int_{\mathbb{T}} \dots \int_{t_0}^{t_2} \int_{t_0}^{t_1} (t_1 - t_0)^{n_1} \dots (t_k - t_0)^{n_k} \circ dW_{j_1}(t_1) \circ dW_{j_2}(t_2) \circ \dots \circ dW_{j_k}(t_k), \quad (5)$$

$${}^I \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 \dots j_k)} \mathbb{k}_{n_1 \dots n_k}(\cdot) = \int_{\mathbb{T}} \dots \int_{t_0}^{t_2} \int_{t_0}^{t_1} (t_1 - t_0)^{n_1} \dots (t_k - t_0)^{n_k} dW_{j_1}(t_1) dW_{j_2}(t_2) \dots dW_{j_k}(t_k), \quad (6)$$

или в частном случае

$${}^S \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 \dots j_k)} \mathbb{k}(\cdot) = \int_{\mathbb{T}} \dots \int_{t_0}^{t_2} \int_{t_0}^{t_1} dW_{j_1}(t_1) \circ dW_{j_2}(t_2) \circ \dots \circ dW_{j_k}(t_k),$$

$${}^I \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 \dots j_k)} \mathbb{k}(\cdot) = \int_{\mathbb{T}} \dots \int_{t_0}^{t_2} \int_{t_0}^{t_1} dW_{j_1}(t_1) dW_{j_2}(t_2) \dots dW_{j_k}(t_k),$$

где j_1, \dots, j_k – целые числа из множества $\{0, 1, \dots, s\}$, $\mathbb{T} = [t_0, T]$ – заданный отрезок (необязательно тот, на котором рассматривается решение СДУ (1) и (2)), $W_0(t) = t$ и, следовательно, $dW_0(t) = dt$, а $W_1(\cdot), \dots, W_s(\cdot)$ – независимые винеровские процессы – компоненты векторного винеровского процесса $W(\cdot)$, с которыми ассоциированы независимые гауссовские белые шумы $V_1(\cdot), \dots, V_s(\cdot)$. Если хотя бы одна из величин j_1, \dots, j_k равна нулю, то соответствующий интеграл будем называть ПСИ смешанного типа. Отметим, что значение t_0 в формулах (3), (5) и (6) – это левая граница отрезка \mathbb{T} (далее используются ПСИ для разных отрезков).

Запишем сначала разложение решения $X(\cdot)$ СДУ Стратоновича (1):

$$\begin{aligned} X(\vartheta + h) = & \underline{\underline{\underline{X(\vartheta) + ha(\vartheta, X(\vartheta)) + \sum_{j_1=1}^s \sigma_{*j_1}(\vartheta, X(\vartheta)) \mathcal{J}_{[\vartheta, \vartheta+h]}^{W(j_1)} f(\cdot) + \sum_{j_1, j_2=1}^s \mathcal{L}_{j_1} \sigma_{*j_2}(\vartheta, X(\vartheta)) \mathcal{J}_{[\vartheta, \vartheta+h]}^{W(j_1 j_2)} \mathbb{k}(\cdot) +}} \\ & \underline{\underline{\underline{\frac{h^2}{2} \mathcal{L}_0 a(\vartheta, X(\vartheta)) + \sum_{j_1=1}^s [\mathcal{L}_0 \sigma_{*j_1}(\vartheta, X(\vartheta)) \mathcal{J}_{[\vartheta, \vartheta+h]}^{W(0j_1)} \mathbb{k}(\cdot) + \mathcal{L}_{j_1} a(\vartheta, X(\vartheta)) \mathcal{J}_{[\vartheta, \vartheta+h]}^{W(j_1 0)} \mathbb{k}(\cdot)] +}} \\ & \underline{\underline{\underline{+ \sum_{j_1, j_2, j_3=1}^s \mathcal{L}_{j_1} \mathcal{L}_{j_2} \sigma_{*j_3}(\vartheta, X(\vartheta)) \mathcal{J}_{[\vartheta, \vartheta+h]}^{W(j_1 j_2 j_3)} \mathbb{k}(\cdot) + \sum_{j_1, j_2=1}^s \mathcal{L}_0 \mathcal{L}_{j_1} \sigma_{*j_2}(\vartheta, X(\vartheta)) \mathcal{J}_{[\vartheta, \vartheta+h]}^{W(0j_1 j_2)} \mathbb{k}(\cdot) +}} \\ & \underline{\underline{\underline{+ \sum_{j_1, j_2=1}^s \mathcal{L}_{j_1} \mathcal{L}_0 \sigma_{*j_2}(\vartheta, X(\vartheta)) \mathcal{J}_{[\vartheta, \vartheta+h]}^{W(j_1 0 j_2)} \mathbb{k}(\cdot) + \sum_{j_1, j_2=1}^s \mathcal{L}_{j_1} \mathcal{L}_{j_2} a(\vartheta, X(\vartheta)) \mathcal{J}_{[\vartheta, \vartheta+h]}^{W(j_1 j_2 0)} \mathbb{k}(\cdot) +}} \\ & \underline{\underline{\underline{+ \sum_{j_1, j_2, j_3, j_4=1}^s \mathcal{L}_{j_1} \mathcal{L}_{j_2} \mathcal{L}_{j_3} \sigma_{*j_4}(\vartheta, X(\vartheta)) \mathcal{J}_{[\vartheta, \vartheta+h]}^{W(j_1 j_2 j_3 j_4)} \mathbb{k}(\cdot) + \dots,}} \end{aligned} \quad (7)$$

в котором $\vartheta \geq t_0$ и $h > 0$, $\mathbb{k}(\cdot)$ – функция с числом аргументов, совпадающим с кратностью ПСИ, задается формулой (4):

$$k = 2: \mathbb{k}(t_1, t_2) = 1(t_2 - t_1), \quad k = 3: \mathbb{k}(t_1, t_2, t_3) = 1(t_2 - t_1)1(t_3 - t_2),$$

$$k = 4: \mathbb{k}(t_1, t_2, t_3, t_4) = 1(t_2 - t_1)1(t_3 - t_2)1(t_4 - t_3), \quad \dots,$$

где $1(\cdot)$ – единичная ступенчатая функция.

Формула (7) определяет разложение Тейлора–Стратоновича [12]. В нем

$$\mathcal{L}_0 \psi(t, x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \psi(t, x)}{\partial x_i} a_i(t, x), \quad \mathcal{L}_j \psi(t, x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \psi(t, x)}{\partial x_i} \sigma_{ij}(t, x), \quad j = 1, \dots, s,$$

а все ПСИ понимаются в смысле Стратоновича, причем для ПСИ смешанного типа справедливы соотношения

$$\begin{aligned} {}^S \mathcal{J}_{[\vartheta, \vartheta+h]}^{W(0j_1)} \mathbb{k}(\cdot) &= \mathcal{J}_{[\vartheta, \vartheta+h]}^{W(j_1)} f_1(\cdot), & {}^S \mathcal{J}_{[\vartheta, \vartheta+h]}^{W(j_1 0)} \mathbb{k}(\cdot) &= \mathcal{J}_{[\vartheta, \vartheta+h]}^{W(j_1)} (h - f_1(\cdot)), \\ {}^S \mathcal{J}_{[\vartheta, \vartheta+h]}^{W(0j_1 j_2)} \mathbb{k}(\cdot) &= {}^S \mathcal{J}_{[\vartheta, \vartheta+h]}^{W(j_1 j_2)} \mathbb{k}_{10}(\cdot), & {}^S \mathcal{J}_{[\vartheta, \vartheta+h]}^{W(j_1 0 j_2)} \mathbb{k}(\cdot) &= {}^S \mathcal{J}_{[\vartheta, \vartheta+h]}^{W(j_1 j_2)} (\mathbb{k}_{01}(\cdot) - \mathbb{k}_{10}(\cdot)), \\ {}^S \mathcal{J}_{[\vartheta, \vartheta+h]}^{W(j_1 j_2 0)} \mathbb{k}(\cdot) &= {}^S \mathcal{J}_{[\vartheta, \vartheta+h]}^{W(j_1 j_2)} (h \mathbb{k}(\cdot) - \mathbb{k}_{01}(\cdot)), \end{aligned} \quad (8)$$

где в правых частях равенств

$$f_1(t) = t - \vartheta, \quad \mathbb{k}(t_1, t_2) = 1(t_2 - t_1), \quad \mathbb{k}_{10}(t_1, t_2) = (t_1 - \vartheta)1(t_2 - t_1), \quad \mathbb{k}_{01}(t_1, t_2) = (t_2 - \vartheta)1(t_2 - t_1).$$

При их подстановке в выражение (7) с точностью до знаков получается унифицированное разложение Тейлора–Стратоновича [3, 13]. Отличие состоит в том, что в разложении (7) используются ПСИ только от функций вида (4), но часть этих ПСИ смешанного типа. В унифицированном разложении ПСИ смешанного типа отсутствуют за счет перехода к функциям вида (3). Эти разложения эквивалентны, но последнее содержит меньше типов ПСИ.

Для СДУ Ито (2) имеет место аналогичное разложение:

$$\begin{aligned} X(\vartheta+h) &= \underline{\underline{\underline{X(\vartheta)}}} + \underline{\underline{\underline{hb(\vartheta, X(\vartheta))}}} + \sum_{j_1=1}^s \underline{\underline{\underline{\sigma_{*j_1}(\vartheta, X(\vartheta)) \mathcal{J}_{[\vartheta, \vartheta+h]}^{W(j_1)} f(\cdot)}}} + \sum_{j_1, j_2=1}^s \underline{\underline{\underline{\mathcal{L}_{j_1} \sigma_{*j_2}(\vartheta, X(\vartheta)) \mathcal{J}_{[\vartheta, \vartheta+h]}^{W(j_1 j_2)} \mathbb{k}(\cdot)}}} + \\ &+ \underline{\underline{\underline{\frac{h^2}{2} \mathcal{A}^* b(\vartheta, X(\vartheta))}}} + \underline{\underline{\underline{\sum_{j_1=1}^s [\mathcal{A}^* \sigma_{*j_1}(\vartheta, X(\vartheta)) \mathcal{J}_{[\vartheta, \vartheta+h]}^{W(0j_1)} \mathbb{k}(\cdot) + \mathcal{L}_{j_1} b(\vartheta, X(\vartheta)) \mathcal{J}_{[\vartheta, \vartheta+h]}^{W(j_1 0)} \mathbb{k}(\cdot)]}}} + \\ &+ \sum_{j_1, j_2, j_3=1}^s \underline{\underline{\underline{\mathcal{L}_{j_1} \mathcal{L}_{j_2} \sigma_{*j_3}(\vartheta, X(\vartheta)) \mathcal{J}_{[\vartheta, \vartheta+h]}^{W(j_1 j_2 j_3)} \mathbb{k}(\cdot)}}} + \sum_{j_1, j_2=1}^s \underline{\underline{\underline{\mathcal{A}^* \mathcal{L}_{j_1} \sigma_{*j_2}(\vartheta, X(\vartheta)) \mathcal{J}_{[\vartheta, \vartheta+h]}^{W(0j_1 j_2)} \mathbb{k}(\cdot)}}} + \\ &+ \sum_{j_1, j_2=1}^s \underline{\underline{\underline{\mathcal{L}_{j_1} \mathcal{A}^* \sigma_{*j_2}(\vartheta, X(\vartheta)) \mathcal{J}_{[\vartheta, \vartheta+h]}^{W(j_1 0 j_2)} \mathbb{k}(\cdot)}}} + \sum_{j_1, j_2=1}^s \underline{\underline{\underline{\mathcal{L}_{j_1} \mathcal{L}_{j_2} b(\vartheta, X(\vartheta)) \mathcal{J}_{[\vartheta, \vartheta+h]}^{W(j_1 j_2 0)} \mathbb{k}(\cdot)}}} + \\ &+ \sum_{j_1, j_2, j_3, j_4=1}^s \underline{\underline{\underline{\mathcal{L}_{j_1} \mathcal{L}_{j_2} \mathcal{L}_{j_3} \sigma_{*j_4}(\vartheta, X(\vartheta)) \mathcal{J}_{[\vartheta, \vartheta+h]}^{W(j_1 j_2 j_3 j_4)} \mathbb{k}(\cdot)}}} + \dots \end{aligned} \quad (9)$$



Формула (9) описывает разложение Тейлора–Ито [12]. Здесь используется обратный производящий оператор \mathcal{A}^* случайного процесса $X(\cdot)$, заданный формулой

$$\mathcal{A}^* \psi(t, x) = \sum_{i=1}^n b_i(t, x) \frac{\partial \psi(t, x)}{\partial x_i} + \frac{1}{2} \sum_{i, j=1}^n g_{ij}(t, x) \frac{\partial^2 \psi(t, x)}{\partial x_i \partial x_j}, \quad g_{ij}(t, x) = \sum_{l=1}^s \sigma_{il}(t, x) \sigma_{jl}(t, x),$$

а все ПСИ следует понимать в смысле Ито, что отражено в обозначениях. Для них справедливы соотношения вида (8), но с заменой обозначения S на I.

Результат их подстановки в формулу (9) с точностью до знаков дает унифицированное разложение Тейлора–Ито [3, 13]. Как и в случае унифицированного разложения Тейлора–Стратоновича, унифицированное разложение Тейлора–Ито не содержит ПСИ смешанного типа и общее количество типов ПСИ меньше.

Отличие между дифференциальными операторами \mathcal{L}_0 и \mathcal{A}^* отражает правила дифференцирования при нелинейном преобразовании решений СДУ Стратоновича и Ито: обычное правило дифференцирования сложной функции и формулу Ито соответственно [1, 3, 12].

На основе разложений Тейлора–Стратоновича и Тейлора–Ито построено семейство численных методов решения СДУ [1, 3, 12–15]. Для их описания введем равномерную сетку $\{\mathcal{G}_i\}$ с заданным постоянным шагом h – шагом численного интегрирования, определяющую разбиение отрезка $[t_0, T]$:

$$\mathcal{G}_{i+1} = \mathcal{G}_i + h, \quad i = 0, 1, \dots, N-1; \quad \mathcal{G}_0 = t_0, \quad \mathcal{G}_N = T; \quad N = \frac{T - t_0}{h}.$$

Более общий случай переменного шага, задающего разбиение отрезка $[t_0, T]$, также может быть рассмотрен. При численном решении формируется дискретная аппроксимация случайного процесса $X(\cdot)$ в узлах сетки $\{\mathcal{G}_i\}$. Обозначим ее $\{X_i\}$: $X(\mathcal{G}_i) \approx X_i$.

Для численных методов ключевым является то, в каком смысле понимается сходимость и каким является порядок сходимости. Будем говорить, что численный метод имеет порядок среднев квадратической сходимости p , если $\max_{i \in \{1, \dots, N\}} (E |X(\mathcal{G}_i) - X_i|^2)^{1/2} \leq Ch^p$, и численный метод имеет порядок сильной сходимости p , если $\max_{i \in \{1, \dots, N\}} E |X(\mathcal{G}_i) - X_i| \leq Ch^p$, где E означает математическое ожидание, $C > 0$ – константа, не зависящая от величины h , и $h \rightarrow 0$. Отметим, что второе неравенство следует из первого. Это можно показать с помощью неравенств Йенсена или Коши–Буняковского [2].

Для построения численного метода с порядком среднев квадратической или сильной сходимости p достаточно оставить в правых частях формул (7) и (9) слагаемые, подчеркнутые $r = 2p$ раз (при нечетных r старший член разложения, не содержащий ПСИ, нужно брать из формулы (9)). Например, из разложения (9) получаем следующие явные разностные схемы для численного решения СДУ Ито (2):

$$\begin{aligned}
 p = 0.5: \quad X_{i+1} &= X_i + hb(\vartheta_i, X_i) + \sum_{j_1=1}^S \sigma_{*j_1}(\vartheta_i, X_i) \mathcal{J}_{[\vartheta_i, \vartheta_i+h]}^{W(j_1)} f(\cdot), \\
 p = 1.0: \quad X_{i+1} &= X_i + hb(\vartheta_i, X_i) + \sum_{j_1=1}^S \sigma_{*j_1}(\vartheta_i, X_i) \mathcal{J}_{[\vartheta_i, \vartheta_i+h]}^{W(j_1)} f(\cdot) + \sum_{j_1, j_2=1}^S \mathcal{L} \sigma_{*j_2}(\vartheta_i, X_i) {}^1 \mathcal{J}_{[\vartheta_i, \vartheta_i+h]}^{W(j_1 j_2)} \mathbb{k}(\cdot), \\
 p = 1.5: \quad X_{i+1} &= X_i + hb(\vartheta_i, X_i) + \sum_{j_1=1}^S \sigma_{*j_1}(\vartheta_i, X_i) \mathcal{J}_{[\vartheta_i, \vartheta_i+h]}^{W(j_1)} f(\cdot) + \sum_{j_1, j_2=1}^S \mathcal{L}_{j_1} \sigma_{*j_2}(\vartheta_i, X_i) {}^1 \mathcal{J}_{[\vartheta_i, \vartheta_i+h]}^{W(j_1 j_2)} \mathbb{k}(\cdot) + \\
 &+ \frac{h^2}{2} \mathcal{A}^* b(\vartheta_i, X_i) + \sum_{j_1=1}^S \left[\mathcal{A}^* \sigma_{*j_1}(\vartheta_i, X_i) {}^1 \mathcal{J}_{[\vartheta_i, \vartheta_i+h]}^{W(0j_1)} \mathbb{k}(\cdot) + \mathcal{L}_{j_1} b(\vartheta_i, X_i) {}^1 \mathcal{J}_{[\vartheta_i, \vartheta_i+h]}^{W(j_1 0)} \mathbb{k}(\cdot) \right] + \\
 &+ \sum_{j_1, j_2, j_3=1}^S \mathcal{L}_{j_1} \mathcal{L}_{j_2} \sigma_{*j_3}(\vartheta_i, X_i) {}^1 \mathcal{J}_{[\vartheta_i, \vartheta_i+h]}^{W(j_1 j_2 j_3)} \mathbb{k}(\cdot), \\
 p = 2.0: \quad X_{i+1} &= X_i + hb(\vartheta_i, X_i) + \sum_{j_1=1}^S \sigma_{*j_1}(\vartheta_i, X_i) \mathcal{J}_{[\vartheta_i, \vartheta_i+h]}^{W(j_1)} f(\cdot) + \sum_{j_1, j_2=1}^S \mathcal{L}_{j_1} \sigma_{*j_2}(\vartheta_i, X_i) {}^1 \mathcal{J}_{[\vartheta_i, \vartheta_i+h]}^{W(j_1 j_2)} \mathbb{k}(\cdot) + \\
 &+ \frac{h^2}{2} \mathcal{A}^* b(\vartheta_i, X_i) + \sum_{j_1=1}^S \left[\mathcal{A}^* \sigma_{*j_1}(\vartheta_i, X_i) {}^1 \mathcal{J}_{[\vartheta_i, \vartheta_i+h]}^{W(0j_1)} \mathbb{k}(\cdot) + \mathcal{L}_{j_1} b(\vartheta_i, X_i) {}^1 \mathcal{J}_{[\vartheta_i, \vartheta_i+h]}^{W(j_1 0)} \mathbb{k}(\cdot) \right] + \\
 &+ \sum_{j_1, j_2, j_3=1}^S \mathcal{L}_{j_1} \mathcal{L}_{j_2} \sigma_{*j_3}(\vartheta_i, X_i) {}^1 \mathcal{J}_{[\vartheta_i, \vartheta_i+h]}^{W(j_1 j_2 j_3)} \mathbb{k}(\cdot) + \sum_{j_1, j_2=1}^S \mathcal{A}^* \mathcal{L}_{j_1} \sigma_{*j_2}(\vartheta_i, X_i) {}^1 \mathcal{J}_{[\vartheta_i, \vartheta_i+h]}^{W(0j_1 j_2)} \mathbb{k}(\cdot) + \\
 &+ \sum_{j_1, j_2=1}^S \mathcal{L}_{j_1} \mathcal{A}^* \sigma_{*j_2}(\vartheta_i, X_i) {}^1 \mathcal{J}_{[\vartheta_i, \vartheta_i+h]}^{W(j_1 0 j_2)} \mathbb{k}(\cdot) + \sum_{j_1, j_2=1}^S \mathcal{L}_{j_1} \mathcal{L}_{j_2} b(\vartheta_i, X_i) {}^1 \mathcal{J}_{[\vartheta_i, \vartheta_i+h]}^{W(j_1 j_2 0)} \mathbb{k}(\cdot) + \\
 &+ \sum_{j_1, j_2, j_3, j_4=1}^S \mathcal{L}_{j_1} \mathcal{L}_{j_2} \mathcal{L}_{j_3} \sigma_{*j_4}(\vartheta_i, X_i) {}^1 \mathcal{J}_{[\vartheta_i, \vartheta_i+h]}^{W(j_1 j_2 j_3 j_4)} \mathbb{k}(\cdot),
 \end{aligned}$$

и аналогично для СДУ Стратоновича (1):

$$\begin{aligned}
 p = 1.0: \quad X_{i+1} &= X_i + ha(\vartheta_i, X_i) + \sum_{j_1=1}^S \sigma_{*j_1}(\vartheta_i, X_i) \mathcal{J}_{[\vartheta_i, \vartheta_i+h]}^{W(j_1)} f(\cdot) + \sum_{j_1, j_2=1}^S \mathcal{L}_{j_1} \sigma_{*j_2}(\vartheta_i, X_i) {}^S \mathcal{J}_{[\vartheta_i, \vartheta_i+h]}^{W(j_1 j_2)} \mathbb{k}(\cdot), \\
 p = 1.5: \quad X_{i+1} &= X_i + ha(\vartheta_i, X_i) + \sum_{j_1=1}^S \sigma_{*j_1}(\vartheta_i, X_i) \mathcal{J}_{[\vartheta_i, \vartheta_i+h]}^{W(j_1)} f(\cdot) + \sum_{j_1, j_2=1}^S \mathcal{L}_{j_1} \sigma_{*j_2}(\vartheta_i, X_i) {}^S \mathcal{J}_{[\vartheta_i, \vartheta_i+h]}^{W(j_1 j_2)} \mathbb{k}(\cdot) + \\
 &+ \frac{h^2}{2} \mathcal{A}^* b(\vartheta_i, X_i) + \sum_{j_1=1}^S \left[\mathcal{L}_0 \sigma_{*j_1}(\vartheta_i, X_i) {}^S \mathcal{J}_{[\vartheta_i, \vartheta_i+h]}^{W(0j_1)} \mathbb{k}(\cdot) + \mathcal{L}_{j_1} a(\vartheta_i, X_i) {}^S \mathcal{J}_{[\vartheta_i, \vartheta_i+h]}^{W(j_1 0)} \mathbb{k}(\cdot) \right] + \\
 &+ \sum_{j_1, j_2, j_3=1}^S \mathcal{L}_{j_1} \mathcal{L}_{j_2} \sigma_{*j_3}(\vartheta_i, X_i) {}^S \mathcal{J}_{[\vartheta_i, \vartheta_i+h]}^{W(j_1 j_2 j_3)} \mathbb{k}(\cdot), \\
 p = 2.0: \quad X_{i+1} &= X_i + ha(\vartheta_i, X_i) + \sum_{j_1=1}^S \sigma_{*j_1}(\vartheta_i, X_i) \mathcal{J}_{[\vartheta_i, \vartheta_i+h]}^{W(j_1)} f(\cdot) + \sum_{j_1, j_2=1}^S \mathcal{L}_{j_1} \sigma_{*j_2}(\vartheta_i, X_i) {}^S \mathcal{J}_{[\vartheta_i, \vartheta_i+h]}^{W(j_1 j_2)} \mathbb{k}(\cdot) + \\
 &+ \frac{h^2}{2} \mathcal{L}_0 a(\vartheta_i, X_i) + \sum_{j_1=1}^S \left[\mathcal{L}_0 \sigma_{*j_1}(\vartheta_i, X_i) {}^S \mathcal{J}_{[\vartheta_i, \vartheta_i+h]}^{W(0j_1)} \mathbb{k}(\cdot) + \mathcal{L}_{j_1} a(\vartheta_i, X_i) {}^S \mathcal{J}_{[\vartheta_i, \vartheta_i+h]}^{W(j_1 0)} \mathbb{k}(\cdot) \right] + \\
 &+ \sum_{j_1, j_2, j_3=1}^S \mathcal{L}_{j_1} \mathcal{L}_{j_2} \sigma_{*j_3}(\vartheta_i, X_i) {}^S \mathcal{J}_{[\vartheta_i, \vartheta_i+h]}^{W(j_1 j_2 j_3)} \mathbb{k}(\cdot) + \sum_{j_1, j_2=1}^S \mathcal{L}_0 \mathcal{L}_{j_1} \sigma_{*j_2}(\vartheta_i, X_i) {}^S \mathcal{J}_{[\vartheta_i, \vartheta_i+h]}^{W(0j_1 j_2)} \mathbb{k}(\cdot) + \\
 &+ \sum_{j_1, j_2=1}^S \mathcal{L}_{j_1} \mathcal{L}_0 \sigma_{*j_2}(\vartheta_i, X_i) {}^S \mathcal{J}_{[\vartheta_i, \vartheta_i+h]}^{W(j_1 0 j_2)} \mathbb{k}(\cdot) + \sum_{j_1, j_2=1}^S \mathcal{L}_{j_1} \mathcal{L}_{j_2} a(\vartheta_i, X_i) {}^S \mathcal{J}_{[\vartheta_i, \vartheta_i+h]}^{W(j_1 j_2 0)} \mathbb{k}(\cdot) + \\
 &+ \sum_{j_1, j_2, j_3, j_4=1}^S \mathcal{L}_{j_1} \mathcal{L}_{j_2} \mathcal{L}_{j_3} \sigma_{*j_4}(\vartheta_i, X_i) {}^S \mathcal{J}_{[\vartheta_i, \vartheta_i+h]}^{W(j_1 j_2 j_3 j_4)} \mathbb{k}(\cdot).
 \end{aligned}$$



Метод с порядком сходимости 0.5 называется методом Эйлера–Маруямы, а методы с порядком 1.0 – это два варианта метода Мильштейна [15].

Отметим, что моделирование ПСИ на отрезке $[\vartheta, \vartheta + h]$ не отличается от моделирования ПСИ на отрезке $[0, h]$. Вообще говоря, достаточно ограничиться отрезком $[0, 1]$, а величину шага h учитывать как числовой коэффициент. Соответствие между числовыми коэффициентами и верхними мультииндексами $(j_1 \dots j_k)$, определяющими ПСИ в разложениях (7) и (9), имеет вид

$$\begin{aligned} h^{0.5} &: (j_1), & h^{1.0} &: (j_1 j_2), \\ h^{1.5} &: (0j_1), (j_1 0), (j_1 j_2 j_3), & h^{2.0} &: (0j_1 j_2), (j_1 0j_2), (j_1 j_2 0), (j_1 j_2 j_3 j_4), \end{aligned}$$

и эти числовые коэффициенты, очевидно, формируют порядок p среднеквадратической или сильной сходимости численного метода. Например, случайные величины ${}^S \mathcal{J}_{[\vartheta, \vartheta+h]}^{W(j_1 j_2 j_3)} \mathbb{k}(\cdot)$ и $h^{1.5} \cdot {}^S \mathcal{J}_{[0,1]}^{W(j_1 j_2 j_3)} \mathbb{k}(\cdot)$ имеют одинаковые законы распределения.

Точное моделирование некоторых ПСИ Стратоновича и Ито, например, когда величины j_1, \dots, j_k равны, не составляет проблемы. Но в общем случае их можно моделировать только приближенно. В частности, применяется численное интегрирование и метод, основанный на разложении функций $\mathbb{k}_{n_1 \dots n_k}(\cdot)$ и $\mathbb{k}(\cdot)$ по функциям базисной системы пространства $L_2(\mathbb{T}^k)$, образованной функциями базисной системы $\{q(i, \cdot)\}_{i=0}^\infty$ пространства $L_2(\mathbb{T})$ [3, 13–15]. При специальном выборе шага численного интегрирования и использовании в качестве базисной системы $\{q(i, \cdot)\}_{i=0}^\infty$ функций Уолша или Хаара эти методы фактически идентичны [7].

В дополнение к перечисленным методам можно предложить подход, основанный на спектральной форме математического описания линейных стохастических систем управления [5]. Он базируется на ортогональных разложениях, но позволяет избежать явного разложения функций $\mathbb{k}_{n_1 \dots n_k}(\cdot)$ и $\mathbb{k}(\cdot)$ для всех требуемых значений k и обойтись минимальным набором так называемых спектральных характеристик, связанных с операциями интегрирования и умножения. При моделировании ПСИ с помощью спектральной формы математического описания для реализации численных методов решения СДУ на основе разложений (7) и (9) будем называть соответствующие численные методы численно-спектральными методами.

3. СПЕКТРАЛЬНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ПОВТОРНЫХ СТОХАСТИЧЕСКИХ ИНТЕГРАЛОВ

В основе предлагаемых алгоритмов моделирования лежат следующие теоремы о спектральном представлении ПСИ (j_1, \dots, j_k – числа из множества $\{1, \dots, s\}$).

Теорема 1. Пусть $\mathcal{V}_1, \dots, \mathcal{V}_s$ – спектральные характеристики белых шумов $V_1(\cdot), \dots, V_s(\cdot)$ соответственно, P^{-1} – спектральная характеристика оператора интегрирования, A – спектральная характеристика оператора умножения на функцию $f_1(t) = t - t_0$, V – спектральная характеристика множительного звена. Спектральные характеристики P^{-1} , A и V определены относительно базисной системы $\{q(i, \cdot)\}_{i=0}^\infty$

пространства $L_2(\mathbb{T})$. Тогда ПСИ Стратоновича (5) представляется с помощью соотношений

$$\begin{aligned} {}^S \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 \dots j_k)} \mathbb{K}_{n_1 \dots n_k}(\cdot) &= \mathcal{V}_{j_k}^T A^{n_k} \mathcal{X}_{k-1}, \\ \mathcal{X}_l &= P^{-1} A^{n_l} (V \mathcal{V}_{j_l}) \mathcal{X}_{l-1}, \quad l = 2, \dots, k-1, \quad \mathcal{X}_1 = P^{-1} A^{n_1} \mathcal{V}_{j_1}, \end{aligned} \quad (10)$$

или в явном виде

$${}^S \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 \dots j_k)} \mathbb{K}_{n_1 \dots n_k}(\cdot) = \mathcal{V}_{j_k}^T A^{n_k} P^{-1} A^{n_{k-1}} (V \mathcal{V}_{j_{k-1}}) \dots P^{-1} A^{n_2} (V \mathcal{V}_{j_2}) P^{-1} A^{n_1} \mathcal{V}_{j_1}. \quad (11)$$

Теорема 2. Пусть выполнены условия теоремы 1 и, кроме того, $\mathbf{1}$ – это спектральная характеристика функции $f(t) \equiv 1$, определенная относительно базисной системы $\{q(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$ пространства $L_2(\mathbb{T})$. Тогда ПСИ Ито (6) представляется с помощью соотношений

$$\begin{aligned} {}^I \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 \dots j_k)} \mathbb{K}_{n_1 \dots n_k}(\cdot) &= -\frac{1}{2} \delta_{j_{k-1} j_k} \mathbf{1}^T A^{n_{k-1} + n_k} \mathcal{X}_{k-2} + \mathcal{V}_{j_k}^T A^{n_k} \mathcal{X}_{k-1}, \\ \mathcal{X}_l &= -\frac{1}{2} \delta_{j_{l-1} j_l} P^{-1} A^{n_{l-1} + n_l} \mathcal{X}_{l-2} + P^{-1} A^{n_l} (V \mathcal{V}_{j_l}) \mathcal{X}_{l-1}, \quad l = 2, \dots, k-1, \quad \mathcal{X}_0 = \mathbf{1}, \quad \mathcal{X}_1 = P^{-1} A^{n_1} \mathcal{V}_{j_1}, \end{aligned} \quad (12)$$

где $\delta_{j_{l-1} j_l}$ – символ Кронекера, $l = 2, \dots, k$.

Эти теоремы доказаны в статье [6], а в частном случае $n_1 = \dots = n_k = 0$ – в работах [16, 17]. Все используемые в них обозначения подробно описаны в монографии [5].

Для самого простого варианта $n_1 = \dots = n_k = 0$ получаются следующие спектральные представления ПСИ Стратоновича (вместо формул (10) и (11)):

$${}^S \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 \dots j_k)} \mathbb{K}(\cdot) = \mathcal{V}_{j_k}^T \mathcal{X}_{k-1}, \quad \mathcal{X}_l = P^{-1} (V \mathcal{V}_{j_l}) \mathcal{X}_{l-1}, \quad l = 2, \dots, k-1, \quad \mathcal{X}_1 = P^{-1} \mathcal{V}_{j_1}, \quad (13)$$

или в явном виде

$${}^S \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 \dots j_k)} \mathbb{K}(\cdot) = \mathcal{V}_{j_k}^T P^{-1} (V \mathcal{V}_{j_{k-1}}) \dots P^{-1} (V \mathcal{V}_{j_2}) P^{-1} \mathcal{V}_{j_1}, \quad (14)$$

и спектральные представления ПСИ Ито (вместо формул (12)):

$$\begin{aligned} {}^I \mathcal{J}_{\mathbb{T}}^{W(j_1 \dots j_k)} \mathbb{K}(\cdot) &= -\frac{1}{2} \delta_{j_{k-1} j_k} \mathbf{1}^T \mathcal{X}_{k-2} + \mathcal{V}_{j_k}^T \mathcal{X}_{k-1}, \\ \mathcal{X}_l &= -\frac{1}{2} \delta_{j_{l-1} j_l} P^{-1} \mathcal{X}_{l-2} + P^{-1} (V \mathcal{V}_{j_l}) \mathcal{X}_{l-1}, \quad l = 2, \dots, k-1, \quad \mathcal{X}_0 = \mathbf{1}, \quad \mathcal{X}_1 = P^{-1} \mathcal{V}_{j_1}. \end{aligned} \quad (15)$$

Основу приведенных выражений составляет спектральная форма математического описания систем управления. Фактически, любой ПСИ рассматривается как сечение выходного сигнала полилинейной системы управления в момент времени T (при условии $\mathbb{T} = [t_0, T]$), но можно рассматривать и отрезок $[\mathcal{G}, \mathcal{G} + h]$. Входными сигналами для нее выступают гауссовские белые шумы $V_1(\cdot), \dots, V_s(\cdot)$, соответствующие винеровским процессам $W_1(\cdot), \dots, W_s(\cdot)$, относительно которых определен ПСИ. Сама система управления образована последовательными соединениями усилительных,



интегрирующих и множительных звеньев, каждому из них ставится в соответствие спектральная характеристика (двумерная или трехмерная нестационарная передаточная функция). Используемый математический аппарат предполагает, что операции дифференцирования и интегрирования понимаются в обычном смысле, поэтому наиболее просто спектральная форма математического описания адаптируется к представлению ПСИ Стратоновича. Для представления ПСИ Ито сначала проводится преобразование к форме Стратоновича, что добавляет системе управления дополнительные параллельные соединения.

Используя в качестве некоторых входных сигналов функцию $f(t) \equiv 1$, предложенный подход обеспечивает спектральное представление ПСИ смешанного типа с корректировкой формул для ПСИ Ито, а именно с заменой величин δ_{j_l-1, j_l} на $\delta_{j_l-1, j_l}^* = \delta_{j_l-1, j_l} (1 - \delta_{j_l, 0})$, $l = 2, \dots, k$. Формулы для ПСИ Стратоновича остаются без изменений. Такой подход расширяет множество, которому принадлежат числа j_1, \dots, j_k , до $\{0, 1, \dots, s\}$.

Более того, задавая входные сигналы базисными функциями из множества $\{q(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$, можно получить элементы разложения функций $\mathbb{k}_{n_1 \dots n_k}(\cdot)$ и $\mathbb{k}(\cdot)$ по базисным функциям, т.е. фактически характеристику системы управления в спектральной форме математического описания. Спектральная характеристика функции $f(\cdot)$ встречалась выше, ее обозначение $\mathbf{1}$, а спектральная характеристика базисной функции $q(i, \cdot)$ – это столбец бесконечной единичной матрицы с номером i , его обозначение E_i . Таким образом, формулы (10)–(15) довольно универсальны и могут применяться для моделирования всех ПСИ, необходимых для реализации численных методов решения СДУ, а также для вычисления коэффициентов разложения функций $\mathbb{k}_{n_1 \dots n_k}(\cdot)$ и $\mathbb{k}(\cdot)$. Последние требуются для реализации метода, подробно описанного в работах [3, 13, 14].

Немаловажно, что базисная система $\{q(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$ пространства $L_2(\mathbb{T})$ может быть достаточно произвольной (ограничения связаны с определением спектральной характеристики V). Для нахождения спектральной характеристики P^{-1} оператора интегрирования (двумерной нестационарной передаточной функции интегрирующего звена), спектральной характеристики A оператора умножения на функцию $f_1(\cdot)$ (двумерной нестационарной передаточной функции усилительного звена), спектральной характеристики V множительного звена (трехмерной нестационарной передаточной функции множительного звена), а также спектральной характеристики $\mathbf{1}$ функции $f(\cdot)$ достаточно применять существующее алгоритмическое обеспечение спектрального метода, которое разрабатывалось на протяжении более пятидесяти лет [9–11].

Вообще говоря, теоремы 1 и 2 дают точное представление ПСИ Стратоновича и Ито, но эти представления содержат бесконечные матрицы-столбцы, плоские и пространственные матрицы. При непосредственном моделировании ПСИ предполагается, что все спектральные характеристики, которые фигурируют в формулировках теорем 1 и 2, являются усеченными до некоторого выбранного порядка L . Это означает, что $\mathcal{V}_1, \dots, \mathcal{V}_s$ – L -мерные случайные векторы, компоненты которых независимы

в совокупности и имеют стандартное нормальное распределение, $\mathbf{1}$ – L -мерный вектор, P^{-1} и A – квадратные матрицы $L \times L$, V – пространственная матрица $L \times L \times L$. При таком подходе осуществляется приближенное моделирование.

Формулы для нахождения указанных выше спектральных характеристик здесь не приводятся, поскольку они неоднократно публиковались и в научных статьях, и в монографиях, и в учебных пособиях [5, 9–11]. Однако в следующем разделе приведены программы нахождения их усеченных вариантов при выборе базисной системы косинусоид, которая зарекомендовала себя, как наиболее перспективная (для большей части ПСИ она обеспечивает минимальную среднеквадратическую ошибку аппроксимации в сравнении с другими базисными системами: полиномами Лежандра, функциями Уолша или Хаара, тригонометрическими функциями) [8].

4. АЛГОРИТМИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ЧИСЛЕННО-СПЕКТРАЛЬНЫХ МЕТОДОВ

Сосредоточим внимание на моделировании ПСИ согласно теоремам 1 и 2 для реализации численно-спектральных методов решения СДУ (методов моделирования траекторий стохастических динамических систем). Ниже приведены соответствующие программы для системы компьютерной математики Mathcad.

Рис. 1–3 содержат программы моделирования ПСИ Стратоновича. Для программ ssi2(Y,J), ssi3(Y,J), ssi4(Y,J) (см. рис. 1) используются следующие параметры: Y – набор реализаций спектральных характеристик независимых гауссовских белых шумов, а также векторный параметр J – мультииндекс $(j_1 \dots j_k)$ с номерами винеровских процессов, относительно которых определены ПСИ. Они соответствуют функции $\mathbb{k}(\cdot)$.

$$\begin{aligned} \text{ssi2}(\Upsilon, J) &:= \Upsilon_{J_1}^T I \Upsilon_{J_0} \\ \text{ssi3}(\Upsilon, J) &:= \Upsilon_{J_2}^T I \text{VF}(V, \Upsilon_{J_1}) I \Upsilon_{J_0} \\ \text{ssi4}(\Upsilon, J) &:= \Upsilon_{J_3}^T I \text{VF}(V, \Upsilon_{J_2}) I \text{VF}(V, \Upsilon_{J_1}) I \Upsilon_{J_0} \end{aligned}$$

Рис. 1. Моделирование ПСИ Стратоновича ${}^S \mathcal{J}_T^{W(j_1 \dots j_k)} \mathbb{k}(\cdot)$ кратности $k = 2, 3, 4$

Идентификаторы программ, которые приведены на рис. 2, содержат постфикс n и дополнительный векторный параметр n с показателями степеней n_1, \dots, n_k (в программе принята нумерация индексов с нуля) – это программы ssi2n(Y,J,n), ssi3n(Y,J,n), ssi4n(Y,J,n). Они соответствуют функции $\mathbb{k}_{n_1 \dots n_k}(\cdot)$.

$$\begin{aligned} \text{ssi2n}(\Upsilon, J, n) &:= \Upsilon_{J_1}^T A^{n_1} I A^{n_0} \Upsilon_{J_0} \\ \text{ssi3n}(\Upsilon, J, n) &:= \Upsilon_{J_2}^T A^{n_2} I A^{n_1} \text{VF}(V, \Upsilon_{J_1}) I A^{n_0} \Upsilon_{J_0} \\ \text{ssi4n}(\Upsilon, J, n) &:= \Upsilon_{J_3}^T A^{n_3} I A^{n_2} \text{VF}(V, \Upsilon_{J_2}) I A^{n_1} \text{VF}(V, \Upsilon_{J_1}) I A^{n_0} \Upsilon_{J_0} \end{aligned}$$

Рис. 2. Моделирование ПСИ Стратоновича ${}^S \mathcal{J}_T^{W(j_1 \dots j_k)} \mathbb{k}_{n_1 \dots n_k}(\cdot)$ кратности $k = 2, 3, 4$



Программы $ssi(Y, J)$ и $ssin(Y, J, n)$ подходят для произвольной кратности (см. рис. 3), кратность определяется как размер передаваемых векторных параметров.

$$ssi(\Upsilon, J) := \begin{cases} k \leftarrow \text{rows}(J) \\ X_1 \leftarrow I \Upsilon_{J_0} \\ \text{for } l \in 2 \dots k-1 & \text{if } k > 2 \\ X_l \leftarrow IVF(V, \Upsilon_{J_{l-1}}) X_{l-1} \\ \Upsilon_{J_{k-1}}^T X_{k-1} \end{cases} \quad ssin(\Upsilon, J, n) := \begin{cases} k \leftarrow \text{rows}(J) \\ X_1 \leftarrow IA^{n_0} \Upsilon_{J_0} \\ \text{for } l \in 2 \dots k-1 & \text{if } k > 2 \\ X_l \leftarrow IA^{n_{l-1}} VF(V, \Upsilon_{J_{l-1}}) X_{l-1} \\ \Upsilon_{J_{k-1}}^T A^{n_{k-1}} X_{k-1} \end{cases}$$

Рис. 3. Моделирование ПСИ Стратоновича ${}^s \mathcal{J}_T^{W(j_1 \dots j_k)} \mathbb{k}(\cdot)$ и ${}^s \mathcal{J}_T^{W(j_1 \dots j_k)} \mathbb{k}_{n_1 \dots n_k}(\cdot)$ произвольной кратности

Далее на рис. 4–6 показаны программы моделирования ПСИ Ито, они имеют те же параметры, а их идентификаторы отличаются одной буквой: $isi2(Y, J)$, $isi3(Y, J)$, $isi4(Y, J)$, $isi(Y, J)$, $isi2n(Y, J, n)$, $isi3n(Y, J, n)$, $isi4n(Y, J, n)$ и $isin(Y, J, n)$.

$$isi2(\Upsilon, J) := \begin{cases} X_0 \leftarrow F1 \\ X_1 \leftarrow I \Upsilon_{J_0} \\ \Upsilon_{J_1}^T X_1 - \frac{J_0 = J_1}{2} F1^T X_0 \end{cases} \quad isi4(\Upsilon, J) := \begin{cases} X_0 \leftarrow F1 \\ X_1 \leftarrow I \Upsilon_{J_0} \\ X_2 \leftarrow IVF(V, \Upsilon_{J_1}) X_1 - \frac{J_0 = J_1}{2} I X_0 \\ X_3 \leftarrow IVF(V, \Upsilon_{J_2}) X_2 - \frac{J_1 = J_2}{2} I X_1 \\ \Upsilon_{J_3}^T X_3 - \frac{J_2 = J_3}{2} F1^T X_2 \end{cases}$$

$$isi3(\Upsilon, J) := \begin{cases} X_0 \leftarrow F1 \\ X_1 \leftarrow I \Upsilon_{J_0} \\ X_2 \leftarrow IVF(V, \Upsilon_{J_1}) X_1 - \frac{J_0 = J_1}{2} I X_0 \\ \Upsilon_{J_2}^T X_2 - \frac{J_1 = J_2}{2} F1^T X_1 \end{cases}$$

Рис. 4. Моделирование ПСИ Ито ${}^1 \mathcal{J}_T^{W(j_1 \dots j_k)} \mathbb{k}(\cdot)$ кратности $k = 2, 3, 4$

$$isi2n(\Upsilon, J, n) := \begin{cases} X_0 \leftarrow F1 \\ X_1 \leftarrow IA^{n_0} \Upsilon_{J_0} \\ \Upsilon_{J_1}^T A^{n_1} X_1 - \frac{J_0 = J_1}{2} F1^T A^{n_0+n_1} X_0 \end{cases} \quad isi4n(\Upsilon, J, n) := \begin{cases} X_0 \leftarrow F1 \\ X_1 \leftarrow IA^{n_0} \Upsilon_{J_0} \\ X_2 \leftarrow IA^{n_1} VF(V, \Upsilon_{J_1}) X_1 - \frac{J_0 = J_1}{2} IA^{n_0+n_1} X_0 \\ X_3 \leftarrow IA^{n_2} VF(V, \Upsilon_{J_2}) X_2 - \frac{J_1 = J_2}{2} IA^{n_1+n_2} X_1 \\ \Upsilon_{J_3}^T A^{n_3} X_3 - \frac{J_2 = J_3}{2} F1^T A^{n_2+n_3} X_2 \end{cases}$$

$$isi3n(\Upsilon, J, n) := \begin{cases} X_0 \leftarrow F1 \\ X_1 \leftarrow IA^{n_0} \Upsilon_{J_0} \\ X_2 \leftarrow IA^{n_1} VF(V, \Upsilon_{J_1}) X_1 - \frac{J_0 = J_1}{2} IA^{n_0+n_1} X_0 \\ \Upsilon_{J_2}^T A^{n_2} X_2 - \frac{J_1 = J_2}{2} F1^T A^{n_1+n_2} X_1 \end{cases}$$

Рис. 5. Моделирование ПСИ Ито ${}^1 \mathcal{J}_T^{W(j_1 \dots j_k)} \mathbb{k}_{n_1 \dots n_k}(\cdot)$ кратности $k = 2, 3, 4$

$$\begin{array}{l}
 \text{isi}(\Upsilon, J) := \left\{ \begin{array}{l} k \leftarrow \text{rows}(J) \\ X_0 \leftarrow F1 \\ X_1 \leftarrow I \Upsilon_{J_0} \\ \text{for } 1 \in 2..k-1 \qquad \qquad \qquad \text{if } k > 2 \\ \quad X_1 \leftarrow \text{IVF}\left(v, \Upsilon_{J_{1-1}}\right) X_{1-1} - \frac{J_{1-2} = J_{1-1}}{2} I X_{1-2} \\ \quad \Upsilon_{J_{k-1}}^T X_{k-1} - \frac{J_{k-2} = J_{k-1}}{2} F1^T X_{k-2} \end{array} \right. \\
 \\
 \text{isin}(\Upsilon, J, n) := \left\{ \begin{array}{l} k \leftarrow \text{rows}(J) \\ X_0 \leftarrow F1 \\ X_1 \leftarrow IA^{n_0} \Upsilon_{J_0} \\ \text{for } 1 \in 2..k-1 \qquad \qquad \qquad \text{if } k > 2 \\ \quad X_1 \leftarrow IA^{n_{1-1}} \text{VF}\left(v, \Upsilon_{J_{1-1}}\right) X_{1-1} - \frac{J_{1-2} = J_{1-1}}{2} IA^{n_{1-2}+n_{1-1}} X_{1-2} \\ \quad \Upsilon_{J_{k-1}}^T A^{n_{k-1}} X_{k-1} - \frac{J_{k-2} = J_{k-1}}{2} F1^T A^{n_{k-2}+n_{k-1}} X_{k-2} \end{array} \right.
 \end{array}$$

Рис. 6. Моделирование ПСИ Ито ${}^1 \mathcal{J}_T^{W(j_1 \dots j_k)} \mathbb{k}(\cdot)$ и ${}^1 \mathcal{J}_T^{W(j_1 \dots j_k)} \mathbb{k}_{n_1 \dots n_k}(\cdot)$ произвольной кратности

Для моделирования ПСИ Стратоновича и Ито должны быть предварительно заданы величины t_0 и T (достаточно выбрать базисную систему $\{q(i, \cdot)\}_{i=0}^{\infty}$ пространства $L_2([0, 1])$, т.е. $t_0 = 0$ и $T = 1$) и L (порядок усечения спектральных характеристик), а также вычислены:

- I – усеченная спектральная характеристика P^{-1} оператора интегрирования (программа spI(L), рис. 7),
- A – усеченная спектральная характеристика A оператора умножения на функцию $f_1(\cdot)$ (для интегралов, соответствующих функции $\mathbb{k}(\cdot)$, она не требуется; программа spAt1(L), рис. 7),
- V – усеченная спектральная характеристика V множительного звена (только при $k > 2$; программа spV(L), рис. 8),
- $F1$ – усеченная спектральная характеристика $\mathbf{1}$ функции $f(\cdot)$ (для моделирования ПСИ Ито или любых ПСИ смешанного типа; программа spF1(L), рис. 9).

Дополнительно требуется программа моделирования усеченных спектральных характеристик $\mathcal{V}_1, \dots, \mathcal{V}_s$ гауссовских белых шумов. Так как они не зависят от выбора базисной системы и представляют собой случайные векторы с независимыми компонентами, имеющими стандартное нормальное распределение, для реализации достаточно использовать встроенную функцию Mathcad (программы spGWN(L) и spGWNs(L,s), где параметр s – размер векторного винеровского процесса $W(\cdot)$, рис. 10).



$$\begin{array}{l}
 \text{spI}(L) := \text{T} \left| \begin{array}{l}
 c_{0,0} \leftarrow \frac{1}{2} \\
 \text{for } m \in 1 \dots L-1 \\
 \left| \begin{array}{l}
 c_{0,m} \leftarrow \sqrt{2} \frac{1 - (-1)^m}{m^2 \pi^2} \\
 c_{m,0} \leftarrow -c_{0,m}
 \end{array} \right. \\
 \text{for } m \in 2 \dots L-1 \quad \text{if } L > 2 \\
 \text{for } k \in 1 \dots m-1 \\
 \left| \begin{array}{l}
 c_{m-k,m} \leftarrow 2 \frac{1 - (-1)^k}{k(2m-k) \pi^2} \\
 c_{m,m-k} \leftarrow -c_{m-k,m}
 \end{array} \right. \\
 c
 \end{array} \right. \\
 \\
 \text{spAtI}(L) := \text{T} \left| \begin{array}{l}
 \text{for } m \in 0 \dots L-1 \\
 \left| \begin{array}{l}
 c_{m,m} \leftarrow \frac{1}{2} \\
 \text{if } m > 0 \\
 \left| \begin{array}{l}
 c_{0,m} \leftarrow \sqrt{2} \frac{(-1)^m - 1}{m^2 \pi^2} \\
 c_{m,0} \leftarrow c_{0,m}
 \end{array} \right. \\
 \text{for } m \in 2 \dots L-1 \quad \text{if } L > 2 \\
 \text{for } k \in 1 \dots m-1 \\
 \left| \begin{array}{l}
 c_{m-k,m} \leftarrow 2 \frac{[m^2 + (m-k)^2][(-1)^k - 1]}{k^2 (k-2m)^2 \pi^2} \\
 c_{m,m-k} \leftarrow c_{m-k,m}
 \end{array} \right. \\
 c
 \end{array} \right.
 \end{array}$$

Рис. 7. Формирование плоских матриц P^{-1} и A

$$\text{spV}(L) := \left| \begin{array}{l}
 \text{for } k \in 0 \dots L-1 \\
 c_k \leftarrow \text{Vk}(L,k) \\
 c
 \end{array} \right. \quad \text{VF}(V,F) := \sum_{k=0}^{\text{rows}(F)-1} (V_k F_k)$$

$$\text{Vk}(L,k) := \frac{1}{\sqrt{T}} \left| \begin{array}{l}
 \text{for } i \in 0 \dots L-1 \\
 \text{for } j \in 0 \dots L-1 \\
 c_{i,j} \leftarrow \frac{1}{\sqrt{1 + (i > 0)(j > 0)(k > 0)}} \text{ if } (|i-j| = k) \vee (|i+j| = k) \\
 c
 \end{array} \right.$$

Рис. 8. Формирование пространственной матрицы V и вспомогательная программа умножения пространственной матрицы на матрицу-столбец

$$\text{spF1}(L) := \sqrt{T} \left| \begin{array}{l}
 c_0 \leftarrow 1 \\
 \text{for } i \in 1 \dots L-1 \\
 c_i \leftarrow 0 \\
 c
 \end{array} \right.$$

Рис. 9. Формирование матрицы-столбца $\mathbf{1}$

$$\text{spGWN}(L) := \text{rnorm}(L, 0, 1) \quad \text{spGWNs}(L, s) := \left| \begin{array}{l}
 \text{for } j \in 0 \dots s-1 \\
 \Upsilon_j \leftarrow \text{rnorm}(L, 0, 1) \\
 \Upsilon
 \end{array} \right.$$

Рис. 10. Формирование реализаций случайных матриц-столбцов $\mathcal{V}_1, \dots, \mathcal{V}_s$

Литература

1. *Аверина Т.А.* Статистическое моделирование решений стохастических дифференциальных уравнений и систем со случайной структурой. – Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2019.
2. *Гихман И.И., Скороход А.В.* Введение в теорию случайных процессов. – М.: Наука, 1977.
3. *Кузнецов Д.Ф.* Стохастические дифференциальные уравнения: теория и практика численного решения. С программами в среде MATLAB // Дифференциальные уравнения и процессы управления. 2018. № 4. С. А.1–А.1073.
4. *Леваков А.А.* Стохастические дифференциальные уравнения. – Минск: БГУ, 2009.
5. *Рыбаков К.А.* Спектральный метод моделирования линейных непрерывных стохастических систем. – М.: Изд-во МАИ, 2021.
6. *Рыбаков К.А.* Спектральное представление повторных стохастических интегралов // Открытые эволюционирующие системы: Цифровая трансформация. Шестая международная научно-практическая конференция, Хабаровск, 8–9 июня 2022 г.: Материалы конф. – Хабаровск: Изд-во ДВГУПС, 2022. С. 145–162.
7. *Рыбаков К.А.* Особенности разложения кратных стохастических интегралов Стратоновича с применением функций Уолша и Хаара // Дифференциальные уравнения и процессы управления. 2023. № 1. С. 137–150.
8. *Рыбаков К.А.* Точное вычисление погрешности аппроксимации кратных стохастических интегралов Ито // Сибирский журнал вычислительной математики. 2023. Т. 26. № 2. С. 205–213.
9. *Рыбин В.В.* Моделирование нестационарных непрерывно-дискретных систем управления спектральным методом в системах компьютерной математики. – М.: Изд-во МАИ, 2011.
10. *Солодовников В.В., Семенов В.В., Пешель М., Недо Д.* Расчет систем управления на ЦВМ: спектральный и интерполяционный методы. – М.: Машиностроение, 1979.
11. Таблицы и математическое обеспечение спектрального метода теории автоматического управления / Под ред. В.В. Семенова. – М.: МВТУ им. Н.Э. Баумана, 1973.
12. *Kloeden P.E., Platen E.* Numerical Solution of Stochastic Differential Equations. – Springer, 1995.
13. *Kuznetsov D.F.* Mean-square approximation of iterated Ito and Stratonovich stochastic integrals: Method of generalized multiple Fourier series. Application to numerical integration of Ito SDEs and Semilinear SPDEs // Дифференциальные уравнения и процессы управления. 2023. № 1. С. А.1–А.947.
14. *Kuznetsov M.D., Kuznetsov D.F.* SDE-MATH: A software package for the implementation of strong high-order numerical methods for Ito SDEs with multidimensional non-commutative noise based on multiple Fourier–Legendre series // Дифференциальные уравнения и процессы управления. 2021. № 1. С. 93–422.
15. *Milstein G.N., Tretyakov M.V.* Stochastic Numerics for Mathematical Physics. – Springer-Verlag, 2004.
16. *Rybakov K.A.* Using spectral form of mathematical description to represent Stratonovich iterated stochastic integrals // Smart Innovation, Systems and Technologies. Vol. 217. – Springer, 2021. P. 287–304.
17. *Rybakov K.A.* Using spectral form of mathematical description to represent Ito iterated stochastic integrals // Smart Innovation, Systems and Technologies. Vol. 274. – Springer, 2022. P. 331–344.



Algorithms of Numerical-spectral Methods for Modeling Stochastic Dynamical Systems

Konstantin A. Rybakov*

Moscow Aviation Institute (National Research University) (MAI), Moscow, Russia

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-6839-1090>, e-mail: rkoffice@mail.ru

Representations of iterated Stratonovich and Ito stochastic integrals are obtained on the basis of the spectral form of mathematical description, they have both theoretical and practical significance. The latter is due to the possibility of constructing quite simple algorithms for the approximate modeling iterated stochastic integrals, which are necessary for the implementation of numerical methods for solving stochastic differential equations. The use of spectral representations of iterated stochastic integrals in numerical methods forms the numerical-spectral methods. Algorithms for them are presented in the form of programs for the computer algebra system Mathcad.

Keywords: iterated stochastic integrals, spectral form of mathematical description, spectral method, stochastic differential equation, numerical-spectral method, numerical method.

For citation:

Rybakov K.A. Algorithms of Numerical-spectral Methods for Modeling Stochastic Dynamical Systems. *Modelirovanie i analiz dannykh = Modelling and Data Analysis*, 2023. Vol. 13, no. 3, pp. 79–95. DOI: 10.17759/mda.2023130306 (In Russ., abstr. in Engl.).

References

1. Averina T.A. *Statisticheskoe modelirovanie reshenii stokhasticheskikh differentsialnykh uravnenii i sistem so sluchainoi strukturoi* [Statistical Modeling of Solutions of Stochastic Differential Equations and Systems with a Random Structure]. Novosibirsk, Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences Publ., 2019. (In Russ.).
2. Gikhman I.I., Skorokhod A.V. *Introduction to the Theory of Random Processes*. Dover Publ., 1997.
3. Kuznetsov D.F. Stokhasticheskie differentsialnye uravneniia: teoriia i praktika chislennogo resheniia. S programmami v srede MATLAB [Stochastic differential equations: Theory and practice of numerical solution. With programs on MATLAB]. *Differentsialnye Uravnenia i Protsey Upravlenia = Differential Equations and Control Processes*, 2018, no. 4, pp. A.1–A.1073. (In Russ.).
4. Levakov A.A. *Stokhasticheskie differentsialnye uravneniia* [Stochastic Differential Equations]. Minsk, Belarusian State University Publ., 2009. (In Russ.).
5. Rybakov K.A. *Spektralnyi metod modelirovaniia lineinykh nepreryvnykh stokhasticheskikh sistem* [Spectral Method for Modeling Linear Continuous Stochastic Systems]. Moscow, Moscow Aviation Institute Publ., 2021. (In Russ.).

***Konstantin A. Rybakov**, PhD (Physics & Mathematics), Associate Professor, Department of Mathematical Cybernetics, Moscow Aviation Institute (National Research University) (MAI), Moscow, Russia, ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-6839-1090>, e-mail: rkoffice@mail.ru

6. Rybakov K.A. Spektralnoe predstavlenie povtornykh stokhasticheskikh integralov [Spectral representation of iterated stochastic integrals]. *Otkrytye evoliucioniruiushchie sistemy: Tcifrovaia transformatsiia = Open Evolving Systems: Digital Transformation*. Proceedings of Sixth International Scientific and Practical Conference, Khabarovsk, June 8–9, 2022. Khabarovsk, Far-Eastern State Transport University Publ., 2022, pp. 145–162. (In Russ.).
7. Rybakov K.A. Osobennosti razlozheniia kratnykh stokhasticheskikh integralov Stratonovicha s primeneniem funktsii Uolsha i Khaara [Features of the expansion of multiple stochastic Stratonovich integrals using Walsh and Haar functions]. *Differentsialnie Uravneniia i Protsey Upravleniia = Differential Equations and Control Processes*, 2023, no. 1, pp. 137–150. (In Russ.).
8. Rybakov K.A. Exact calculation of the approximation error of multiple Ito stochastic integrals. *Numerical Analysis and Applications*, 2023, vol. 26, no. 2, pp. 205–213.
9. Rybin V. *Modelirovanie nestatsionarnykh nepreryvno-diskretnykh sistem upravleniia spektralnym metodom v sistemakh kompiuternoi matematiki* [Modeling of Nonstationary Continuous-Discrete Control Systems by Spectral Method on Computers]. Moscow, Moscow Aviation Institute Publ., 2011. (In Russ.).
10. Solodovnikov V.V., Semenov V.V., Peshel M., Nedo D. *Raschet sistem upravleniia na TcVM: spektralnyi i interpolatsionnyi metody* [Design of Control Systems on Digital Computers: Spectral and Interpolational Methods]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1979. (In Russ.).
11. *Tablitsy i matematicheskoe obespechenie spektralnogo metoda teorii avtomaticheskogo upravleniia* [Tables and Mathware for the Spectral Method of Control Theory]. Moscow, Bauman Moscow State Technical University Publ., 1973. (In Russ.).
12. Kloeden P.E., Platen E. *Numerical Solution of Stochastic Differential Equations*. Springer, 1995.
13. Kuznetsov D.F. Mean-square approximation of iterated Ito and Stratonovich stochastic integrals: Method of generalized multiple Fourier series. Application to numerical integration of Ito SDEs and Semilinear SPDEs. *Differentsialnie Uravneniia i Protsey Upravleniia = Differential Equations and Control Processes*, 2023, no. 1, pp. A.1–A.947.
14. Kuznetsov M.D., Kuznetsov D.F. SDE-MATH: A software package for the implementation of strong high-order numerical methods for Ito SDEs with multidimensional non-commutative noise based on multiple Fourier–Legendre series // *Differentsialnie Uravneniia i Protsey Upravleniia = Differential Equations and Control Processes*, 2021, no. 1, pp. 93–422.
15. Milstein G.N., Tretyakov M.V. *Stochastic Numerics for Mathematical Physics*. Springer-Verlag, 2004.
16. Rybakov K.A. Using spectral form of mathematical description to represent Stratonovich iterated stochastic integrals. *Smart Innovation, Systems and Technologies*. Vol. 217. Springer, 2021, pp. 287–304.
17. Rybakov K.A. Using spectral form of mathematical description to represent Ito iterated stochastic integrals. *Smart Innovation, Systems and Technologies*. Vol. 274. Springer, 2022, pp. 331–344.

Получена 28.07.2023

Принята в печать 28.08.2023

Received 28.07.2023

Accepted 28.08.2023

УДК 004.852

Сравнение классических подходов машинного обучения с гибридными квантовыми подходами в прикладных задачах

Ахмед С.Х. *

Московский Авиационный институт
(национальный исследовательский университет) (МАИ)
г. Москва, Российская Федерация
ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-5057-4510>
e-mail: untronix@outlook.com

Работа направлена на анализ потенциальных преимуществ использования квантовых подходов в прикладных задачах искусственного интеллекта. В данной работе поставлена задача классификации медицинских изображений, извлеченных из гистопатологических снимков срезов лимфатических узлов. Будет дана теоретическая база, используемая для построения квантовых и гибридно-квантовых элементов вычисления, используемых в статье. Будут рассмотрены квантовые аналоги классических алгоритмов машинного обучения и нейронных сетей. В работе будет дано поэтапное описание преобразования данных, построение моделей и их обучение с последующим анализом полученных результатов и производительности симуляции квантовых вычислений.

Ключевые слова: машинное обучение, нейронные сети, квантовые вычисления, SVM, QSVM, ядерный трюк, квантовые вариационные схемы, градиентные методы оптимизации, SPSA, NISQ.

Для цитаты:

Ахмед С.Х. Сравнение классических подходов машинного обучения с гибридными квантовыми подходами в прикладных задачах // Моделирование и анализ данных. 2023. Том 13. № 3. С. 96–112. DOI: <https://doi.org/10.17759/mda.2023130307>

**Ахмед Самир Халид*, аспирант, Московский Авиационный институт (национальный исследовательский университет) (МАИ), г. Москва, Российская Федерация, ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-5057-4510>, e-mail: untronix@outlook.com



1. ВВЕДЕНИЕ

Современное состояние науки и общества ставит перед машинным обучением и нейронными сетями задачи по совершенствованию алгоритмов потоковой обработки большого объема данных, скорости обучения и предсказания, выделения карт признаков применимых в смежных задачах. Текущие алгоритмы вычисляются на машинах, базирующихся на идеях классической физики. В основном, говоря о машинах в рамках искусственного интеллекта, мы прежде всего обращаем внимание на вычислительные элементы системы: центральный процессор и видеокарты. Нейронные сети, в основном, стараются по максимуму эксплуатировать ресурсы, предоставляемые видеокартой, осуществляя большинство вычислений на ней. Тем не менее часть вычислений так или иначе выполняется на центральном процессоре. Классические алгоритмы МО в основном эксплуатируют ресурсы центрального процессора. И все они работают на принципах классической физики.

Можно показать, что современная модель вычислений не является энергоэффективной. Это обусловлено выделением тепла при диссипации бита информации, так как при вычислении мы используем преимущественно необратимые преобразования, а следовательно, имеем сторонние эффекты в виде увеличения температуры системы, которая потенциально сказывается на увеличении чипсета центрального процессора в процессе проектирования ЦП и общем состоянии системы, а также снижения КПД всей системы, за счет выделения энергии.

Немаловажными критериями выбора и обучения моделей являются обобщающая способность алгоритма, выражающаяся в способности выделять выразительные карты признаков и робастность модели к шумам. Оно выражается в способности модели не только быть устойчивой к шумам, которые имеются в данных, но и к шумам порожденным в процессе генерации предсказания модели. Это в свою очередь влечет за собой желание получить высокую сходимость результатов без больших стохастических смещений. Для удовлетворения этих требований было предложено множество методов и средств, которые проистекают из вероятностной интерпретации моделей или эвристик: регуляризация, ранняя остановка, грамотная инициализация весов, увеличение размера пакета данных подаваемых на вход моделей. К сожалению, они обладают своими недостатками и добавляют вычислительной сложности алгоритмам.

Перспективным направлением, на субъективный взгляд автора, является смена вычислительной парадигмы. Ранее было отмечено, что современные вычисления преимущественно базируются на необратимых операциях и гейтах, что влечет за собой побочные эффекты. В свою очередь квантовые вычислительные системы используют, в основном, обратимые унитарные трансформации (эволюции). В силу специфики построения и реализации квантовых систем, мы не имеем непосредственный доступ к промежуточным состояниям, получаемых в процессе вычисления. Чтобы получить финальные результаты мы все-таки должны использовать деструктивную операцию, называемую «Измерением». Однако на выходе мы име-



ем интересные результаты, с желаемыми свойствами и потенциальный прирост вычислительной и энергетической эффективности за счет особенностей пространства, в котором мы работаем.

Далее, будет дан необходимый теоретический минимум теории квантовых вычислений, необходимый для понимания происходящих в экспериментах процессов. Будут рассмотрены несколько экспериментов, проводившиеся с целью сравнения и анализа полученных результатов с учетом точности, размера выборки, объема требуемой памяти для симуляции подобных вычислений на компьютерах и зависимости времени работы от количества используемых признаков.

2. ВАРИАЦИОННЫЕ СХЕМЫ

Квантовая вариационная схема (VQC) – квантовая схема, содержащая в своем составе изменяющиеся параметры, способные обучаться и подстраиваться под необходимые условия или обучаться. Как можно заметить вариационные схемы в этом смысле очень похожи на нейронные сети, в которых есть собственные параметры, называемые весами. Поэтому считается, что квантовые вариационные схемы можно применять в задачах, в которых мы можем применять и классические нейронные сети.

Благодаря постулатам квантовой механики известно, что состояния замкнутой системы изменяется унитарным оператором. Машинное обучение ищет отображение нашего признакового описания в результирующее, то можно рассматривать это, как некоторый процесс эволюции нашего входного состояния системы, под действием унитарного преобразования, заданного нашей моделью. В нейронных сетях и машинном обучении мы работаем с явными и неявными параметрическими моделями, следовательно мы можем позиционировать процесс обучения модели, как процесс подгонки вариационных параметров системы.

Нам нужен механизм удобной реализации параметризованных квантовых схем. Для этого нам потребуются операторы поворота, рассмотренные ранее, а также теорема [1].

Теорема 1 о представлении унитарных однокубитовых операторов: Любой унитарный оператор можно представить как произведение операторов поворотов умноженный на глобальную фазу:

$$U = e^{i\alpha} R_Z(\theta) R_Y(\delta) R_Z(\gamma)$$

где α , θ , δ , γ – углы поворота. Следовательно, можно интерпретировать наши параметры, как углы поворота, на которые текущее состояние системы осуществляет поворот в квантовом пространстве.

Можно показать, что VQC, без дополнительных элементов, являются линейными классификаторами. Основной отличие заключается в пространстве, на которое отображается признаковое описание и способ его изменения после постоянных обновлений параметров.

3. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ ЧАСТЬ

В данной работе поставлена задача классификации медицинских изображений, извлеченных из гистопатологических снимков срезов лимфатических узлов РСАМ [2]. Этот набор данных содержит 262.144 тренировочных примера и 32.768 тестовых. Каждый пример представляет собой цветное изображение размера 96x96. Пример тренировочных объектов представлен на Рис. 1. Из данного набора формировались наборы данных произвольного размера, с целью оценки вычислительной нагрузки на симулятор.

Набор данных прошел следующие этапы предобработки:

- Перевод из RGB в серый. Это делается для уменьшения объема признакового описания, подаваемого на вход квантовым сетям.
- Нормализация, приведение значений пикселей в интервал . Это делается для того, чтобы квантовые операторы, используемые в вариационной схеме, корректно обрабатывали на предоставляемых данных.
- Выделение главных компонент методом PCA. Так как операционная размерность квантовых схем мала, нам нужно уменьшить размерность подаваемых на вход данных, для исполнения квантовых частей алгоритма.

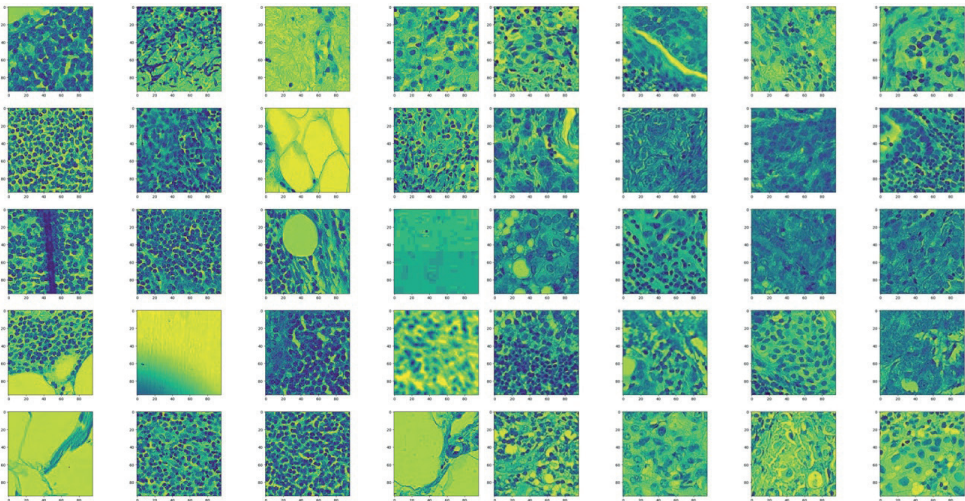


Рис. 1. Примеры изображений набора данных РСАМ

Результаты предобработки данных изображены на Рис. 2. Левое изображение представляет оригинальное изображение после приведения значений пикселей к диапазону, а правое восстановленное изображение из главных компонент выделенных PCA.

Эксперименты производились на локальном симуляторе Aeg на базе библиотеки qiskit [3]. Важно отметить, мы оперируем сложно вычислимыми классически вариационными схемами, что увеличивает в разы накладные расходы для симуляции процесса вычислений.

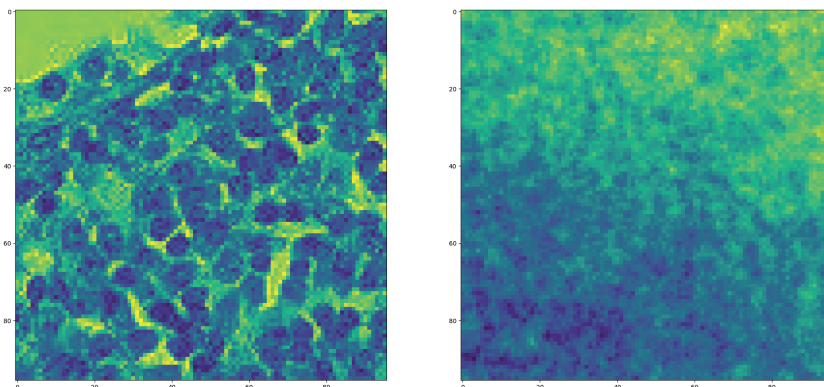


Рис. 2. Результаты работы PCA для двух главных компонент

Характеристики вычислительной машины, на которой производилась симуляция представлены в табл. 1.

Таблица 1

**Характеристики вычислительной машины,
на которой осуществлялись эксперименты**

Название	Значение
ОС	Windows 11 Pro
CPU	Intel Core i5-12400F
GPU	Nvidia RTX 3070 TI
ОЗУ	32 ГБ DDR4

Результаты эксперимента и исходный код можно найти в [4].

4. ПАРАМЕТРИЗАЦИЯ И ОБУЧЕНИЕ

В рамках данной работы VQC использовались в следующих сценариях:

- Средство обучаемого кодирования классических данных в квантовые. Было построено параметрическое кодирование входных данных, с целью подбора эффективного квантового представления.
- Ядро для метода SVM.
- Классификатор.
- Линейный слой в нейронной сети.

В качестве базовых строительных блоков VQC в данной работе использовались следующие квантовые схемы:

- Эволюционная схема Паули-Z второго порядка (далее ZZFeature), которая рассматривалась в статье [5, 6], используется как средство отображения классических данных в квантовые аналоги, а также как признаковое описание в QSVM.

- Аппаратно-эффективная $SU(2)$ 2-локальная схема, рассмотренная в [5]. В данной статье она также используется не только как классификатор, но и как дополнительная параметризация формируемого признакового описания в связке ZZ Feature, тем самым мы учим не только делать предсказания, но эффективному отображению классических данных в квантовые.
- Схема реальных амплитуд – это эвристическая пробная волновая функция, используемая в качестве аналога в приложениях химии или схем классификации в машинном обучении, рассмотренная в [5].

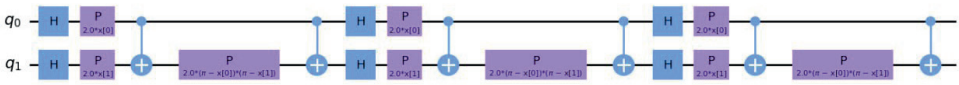


Рис. 3. Эволюционная схема Паули-Z второго порядка

Важно, чтобы полученные схемы были сложно воспроизводимы классическими вычислениями, чтобы мы могли говорить, о квантовом превосходстве. Один из весомых ресурсов для этого, это создание запутанных состояний, которым обладают указанные схемы. Кроме того, мы будем повторять элементы квантовых схем, чтобы увеличить глубину схемы и усложнить классическим компьютерам их воспроизводимость.

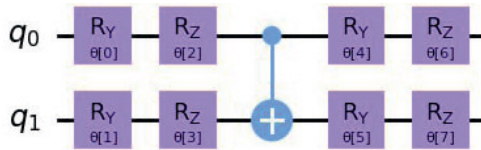


Рис. 4. Аппаратно-эффективная $SU(2)$ 2-локальная схема

Кроме того, в данной статье используется метод QKA [7] (Quantum Kernel Alignment) для обучения произвольного ядра, для последующего применения в методе SVM и QSVM. Оно представляет собой комбинацию первых двух квантовых схем с дополнительной параметризацией входов.

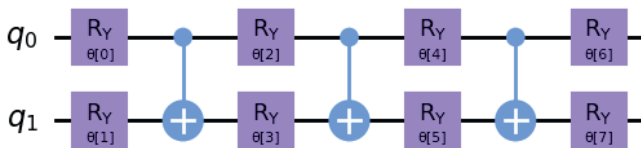


Рис. 5. Схема реальных амплитуд

В качестве алгоритмов оптимизации были использованы для алгоритмы оптимизации SPSA [8, 9, 10] и COBYLA [11], с постоянной скоростью обучения. Число эпох варьировалось от 20 до 200 эпох.



5. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ ЧАСТЬ

На базе этого набора данных была обучена модель GDensenet [12] с точностью 89.8 процентов и AUC 90. Эти показатели мы будем использовать для эталона и смотреть, насколько мы приблизимся к ней используя разные подходы и урезанные размеры данных.

6. SVM И КВАНТОВЫЕ ЯДРА

В качестве отправной точки, воспользуемся классическим алгоритмом SVM с ядром RBF. Результаты можно увидеть в табл. 1. Важно заметить, что обучение производилось на очень маленьком подмножестве нашего искомого набора данных.

Дальнейшим шагом стало применение квантового ядра совместно с классическим SVM. В качестве простого квантового ядра была использована эволюционная схема Паули-Z второго порядка, как средство перевода классических данных в квантовые состояния с последующим применением алгоритма QKE.

Таблица 2

Отчет по классификации классического SVM

	precision	recall	F1
0	0,58	0,85	0,69
1	0,90	0,67	0,78
accuracy			0,74
macro avg	0,74	0,77	0,73

Результаты можно увидеть в табл. 2. Можно заметить, что данная модель значительно отличается от SVM с RBF. Отклонения по метрикам лежат в сотых долях. В среднем полученный классификатор работает аналогично.

Таблица 3

Отчет по классификации классического SVM со схемой Паули-Z второго порядка

	precision	recall	F1
0	0,54	0,87	0,67
1	0,92	0,67	0,77
accuracy			0,73
macro avg	0,73	0,77	0,72

Можно предположить, что в данной задаче, с малыми размерами набора данных выбранное квантовое ядро работает схожим образом, что и RBF. Следовательно, мы имеем алгоритм не хуже классического.

Следующим шагом будет являться использование алгоритма QKA на нашем наборе данных. Как было сказано ранее, будет обучаться сложная квантовая схема,



которая отвечает за преобразование в желаемое признаковое описание. В качестве оптимизатора используется алгоритм COBYLA максимальное число итераций 10. Далее будет показано, что данное ограничение на число итераций важно из-за сложности симуляции выбранного ядра: пространственных издержек, для представления состояний и временных. В результате оптимизации получились веса следующие значения параметров:

$$\vec{\theta} = (4.10959419, -0.12426796, 7.06728907, -2.16221777, 2.12913752, -1.83197286, 3.27282962, -0.63694887)$$

По результатам представленным в табл. 3, можно заметить, что даже после 10 итераций модель имеет метрики не хуже, чем классический SVM с RBF или SVM со схемой Паули-Z. Это дает основание полагать, что при увеличении числа итераций оптимизации, модель может сойтись к решению имеющему более высокие метрические показатели. Более того, стоит отметить, что полученное ядро отдает большее предпочтение метрике precision, нежели recall.

Таблица 4

Отчет по классификации классического SVM с обученным квантовым ядром

	precision	recall	F1
0	0,85	0,56	0,67
1	0,67	0,90	0,77
accuracy			0,73
macro avg	0,76	0,73	0,72

Далее воспользуемся квантовым SVM без подгонки гиперпараметров. Здесь наблюдается достаточно заметный прирост по среднему значению precision в отличии от классического SVM. Интересной спецификой является то, что среднее по полноте и F1 метрике не меняется. Кроме того, показатели QSVM совпадают с метриками QSVM с предобученным на 10 итерациях ядром, что показывает, что ядро можно доучить и увеличить метрики.

Основной проблемой, с которой столкнулся автор была проблема производительности, так как в качестве ядер использовались сложно вычисляемые на классическом компьютере. Кроме того, требовался большой объем оперативной памяти для хранения промежуточных состояний требовалось в районе 6–7 ГБ оперативной памяти. Загрузка ЦП составляла в районе 20–25 %.

Для данного эксперимента был выделен набор данных размерами 500, 1000 изображений. Размер выборки для валидации составляет 100 изображений. Число главных компонент варьировалось от 2 до 5.

В качестве базовой архитектуры мы рассмотрим полносвязную нейронную сеть прямого распространения, имеющую в своем составе два скрытых слоя размерностью 1024. В качестве алгоритма оптимизации использовался Adam со параметром



скорости обучения 0,01. Число главных компонент составляет 2. Алгоритм учился 100 эпох, в конце каждой эпохи оценивалась валидационная ошибка. Результаты обучения и сравнение с гибридной моделью представлены на Рис. 6. Слева представлена история изменения функции потерь, справа изменение точность модели. Красным цветом обозначены значения, соответствующие классической модели.

Таблица 5

**Отчет по классификации квантового SVM FNN, VQC,
и гибридные нейронные сети**

	precision	recall	F1
0	0,88	0,56	0,68
1	0,68	0,92	0,78
accuracy			0,74
macro avg	0,78	0,74	0,73

Первое что бросается в глаза, это то, что величина ошибки на валидации ниже ошибки на обучении. Этому есть несколько причин:

- Структура исходного набора данных и специфика задачи.
- Объем набора данных для валидации.

Обратим внимание на поведение модели во время обучения модели. Видно, что на протяжении всего обучения, модель вела себя достаточно шумно и нестабильно имея при этом точность в районе 62 %. Также стоит обратить внимание на медленную сходимости функции потерь на обучении.

Ранее было рассмотрено применение классического алгоритма SVM с квантовой ядерной функцией ядра. Почему бы не рассмотреть применение квантовых в качестве составляющих элементов сети. Были построены две архитектуры гибридной полносвязной сети, в которой квантовые вариационные схемы выступали в роли классифицирующего последнего слоя. Для первой гибридной модели была использована вариационная схема состоящая из эволюционной схемы Паули-Z второго порядка, в качестве отображения на карты признаков, и схемы реальных амплитуд, в качестве вариационного слоя. Результаты и сравнение с классической моделью представлены на Рис. 6.

Обратим внимание на скорость и характер сходимости модели. Значения функции потерь гибридной модели сходится быстрее и имеет заметно ниже значения, нежели классическая модель. Тот же характер сходимости можно заметить и на валидационной выборке, однако, нельзя не отметить некоторую нестабильность в процессе обучения модели. Она также присутствует и в классической модели, но гораздо слабее.

Тем не менее, можно заметить, что гибридная модель стабильно имеет более высокие показатели точности и более стабильна, в среднем выдавая точность в районе 64 %. Менее очевидно это прослеживается и для валидационной выборки. Видно, что использование квантового слоя позитивно сказалось на поведении модели, выступая в роли направляющего стабилизатора.

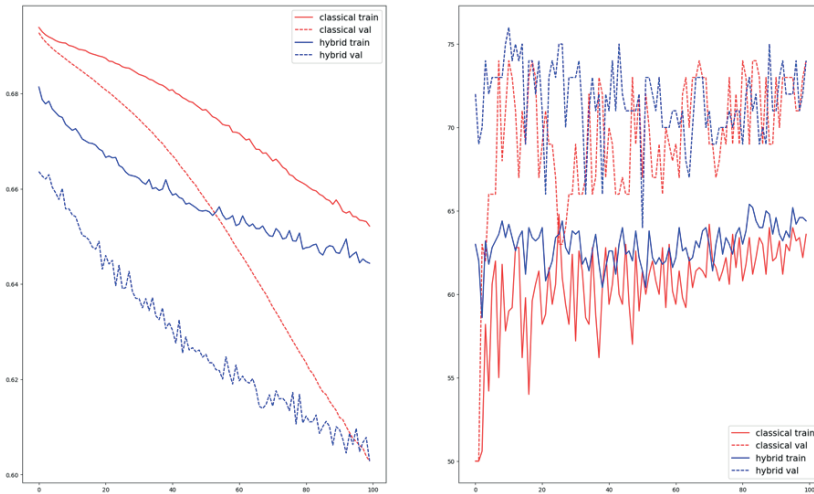


Рис. 6. Сравнение гибридных и классических моделей

Вторая квантовая модель получилась из первой заменой схемы реальных амплитуд на Аппаратно-эффективную $SU(2)$. Результаты обучения модели и сравнение с классической представлены на Рис. 7. Как и на прошлом рисунке сплошная линия отражает метрику на обучении, пунктирная на валидации. Бросается в глаза, характер сходимости функции потерь на обучении: она сошлась к оптимальным значениям гораздо быстрее, нежели классическая модель. Можно заметить момент, когда функция потерь рассматриваемой модели на обучении стала расти. В этот момент можно было остановить обучение модели. Более того, это отчетливо видно и на валидационных данных. Метрики второй гибридной модели стабильно лучше метрик классической модели. Кроме того, метрика на обучении (в районе 66 %) существенно выше классической (в районе 62–63 %). Аналогичное превосходство в среднем заметно и на валидационном наборе данных.

Вторая гибридная модель также существенно превзошла результаты классической модели. Сравним построенные гибридные модели, и сделаем выводы о применимости квантовых элементов в процессе обучения нейронных сетей.

Сравнение построенных гибридных моделей представлено на Рис. 8. Можно сказать, что гибридная модель на основе $SU(2)$ схема по всем характеристикам ведет себя лучше чем модель на базе вещественных амплитуд: выше сходимость функции потерь на всех этапах оценки модели, выше стабильность, лучше метрики на обучении, стабильнее на валидации.

В табл. 6 представлены средние и медианные показатели метрик на валидации для рассматриваемых моделей. Можно заметить, что гибридная модель на базе ZZFeature имеет среднюю метрику выше чем у остальных моделей, а медианную равную медианной гибридной модели на основе $SU(2)$.

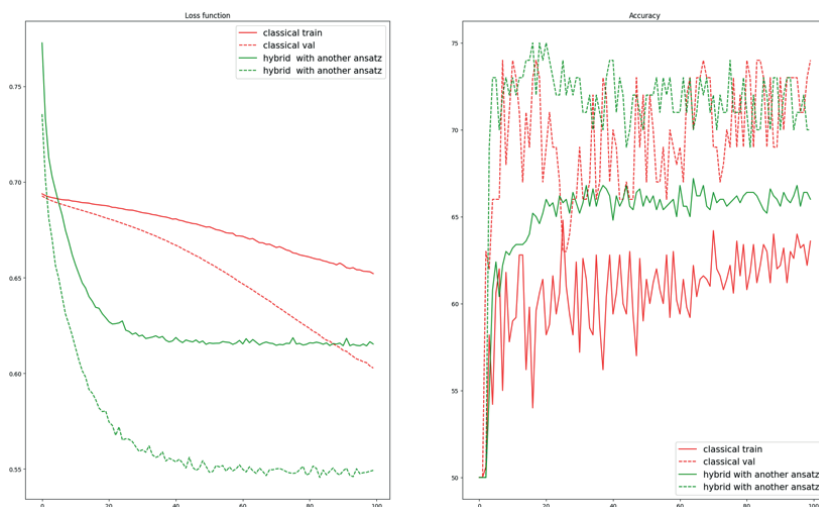


Рис. 7. Сравнение второй гибридной модели с классической моделью

Таблица 6

**Средние и медианные метрики обученных моделей
на валидации на 2 главных компонентах.**

Архитектура модели	Средняя точность, %	Медианная точность, %
классический FFN	69,22	69
FFN + ZZFeature + RealAmplitude	71,63	72
FFN + ZZFeature + SU(2)	71,27	72

Сравним поведение классической нейронной сети с VQC на разном числе главных компонент. Для этого была подготовлена следующая параметризация квантовой схемы:

- Параметризация входного представления с помощью аппаратно-эффективной $SU(2)$ 2-локальной схемы
- Отображение в признаковое описание производится с помощью эволюционной схема Паули-Z второго порядка
- В качестве вариационного классификатора используется схема реальных амплитуд.

Базовым алгоритмом оптимизации для вариационных схем был выбран алгоритм SPSA с скоростью обучения 0,1, со случайными изменениями компонентов градиента 0,05. Число эпох было установлено в 200. На Рис. 9 изображено сравнение скорости сходимости функции потерь в процессе обучения, для разных показателей главных компонент. В табл. 7 представлены значение точности для VQC и рассматриваемой нейронной сети, а также величина отклонения в процентах значений VQC

от полносвязной сети. CFFN – сокращение от Classical Feed Forward Network. Рядом с названием число главных компонент, используемых для признакового описания.

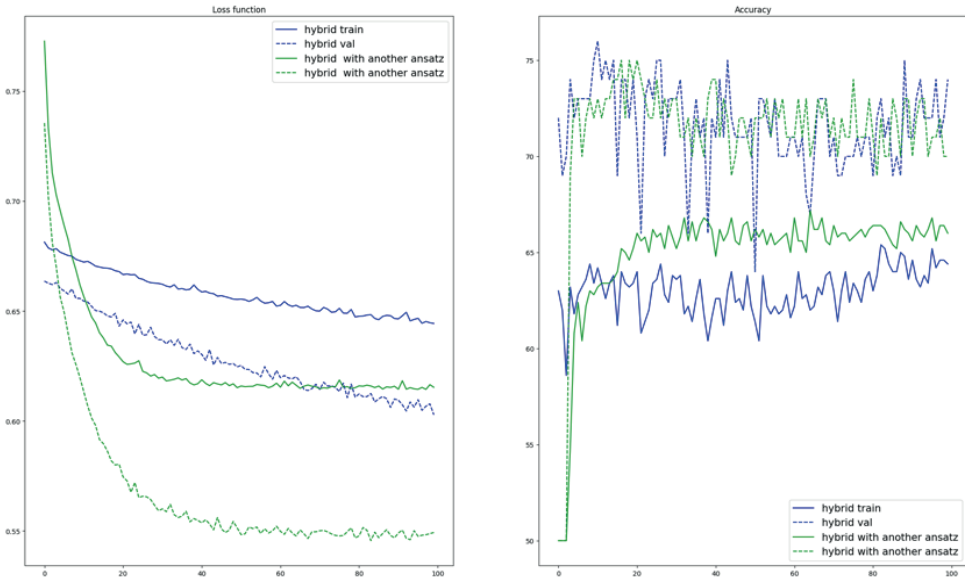


Рис. 8 Сравнение гибридных моделей

Стоит обратить внимание на крайне медленное изменение значений функции потерь VQC по отношению к классическим моделям. Кроме того, квантовая схема выдает более высокие значения функции потерь, нежели классические модели. Однако, при этом на валидационной выборке показатели точности VQC в среднем выше, чем у FFN на 6–10 процентов, при 4–5 кубитах и на 20 процентов при 6 кубитах.

Можно сделать вывод на основании этих данных, что наш квантовый алгоритм, в среднем, работает лучше, чем полносвязная сеть на рассматриваемой задаче. Однако надо принять во внимание время, требуемое для обучения VQC, используя классический симулятор. Этот график представлен на Рис. 10. По горизонтальной оси расположено число главных компонент, по вертикальной время в секундах, требуемое для обучения модели.

Можно сделать вывод на основании этих данных, что наш квантовый алгоритм, в среднем, работает лучше, чем полносвязная сеть на рассматриваемой задаче. Однако надо принять во внимание время, требуемое для обучения VQC, используя классический симулятор.

Этот график представлен на Рис. 10. По горизонтальной оси расположено число главных компонент, по вертикальной время в секундах, требуемое для обучения модели. Из полученного графика можно увидеть, что в среднем при увеличении числа главных компонент на единицу, мы имеем прирост в 1000 с или 16,6 минут к процессу обучения VQC.



История обучения в зависимости от числа кубит требуемых для работы

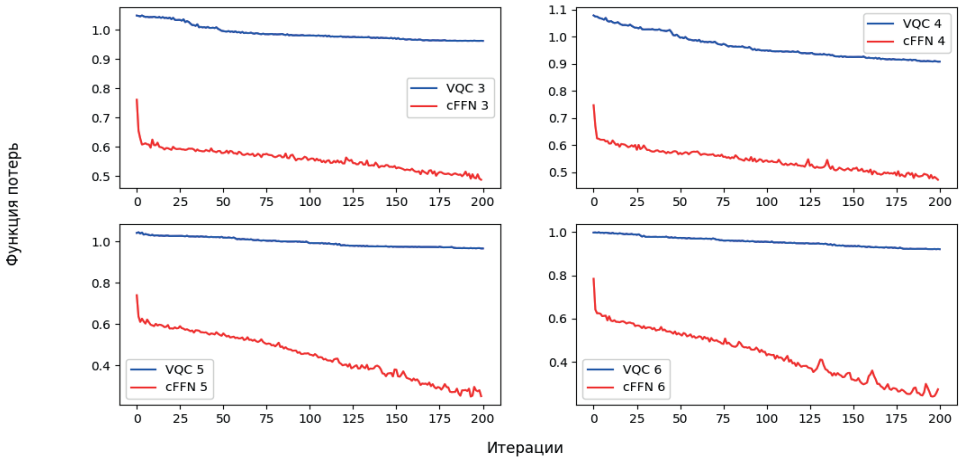


Рис. 9. Сравнение сходимости VQC и полносвязной нейронной сети

Таблица 7

Метрики алгоритмов в зависимости от количества главных компонент

Число главных компонент	VQC, %	FFN, %	Отклонение, %
3	63,2	67,4	-6,2
4	71	64,6	9,9
5	67,2	62,8	7
6	71,4	59,4	20,2

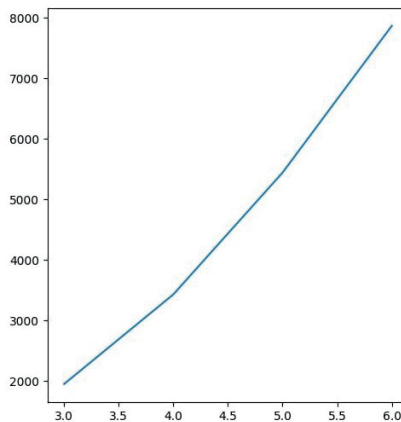


Рис. 10. Время вычисления VQC на классическом компьютере в зависимости от количества главных компонент



7. ВЫВОДЫ

В рамках данной работы были обучены квантовые ядра для метода опорных векторов и произведено сравнение классических алгоритмов и полученными гибридными моделями. На малых объемах выборки, разница между гибридными и классическими алгоритмами машинного обучения при выбранной схеме кодирования и вариационных элементах незначительна. Однако потенциально интересным приложением является метод QKA, который в перспективе может стать одним из самых используемых методов для построения квантовых ядер.

Были построены гибридные архитектуры нейронных сетей. Они демонстрируют превосходство над классической моделью в поставленной задаче, сжатой информацией, имеющейся в распоряжении. Как было показано в данной задаче, модель, использующая аппаратно-эффективную $SU(2)$, обладает полезными интересными свойствами, демонстрирует более стабильное поведение и быструю сходимость, в отличие от гибридной нейронной сети на базе операторов Паули, которая лучше классической, но менее стабильна и медленнее указанной выше. Улучшение результатов свидетельствует о наличии существенной пользы применения квантовых слоев в нейронных сетях.

Было проведено сравнение нейронных сетей с вариационными квантовыми классификаторами. VQC имеет меньшую скорость сходимости и большие значения функции потерь, но выше метрические показатели. Это показывает потенциальную применимость VQC в задачах классификации при сжатии данных.

Временной анализ показывает сложности, возникающие при вычислении квантовых схем на симуляторах. Это свидетельствует об ограничениях классической вычислительной парадигмы и перспективность квантовых вычислительных систем.

Литература

1. Нильсен М.А., Чуанг И.Л. Квантовые вычисления и квантовая информация // Cambridge, 2010, ISBN: 9781107002173, DOI: <https://doi.org/10.1017/CBO9780511976667>, 702 с.
2. Набор данных PCAM [Электронный ресурс] // Github, URL: <https://github.com/basveeling/pcam>
3. Квантовый симулятор Aer библиотеки Qiskit [Электронный ресурс] // IBM, URL: https://qiskit.org/ecosystem/aer/stubs/qiskit_aer.AerSimulator.html
4. *Ахмед С.Х.* Исходный код экспериментов [Электронный ресурс] // Github, <https://github.com/UntronixOnly/Quantum-Hybrid-Machine-Learning>
5. *Sukin Sim, Peter D. Johnson and Alan Aspuru-Guzik.* Expressibility and entangling capability of parameterized quantum circuits for hybrid quantum-classical algorithms, *Advanced Quantum Technology* 2 (2019) 1900070, doi:10.1002/qute.201900070, arXiv:1905.10876.
6. *Vojtech Havlicek, Antonio D. Cervera, Kristan Temme, Aram W. Harrow, Abhinav Kandala, Jerry M. Chow and Jay M. Gambetta,* Supervised learning with quantum enhanced feature spaces, *Nature* 567, 209–212 (2019), doi:10.1038/s41586-019-0980-2, arXiv:1804.11326.
7. *Jennifer R. Glick, Tanvi P. Gujarati, Antonio D. Cervera, Youngseok Kim, Abhinav Kandala, Jay M. Gambetta, Kristan Temme.* Covariant quantum kernels for data with group structure, doi: 0.48550/arXiv.2105.03406, arXiv: 2105.03406v2



8. *Spall, J.C.* «A Stochastic Approximation Technique for Generating Maximum Likelihood Parameter Estimates,» Proceedings of the American Control Conference, Minneapolis, MN, June 1987, pp. 1161–1167.
9. *Spall, J.C.*, «Multivariate Stochastic Approximation Using a Simultaneous Perturbation Gradient Approximation,» IEEE Transactions on Automatic Control, vol. 37(3), pp. 332–341.
10. *Spall, J.C.* «Overview of the Simultaneous Perturbation Method for Efficient Optimization» 2. Johns Hopkins APL Technical Digest, 19(4), 482–492.
11. *M.J.D. Powell.* «A direct search optimization method that models the objective and constraint functions by linear interpolation,» in Advances in Optimization and Numerical Analysis, eds. S. Gomez and J.-P. Hennart (Kluwer Academic: Dordrecht, 1994), p. 51–67.
12. *B.S. Veeling, J. Linmans, J. Winkens, T. Cohen, M. Welling.* «Rotation Equivariant CNNs for Digital Pathology». arXiv:1806.03962



Comparison of Classical Machine Learning Approaches with Hybrid Quantum Approaches in Applied Problems

Samir K. Akhmed*

Moscow Aviation Institute (national research university) (MAI), Moscow, Russia

ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-5057-4510>

e-mail: untronix@outlook.com

The work is aimed at analyzing the potential advantages of using quantum approaches in applied problems of artificial intelligence. In this paper, the task of classifying medical images extracted from histopathological images of sections of lymph nodes is set. The theoretical basis used for the construction of quantum and hybrid-quantum computing elements used in the article will be given. Quantum analogues of classical machine learning algorithms and neural networks will be considered. The paper will give a step-by-step description of the data transformation, the construction of models and their training, followed by an analysis of the results obtained and the performance of the simulation of quantum computing.

Keywords: machine learning, neural networks, quantum computing, nuclear trick, SVM, QSVM, quantum variational schemes, gradient optimization methods, SPSA, NISQ.

For citation:

Akhmed S.K. Comparison of Classical Machine Learning Approaches with Hybrid Quantum Approaches in Applied Problems. *Modelirovanie i analiz dannykh = Modelling and Data Analysis*, 2023. Vol. 13, no. 3, pp. 96–112. DOI: 10.17759/mda.2023130307 (In Russ., abstr. in Engl.).

References

1. Nielsen M.A, Chuang I.L. Quantum Computing and Quantum Information, Cambridge, 2010, ISBN: 9781107002173, DOI: <https://doi.org/10.1017/CBO9780511976667>, pp. 702.
2. PCAM Dataset. Github, URL: <https://github.com/basveeling/pcam>
3. Aer quantum simulator. Qiskit Documentation. IBM, Available at: https://qiskit.org/ecosystem/aer/stubs/qiskit_aer.AerSimulator.html
4. Akhmed S.K. Source code of experiments. Github, <https://github.com/UntronixOnly/Quantum-Hybrid-Machine-Learning>
5. Sukin Sim, Peter D. Johnson and Alan Aspuru-Guzik. Expressibility and entangling capability of parameterized quantum circuits for hybrid quantum-classical algorithms, *Advanced Quantum Technology* 2 (2019) 1900070, doi:10.1002/qute.201900070, arXiv:1905.10876.

***Samir K. Akhmed**, Graduate Student, Moscow Aviation Institute (National Research University) (MAI), Moscow, Russian Federation, ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-5057-4510>, e-mail: untronix@outlook.com



6. Vojtech Havlicek, Antonio D. Crocoles, Kristan Temme, Aram W. Harrow, Abhinav Kandala, Jerry M. Chow and Jay M. Gambetta, *Supervised learning with quantum enhanced feature spaces*, *Nature* 567, 209–212 (2019), doi.org:10.1038/s41586-019-0980-2, arXiv:1804.11326.
7. Jennifer R. Glick, Tanvi P. Gujarati, Antonio D. Corcoles, Youngseok Kim, Abhinav Kandala, Jay M. Gambetta, Kristan Temme. Covariant quantum kernels for data with group structure, doi: 0.48550/arXiv.2105.03406, arXiv: 2105.03406v2
8. Spall, J.C. «A Stochastic Approximation Technique for Generating Maximum Likelihood Parameter Estimates,» Proceedings of the American Control Conference, Minneapolis, MN, June 1987, pp. 1161–1167.
9. Spall, J.C. «Multivariate Stochastic Approximation Using a Simultaneous Perturbation Gradient Approximation,» IEEE Transactions on Automatic Control, vol. 37(3), pp. 332–341.
10. Spall, J.C. «Overview of the Simultaneous Perturbation Method for Efficient Optimization» 2. Johns Hopkins APL Technical Digest, 19(4), 482–492.
11. M.J.D. Powell, «A direct search optimization method that models the objective and constraint functions by linear interpolation,» in Advances in Optimization and Numerical Analysis, eds. S. Gomez and J.-P. Hennart (Kluwer Academic: Dordrecht, 1994), p. 51–67.
12. B.S. Veeling, J. Linmans, J. Winkens, T. Cohen, M. Welling. «Rotation Equivariant CNNs for Digital Pathology». arXiv:1806.03962

Получена 19.05.2023

Принята в печать 19.07.2023

Received 19.05.2023

Accepted 19.07.2023

◇◇◇◇◇ МЕТОДИКА ПРЕПОДАВАНИЯ ◇◇◇◇◇

УДК 37.022

Оценка эффективности применения электронных учебников по математическим дисциплинам методом анкетирования преподавателей и студентов

*Мартюшова Я.Г.**

Московский авиационный институт
(национальный исследовательский университет) (МАИ)
г. Москва, Российская Федерация
ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-7803-5914>
e-mail: ma1554@mail.ru

*Наумов А.В.***

Московский авиационный институт
(национальный исследовательский университет) (МАИ)
г. Москва, Российская Федерация
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-3631-6168>
e-mail: naumovav@mail.ru

В статье приводятся результаты социологического исследования, направленного на оценку эффективности применения средств дистанционного обучения (СДО) в смешанной форме ведения образовательной деятельности по математическим дисциплинам с очным проведением семинарских и лекционных занятий и организацией самостоятельной работы студентов технических специальностей ВУЗа с использованием СДО. Исследования базируются на результатах проводимого в весеннем семестре 2022/2023 года педагогического эксперимента по внедрению в образовательный процесс в Московском авиационном институте электронного учебника по курсу «Теория функции комплексного переменного» в системе дистанционного обучения CLASS.NET. Исследования проведены методом анкетирования участвовавших в педагогическом эксперименте студентов и преподавателей. Выявлены наиболее востребованные преподавателями и студентами функции электронного учебника.

Ключевые слова: электронный учебник, дистанционное обучение, функции электронного учебника, анкетирование

Финансирование. Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского научного фонда (РНФ) в рамках научного проекта по гранту № 22-28-00588, <https://rscf.ru/project/22-28-00588/>.



Для цитаты:

Мартюшова Я.Г., Наумов А.В. Оценка эффективности применения электронного учебника методом анкетирования преподавателей и студентов // Моделирование и анализ данных. 2023. Том 13. № 3. С. 113–122. DOI: <https://doi.org/10.17759/mda.2023130308>

***Мартюшова Янина Германовна**, кандидат педагогических наук, доцент кафедры теории вероятностей и компьютерного моделирования, ФГБОУ ВО Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет) (МАИ), г. Москва, Российская Федерация, ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-7803-5914>, e-mail: ma1554@mail.ru

****Наумов Андрей Викторович**, доктор физико-математических наук, профессор кафедры теории вероятностей и компьютерного моделирования, ФГБОУ ВО Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет) (МАИ), г. Москва, Российская Федерация, ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-7803-5914>, e-mail: ma1554@mail.ru

1. ВВЕДЕНИЕ

Полученный в пандемийный период опыт массового применения в образовательной деятельности средств дистанционного обучения привел к актуализации вопросов связанных с оценкой качества используемых электронных учебников (ЭУ), как основных составляющих систем дистанционного обучения (СДО), и эффективности их применения в образовательном процессе. Исследованиям качества и эффективности применения средств дистанционного обучения в последние годы посвящено значительное количество работ [2, 3, 5, 9]. Однако поиск объективных средств оценки эффективности применения СДО к настоящему времени находится на начальной стадии пути. К таким объективным средствам можно отнести методы, основанные на статистическом и корреляционном анализе результатов обучения пользователей СДО, полученные в ходе проведения очного тестирования [6, 7]. В настоящее время по-прежнему одним из основных источников информации о эффективности применения СДО в учебном процессе являются результаты опросов и анкетирования участников педагогических экспериментов, связанных с внедрением средств дистанционного обучения в образовательную деятельность. В работе рассматриваются результаты анкетирования студентов и преподавателей Московского авиационного института, проведенного по результатам внедрения разработанного авторами электронного учебника по курсу «Теория функции комплексного переменного» [1], в рамках используемой в последние два десятка лет СДО CLASS.NET [8, 10] для преподавания математических дисциплин студентам технических специальностей. Для повышения репрезентативности выборки анкетирование проводилось не только среди преподавателей, участвующих в эксперименте, но и среди более широкого круга преподавателей, использующих СДО CLASS.NET в своей деятельности. Целью опроса являлось выявления наиболее значимых для различных категорий пользователей функций электронного учебника, оценка целесообразности его применения и изучение динамики изменения отношения различных категорий пользователей к применению СДО в учебном процессе в пандемийный период.



2. АНАЛИЗ ДАННЫХ ПРОВЕДЕННОГО АНКЕТИРОВАНИЯ

Проводимый в весеннем семестре 2022/2023 учебного года в Московском авиационном институте педагогический эксперимент по применению в рамках очной формы ведения образовательной деятельности электронного учебника по курсу «Теория функции комплексного переменного» для организации самостоятельной работы студентов и выполнения ими домашних заданий подробно описан в [7]. В эксперименте участвовали 4 специальным образом отобранные группы студентов в общем количестве 72 человека. Однородность групп студентов контролировалась с использованием аппарата проверки статистических гипотез на основе анализа результатов экзаменов по дисциплинам, предшествующим изучению курса, на применении знаний которых базируется рассматриваемый курс. Для проведения социологического исследования привлекались все студенты в группах и преподаватели, участвовавшие в проведении эксперимента и ранее работавшие с электронными учебниками в СДО CLASS.NET, в количестве 37 человек.

Всем участникам социологического исследования было предложено ответить на две группы вопросов. В первой группе вопросов предлагалось оценить по семи-балльной шкале значимость для опрашиваемых следующих функций разработанного электронного учебника: наличие в электронном учебнике теоретического материала в формате гипертекста (1); возможность увеличения времени, выделяемого на изучение курса, за счет использования электронного учебника в часы, выделяемые на самостоятельную работу студента (2); наличие практической части электронного учебника, решение задач которой способствует подготовке к прохождению очных форм контроля (3); наличие задач с дозированной педагогической помощью (4); повышение дисциплины изучения материала за счет наличия обратной связи и осуществления контроля преподавателем работы студента в течении семестра (5); применение в электронном учебнике адаптивных средств формирования индивидуальной траектории обучения, учитывающей особенности и уровень знаний студента (6); наличие постоянной возможности он-лайн коммуникации преподавателя и студента (7); коррелированность результатов работы студента в электронном учебнике с возможностью получения «автомата» на экзамене (8); наличие эффекта самообучения группы студентов за счет возможности коллективного обсуждения способов решения задач вне рамок очного процесса обучения с учетом наличия персональных реализаций случайных параметров задачи для каждого студента (9); наличие мотивационной составляющей для студента, связанной с автоматическим формированием текущего рейтинга и присутствием соревновательного эффекта (10); наличие возможности у преподавателя при подготовке к семинарскому занятию обратить внимание на ошибки, совершенные студентами при решении с помощью электронного учебника домашнего задания (11); возможность продемонстрировать административным органам университета свою активность в течении семестра (12).



Результаты анкетирования по данной группе вопросов отражены на рисунке 1.

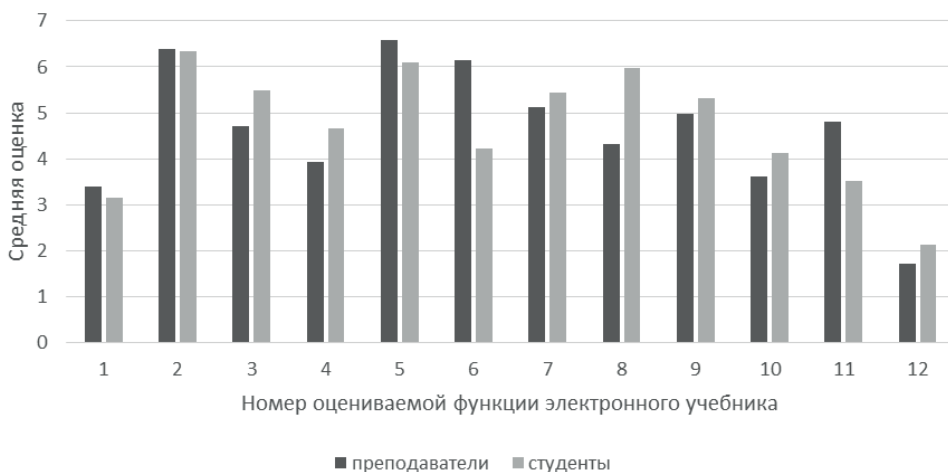


Рис. 1. Оценки функций электронного учебника, данные преподавателями и студентами

Обратная связь и текущий контроль работы обучаемых, а также возможность организации самостоятельной работы студентов заняли первое место по результатам этого опроса как у студентов, так и у преподавателей.

Среди других функций, реализуемых электронными учебниками в рамках функционирования СДО, высшие баллы опрошенные преподаватели поставили: функции постоянной возможности он-лайн коммуникации преподавателя и студента, функции самообучения группы студентов за счет возможности коллективного обсуждения способов решения задач вне рамок очного процесса обучения, функции ЭУ, обеспечивающей возможность анализа ошибок студентов, допущенных при выполнении домашнего задания, в рамках подготовки преподавателя к очередному семинарскому занятию. К очень важным функциям современного электронного учебника были отнесены возможность построения индивидуальной траектории обучения студентов и наличие обратной связи для адаптации и корректировки преподавателем деятельности обучаемого.

Аналогичное анкетирование проводилось ранее на старте активного использования средств дистанционного обучения в начале пандемийного периода. Сравнение результатов анкетирования преподавателей в два рассматриваемых периода времени отражены на рисунке 2.

Проведенный статистический анализ результатов анкетирования, полученных в два различных периода времени, подтвердил существенность их различий. Для проверки значимости различий использовался критерий Вилкоксона [4, с. 451], значение которого 32 уверенно превысило критическую точку 13 на уровне значимости критерия равном 0.05.

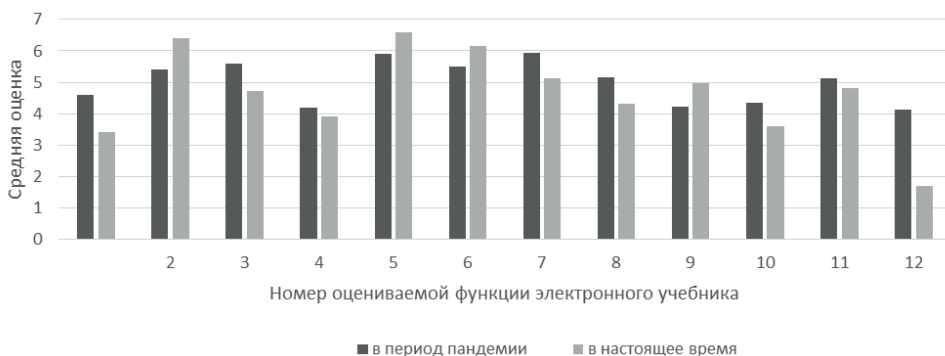


Рис. 2. Оценки функций электронного учебника преподавателями вуза в начале пандемийного периода и в настоящее время

Полученный в пандемийный и постпандемийный периоды времени опыт активного применения средств СДО сменил акценты во мнении преподавателей с формальных функций электронных учебников (отчет перед администрацией, возможность проставления «автоматов»), применение которых было вызвано насущной необходимостью на функции наибольшим образом обеспечивающие эффективность образовательного процесса при смешанной форме ведения образовательной деятельности, когда электронный учебник в первую очередь рассматривается как средство организации самостоятельной работы студентов. К таким функциям следует отнести: «наличие эффекта самообучения группы студентов» (4.98 баллов из 7), «наличие обратной связи и возможность контроля за самостоятельной работой студентов» (6.58 баллов) и возможность формирования индивидуальной траектории студента» (6.15 баллов).

Во второй группе вопросов преподавателям по результатам педагогического эксперимента предлагалось оценить также по семибалльной шкале значимость для опрашиваемых аспектов и причин целесообразности и эффективности применения в учебном процессе внедренного электронного учебника. Респондентам были предложены следующие варианты продолжения утверждения «применение электронного учебника целесообразно и эффективно потому, что»: повышается успеваемость студентов (1); электронный учебник является средством получения «автомата» на экзамене (2); электронный учебник позволяет наверстать упущенное в результате пропусков очных занятий (3); электронный учебник позволяет систематизировать освоение предмета при любом количестве очных занятий (4); электронный учебник позволяет формализовать минимальные требования для сдачи зачета и уменьшает количество неуспевающих по предмету (5); применение электронного учебника целесообразно для обучения людей с ограниченными возможностями посещения очных занятий (6); электронный учебник эффективен для организации лабораторных работ в условиях отсутствия в учебных планах часов под этот вид учебной деятельности и дефицита



в вузах учебных лабораторий (7); электронный учебник эффективен для подготовки к любым формам контроля, в том числе при наличие задолженности (8).

Последние четыре утверждения касались, наоборот, нецелесообразности и неэффективности применения электронного учебника, поскольку «существует проблема неаутентичности ответов пользователей» (9); «работа с электронным учебником требует от преподавателя и студента дополнительных усилий» (10), «качество материала традиционного печатного издания представляется более высоким по сравнению с электронным учебником» (11), «возможность использования электронного учебника ограничено наличием интернета и бесперебойностью работы провайдера» (12).

Результаты анкетирования отражены на рисунке 3.

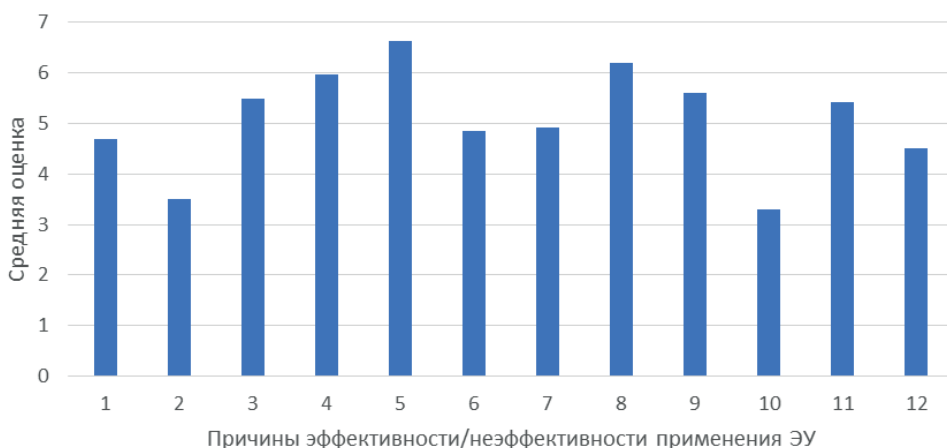


Рис. 3. Оценки целесообразности и эффективности применения ЭУ

В среднем причины эффективности применения электронного учебника (средний балл 5.3) были оценены преподавателями выше причин неэффективности (средний балл 4.7). Среди положительных причин эффективности применения электронного учебника лидерами являются: «электронный учебник позволяет формализовать минимальные требования для сдачи зачета и уменьшает количество неуспевающих по предмету» и «электронный учебник эффективен для подготовки к любым формам контроля, в том числе при наличие задолженности». Следует отметить, что приведенные причины эффективности электронного учебника указывают на восприятие педагогическим сообществом электронного учебника в первую очередь как важного и эффективного средства организации самостоятельной работы студентов в формате традиционного ведения образовательной деятельности.

Среди отрицательных причин, ставящих под сомнение эффективность применения электронных средств обучения, на первом месте стоит проблема, связанная с контролем аутентичности ответов пользователей СДО, которая снижает в ближайшем



будущем возможности замены в полной мере традиционного образования дистанционной формой.

3. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Приведенные в статье результаты социологического исследования в студенческо-преподавательской среде показывают, что мнения педагогического сообщества о эффективности применения СДО меняются в ходе их активного использования в пандемийный и постпандемийный период. Ведущими мотивами использования электронных учебников вместо формальных причин, связанных с требованиями администрации вузов и невозможностью осуществления традиционной образовательной деятельности в пандемийный период, становятся возможности повышения эффективности обучения с помощью организации на основе СДО самостоятельной работы студентов и формирования их индивидуальных траекторий с использованием современных методов машинного обучения и обработки статистических данных о работе студентов с электронными учебниками. В целом оценка эффективности применения электронных средств обучения, полученная методом социологического исследования, является положительной как в студенческой среде, так и в педагогической. Исследование мнения экспертов и преподавателей указывает важные направления дальнейшего совершенствования средств СДО в первую очередь в направлении решения проблемы аутентичности ответов пользователей СДО. Это, тем не менее, не уменьшает важности применения электронных учебников как тренажеров для студентов при подготовке к контрольным мероприятиям, и в качестве средства выполнения домашних, лабораторных работ и как средства адаптации процесса обучения на основе обратной связи, получаемой педагогом в ходе работы студентов в электронной образовательной среде. Используемый в работе способ оценки эффективности применения электронного учебника на основе анкетирования преподавателей выражает мнение педагогического сообщества и указывает причины эффективности, однако сильно зависит от составленной исследователями анкеты и может рассматриваться лишь как важная часть оценки эффективности ЭУ, которую необходимо дополнять средствами объективного анализа, основанными возможно на применении методов машинного обучения и искусственного интеллекта.

Литература

1. Битюков Ю.И., Мартюшова Я.Г. Решение задач по теории функций комплексного переменного: учебное пособие. М.: Изд-во МАИ, 2022. 88 с.
2. Боголепова С.В. Анализ опыта обучения (в российском вузе) в онлайн-формате в период пандемии // Отечественная и зарубежная педагогика. 2021. Т. 1, № 4 (77). С. 107–122.
3. Босов А.В., Мартюшова Я.Г., Наумов А.В. Выбор направлений оценивания качества электронных средств обучения для организации учебного процесса вуза // Сибирский педагогический журнал. 2022. № 2. С. 54–63.
4. Кобзарь А.И. Прикладная математическая статистика. Для инженеров и научных работников: учебное пособие. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2006. 816 с.



5. Курбацкий В.Н., Сиренко С.Н. Критерии оценки качества современного электронного учебного курса [Электронный ресурс] // Электронная библиотека БГУ. URL: https://elib.bsu.by/bitstream/123456789/164738/1/Курбацкий_5_2012-046-049.pdf (дата обращения: 20.06.2023).
6. Мартюшова Я.Г. Дидактические принципы конструирования электронного учебника для студентов университетов: дисс. ... канд. пед. наук. М., 2019. 161 с.
7. Мартюшова Я.Г. Анализ результатов педагогического эксперимента по внедрению дистанционных технологий в преподавание математических дисциплин для технических специальностей вузов // Моделирование и анализ данных. 2023. Том 13. № 2. С. 194–205. DOI: <https://doi.org/10.17759/mda.2023130211>
8. Наумов А.В., Джимурат А.С., Иноземцев А.О. Система дистанционного обучения математическим дисциплинам CLASS.NET// Вестник компьютерных и информационных технологий. 2014. № 10. С. 36–44.
9. Панькина Е.В., Черчик И.В. Оценка качества электронного учебного курса как необходимое условие современного обучения // Профессиональное образование в России и за рубежом. 2021. № 1(41). С. 39–47.
10. СДО МАИ CLASS.NET [Электронный ресурс] // URL <http://www.distance.mai.ru/> (дата обращения: 10.06.2023).



Evaluation of the Effectiveness of the Electronic Textbook in Mathematical Disciplines Using the Questionnaire of Teachers and Students

Yanina G. Martyushova*

Moscow Aviation Institute (State Research University) (MAI), Moscow, Russia

ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-7803-5914>

e-mail: ma1554@mail.ru

Andrey V. Naumov**

Moscow Aviation Institute (State Research University) (MAI), Moscow, Russia

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-3631-6168>

e-mail: naumovav@mail.ru

The article presents the results of a sociological study aimed at assessing the effectiveness of the use of learning management systems (LMS) in a mixed form of conducting educational activities in mathematical disciplines with face-to-face seminars and lectures and organizing the independent work of students of technical specialties of the university using the LMS. The research is based on the results of a pedagogical experiment conducted in the spring semester of 2022/2023 on the introduction of an electronic textbook into the educational process at the Moscow Aviation Institute on the course “Theory of the function of a complex variable” using the distance learning system CLASS.NET. The studies are carried out by interviewing students and teachers participating in the pedagogical experiment. The most popular functions of an electronic textbook by teachers and students have been identified.

Keywords: e-textbook, distance learning, e-textbook functions, questionnaire

Funding. The reported study was funded by Russian Science Foundation (RSF), project number 22-28-00588, <https://rscf.ru/project/22-28-00588/>.

For citation:

Martyushova Ya.G., Naumov A.V. Evaluation of the Effectiveness of the Electronic Textbook Using the Questionnaire of Teachers and Students. *Modelirovanie i analiz daniykh = Modelling and Data Analysis*, 2023. Vol. 13, no. 3, pp. 113–122. DOI: 10.17759/mda.2023130308 (In Russ., abstr. in Engl.).

***Yanina G. Martyushova**, PhD (Pedagogy), Associate Professor of the Department of Probability Theory and Computer Modeling, Moscow Aviation Institute (State Research University), Moscow, Russia, ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-7803-5914>, e-mail: ma1554@mail.ru

***Andrey V. Naumov**, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, professor of the Department of Probability Theory and Computer Modeling, Moscow Aviation Institute (State Research University), Moscow, Russia, ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-7803-5914>, e-mail: ma1554@mail.ru



References

1. Bityukov Yu.I., Martyushova Ya.G. Reshenie zadach po teorii funktsii kompleksnogo peremennogo: uchebnoe posobie. [Solving problems in the theory of functions of a complex variable] M.: Publ. MAI, 2022. 88 p. (In Russ.).
2. Bogolepova S.V. Analiz opy'ta obucheniya (v rossijskom vuze) v onlajn-formate v period pandemii. [Analysis of the experience of studying (at a Russian university) in an online format during the pandemic]. *Otechestvennaya i zarubezhnaya pedagogika*. 2021. Vol. 1, № 4 (77). Pp. 107–122.
3. Bosov A.V., Martyushova Ya.G., Naumov A.V. Vy'bor napravlenij ocenivaniya kachestva e'lektronny'x sredstv obucheniya dlya organizacii uchebnogo processa vuza. [The choice of directions for assessing the quality of electronic learning tools for the organization of the educational process of the university]. *Sibirskij pedagogicheskij zhurnal*. 2022. № 2. Pp. 54–63.
4. Kobzar' A.I. Prikladnaya matematicheskaya statistika. Dlya inzhenerov i nauchny'x rabotnikov: uchebnoe posobie. [Applied mathematical statistics. For engineers and scientists: a textbook] M.: FIZMATLIT, 2006. 816 p.
5. Kurbatskii V.N., Sirenko S.N. Kriterii otsenki kachestva sovremennogo elektronnoho uchebnogo kursa [Criteria for assessing the quality of a modern electronic training course] [Elektronnyy resurs]. Elektronnaya biblioteka BGU. URL: https://elib.bsu.by/bitstream/123456789/164738/1/Kurbatskii_5_2012-046-049.pdf (Accessed 20.06.2023). (In Russ.).
6. Martyushova Ya.G. Didakticheskie printsipy konstruirovaniya elektronnoho uchebnika dlya studentov universitetov: diss. ... kand. ped. nauk. [Didactic principles of designing an electronic textbook for university students. Ph.D. (Pedagogy) diss.] M., 2019. 161 p. (In Russ.).
7. Martyushova Ya.G. Analiz rezul'tatov pedagogicheskogo e'ksperimenta po vnedreniyu distantsionny'x tekhnologij v prepodavanie matematicheskix disciplin dlya texnicheskix special'nostej vuzov [Analysis of the Pedagogical Experiment Results on the Implementation of Distance Learning Technologies in the Teaching of Mathematical Disciplines for Technical Specialties of Universities.] *Modelirovanie i analiz dannykh = Modelling and Data Analysis*. 2023. Vol. 13, no. 2, pp. 194–205. DOI: 10.17759/mda.2023130211 (In Russ., abstr. in Engl.)
8. Naumov A.V., Dzhimurat A.S., Inozemtsev A.O. Sistema distantsionnoho obucheniya matematicheskimi distsiplinami CLASS.NET. [Distance learning system for mathematical disciplines CLASS.NET] *Vestnik komp'yuternykh i informatsionnykh tekhnologii*. 2014. № 10. Pp. 36–44. DOI: 10.14489/vkit.2014.010.pp.036-044 (In Russ., abstr. In Engl.).
9. Pan'kina E.V., Cherchik I.V. Otsenka kachestva elektronnoho uchebnogo kursa kak neobkhodimoe uslovie sovremennogo obucheniya. [Assessing the quality of an electronic training course as a prerequisite for modern training] *Professional'noe obrazovanie v Rossii i za rubezhom*. 2021. № 1(41). Pp. 39–47. (In Russ.).
10. SDO MAI CLASS.NET [Elektronnyy resurs]. URL <http://www.distance.mai.ru/> (Accessed 10.06.2023). (In Russ.).

Получена 17.07.2023

Принята в печать 19.08.2023

Received 17.07.2023

Accepted 19.08.2023

УДК 371.3

Модельный образец специальных образовательных условий получения высшего образования студентами с нарушениями зрения, обучающимися по программам бакалавриата в области математики и прикладной информатики

Соколов В.В.*

Московский государственный психолого-педагогический университет (ФГБОУ ВО МГППУ), г. Москва, Российская Федерация
e-mail: vvsokolov168@gmail.com

Васина Л.Г.**

Московский государственный психолого-педагогический университет (ФГБОУ ВО МГППУ), г. Москва, Российская Федерация
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-9902-2511>
e-mail: vasinalg@mgppu.ru

Червен-Водали Е.Б.***

Московский государственный психолого-педагогический университет (ФГБОУ ВО МГППУ), г. Москва, Российская Федерация
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-6871-9105>
e-mail: cervenvodali@mgppu.ru

Сидорова В.Б.****

Московский государственный психолого-педагогический университет (ФГБОУ ВО МГППУ), г. Москва, Российская Федерация
ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-6391-5361>
e-mail: sidorovavb@mgppu.ru

Антипова С.Н.*****

Московский государственный психолого-педагогический университет (ФГБОУ ВО МГППУ), г. Москва, Российская Федерация
ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-6642-7953>
e-mail: antipovasn@mgppu.ru

В статье представлены практические результаты работы модельного образца специальных образовательных условий для студентов с нарушениями зрения в части изучения дисциплин математического и компьютерного



циклов, обучающимися по программам бакалавриата в области математики и прикладной информатики.

Ключевые слова: образовательный процесс, студенты с ОВЗ.

Для цитаты:

Соколов В.В., Васина Л.Г., Червен-Водали Е.Б., Сидорова В.Б., Антипова С.Н. Модельный образец специальных образовательных условий получения высшего образования студентами с нарушениями зрения, обучающимися по программам бакалавриата в области математики и прикладной информатики // Моделирование и анализ данных. 2023. Том 13. № 3. С. 123–143. DOI: <https://doi.org/10.17759/mda.2023130309>

***Соколов Владимир Вячеславович**, заведующий лабораторией технических и программных средств обучения студентов с нарушением зрения, доцент кафедры прикладной математики факультета информационных технологий, Московский государственный психолого-педагогический университет (ФГБОУ ВО МГППУ), г. Москва, Российская Федерация, e-mail: vsokolov168@gmail.com

****Васина Людмила Григорьевна**, специалист по УМР, Московский государственный психолого-педагогический университет (ФГБОУ ВО МГППУ), г. Москва, Российская Федерация, ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-9902-2511>, e-mail: vasinalg@mgppu.ru

*****Червен-Водали Елена Борисовна**, преподаватель кафедры прикладной информатики и мультимедийных технологий, Московский государственный психолого-педагогический университет (ФГБОУ ВО МГППУ), г. Москва, Российская Федерация, ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-6871-9105>, cervenvodali@mgppu.ru

******Сидорова Валерия Борисовна**, преподаватель кафедры прикладной информатики и мультимедийных технологий, Московский государственный психолого-педагогический университет (ФГБОУ ВО МГППУ), г. Москва, Российская Федерация, ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-6391-5361>, e-mail: sidorovavb@mgppu.ru

*******Антипова Светлана Николаевна**, заместитель декана по внеучебной работе факультета информационных технологий, Московский государственный психолого-педагогический университет (ФГБОУ ВО МГППУ), г. Москва, Российская Федерация, ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-6642-7953>, e-mail: antipovasn@mgppu.ru

1. ВВЕДЕНИЕ

Для лиц с ОВЗ и инвалидностью получение образования является одним из эффективных механизмов развития личности и повышения социального статуса. В личностном плане высшее образование дает свободу выбора жизненных целей, духовную и материальную независимость, придает жизнестойкость личности, гармонизирует ее существование, что особенно важно для молодых людей с инвалидностью.

Получение профессии – это возможность социальной востребованности, финансовой независимости. В общественном плане обеспечение доступности высшего образования для инвалидов характеризует степень развития демократических процессов, выступает показателем гуманизации и интеграции общества, социального партнерства всех его социальных групп и заботы общества о своей незащищенной части.



Высшее образование превращает инвалидов из пассивных потребителей социальных услуг в активных, созидательных граждан.

Совместное обучение в вузе здоровых учащихся и учащихся с ограничениями возможностями здоровья, или инклюзивное образование – одна из форм активной интеграции студентов с инвалидностью в общество. Инклюзия как способ организации обучения детей и молодежи с ОВЗ признана всем мировым сообществом наиболее гуманной, поэтому она стала одной из ведущих стратегий в российской образовательной политике. Включение молодых людей с особыми образовательными потребностями (людей с инвалидностью, с ограниченными возможностями здоровья, с особенностями развития) в образовательный процесс в ВУЗе – это относительно новый подход для российского образования.

Основным критерием эффективности инклюзивного профессионального образования является успешность социализации, овладение культурой, развитие социального опыта, профессиональное самоопределение молодых людей, в том числе студентов с особыми образовательными потребностями. Существующие теоретические представления о процессе инклюзивного образования в современных условиях, зарубежный и отечественный опыт отличаются многообразием. Однако механизмы, позволяющие конструктивно развивать инклюзивные процессы в образовательных организациях, сложны и тяжело внедряются в деятельность высшей школы. Существует потребность в разработке и использовании социально-педагогических практик включения студентов с особыми образовательными потребностями в общий образовательный процесс вуза.

Преподаватели факультета информационных технологий активно занимаются усовершенствованием методик преподавания дисциплин математического и компьютерного цикла студентам с нарушениями зрения.

Работа ведется как в теоретическом и практическом направлениях, так и в направлении подготовки кадров для инклюзивной практики образования, а также делаются шаги в практической психологической поддержке образовательной инклюзии в самом университете. На данный момент накоплен определенный опыт работы с лицами с ОВЗ, который стал основой для разработки собственного Модельного образца специальных образовательных условий получения высшего образования студентами с нарушениями зрения, обучающимися по программам бакалавриата в области математики и прикладной информатики.

На факультете «Информационные технологии» МГППУ обучаются студенты с ОВЗ по программам бакалавриата: «Математическое обеспечение и администрирование информационных систем» и «Прикладная информатика».

В статье представлены практические результаты работы модельного образца специальных образовательных условий для студентов с нарушениями зрения в части изучения дисциплин математического и компьютерного циклов.

Инвалиды по зрению составляют наиболее сложную для обучения в вузе категорию студентов. Они представляют наименьшую по численности группу инвалидов, однако, по мнению специалистов, имеют наилучшие перспективы в смысле успешной профессиональной деятельности, но по своим потребностям эта группа весьма



разнообразна и неоднородна. Одним из условий качественного обучения, воспитания, социализации и реабилитации студентов с нарушением зрения является точное понимание и учет в образовательном процессе особенностей состояния зрительных функций каждого обучающегося.

Начиная с 2006 г. на факультете «Информационные технологии» по направлениям подготовки 02.03.03 «Математическое обеспечение и администрирование информационных систем» и 09.03.03 «Прикладная информатика» получают высшее образование студенты с инвалидностью по зрению. Профессорско-преподавательский и учебно-вспомогательный персонал факультета накопил богатый опыт обучения данной категории студентов. Поэтому именно на базе факультета с целью обеспечения студентам с нарушениями зрения условий, необходимых для повышения качества и доступности образовательного процесса в 2016 г. был создан модельный образец специальных образовательных условий (МО СОУ).

2. ЦЕЛИ И ЗАДАЧИ, РЕАЛИЗОВАННЫЕ В ПРОЦЕССЕ СОЗДАНИЯ МОДЕЛЬНОГО ОБРАЗЦА СПЕЦИАЛЬНЫХ ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫХ УСЛОВИЙ

Целью создания МО СОУ стало создание системы инклюзивного высшего профессионального образования в университете.

При формировании инклюзивной образовательной среды были **решены** следующие **задачи**:

- в здании университета создана безбарьерная архитектурная и доступная среда для лиц с нарушениями зрения. Выделены цветовые акценты в лифтовых комнатах, вокруг дверей и т.д., что помогает студентам с инвалидностью по зрению ориентироваться в помещениях университета.
- смонтированы напольные тактильные направляющие и конусы, поручни, оборудованные санитарные комнаты, тактильные схемы и поэтажные планы, названия и номера кабинетов, дополнительных ориентиров в виде наклеек выполнены с использованием шрифта Брайля и т.п.
- приобретено современное тифлооборудование, специальные программные и технические средства, необходимые для успешного обучения студентов с инвалидностью;
- разработаны адаптированные основные профессиональные образовательные программы, включающие специальные условия для обучения инвалидов и лиц с ограниченными возможностями здоровья, по направлениям подготовки 02.03.03 «Математическое обеспечение и администрирование информационных систем» и 09.03.03 «Прикладная информатика». В соответствии с требованиями ФГОС высшего образования, студенты с инвалидностью должны быть обеспечены печатными и (или) электронными образовательными ресурсами в формах, адаптированных к их запросам;
- создана и оснащена современная тифлотипография;
- разработаны программы сопровождения (психолого-педагогического, коррекционно-реабилитационного и пр.);



- регулярно появляются новые методические рекомендации, учебные пособия и другие документы по вопросам создания специальных условий для получения профессионального образования лицами с инвалидностью;
- активно ведется профориентационная работа с абитуриентами, имеющими инвалидность;
- оказывается помощь выпускникам с инвалидностью в трудоустройстве.

3. ЦЕЛЕВАЯ АУДИТОРИЯ

В процессе получения высшего образования студенты с нарушениями зрения сталкиваются с рядом значительных трудностей. В первую очередь, они связаны с ограничениями в выборе учебных материалов и доступе к печатным источникам информации. Особые трудности возникают при изучении математических и компьютерных дисциплин. При обучении дисциплинам из области математики основными являются визуальные источники информации – записи формул на доске, плоскостные учебники. Проблема подачи сложного материала из области информатики на занятиях со слабовидящими студентами возникает в силу того, что они работают вместе с хорошо видящими.

В современных средствах программирования и проектирования существенное значение имеет графическое представление информации, что ставит студентов с ОВЗ в тяжелое положение. Не имея возможности следить за записью преподавателя, незрячие студенты вынуждены воспринимать лекционный материал на слух. Конспектирование материала студенты ведут одновременно двумя доступными им способами: запись услышанного с помощью письменных принадлежностей по системе Брайля и ведение аудиозаписи происходящего в аудитории. Т. е. незрячие студенты полностью полагаются на речь преподавателя при получении лекционного материала. Громоздкость письменных принадлежностей и специфика записи по системе Брайля не позволяют вести хороших конспективных материалов. Это можно назвать рабочим черновиком, слабо способным помочь студенту при подготовке к экзамену или при выполнении домашнего задания. Следует отметить, что многие лекторы вообще не произносят все формулы, написанные на доске. В этом случае незрячий вообще лишен возможности записать материал лекции.

Таким образом, для организации полноценного процесса совместного обучения и предоставления равных возможностей всем обучаемым независимо от того, в какой мере у них имеются проблемы по здоровью, предлагаются альтернативные формы представления учебных материалов:

- издания рельефно-точечным шрифтом Брайля;
- цифровая аудиозапись;
- электронные форматы хранения текстов;
- рельефные изображения и наглядные пособия.

Выбор того или иного способа представления учебного материала зависит от многих факторов. В частности, от того, насколько данный формат представления учебного материала удобен для конкретного студента (группы студентов) и насколько



адекватно можно представить материал учебного пособия в данном формате. Например, геометрические чертежи, графики функций и т.д. предлагаются в виде рельефных изображений; материалы по алгебре, математическому анализу и физике – отпечатаны рельефно-точечным шрифтом Брайля; материалы по истории и литературе могут быть представлены в форме аудиозаписи или электронном виде (в некоторых случаях их необходимо представлять в рельефно-точечной системе Брайля).

Обучение студентов с глубоким нарушением зрения невозможно без учебных материалов, отпечатанных рельефно-точечным шрифтом Брайля. С появлением МО СОУ эту работу удалось поднять на качественно новый уровень. На базе лаборатории технических и программных средств обучения студентов с нарушением зрения факультета информационных технологий создана тифлотипография, оснащенная специальным программным обеспечением и современным тифлооборудованием, что позволило многократно увеличить выпуск брайлевских учебников и пособий по физико-математическим и компьютерным дисциплинам и обеспечить учебниками практически всех студентов с нарушениями зрения.

4. ТИФЛОТЕХНИЧЕСКИЕ УСТРОЙСТВА И СПЕЦИАЛЬНЫЕ ПРОГРАММЫ, ИСПОЛЬЗУЕМЫЕ НА ФАКУЛЬТЕТЕ ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ ДЛЯ ИЗУЧЕНИЯ ДИСЦИПЛИН МАТЕМАТИЧЕСКОГО И КОМПЬЮТЕРНОГО ЦИКЛОВ

Люди с нарушением зрения при работе с информацией используют специфические технические средства, которые объединяются термином «тифлоинформационные средства», т.е. средства, позволяющие инвалидам по зрению получать, создавать, обрабатывать и передавать информацию. Самым распространенным видом тифлоинформационных средств в настоящее время является персональный компьютер, оснащенный программой невидимого доступа к информации и брайлевским (тактильным) дисплеем.

Следует заметить, что особенности восприятия информации слабовидящими хотя и с ограничениями, но способных воспринимать визуальную информацию, существенно отличаются от особенностей восприятия totally слепых студентов, опирающихся исключительно на синтезированную речь и рельефно-точечный (брайлевский) вывод информации.

Существует достаточно большой перечень компьютеризированных тифлоинформационных устройств, которые используются незрячими людьми для доступа к информации. Принцип действия всех этих устройств основан на преобразовании визуальной (зрительной, воспринимаемой зрением) информации в доступные для незрячего человека формы:

- 1) визуальная информация преобразуется в речь (программы невидимого доступа к информации, синтезаторы речи и читающие устройства);



- 2) визуальная информация преобразуется в рельефно-точечный шрифт Брайля (брайлевские дисплеи и брайлевские принтеры в сочетании со специальным программным обеспечением, тифлокомпьютеры);
- 3) информация, оставаясь визуальной, увеличивается, изменяет контрастность и цвета (программы увеличения изображения на экране компьютера, автономные видео увеличители).

Подобная классификация достаточно условна, т.к. синтезаторы речи и брайлевские дисплеи бесполезны без программ невидимого доступа, тифлокомпьютеры можно отнести и к первому, и ко второму классу, а программы увеличения изображения на экране, как правило, одновременно имеют возможность озвучивания увеличиваемого текста синтезатором речи. Ниже будут рассмотрены применяемые на факультете ИТ в обучении студентов с нарушением зрения представители каждого из этих типов тифлотехнических устройств и программного обеспечения.

5. ПРОГРАММЫ НЕВИЗУАЛЬНОГО ДОСТУПА К ИНФОРМАЦИИ

Программы невидимого доступа к информации (Screen Reader – экранный ттец) – это специальные программы, позволяющие людям с глубоким нарушением зрения работать на персональном компьютере без визуального контроля. Эти программы по своему функционалу похожи на «зрячего ассистента», который отыскивает на экране текстовую информацию и либо прочитывает ее вслух, либо отображает на брайлевском (тактильном) дисплее.

Наиболее распространенной в настоящий момент программой этого класса является JAWS for Windows. Именно эта программа используется в компьютерных классах факультета ИТ при изучении математических и компьютерных дисциплин. Начиная с версии JAWS 8.0, в дистрибутиве имеется дополнительный набор совместимых синтезаторов речи, включающий в себя помимо русского языка многие другие языки.

Современная версия программы JAWS for Windows позволяет не только получать информацию невидимыми способами, но и осуществлять управление компьютером и прикладным программным обеспечением. Достигается это с помощью особого функционала, основанного на клавиатурных комбинациях. Незрячие студенты достигают достаточно высокой скорости работы, но процесс формирования навыков такой работы требует в несколько раз большего времени, чем для обучения свободного от зрительной депривации человека. Человек, не использующий визуальный интерфейс, должен помнить большое количество клавиатурных команд, заменяющих возможности манипулятора «мышь». В процессе обучения студентов с нарушением зрения (в том числе и имеющих остаточное зрение) манипулятор «мышь» лучше отключить от компьютера, все его возможности доступны с помощью клавиатурных команд.

Таким образом, при соответствующей подготовке пользователю с глубоким нарушением зрения доступны такие возможности как:



- просмотр и редактирование документов в текстовом редакторе;
- создание электронных таблиц;
- навигация по web-страницам в сети Internet;
- отправка и получение почты;
- запуск консольных приложений из командной строки;
- программирование в распространенных интегрированных средах;
- управление файловой системой с помощью проводника Windows и других файловых менеджеров.

Используя программы JAWS for Windows незрячие студенты способны освоить курс программирования в визуальных системах *Borland Delphi* или *Borland C++ Builder* и создавать полноценные *Windows*-приложения.

6. ПРОГРАММЫ УВЕЛИЧЕНИЯ ИЗОБРАЖЕНИЯ НА ЭКРАНЕ КОМПЬЮТЕРА

Программы увеличения изображения ориентированы на создание комфортных условий для работы на персональном компьютере пользователей с остаточным зрением. Достигается это с помощью улучшения визуальной составляющей интерфейса и преобразования части визуальной информации в речевую. Эти программы не просто увеличивают изображение на мониторе (как встроенные средства операционной системы Windows), а способны обрабатывать его и выводить на экран в удобной индивидуально подобранной для пользователя форме.

Таких программ существует достаточно много, на факультете ИТ используется программа MAGic. MAGic работает под всеми современными версиями операционной системы Windows, полностью русифицирован и комплектуется синтезатором русской речи. Программа содержит обширный спектр настроек и возможностей:

- увеличение изображения на экране от 1,1 до 36 крат от исходного размера;
- несколько режимов увеличения экрана (полное, наложенное, линза, динамическая линза, разделение экрана);
- возможность наблюдать увеличенное и не увеличенное изображение одновременно (увеличенную зону можно перемещать при помощи клавиатуры);
- возможность изменить стиль (цвет, размер, добавить эффект прозрачности, а также создать определенный набор правил, заменяющих один цвет на другой, менять яркость и добавлять затенения);
- возможность увеличения курсора, что помогает отслеживать его позицию на экране;
- встроенный синтезатор речи позволяет читать, используя манипулятор «мышь» или клавиатуру (чтение осуществляется по структурным элементам текста – словам, предложениям, строчкам или абзацам);
- возможность подсветки прочитанного текста (пользователь также может контролировать размер, цвет и стиль подсветки);



- программа предоставляет возможность адаптации и оптимизации необходимых приложений при помощи обширных средств конфигурации и языка сценариев.

MAGic совместим с программой невидимого доступа к информации JAWS for Windows, а также позволяет управлять электронными увеличителями ONYX и Toraz того же производителя и манипулировать полученными с них изображениями, что способствует наиболее полному раскрытию их возможностей в сфере обучения студентов с нарушением зрения. Подобная интеграция оборудования и программного обеспечения дает возможность студентам наиболее комфортно и эффективно работать с информацией.

7. СИНТЕЗАТОРЫ РЕЧИ

Сами программы невидимого доступа к информации не «разговаривают», они лишь отыскивают на экране и передают текстовую информацию на синтезатор речи или брайлевский дисплей. В установочный пакет программы JAWS for Windows входит синтезатор русской речи. Брайлевский дисплей в комплект поставки не входит и приобретается отдельно.

В настоящее время программные синтезаторы речи, в сочетании с программами невидимого доступа к информации, являются основным инструментом для незрячих пользователей компьютерной техники. Количество и степень разнообразия синтезаторов речи постоянно увеличиваются. Появляются все более качественные и удобные в эксплуатации продукты, обладающие близким по качеству к человеческому голосом.

Существует достаточно обширный перечень программных синтезаторов русской речи. К их числу относятся:

- синтезатор L&N компании Lernout & Hauspie Speech Products;
- семейство синтезаторов компании Acapela Group, наиболее распространенными, из которых являются синтезаторы Speechcube голосовой модуль «Николай» и голосовой модуль «Алёна» для синтезатора Infovox Desktop;
- семейство синтезаторов Speaking Mouse, первоначально разработанных клубом речевых технологий Московского Государственного Университета, а впоследствии совершенствуемых другими российскими производителями программных средств и индивидуальными программистами;
- синтезатор речи Newfon;
- синтезатор русской речи – RHVoice, свободно распространяемый синтезатор разрабатывается индивидуальными программистами.

Наиболее популярными среди незрячих пользователей в нашей стране являются синтезаторы MyMouse семейства Speaking Mouse и синтезатор RHVoice. Оба эти синтезатора поддерживаются и совершенствуются отечественными индивидуальными программистами.



8. БРАЙЛЕВСКИЕ ДИСПЛЕИ

Использование программ не визуального доступа к информации на экране компьютера существенно раздвинуло границы доступной для незрячего человека информации. Появление таких программ сравнимо по значимости с изобретением Луи Брайлем в 1825 году рельефно-точечной системы обозначений.

Для отображения информации с экрана компьютера рельефно-точечным шрифтом Брайля применяется так называемый брайлевский дисплей. Брайлевский дисплей (или тактильный дисплей, брайлевская строка) представляет собой планшет с одним рядом пьезоэлектрических модулей (ячеек). Каждый модуль способен отобразить один 8-ми точечный брайлевский символ.

Брайлевские дисплеи используют 8-ми точечный (компьютерный) брайль. Это вызвано тем, что с помощью 6-ти точек можно отобразить лишь 63 комбинации, а этого совершенно недостаточно для полноценной работы. 8-ми точечный формат позволяет отобразить уже 255 символов. Использовать, как в обычном брайле, систему префиксов (цифровой знак, признаки большой и малой буквы и пр.) неудобно, поскольку в обычном (плоскопечатном) тексте таких знаков нет, а текстовые документы, таблицы и пр. подготавливать надо в соответствии с требованиями визуально воспринимаемых документов. Поэтому для обозначения заглавных букв, букв латинского алфавита и в других случаях, где в обычном брайле используется соответствующий префикс, на брайлевском дисплее применяются 7-ая и 8-ая точки. Отображение точек 7 и 8 при работе с обычным русским текстом можно отключить в соответствующих настройках дисплея.

Использование программы не визуального доступа к информации в сочетании с синтезатором речи и брайлевским дисплеем позволяет вводить, читать и редактировать текстовую информацию, обрабатывать табличную информацию, осуществлять навигацию в сети Интернет, программировать на различных языках программирования и выполнять множество других операций. Кнопки брайлевского дисплея дают возможность осуществлять навигацию по экрану, управлять прикладным программным обеспечением и вводить текст, используя 8 кнопок встроенной клавиатуры Перкинса, аналогичных клавишам брайлевской печатной машинки.

На факультете ИТ используются 40-клеточные дисплеи Focus 40 Blue.

Брайлевский дисплей и синтезатор речи не являются альтернативами, а прекрасно дополняют друг друга и являются необходимым инструментом для обучения студентов с нарушениями зрения математическим и компьютерным дисциплинам.

9. ТИФЛОКОМПЬЮТЕРЫ

Тифлокомпьютеры – это особый класс специализированных устройств, на которых могут работать незрячие пользователи. Они не имеют экрана и стандартной клавиатуры для работы визуальными методами, но, благодаря этому, тифлокомпьютеры имеют небольшие (в сравнении с ноутбуком) размеры, меньший вес и значительно



большее время автономной работы от батареи. Тифлокомпьютеры общаются с пользователем только с помощью речевого выхода и встроенного брайлевского дисплея.

На факультете ИТ популярностью пользуется тифлокомпьютер ElBraille отечественной компании «Элита Групп» (<http://www.elitagroup.ru>). Это популярное во всем мире устройство представляет собой обычный полнофункциональный ноутбук с операционной системой Windows 10, но управляющийся только с помощью встроенного брайлевского дисплея. Очевидно, что эффективно использовать этот тифлокомпьютер можно только после особой подготовки пользователя, но удобство его эксплуатации оправдывает потраченное на учебу время. Тифлокомпьютер оснащен всеми видами беспроводной связи, имеет встроенный микрофон, картридер, а также на нём расположены все необходимые разъёмы для подключения монитора, стандартной клавиатуры и внешних USB-устройств.

Заметим, что на нем очень удобно не только вести запись текстового и аудио материала, но и, в отличие от обычного компьютера, выполнять брайлевские записи формул и математических расчетов. Выглядит это так же, как и на брайлевской печатной машинке, но дополнительно появляется возможность редактирования и ненужно дорогостоящей брайлевской бумаги. При необходимости математические расчеты можно распечатать на брайлевском принтере.

Тифлокомпьютер является достаточно дорогим устройством, но обеспечение незрячих студентов таким аппаратом, значительно упрощает и делает более эффективным процесс их обучения.

10. БРАЙЛЕВСКИЕ ПРИНТЕРЫ

Брайлевские принтеры (Embosser) – это необходимые в организации учебного процесса для слепых студентов устройства. С помощью брайлевского принтера можно распечатать учебный материал, необходимые рельефные рисунки и схемы, раздаточный материал и т.д. На факультете ИТ уже около 20-ти лет используются принтеры шведской компании Index Braille (<http://www.indexbraille.com>).

В настоящее время основную нагрузку по изготовлению рельефно-точечных пособий на факультете несёт принтер пятого поколения от этой компании – Braille Vox.

Заметим, что принтеры Index Braille не работают со стандартными текстовыми редакторами (MS Word, Блокнот и др.). Для подготовки текстов к печати по брайлю на этих принтерах следует использовать специальное программное обеспечение или готовить тексты вручную без автоматизации.

Хотя у принтеров Index Braille и существует режим печати графики, но эти принтеры используются в большинстве случаев для печати только текстовой информации, высококачественных рельефных изображений с их помощью не изготовить. Акцент на печать рельефной графики имеют принтеры Tiger, выпускаемые американской компанией ViewPlus (<http://www.viewplus.com>). Принтеры Tiger поставляются вместе с программным обеспечением того же названия.



Tiger – это графические рельефные принтеры, т.е. в основе их работы лежит графический способ печати, как и у всех современных принтеров для плоской печати (лазерные, струйные).

Принтеры семейства Tiger способны делать точки разной высоты в зависимости от цвета области на оригинал-макете рисунка. При подготовке графики к рельефной печати высота точек автоматически соотносится с интенсивностью цвета. Чем ярче и интенсивнее цвет, тем выше данный участок рельефного изображения. Принтеры Tiger печатают рельефные рисунки с разрешением 20 точек на дюйм. Этого вполне достаточно для хорошего рельефного рисунка.

Обычный брайлевский текст также рассматривается принтером как графика. Т.е., брайлевский шрифт представляет собой стандартный шрифт, символы которого состоят из точек. Если текст, подготовленный для такого принтера распечатать на обычном принтере, то вместо брайлевских точек на бумаге будут обычные, плоскопечатные точки. Верно и обратное: если на принтеры Tiger отправить текст, набранный плоским шрифтом, то на выходе получится рельефное изображение соответствующих плоскопечатных букв. Если шрифт сделать достаточно крупным, то эти буквы вполне можно воспринимать тактильно. Таким образом, незрячему можно наглядно показать рельефное изображение плоскопечатных букв, различное их начертание и виды шрифтов.

На нашем факультете используется принтер Tiger Emprint этой линейки. Его основным преимуществом является возможность совмещения рельефной и цветной печати. Т.е. рисунок, изготавливаемый этим принтером, является одновременно рельефным и цветным, что очень полезно для пользователей с остаточным зрением. Но использовать его для печати текстов неудобно, так как в этом принтере нет двусторонней печати, и работает он только с бумагой формата А4.

В отличие от принтеров Index Braille принтеры Tiger работают со стандартными текстовыми редакторами. Однако, для печати брайлевских текстов необходим специальный точечный шрифт и предварительная трудоёмкая подготовка текста в редакторе.

Таким образом, можно сделать вывод, что для печати текстовой информации эффективнее использовать принтеры Index Braille, а для изготовления рельефных рисунков принтеры линейки Tiger.

11. ТЕРМОМАШИНЫ

Для создания рельефной графики на факультете ИТ также используют термомашину – PIAF (Picture in a Flash). PIAF позволяет создавать тактильные изображения на специальной бумаге. При помощи нагрева, изображение на этой бумаге становится выпуклым.

Процедура подготовки рельефного изображения на подобном устройстве состоит из трех этапов:



1. На компьютере в любом графическом редакторе подготавливается изображение с учетом всех особенностей рельефной графики.
2. Подготовленное изображение распечатывается на специальной (капсульной) бумаге на лазерном принтере.
3. Бумага подвергается равномерному нагреву в термомашине и там, где была краска, происходит образование рельефа.

Рисунок на такую бумагу можно наносить также карандашом или специальным (угольным) фломастером. Если рисунок достаточно прост, не имеет текстовых подписей и может быть быстро нарисован обычным карандашом, то процедура изготовления рельефного рисунка займет всего 2–3 минуты.

Тифлотипография МГППУ уже подготовила и выпустила более 650 экземпляров учебников, напечатанных рельефно-точечным шрифтом Брайля, по более 60 наименованиям, а также три уникальных рельефно-графических альбома по физике, теории множеств, геометрии.

Использование в учебном процессе рельефно-графических наглядных пособий является крайне важным условием обеспечения качественного обучения студентов с глубоким нарушением зрения. Рельефные изображения представляют собой большую и разнообразную группу пособий, различающихся по исходному материалу и способу изготовления, характеру используемых изобразительных средств, а также степенью обобщенности свойств предмета, структурным и композиционным построением изображения. Применяются два способа изготовления рельефно-графических пособий: печать на бумаге для письма по брайлю и использование рельефообразующей бумаги.

Наряду с оборудованием, используемым для подготовки учебных пособий, огромную роль играют тифлотехнические устройства индивидуального пользования. Оборудованные тактильным (брайлевским) дисплеем и специальной программой не визуального доступа компьютеры в учебной аудитории позволяют студентам с нарушением зрения участвовать в практических занятиях наравне со своими зрячими сокурсниками.

Применяемые на факультете «Информационные технологии» МГППУ не визуальные приемы работы с информацией на персональном компьютере с соответствующим программным и аппаратным обеспечением делают возможным создание, получение, обработку и передачу информации в различных формах студентами с глубоким нарушением зрения.

12. ПРОГРАММЫ ДОПОЛНИТЕЛЬНЫХ ГРУППОВЫХ И ИНДИВИДУАЛЬНЫХ ЗАНЯТИЙ

Введение адаптационного модуля в качестве факультативного решает адаптационную задачу для студентов с инвалидностью по зрению, обеспечивает гибкость АО-ПОП ВО в целом, в том числе учебного плана, за счет быстрой замены адаптационного модуля на модуль для другой нозологии. Адаптационный модуль обеспечивает:



- универсальность учебного процесса;
- инклюзивность обучения;
- минимизацию влияния ограничений здоровья при формировании необходимых компетенций лиц с ОВЗ и инвалидов;
- индивидуальную коррекцию учебных и коммуникативных умений;
- социальную и профессиональную адаптацию обучающихся.

Для студентов предусмотрен адаптационный модуль для слепых и слабовидящих, где их знакомят со специальными информационными и современными компьютерными технологиями. В данный модуль входят такие дисциплины, как:

- Дисциплина «Система рельефно-точечных обозначений Л. Брайля» направлена на обучение чтению, письму и печатанию по Брайлю признается одним из важнейших компонентов элементарной реабилитации незрячих и слепоглухих людей, так как невозможность чтения и письма создает не только информационный дефицит, но и психологический дискомфорт, который усиливается тем, что не умея читать и писать, взрослый инвалид не имеет возможности выполнять свои профессиональные обязанности, решать многие социально-бытовые проблемы и др.
- Дисциплина «Современные компьютерные тифлотехнологии» направлена на повышение компетентности студентов в вопросах использования современной компьютерной тифлотехники.
- Дисциплина «Специальные информационные технологии» на освоение широкого круга специальных информационных технологий.

13. МЕТОДИЧЕСКОЕ, ПСИХОЛОГИЧЕСКОЕ И ЭТИЧЕСКОЕ СОПРОВОЖДЕНИЕ УЧЕБНОГО ПРОЦЕССА

Необходимым компонентом системы сопровождения учебы лиц с ОВЗ является психологическая и этическая составляющая. Это, прежде всего, умение общаться с лицами с ОВЗ. Этика общения с лицом с ограниченными возможностями здоровья, имеет большое значение для обеспечения комфортной среды для обучения. Корректный лексикон помогает формировать позитивные отношения в коллективе, в котором учится человек с инвалидностью.

Существует несколько правил, которых необходимо придерживаться:

1. При общении с инвалидами любой нозологии, следует обращаться непосредственно к нему, а не к сопровождающему лицу.
2. При встрече со слабовидящим человеком обязательно нужно называть себя и всех, кто присутствует, не забывая пояснять, к кому вы обращаетесь в процессе разговора.
3. Необходимо кратко описывать, где вы находитесь, предупреждать о препятствиях, «опасных» для здоровья предметов.
4. Когда кто-либо предлагает слабовидящему присесть, следует направить его руку на спинку стула или подлокотник, а не усаживать его.
5. При знакомстве слабовидящего студента с незнакомым предметом не следует водить его рукой по поверхности предмета, нужно дать ему возможность свободно

потрогать предмет. Если для ознакомления с объектом его необходимо взять в руки, не следует тянуть кисть слабовидящего к предмету и брать его рукой этот предмет, лучше подать ему этот предмет или подвести к нему.

Данные знания необходимо популяризировать, доносить до тех преподавателей вуза, которые ранее не работали с людьми с ограниченными возможностями здоровья, до студентов-однорукников лиц с инвалидностью, чтобы образовательная среда вуза стала одинаково комфортной и доступной для всех субъектов образовательного процесса.

Так же факультет уделяет большое значение методическому сопровождению учебного процесса для лиц с ОВЗ и разработаны методические рекомендации. Это, прежде всего, содействие персональному обеспечению студентов-инвалидов учебно-методическими материалами по дисциплинам учебного плана по направлениям факультета, в частности, математического и компьютерного циклов.

На факультете проводится работа по организации дополнительных консультаций, контролю и помощи в обеспечении методической литературой, доступа в Интернет. Кроме этого, учебные и методические материалы необходимо переводить на аудио-, видео- и электронные носители, обучать студентов пользоваться ими, помогать в этом. Целесообразно создавать банк обучающих мультимедийных программ и разрабатывать методики их использования, применять методики дистанционного обучения. Большая работа требуется для овладения и использования специальных компьютерных методик, компенсирующих дефекты зрения.

В качестве механизма, компенсирующего недостатки зрительного восприятия, у слабовидящих лиц выступают слуховое и осязательное восприятия. Лица с нарушениями зрения уступают лицам с нормальным зрением в точности и оценке движений, степени мышечного напряжения в процессе освоения и выполнения заданий. Ограниченность информации, получаемой слабовидящими, обуславливает схематизм зрительного образа, его скудность; нарушение целостности восприятия, когда в образе объекта отсутствуют не только второстепенные, но и определяющие детали, что ведет к фрагментарности или неточности образа. При слабовидении страдает скорость зрительного восприятия; нарушение бинокулярного зрения (полноценного видения двумя глазами) у слабовидящих может приводить к так называемой пространственной слепоте (нарушению восприятия перспективы и глубины пространства), что важно при черчении и чтении чертежей. При зрительной работе у слабовидящих быстро наступает утомление, что снижает их работоспособность. Поэтому необходимо проводить небольшие перерывы. Слабовидящим могут быть противопоказаны многие обычные действия, например, наклоны, резкие прыжки, поднятие тяжестей, так как они могут способствовать ухудшению зрения.

Для усвоения информации слабовидящим требуется большее количество повторений и тренировок. При проведении занятий следует учитывать значение слуха в необходимости пространственной ориентации, которая требует локализовать источники звуков, что способствует развитию слуховой чувствительности. У лиц с нарушениями зрения при проведении занятий в условиях повышенного уровня шума,



вибрации, длительных звуковых воздействий, может развиваться чувство усталости слухового анализатора и дезориентации в пространстве.

При лекционной форме занятий слабовидящим следует разрешить использовать звукозаписывающие устройства и компьютеры, как способ конспектирования, во время занятий. Информацию необходимо представлять исходя из специфики слабовидящего студента: крупный шрифт (16–18 размер), дисковый накопитель (чтобы прочитать с помощью компьютера со звуковой программой), аудиофайлы.

Всё записанное на доске должно быть озвучено. Необходимо комментировать свои жесты и надписи на доске и передавать словами то, что часто выражается мимикой и жестами. При чтении вслух необходимо сначала предупредить об этом. Не следует заменять чтение пересказом. В построении предложений не нужно использовать расплывчатых определений и описаний, которые обычно сопровождаются жестами, выражений вроде: «предмет находится где-то там, на столе, это поблизости от вас...». Старайтесь быть точным: «Предмет справа от вас».

При работе со слабовидящими возможно использование сети Интернет, подачи материала на принципах мультимедиа, использование «on-line» семинаров и консультаций, консультаций в режиме «off-line» посредством электронной почты. При работе на компьютере следует использовать принцип максимального снижения зрительных нагрузок. Для этого нужно обеспечить:

- подбор индивидуальных настроек экрана монитора в зависимости от диагноза зрительного заболевания и от индивидуальных особенностей восприятия визуальной информации;
- дозирование и чередование зрительных нагрузок с другими видами деятельности;
- использование специальных программных средств для увеличения изображения на экране или для озвучивания информации;
- принцип работы с помощью клавиатуры, а не с помощью мыши, в том числе с использование «горячих» клавиш и освоение слепого десятипальцевого метода печати на клавиатуре.

14. ИНТЕГРАЦИЯ ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ

Одним из основных направлений организации процесса обучения на факультете «Информационные технологии» МГППУ является активное привлечение студентов к научной и исследовательской деятельности. Факультет готовит специалистов, которые занимаются созданием, сопровождением и использованием прикладных программных и информационных систем, обработкой и анализом экспериментальных данных, умеют грамотно применять методы математического моделирования для решения прикладных задач.

Проектно-ориентированный характер обучения студентов, участие в решении актуальных практических задач обеспечивает студентам высокое качество подготовки посредством приобретения опыта работы в реальной профессиональной среде. Кроме того, это даёт студентам возможность публиковать свои научные статьи



в рецензируемых журналах, участвовать в российских олимпиадах, отечественных и зарубежных научных конференциях, внедрять и реально использовать в учреждениях и организациях различного профиля разработанные ими программные продукты.

Для студентов с инвалидностью очень важно привлечение их в рамках курсовых и дипломных проектов к разработке и внедрению в учебный процесс новых технических и программных средств и технологий обучения, поскольку они, учитывая нахождение в рамках учебного учреждения, могут выступать не только в роли разработчика, но и в роли пользователя и оценивать в качестве экспертов полученные результаты.

Работа студентов над проектами индивидуально или в составе группы под руководством опытных преподавателей, имеющих богатый научный и практический опыт, способствует повышению эффективности процесса обучения, снижает риски разочарования в собственных силах, помогает адаптироваться в условиях высшей школы, научного сообщества, проектной организации или предприятия за счёт решения реальных практических задач, максимально приближенных по содержанию к тому, с чем приходится иметь дело в процессе трудовой деятельности.

Для студентов с инвалидностью по зрению большое значение имеет привлечение к наиболее актуальным на сегодняшний день конкретным разработкам, таким как:

- адаптация программного обеспечения для озвучивания текстов для студентов с нарушениями зрения (обеспечение совместимости с русской версией системы озвучивания текстов JAWS);
- конвертер ТЕХ-Брайль для мелкотиражного издания учебных пособий;
- система «Гиперсаунд» для навигации по звуковым файлам для подготовки и воспроизведения звуковых учебников, удобных для незрячих и слабовидящих, а также для лиц с нарушениями опорно-двигательной системы;
- специализированные программные интерфейсы для студентов с нарушениями зрения;
- отображение геопространственных данных в геоинформационной системе, ориентированной на пользователей с нарушением зрения;
- описание практического использования незрячими специализированных приложений и программ (восстановление утраченных файлов с помощью программы «Resuva»; распознавание сканов документов, Pdf-файлов или изображений с использованием приложения Envision AI);
- диагностика и адаптивное обучение операторов роботов/беспилотных летательных аппаратов и др.

Занимаясь научными исследованиями, проектируя новые устройства, разрабатывая программное обеспечение, системы навигации, студенты с инвалидностью по зрению помогают в первую очередь себе. Если, работая над курсовым или дипломным проектом, студенты, как правило, справляются с заданием самостоятельно, то принимая участие в серьезных научных разработках, они вводятся в состав рабочей группы и успешно адаптируются в условиях совместного коллективного творчества.



Защита проектных работ перед комиссией вуза, на конкурсах командных проектов и творческих работ учащейся молодежи, Всероссийском конкурсе студенческих проектов «Профессиональное завтра» с участием студентов с инвалидностью, Всероссийском конкурсе «С компьютером на ты» общественной организации слепых «Камерата», Всероссийских выставках научно-технического творчества молодёжи, на международных конференциях и конкурсах, например, Международной конференции-школе-семинаре «Новые информационные технологии», Международных научных конференциях «Condition Monitoring» в Великобритании и «Life IT», в Германии, Международных Форумах, признание заслуг и достижений дает возможность студентам почувствовать уверенность в себе и занять достойное место среди коллег в избранной области профессиональной деятельности.

Следует отметить, что 100 % сотрудников и преподавателей факультета ИТ не только имеют многолетний опыт работы с незрячими и слабовидящими студентами, но и регулярно повышают свой уровень квалификации. Без специальных знаний крайне трудно сформировать инклюзивную образовательную среду. Сделать процесс обучения эффективным, раскрыть потенциальные возможности студентов с инвалидностью, гордиться отличной подготовкой и стопроцентным трудоустройством выпускников с нарушениями зрения.

Студенты с нарушениями зрения с особым удовольствием занимаются в специализированных аудиториях, оснащенных тифлотехническим оборудованием и специальными программными средствами. После занятий они часто остаются для самостоятельной работы, т.к. у подавляющего большинства дома такой возможности нет. Новые технологии привлекают внимание и обычных студентов. Некоторые из них с интересом изучают шрифт Брайля, учатся работать на специальном оборудовании. В будущем они станут волонтерами и смогут помочь вновь поступившим студентам.

15. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Опираясь на собственные наработки, а также на отечественный опыт и зарубежные достижения в области высшего образования студентов с нарушениями зрения, в ФГБОУ ВО «Московский государственный психолого-педагогический университет» создан и успешно работает модельный образец специальных образовательных условий получения высшего профессионального образования студентами с инвалидностью по зрению, обучающихся по программам бакалавриата: «Математическое обеспечение и администрирование информационных систем», «Прикладная информатика».

Литература

1. Рубцов В.В., Васина Л.Г., Куравский Л.С., Соколов В.В. Модельный образец специальных образовательных условий для получения высшего образования студентами с инвалидно-



- стью: опыт создания и применения. – Психологическая наука и образование (Psychological Science and Education), 2017, Т. 22, № 1, С.18–33, doi: 10.17759/pse.2017220103.
2. Куравский Л.С., Васина Л.Г., Соколов В.В. Практические результаты работы модельного образца специальных образовательных условий для студентов с нарушениями зрения в МГППУ // Психологическая наука и образование. 2018. Т. 23. № 2. С. 89–101. doi: 10.17759/pse.2018230210
 3. Соколов В.В., Чerven-Водали Е.Б., Сидорова В.Б. Особенности обучения студентов с ОВЗ по зрению дисциплинам математического и компьютерного циклов на факультете «Информационные технологии» // Моделирование и анализ данных. – 2017. – Т. 7. – № 1. – С. 104–118.
 4. Государственная программа «Доступная среда» на 2011–2020 годы (утверждена Постановлением Правительства Российской Федерации от 1 декабря 2015 г., № 1297).
 5. Межведомственный комплексный план мероприятий по обеспечению доступности профессионального образования для инвалидов и лиц с ограниченными возможностями здоровья на 2016–2018 годы (утв. Правительством РФ 23 мая 2016 г. № 3467п-П8).
 6. Федеральный государственный образовательный стандарт высшего образования 02.03.03, утвержденный приказом Министерства образования и науки Российской Федерации от «12» марта 2015г. № 222.
 7. Федеральный государственный образовательный стандарт высшего образования 09.03.03, утвержденный приказом Министерства образования и науки Российской Федерации от «12» марта 2015г. № 207.
 8. Федеральный закон от 24 ноября 1995 г. N 181-ФЗ «О социальной защите инвалидов в Российской Федерации».



A Model Sample of Special Educational Conditions for Obtaining Higher Education by Visually Impaired Students Studying Undergraduate Programs in Mathematics and Applied Computer Science

Vladimir V. Sokolov*

Moscow state University of Psychology & Education (MSUPE), Moscow, Russia
e-mail: sokolovvv@mgppu.ru

Lyudmila G. Vasina**

Moscow state University of Psychology & Education (MSUPE), Moscow, Russia
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-9902-2511>
e-mail: vasinalg@mgppu.ru

Elena B. Cherven-Vodali***

Moscow state University of Psychology & Education (MSUPE), Moscow, Russia
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-6871-9105>
e-mail: cervenvodali@mgppu.ru

Valeriya B. Sidorova****

Moscow state University of Psychology & Education (MSUPE), Moscow, Russia
ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-6391-5361>
e-mail: sidorovavb@mgppu.ru

Svetlana N. Antipova*****

Moscow state University of Psychology & Education (MSUPE), Moscow, Russia
ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-6642-7953>
e-mail: antipovasn@mgppu.ru

The article presents the practical results of the work of a model sample of special educational conditions for students with visual impairments in terms of studying the disciplines of mathematical and computer cycles, studying undergraduate programs in mathematics and applied computer science.

Keywords: educational process, students with disabilities.

For citation:

Sokolov V.V., Vasina L.G., Cherven-Vodali E.B., Sidorova V.B., Antipova S.N. A Model Sample of Special Educational Conditions for Obtaining Higher Education by Visually Impaired Students Studying Undergraduate Programs in Mathematics and Applied Computer Science. *Modelirovanie i analiz dannykh = Modelling and Data Analysis*, 2023. Vol. 13, no. 3, pp. 123–143. DOI: 10.17759/mda.2023130309 (In Russ., abstr. in Engl.).

***Vladimir V. Sokolov**, Chief of Education-production Laboratory of Technical Tools and Software for Teaching Blind and Visually Impaired Students, Faculty of Information Technologies, Moscow State University of Psychology & Education (MSUPE), Moscow, Russia, e-mail: sokolovvv@mgppu.ru



****Lyudmila G. Vasina**, Specialist in UMR, Moscow State University of Psychology & Education (MSUPE), Moscow, Russia, ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-9902-2511>, e-mail: vasinalg@mgppu.ru

*****Elena B. Cherven-Vodali**, Lecturer of the Department of Applied Informatics and Multimedia Technologies, Moscow State University of Psychology & Education (MSUPE), Moscow, Russia, ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-6871-9105>, e-mail: cervenvodali@mgppu.ru

******Valeriya B. Sidorova**, Lecturer of the Department of Applied Informatics and Multimedia Technologies, Moscow State University of Psychology & Education (MSUPE), Moscow, Russia, ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-6391-5361>, e-mail: sidorovavb@mgppu.ru

*******Svetlana N. Antipova**, Deputy Dean for Extracurricular Activities of the Faculty of Information Technology, Moscow State University of Psychology & Education (MSUPE), Moscow, Russia, ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-6642-7953>, e-mail: antipovasn@mgppu.ru

References

1. Rubtsov V.V., Vasina L.G., Kuravskii L.S., Sokolov V.V. Model'nyi obrazets spetsial'nykh obrazovatel'nykh uslovii dlya polucheniya vysshego obrazovaniya studentami s invalidnost'yu: opyt sozdaniya i primeneniya. – *Psikhologicheskaya nauka i obrazovanie* (Psychological Science and Education), 2017, T. 22, № 1, P. 18–33, doi: 10.17759/pse.2017220103.
2. Kuravskii L.S., Vasina L.G., Sokolov V.V. Prakticheskie rezul'taty raboty model'nogo obraztsa spetsial'nykh obrazovatel'nykh uslovii dlya studentov s narusheniyami zreniya v MGPPU // *Psikhologicheskaya nauka i obrazovanie*. 2018. T. 23. № 2. P. 89–101. doi: 10.17759/pse.2018230210
3. Sokolov V.V., Cherven-Vodali E.B., Sidorova V.B. Osobennosti obucheniya studentov s OVZ po zreniyu distsiplinam matematicheskogo i komp'yuternogo tsiklov na fakul'tete «Informatsionnye tekhnologii» // *Modelirovanie i analiz dannykh*. – 2017. – T. 7. – № 1. – S. 104–118.
4. Gosudarstvennaya programma «Dostupnaya sreda» na 2011–2020 gody (utverzhdena Postanovleniem Pravitel'stva Rossiiskoi Federatsii ot 1 dekabrya 2015 g., № 1297).
5. Mezhdvedomstvennyi kompleksnyi plan meropriyatii po obespecheniyu dostupnosti professional'nogo obrazovaniya dlya invalidov i lits s ogranichennymi vozmozhnostyami zdorov'ya na 2016–2018 gody (utv. Pravitel'stvom RF 23 maya 2016 g. № 3467p-P8).
6. Federal'nyi gosudarstvennyi obrazovatel'nyi standart vysshego obrazovaniya 02.03.03, utverzhdennyi prikazom Ministerstva obrazovaniya i nauki Rossiiskoi Federatsii ot «12» marta 2015g. № 222.
7. Federal'nyi gosudarstvennyi obrazovatel'nyi standart vysshego obrazovaniya 09.03.03, utverzhdennyi prikazom Ministerstva obrazovaniya i nauki Rossiiskoi Federatsii ot «12» marta 2015g. № 207.
8. Federal'nyi zakon ot 24 noyabrya 1995 g. N 181-FZ “O sotsial'noi zashchite invalidov v Rossiiskoi Federatsii”.

Получена 10.07.2023

Принята в печать 09.08.2023

Received 10.07.2023

Accepted 09.08.2023

Использование тепловых карт для оптимизации образовательных бизнес процессов в компании Скилбокс

*Долгих А.Д.**

ООО «Skillbox», Национальный исследовательский технологический университет «МИСИС» (МИСИС), г. Москва, Российская Федерация
ORCID: <https://orcid.org/0009-0005-9545-2177>
e-mail: addolgikh@gmail.com

В статье рассмотрены способы анализа данных для решения задачи выбора оптимального решения с целью оптимизации ресурсов на примере компании Skillbox. Рассмотрены и решены задачи выбора информационных ресурсов с учетом предложений рынка. Автор рассматривает различные способы анализа данных с упором на минимизацию ресурсов, необходимых на их обработку.

В статье автором описывается практическое применение программы “Цифровой помощник”, которая разработана компанией Скилбокс для измерения продуктовых метрик и анализа поведения обучающихся. С помощью описанных автором методов анализа больших данных, рассмотрены способы оптимизации образовательных бизнес-процессов, которые приводят к увеличению рентабельности образовательных курсов. Как один из основных способов анализа больших данных рассматриваются тепловые карты, описано практическое их применение.

Автор описывает взаимосвязь бизнес метрик и изменений, происходящих с образовательным продуктом, и предлагает методы и периодичность проводимых опросов и обработки обратной связи об образовательном пути обучающихся.

Ключевые слова: тепловые карты, увеличение прибыли, оптимизация ресурсов, анализ данных, условия окупаемости, оценка ресурсов, бизнес-процессы, образовательные курсы, продуктовые метрики, образовательные метрики.

Для цитаты:

Долгих А.Д. Использование тепловых карт для оптимизации образовательных бизнес процессов в компании Скилбокс // Моделирование и анализ данных. 2023. Том 13. № 3. С. 144–157. DOI: <https://doi.org/10.17759/mda.2023130310>

**Долгих Анастасия Дмитриевна*, начальник отдела сопровождения, ООО «Skillbox», Национальный исследовательский технологический университет «МИСИС» (МИСИС), г. Москва, Российская Федерация, ORCID: <https://orcid.org/0009-0005-9545-2177>, e-mail: addolgikh@gmail.com



1. ВВЕДЕНИЕ

Развитие технологий, увеличение количества собираемых и обрабатываемых данных требуют от образовательных курсов в рамках дополнительного образования (ДО) эффективных бизнес решений при выборе методов работы для анализа информации. Бизнес аналитики в сфере ДО используют два вида сбора и обработки информации таких как, обработка первичных данных, которая реализуется с помощью наблюдений, опросов, экспериментов, имитационного моделирования, и больших массивов информации, для которых применяются таблицы, графики, диаграммы, тепловые карты и др. В рамках данной статьи рассматривается применение тепловых карт как один из эффективных способов обработки информации в образовательной компании ЧОУ ДПО «Образовательные технологии «Скилбокс» (Коробка навыков)». В процессе обучения цифровым профессиям в связи с быстрым устареванием контента образовательные курсы вынуждены регулярно обновлять свой контент на постоянной основе, чтобы соответствовать духу времени. Поэтому **актуальность** работы обусловлена тем, что для эффективного внесения изменений в предзаписанный обучающий контент компании Скилбокс необходимо оперативно анализировать поведение обучающихся и проводить мониторинг контента курсов.

Скилбокс образовательная организация, реализующая курсы дополнительного профессионального образования (ДПО) и дополнительного образования детей и взрослых (ДО). Образовательный контент курса заранее предзаписан и выложен на образовательную онлайн платформу. Слушатель занимается в свободном графике в асинхронном формате. Каждая образовательная программа состоит из видео уроков, практических заданий, тестовых заданий и лонгридов (урок, в котором текст, картинки/видео, тестовые вопросы выстроены в определенной логике). Слушатель изучает теоретический материал и после этого отрабатывает навыки, выполняя домашние практические задания. Они бывают двух типов: для самопроверки и для сдачи преподавателю на проверку.

Компания Скилбокс реализует курсы в области образовательных технологий и программы цифровых профессий: мобильный разработчик, веб-разработчик, специалист по кибербезопасности, веб-дизайнер, веб-аналитик, интернет-маркетолог, продактолог и т.д.

В рамках данной статьи будут рассмотрены следующие вопросы:

1. Каким способом в максимально сжатые сроки можно проанализировать большой объем полученной информации;
2. Какой способ позволит быстро и эффективно принимать управленческие решения;
3. Какой способ оптимизирует человеческие и финансовые затраты на сопровождение образовательного продукта.

В статье рассматривается пример анализа поведения обучающихся на образовательной IT платформе Скилбокс. Сбор и анализ данных проводился на основе обработки цифровых форм, при которой слушатели давали обратную связь во время и



после прохождения обучения цифровым профессиям. Первый опросник составлен с целью определить степень удовлетворенности обучающихся по критериям: качество уроков, общение с преподавателем, интерфейс платформы. Опросник размещался на платформе и демонстрировался обучающимся в виде всплывающих окон каждые 40 дней обучения. Второй опросник был составлен с целью определить степень удовлетворенности слушателей по критериям: качество уроков, общение с преподавателем, интерфейс платформы. Опросник демонстрировался слушателям в определенные моменты обучения: 1) после просмотра видео лекции; 2) после успешной сдачи практической работы; 3) по истечении времени прохождения модуля курса. Опросники направлены на анализ продуктовых метрик, в первую очередь это индекс потребительской лояльности Net Promoter Score (NPS) и индекс удовлетворенности клиентов Customer Satisfaction Score (CSAT).

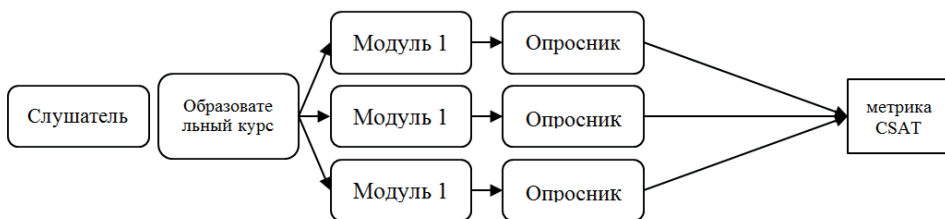


Рис. 1. Образец измерения метрики CSAT на примере первого модуля

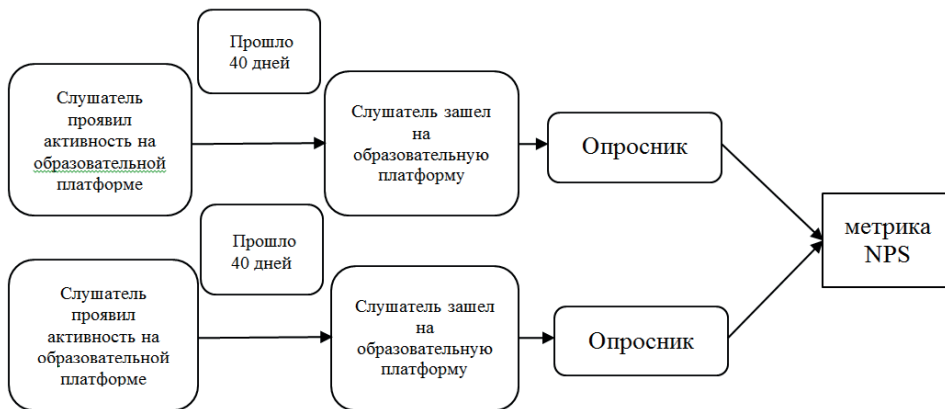


Рис. 2. Схема измерения метрики NPS

NPS впервые упоминается Фредом Райхельдом как метрика клиентской лояльности в 2003 году [1]. Основная идея индекса – избавиться от традиционных «скучных» и «сложных» опросов. Вместо них Райхельд предложил задавать клиенту всего лишь один емкий вопрос: «Насколько вероятно вы порекомендуете обучение своему



другу или коллеге?» Для ответов он предлагал использовать десятибалльную шкалу, по результатам которой подсчитывались баллы, а в дальнейшем, рассчитывался индекс NPS. В предложенной им системе участники опроса делятся на три группы: критики (слушатели, которые поставили от 0 до 6 баллов); нейтралы (слушатели, которые поставили оценки 7 и 8); и промоутеры (слушатели, которые поставили оценки 9 и 10). Для подсчета индекса NPS необходимо вычислить разницу между количеством промоутеров и критиков. Нейтралы в подсчете не участвуют, так как не характеризуют компанию ни с положительной, ни с отрицательной стороны. На основе исследования, проведенного Ф. Райхельдом был сделан вывод, что показатель NPS равный 50 % и более является показателем высокого темпа роста компании. Такие компании являются лидерами рынка. К плюсам NPS можно отнести простоту использования, а именно то, что на заполнение анкеты обучающемуся требуется не более 30 секунд. Следовательно, велика вероятность, что большинство слушателей пройдут опрос, что поможет собрать большую базу для анализа. Еще одним удобством использования индекса NPS является наглядная репрезентация материала для руководителей компании. Визуализация данных позволяет понимать, насколько обучающиеся готовы порекомендовать продукт и насколько высока вероятность, что они готовы к повторной покупке. Анкета для вычисления индекса NPS в компании Скилбокс представляет собой всплывающее окно с вопросом «насколько вы готовы рекомендовать обучение в Скилбокс своим друзьям и знакомым». Далее предлагается выбрать категорию, к которой относится оценка: общая категория; качество материалов; общение с преподавателем по выполнению практических и домашних заданий; интерфейс платформы. К минусам индекса следует отнести отсутствие дополнительной информации для анализа. Так как задается всего один вопрос для выявления причин проставленных оценок необходимо проводить дополнительные исследования. Для более точного результата анализа оценок NPS в Скилбокс совершается дополнительное устное анкетирование слушателей, которые поставили оценки 6 и ниже для уточнения причин проставленных баллов. В результате опроса выяснилось, что среди слушателей, поставивших оценки ниже 6 только 20 % выбирает верную категорию; 40 % поставили оценку случайно или не могут уточнить причину; 15 % слушателей имеют завышенные ожидания по обучению, из них более 80 % не ознакомились с инструкцией обучения на платформе, например, ожидания личного репетитора, а не самостоятельное изучение материала на платформе. Таким образом, для корректного использования индекса NPS в работе необходимо обязательно учитывать человеческий фактор.

Индекс удовлетворенности клиентов (CSAT) помогает собирать обратную связь слушателей в процессе обучения. CSAT оценивает, насколько обучение, соответствует ожиданию слушателя на каждом этапе образовательного трека. Анкета для вычисления CSAT в Скилбокс представляет собой всплывающее окно по окончании каждого этапа взаимодействия: после просмотра видео урока, после успешной сдачи практической работы и после окончания курса. Опросник разделен на категории: оценка качества, оценка спикера, оценка домашнего задания и оценка качества



взаимодействия. К **оценке качества** относится то, как слушатель оценивает качество образовательного контента в целом. Достаточно ли было дано информации для выполнения практической работы, требовалось ли при изучении модуля обращаться к дополнительной литературе, достаточно ли текстового и/или видео контента для выполнения практического задания и достаточно ли дано примеров. При **оценке спикера** курса дается обратная связь об удобстве подачи информации для восприятия, насколько последовательно излагался материал, была ли речь понятной, делался ли эмоциональный акцент на ключевых местах материала, насколько речь спикера отражалась на слайдах презентации. В подразделе **оценка домашнего задания** анализируется понятна ли формулировка задания, насколько доступно изложена цель домашнего задания и с чего его необходимо начинать. **Оценка качества взаимодействия с преподавателем** – насколько подробно преподаватель давал обратную связь, отвечал на вопросы, направлял и помогал в подготовке заданий. Еженедельно Скилбокс получает до 14 000 оценок CSAT. Для удобства и скорости анализа данных в компании используется визуализация данных. Для анализа динамики продуктовых метрик Скилбокс применяет графики, тепловые карты и диаграммы.

Автор сконцентрировал свое внимание на тепловых картах, как на наиболее эффективном способе обработки информации в образовательной компании Скилбокс. Термин тепловая карта (heatmap) был предложен Кормаком Кинни как графическое представление данных, где индивидуальные значения отображаются в таблице при помощи цвета [2].

Тепловые карты применяются специалистами различных областей: интернет – маркетологами, веб – дизайнерами, социологами, инженерами, разработчиками мобильных приложений, исследователями, географами, медиками и т.д. Тепловые карты применяются в статистике для анализа данных. В медицине И.Н. Махров (2021) предлагает решение использование тепловых карт для прогнозирования рисков в области общественного здоровья [3]. В криминалистике тепловые карты применяются для анализа совершаемых преступлений. Для принятия решений выбора эффективной стратегии сокращения преступности [4]. В биологии Нохрин Д.Ю. (2021) описывает применение тепловых карт для визуализации экспертной оценки вкуса продукции [5] Чернова Е.А. (2022) рассматривает реализацию тепловых карт в разработке сайтов на основе анализа поведения пользователей. Тепловые карты помогают реализовать наиболее правильный алгоритм размещения веб страниц [6]. В образовании тепловые карты применяются для анализа поведения и мониторинга обучающихся, для измерения активности, для мониторинга успеваемости, для анализа учебного материала, для проверки качества работы преподавательского состава и т.п. В пандемию, при мониторинге обучающихся был замечен рост активности слушателей более чем на 40 % на онлайн продуктах. Это позволило компании быстро отреагировать на меняющийся спрос и увеличить число преподавателей и продуктов.

В Скилбокс тепловые карты применяются для анализа CSAT. Количественные значения представляются на картах с помощью цветочкодированных областей, которые показывают поведение пользователей. При обработке данных используется

программа «Цифровой помощник», которая собирает и анализирует метрики образовательного продукта и визуализирует полученные результаты в виде графиков и таблиц. В «Цифровом помощнике» можно выбрать необходимые для анализа даты, курс и категорию. При получении данных можно наглядно увидеть «проблемные» места и принять управленческие решения.

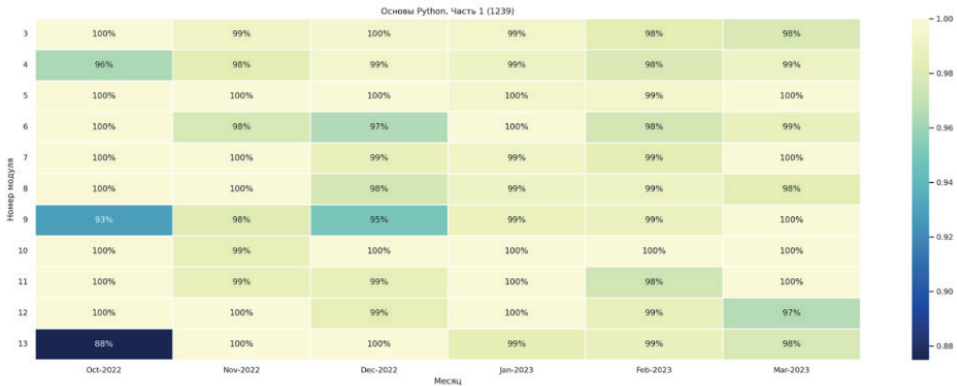


Рис. 3. CSAT взаимодействие с преподавателем

На рисунке 1 изображена тепловая карта CSAT из программы «Цифровой помощник». Тепловая карта отображает метрику CSAT взаимодействие с проверяющим преподавателем по модулям программы в период с октября 2022 года по март 2023 года. В октябре 2022 на 13 модуле выделено резкое падение метрики. Для анализа падения были произведены следующие действия: проанализирована обратная связь преподавателей по 13 модулю, проведен аудит формулировки задания, проведен аудит видео контента модуля на предмет достаточности теоретического материала для выполнения задания. В результате была выявлена недостаточность материала для выполнения задания, на преподавателей возросла нагрузка по дополнительному разъяснению, слушатели были недовольны объемом доработок по практической работе. В результате на платформу был выложен дополнительный теоретический материал и практические примеры выполнения работы, что привело к росту CSAT, улучшению проходимости модуля и повышению конверсии выпускников. Систематический анализ показателей (не реже 1 раза в неделю) и их визуализация в виде тепловых карт является эффективным инструментом оперативного контроля руководителем подразделения для предотвращения ухудшений метрик.

Руководители для принятия управленческих решений ориентируются на тепловые карты, которые применяются в анализе цифровых следов (активность на платформе). Цифровой след можно собирать из электронных журналов, дневников, из личных кабинетов учащихся, а так же в любых других логах, которые могут быть применены для дальнейшего анализа [7]. На данный момент существует множество



методов и технологий анализа данных, которые применяются в организации обучающего процесса для развития обучающегося. Среди них можно выделить следующие: данные обратной связи – сбор и анализ информации от слушателей образовательных курсов; анализ успеваемости – анализ успехов и срез знаний слушателей с целью выявления проблем и разработки способов поддержки отстающих; анализ социальных данных – анализ географии, национальности, данных о занятости, с целью адаптации образовательного продукта под целевую аудиторию.

Управленческий аппарат проводит анализ не только образовательного процесса как такового, но и отслеживает другие траектории развития образовательного продукта. Среди них можно выделить анализ профессиональных профильных конференций и тенденций развития отрасли, с целью выбора современных методов обучения; анализ эффективных образовательных технологий и поиск возможностей для улучшения образовательной среды. Применение различных методов анализа информации позволяет разрабатывать обучающие курсы, максимально соответствующие потребностям обучающихся.

Задача аналитики на основании вышеупомянутых данных предоставить информацию, на основании которой принимаются бизнес решения. Средством хранения всего объема информации может служить реляционная база, (построенная на основе Microsoft Excel) которую можно трансформировать в тепловую карту. Одной из главных задач анализа табличных значений является поиск зависимостей и отношений между данными. В случае увеличения числа таблиц и потока аудитории, для эффективной обработки информации возникает необходимость использования базы данных.

Для поиска зависимости рассматривались несколько разных соотношений: слушать – платформа, слушатель – курс, слушатель – преподаватель, слушатель – практическая работа, слушатель – служба поддержки платформы. Для оценки зависимости между метрикой NPS и активностью пользователей была применена формула корреляции Пирсона. Автором рассматривались данные за январь 2023 года. Активное число пользователей в данной формуле – это слушатели, которые заходили на обучающую платформу, но не имели образовательного прогресса, т.е. не была просмотрена ни одна видео лекция и не сдана практическая работа. При этом если пользователь зарегистрирован на платформе более 40 дней назад, ему был показан опросник для измерения метрики NPS.

$$r = (\Sigma((X_i - X_{cp})(Y_i - Y_{cp}))) / ((\sqrt{\Sigma(X_i - X_{cp})^2}) * (\sqrt{\Sigma(Y_i - Y_{cp})^2}))$$

где:

r – коэффициент корреляции Пирсона;

Σ – сумма всех значений в выражении;

X_i – активное число пользователей за одну неделю с 9.01.23 по 15.01.23;

Y_i – NPS за неделю с 9.01.23 по 15.01.23;

X_{cp} – среднее значение пользователей в январе 2023 года;

Y_{cp} – среднее значение метрики NPS за январь 2023 года.



$$\frac{(95775,25((48981-46679)(57,85-57,4)))}{((\sqrt{95775,25(48981-46679)^2}) * (\sqrt{95775,25(57,85-57,4)^2}))}$$

В данном случае коэффициент равен примерно 0.678, что означает наличие положительной линейной корреляции между X и Y.

В результате была выявлена корреляционная зависимость метрики NPS с общими показателями рентабельности продуктов, такими как: процент возвратов, расход на сопровождение. При падении метрики растет количество возвратов, расход на сопровождение продуктов и, как обратный эффект, при росте метрик, наблюдается положительная динамика.

Результатом регулярной работы с метриками являются управленческие решения:

- 1) ИТ решения: доработки образовательной платформы;
- 2) корректировка контента обучающих курсов под запрос целевой аудитории;
- 3) организация работы с проверяющими преподавателями для корректировки обратной связи по практическим и домашним заданиям;
- 4) внедрение дополнительной активности на курсах (вебинары, мастер-классы, организация мастерских (воркшопов)).

Постоянная работа с индексом NPS помогает компании Скилбокс удерживать его на уровне 57–60 %, сохранять уровень лояльности слушателей, что является показателем бизнес эффективности. Она непосредственно складывается из оптимизации финансов и из эффективного управления профессорско-преподавательским составом.

Следующие шаги позволили автору оптимизировать расходы на сопровождение образовательных курсов:

1. Анализ комментариев и отзывов от слушателей на платформе. Для оптимальной работы с комментариями и отзывами компания Скилбокс подразделяет их на две группы:
 - позитивные комментарии;
 - негативные комментарии, одна группа из которых правится в режиме реального времени «быстрые правки», а вторая откладывается на долгосрочную перспективу.

Хорошим показателем работы с отзывами и комментариями является падение группы «быстрые правки» и увеличение числа позитивных комментариев.

2. Нематериальная мотивация профессорско-преподавательского состава. Зависимость нематериальной мотивации профессорско-преподавательского состава на качество их работы и успехи обучающихся рассмотрели Ключев А.В., Ляшко С.В., Гегер А.Э. (2021). Они нашли способ улучшить систему управления образовательной организации путем поощрения преподавателей.[8] Признание заслуг и уважение коллектива является одним из основных скрытых мотиваторов к труду наряду с материальной мотивацией. Компания Скилбокс применяет нематериальную мотивацию в своей работе, учредив рейтинг преподавателей и премию «Преподаватель года». Рейтинг учитывает количественные показатели работы преподавателей за год: количество проверенных практических работ, скорость



проверки работ за 24 часа, CSAT преподавателя. Для анализа показателей работы преподавателей и составление их рейтинга также применяются тепловые карты. В них анализируется высокий процент проверки работ в 24 часа. Ежедневно выгружаются данные о находящихся на проверке практических работах, где цветом выделяются работы, срок проверки которых находится в ожидании более 12 часов. Эта информация дублируется в личном кабинете преподавателя, где эти работы подсвечиваются желтой молнией. Если работа висит более 24 часов, то – красной. С помощью рейтинга Скилбок обеспечивает прозрачность работы преподавателей, а их успехи вдохновляют других коллег. На основе рейтинга и качественных показателей работы преподавателей раз в год проводится премия «Преподаватель года». Такое поощрение позволяет управлять более 500 преподавателей и повышать их мотивацию к работе.

В результате исследования пришли к следующим выводам:

1. Взаимосвязь бизнес метрик и любые корректировки, проводимые в образовательных курсах, приводят к изменению настроений у слушателей, что ведет за собой последующие доработки и улучшение образовательного продукта;
2. Для получения обратной связи о проблемах потребителя необходимо создавать актуальные опросники под каждую конкретную задачу;
3. Периодичность проведения анализа данных один раз в неделю позволяет принимать быстрые управленческие решения;
4. Тепловые карты зарекомендовали себя наиболее эффективным способом анализа больших данных.

Литература

1. *Reichheld, Frederick F.* One Number You Need to Grow (англ.) // Harvard Business Review : magazine. – 2003 <https://hbr.org/2003/12/the-one-number-you-need-to-grow>
2. *Leland Wilkinson and Michael Friendly.* The History of the Cluster Heat Map (англ.) // The American Statistician. – 2009.
3. *Махров, И.Н.* Тепловая карта общественного здоровья / И.Н. Махров // . – 2021. – № 6(46). – С. 74–75. – EDN HDRSNJ.
4. *Царев, Ю.В.* Анализ совершаемых преступлений в административно-территориальных единицах Англии с помощью тепловых карт / Ю.В. Царев, Д.Д. Евстигнеев, А.В. Яфизова // – 2022. – Т. 3, № 6(51). – С. 265–271. – EDN FGBTLK.
5. *Нохрин, Д.Ю.* Использование тепловых карт для визуализации экспертной оценки вкуса продукции / Д.Ю. Нохрин, Л.В. Уфимцева, М.С. Лезин // Плодоводство и виноградарство Юга России. – 2021. – № 71(5). – С. 207–218. – DOI 10.30679/2219-5335-2021-5-71-207-218. – EDN TJQZEQ.
6. *Чернова, Е.А.* Разработка алгоритма адаптивного расположения элементов веб-страницы на основе тепловых карт / Е.А. Чернова, Е.И. Матюшенков // Молодые исследователи: взгляд в прошлое, настоящее, будущее: материалы III Международной студенческой научно-практической конференции, Смоленск, 30 ноября 2022 года. – Смоленск: Смоленский филиал федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Российский экономический университет имени Г.В. Плеханова», 2022. – С. 165–169. – EDN DFRVJI.

7. *Фиофанова, О.А.* Методы анализа образовательных данных и способы их применения в педагогической и управленческой практике в сфере образования / О.А. Фиофанова // – 2020. – № 1. – С. 117–127. – EDN MTLOOR.
8. *Клюев, А.В.* Возможности применения смешанных методов исследования в системе управления современным вуза (по материалам социологического исследования) / А.В. Клюев, С.В. Ляшко, А.Э. Гегер // Управленческое консультирование. – 2021. – № 1(145). – С. 77–87. – DOI 10.22394/1726-1139-2021-1-77-87. – EDN AYMLSH.
9. *Пожарицкий, Е.Д.* Современные методы измерения клиентской лояльности / Е.Д. Пожарицкий // . – 2019. – № 1(5). – С. 68–71. – EDN ОККТАС.
10. *Сергеева, Н.В.* Тепловые карты как инструмент управления покупательским поведением / Н.В. Сергеева // Всероссийская конференция молодых исследователей с международным участием «Социально-гуманитарные проблемы образования и профессиональной самореализации» (Социальный инженер-2020) : сборник материалов Всероссийской конференции молодых исследователей с международным участием, Москва, 07–10 декабря 2020 года. Том Часть 5. – Москва: Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования “Российский государственный университет имени А.Н. Косыгина (Технологии. Дизайн. Искусство)”, 2020. – С. 127–131. – EDN QYCRRA.
11. *Клейман, Л.А.* Повышение надежности устройств беспроводных систем управления на основе метода анализа тепловых карт / Л.А. Клейман, В.И. Фрейман // XIII Всероссийское совещание по проблемам управления ВСПУ-2019 : Сборник трудов XIII Всероссийского совещания по проблемам управления ВСПУ-2019, Москва, 17–20 июня 2019 года / Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН. – Москва: Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, 2019. – С. 2866–2873. – DOI 10.25728/vspru.2019.2866. – EDN UJAIBK.
12. *Махров, И.Н.* Тепловая карта общественного здоровья / И.Н. Махров // . – 2021. – № 6(46). – С. 74–75. – EDN HDRSNJ.
13. *Кириллов, А.А.* Моделирование бизнес-процессов центра дополнительного образования с целью совершенствования его процессов обучения и производства / А.А. Кириллов, О.В. Сизова // Сборник научных трудов вузов России “Проблемы экономики, финансов и управления производством”. – 2021. – № 48. – С. 145–149. – EDN JNJBFH.
14. *Афонасова, М.А.* Проблемы обеспечения баланса взаимных интересов в процессе интеграции образования и бизнеса / М.А. Афонасова // Современное образование: интеграция образования, науки, бизнеса и власти : Материалы международной научно-методической конференции. В 2-х частях, Томск, 27–28 января 2022 года. Том Часть 2. – Томск: Томский государственный университет систем управления и радиоэлектроники, 2022. – С. 182–185. – EDN HSPZVP.
15. *Котов, В.С.* Оптимизация бизнес-процессов в экономике и образовании / В.С. Котов, Т.Д. Самойлова // II Открытые экономические чтения студентов, посвященные памяти Онищенко Дмитрия Ивановича : материалы II региональной межвузовской научно-практической конференции студентов и магистрантов, проводимой в рамках празднования 56-летия Липецкого филиала Финуниверситета, Липецк, 07 декабря 2021 года. – Липецк: Издательский дом «Державинский», 2022. – С. 223–226. – EDN WAKKDE.



Using Heat Maps to Optimize Educational Business Processes in The Skill Box Company

Anastasia D. Dolgikh*

Skillbox LLC, National Research Technological University “MISIS” (MISIS)

Moscow, Russian Federation

ORCID: <https://orcid.org/0009-0005-9545-2177>

e-mail: addolgikh@gmail.com

The article addresses data analysis methods for solving the problem of choosing the best solution in order to optimize resources using the example of Skillbox company. The problems of choosing information resources are considered and solved, taking into account market offers. The author considers various methods of data analysis with an emphasis on minimizing the resources required for their processing.

In the article, the author describes the practical application of the “Digital Assistant” program, which was developed by the Skillbox company to measure product metrics and analyze the behavior of students. Using the big data analysis methods described by the author, ways to optimize educational business processes that lead to an increase in the profitability of educational courses are considered. Heat maps are considered as one of the main ways to analyze big data, and their practical application is described. The author describes the relationship between business metrics and changes occurring with the educational product and suggests methods and frequency of surveys and feedback processing about the educational path of students.

Keywords: heat maps, profit increase, resource optimization, data analysis, payback conditions, resource assessment, business processes, educational courses, product metrics, educational metrics.

For citation:

Dolgikh A.D. Using Heat Maps to Optimize Educational Business Processes in The Skill Box Company. *Modelirovanie i analiz dannykh = Modelling and Data Analysis*, 2023. Vol. 13, no. 3, pp. 144–157. DOI: 10.17759/mda.2023130310 (In Russ., abstr. in Engl.).

References

1. Reichheld, Frederick F. One Number You Need to Grow (angl.) // Harvard Business Review : magazine. – 2003 <https://hbr.org/2003/12/the-one-number-you-need-to-grow>
2. Leland Wilkinson and Michael Friendly. The History of the Cluster Heat Map (angl.) // The American Statistician. – 2009.
3. Makhrov, I.N. Teplovaya karta obshchestvennogo zdorov'ya / I.N. Makhrov // . – 2021. – № 6(46). – S. 74–75. – EDN HDRSNJ.

***Anastasia D. Dolgikh**, Head of department, Skillbox LLC, National Research Technological University “MISIS” (MISIS), Moscow, Russia, ORCID: <https://orcid.org/0009-0005-9545-2177>, e-mail: addolgikh@gmail.com



4. Tsarev, YU.V. Analiz sovershaemykh prestuplenii v administrativno-territorial'nykh edinitsakh Anglii s pomoshch'yu teplovykh kart / YU.V. Tsarev, D.D. Evstigneev, A.V. Yafizova // – 2022. – T. 3, № 6(51). – S. 265–271. – EDN FGBTLK.
5. Nokhrin, D. YU. Ispol'zovanie teplovykh kart dlya vizualizatsii ehkspertnoi otsenki vkusa produktsii / D. YU. Nokhrin, L.V. Ufimtseva, M.S. Lezin // Plodovodstvo i vinogradarstvo Yuga Rossii. – 2021. – № 71(5). – S. 207–218. – DOI 10.30679/2219-5335-2021-5-71-207-218. – EDN TJQZEQ.
6. Chernova, E.A. Razrabotka algoritma adaptivnogo raspolozheniya ehlementov veb-stranitsy na osnove teplovykh kart / E.A. Chernova, E.I. Matyushenkov // Molodye issledovateli: vzglyad v proshloe, nastoyashchee, budushchee: materialy III Mezhdunarodnoi studencheskoi nauchno-prakticheskoi konferentsii, Smolensk, 30 noyabrya 2022 goda. – Smolensk: Smolenskii filial federal'nogo gosudarstvennogo byudzhethnogo obrazovatel'nogo uchrezhdeniya vysshego obrazovaniya «Rossiiskii ehkonomicheskii universitet imeni G.V. PlekhanovA», 2022. – S. 165–169. – EDN DFRVJI.
7. Fiofanova, O.A. Metody analiza obrazovatel'nykh dannyyh i sposoby ikh primeneniya v pedagogicheskoi i upravlencheskoi praktike v sfere obrazovaniya / O.A. Fiofanova // – 2020. – № 1. – S. 117–127. – EDN MTLOOR.
8. Klyuev, A.V. Vozmozhnosti primeneniya smeshannykh metodov issledovaniya v sisteme upravleniya sovremennogo vuza (po materialam sotsiologicheskogo issledovaniya) / A.V. Klyuev, S.V. Lyashko, A. EH. Geger // Upravlencheskoe konsul'tirovanie. – 2021. – № 1(145). – S. 77–87. – DOI 10.22394/1726-1139-2021-1-77-87. – EDN AYMLSH.
9. Pozharitskii, E.D. Sovremennye metody izmereniya klientskoi loyal'nosti / E.D. Pozharitskii // – 2019. – № 1(5). – S. 68–71. – EDN OKKTAC.
10. Sergeeva, N.V. Teplovye karty kak instrument upravleniya pokupatel'skim povedeniem / N.V. Sergeeva // Vserossiiskaya konferentsiya molodykh issledovatelei s mezhdunarodnym uchastiem «Sotsial'no-gumanitarnye problemy obrazovaniya i professional'noi samorealizatsii» (Sotsial'nyi inzhener-2020) : sbornik materialov Vserossiiskoi konferentsii molodykh issledovatelei s mezhdunarodnym uchastiem, Moskva, 07–10 dekabrya 2020 goda. Tom Chast' 5. – Moskva: Federal'noe gosudarstvennoe byudzhethnoe obrazovatel'noe uchrezhdenie vysshego obrazovaniya “Rossiiskii gosudarstvennyi universitet imeni A.N. Kosygina (Tekhnologii. Dizain. Iskusstvo)”, 2020. – S. 127–131. – EDN QYCRRA.
11. Kleiman, L.A. Povyshenie nadezhnosti ustroystv besprovodnykh sistem upravleniya na osnove metoda analiza teplovykh kart / L.A. Kleiman, V.I. Freiman // XIII Vserossiiskoe soveshchanie po problemam upravleniya VSPU-2019 : Sbornik trudov XIII Vserossiiskogo soveshchaniya po problemam upravleniya VSPU-2019, Moskva, 17–20 iyunya 2019 goda / Institut problem upravleniya im. V.A. Trapeznikova RAN. – Moskva: Institut problem upravleniya im. V.A. Trapeznikova RAN, 2019. – S. 2866–2873. – DOI 10.25728/vspu.2019.2866. – EDN UJAIBK.
12. Makhrov, I.N. Teplovaya karta obshchestvennogo zdorov'ya / I.N. Makhrov // – 2021. – № 6(46). – S. 74–75. – EDN HDRSNJ.
13. Kirillov, A.A. Modelirovanie biznes-protsessov tsentra dopolnitel'nogo obrazovaniya s tsel'yu sovershenstvovaniya ego protsessov obucheniya i proizvodstva / A.A. Kirillov, O.V. Sizova // Sbornik nauchnykh trudov vuzov Rossii “Problemy ehkonomiki, finansov i upravleniya proizvodstvom”. – 2021. – № 48. – S. 145–149. – EDN JNJBFH.
14. Afonasova, M.A. Problemy obespecheniya balansa vzaimnykh interesov v protsesse integratsii obrazovaniya i biznesa / M.A. Afonasova // Sovremennoe obrazovanie: integratsiya obrazovaniya, nauki, biznesa i vlasti : Materialy mezhdunarodnoi nauchno-metodicheskoi konferentsii. V 2-kh chastyakh, Tomsk, 27–28 yanvarya 2022 goda. Tom Chast' 2. – Tomsk: Tomskii gosudarstvennyi universitet sistem upravleniya i radioehlektroniki, 2022. – S. 182–185. – EDN HSPZVP.



15. Kotov, V.S. Optimizatsiya biznes-protsessov v ehkonomike i obrazovanii / V.S. Kotov, T.D. Samoilova // II Otkrytye ehkonomicheskie chteniya studentov, posvyashchennye pamyati Onishchenko Dmitriya Ivanovicha : materialy II regional'noi mezhvuzovskoi nauchno-prakticheskoi konferentsii studentov i magistrantov, provodimoi v ramkakh prazdnovaniya 56-letiya Lipetskogo filiala Finuniversiteta, Lipetsk, 07 dekabrya 2021 goda. – Lipetsk: Izdatel'skii dom «Derzhavinski», 2022. – S. 223–226. – EDN WAKKDE.

Получена 31.08.2023

Принята в печать 09.09.2023

Received 31.08.2023

Accepted 09.09.2023

Моделирование и анализ данных 2023. Том 13. № 3.
Научный журнал

Издаётся с 2011 года

Учредитель
Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Московский государственный психолого-педагогический университет»

Адрес редколлегии:
г. Москва, ул. Сретенка, 29, факультет информационных технологий
Тел.: +7 (499) 167-66-74
E-mail: mad.mgppu@gmail.com

Журнал зарегистрирован в Государственном комитете РФ по печати.
Свидетельство о регистрации средств массовой информации
ПИ № ФС77-66444 от 14 июля 2016 года

ISSN: 2219-3758
ISSN: 2311-9454 (online)

Подписано в печать: 26.09.2023.
Формат: 70*100/16. Гарнитура Times.
Усл. печ. п. 9,8. Усл.-изд. л. 8,7.
Тираж 500 экз.